

E

Expert
Oplossingen

Uitgewerkte oplossingen bij het werkboek. Voor de leerkracht.

16-18+ jaar | 49 hoofdstukken | schaal 6–9

Brecht Corbeel · schoolium.me

StemExpert Expert — Oplossingen

Auteur: Brecht Corbeel
Uitgave: schoolium.me
Reeks: StemExpert — STEM in drie niveaus (Fundamental, Intermediate, Expert)

Voor wie: Voor wie Intermediate beheerst (derde graad STEM-richtingen, doorstroom naar ingenieurs- en wetenschapsopleidingen). Afgeleiden, integralen, differentiaalvergelijkingen en statistiek worden het gereedschap; systemen worden gemodelleerd, gesimuleerd en geregeld.

Wiskunde op dit niveau: afgeleiden, integralen, differentiaalvergelijkingen (numeriek), vectoren en matrices, statistiek

Habitat-laag: Het brein van het station: een geïntegreerd, zelfsturend systeem met PID-regeling, energiebeheer, een sensornetwerk, een digitale tweeling en AI-voorspellingen, ontworpen volgens het V-model.

Dit boek hoort bij een handboek, een werkboek en een oplossingenboek per niveau, en bij de offline website van StemExpert. De StemExpert-schaal (1 tot 9) loopt over de drie niveaus heen. Druk af zonder schaling (100 %).

Inhoud

E1 · Wiskundige gereedschapskist

E1 Afgeleiden: verandering meten 5
E2 Optimaliseren 16
E3 Integralen: ophopen 25
E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie 33
E5 Vectoren en matrices 45
E6 Statistiek en meetonzekerheid 58
E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren 67

E2 · Mechanica en constructies

E8 Beweging in twee dimensies 77
E9 Impuls en botsingen 88
E10 Rotatie 98
E11 Trillingen en resonantie 107
E12 Sterkteleer 119
E13 Vakwerken en constructieanalyse 128

E3 · Thermodynamica en stroming

E14 Gassen en de gaswetten 139
E15 De hoofdwetten van de thermodynamica 150
E16 Warmtepompen en koelen 163
E17 Warmteoverdracht kwantitatief 174
E18 Stroming van vloeistoffen en gassen 179

E4 · Elektrotechniek en elektronica

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie 184
E20 Wisselstroom 197
E21 Filters en signaalverwerking 208
E22 Operationele versterkers 213
E23 Digitale logica 218
E24 Vermogenselektronica en elektrische machines 223

E5 · Chemie en materialen

E25 Thermochemie en reactiesnelheid 228
E26 Chemisch evenwicht 232
E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse 236
E28 Materiaalkunde 240

E6 · Life sciences en bio-engineering

E29 DNA, genen en eiwitten 244
E30 Biotechnologie en genetische technieken 248
E31 Bioprocestechniek 252
E32 Ecologische modellen 256
E33 Het lichaam als regelsysteem 261

E7 · Informatica

E34 Algoritmen en complexiteit 269

E35 Objectgericht programmeren en softwareontwerp 273
E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen 276
E37 Embedded systemen en IoT 279

E8 · Regeltechniek

E38 Dynamische systemen modelleren 283
E39 PID-regeling 287
E40 Sensorfusie en schatten 294

E9 · Data science en AI

E41 Van data naar model: regressie 298
E42 Classificatie en clustering 302
E43 Neurale netwerken 306
E44 AI verantwoord inzetten 310

E10 · Systems engineering

E45 Systems engineering en het V-model 314
E46 Betrouwbaarheid en risico 317
E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse 321
E48 Technisch communiceren en projectmanagement 326

E11 · Habitat E: het brein van het station

E49 Integratieproject: het brein van het station 331

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 1

Afgeleiden: verandering meten

Van de helling tussen twee meetpunten naar de snelheid van verandering op één ogenblik

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

5× oefenen · 8× toepassen · 4× uitdagen · ± 402 min

W Wiskundig modelleren · K Krachten, beweging en constructies



Om acht uur is de meetkas nog koud; twee uur later warmt ze vijf graden per uur op.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

1.1 Gemiddelde veranderingen, met eenheid

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Bereken telkens de gemiddelde veranderingssnelheid, met eenheid, en zeg in één zin wat het teken betekent.

a Het reservoir van de meetkas bevat maandag om 8:00 27,4 L en donderdag om 8:00 22,0 L. Geef het resultaat in L/dag en in mL/h.

✓ $\frac{22{,}0-27{,}4}{3\ \text{dag}} = -1{,}8\ \text{L/dag} = -1800/24 = -75\ \text{mL/h}$. Negatief: het reservoir raakt leeg (de planten drinken en er verdampt water).

b De batterij van de module (3,07 kWh) staat op een donkere winteravond om 16:00 op 74 % en om 20:00 op 48 %. Geef het resultaat in %/h en in W.

✓ $\frac{48-74}{4\ \text{h}} = -6{,}5\ \%/\text{h}$; in energie $0{,}065 \cdot 3{,}07\ \text{kWh} = 0{,}20\ \text{kWh}$ per uur, dus gemiddeld ongeveer 200 W uit de batterij (lampen 190 W en de basis). Negatief: de batterij ontlaadt.

c De kas is om 10:00 20,5 °C en om 11:00 25,0 °C. Geef het resultaat in °C/h en in °C/min.

✓ $\frac{25{,}0-20{,}5}{1\,\text{h}} = 4{,}5\,^\circ\text{C/h} = 0{,}075\,^\circ\text{C/min}$. Positief: de kas warmt op.

d Een NTC heeft bij 20 °C 12,54 kΩ en bij 30 °C 8,04 kΩ. Geef het resultaat in kΩ/K.

✓ $\frac{8{,}04-12{,}54}{10\,\text{K}} = -0{,}450\,\text{k}\Omega/\text{K}$. Negatief: een NTC heeft een negatieve temperatuurcoëfficiënt. Ter vergelijking: de afgeleide bij 25 °C is $-0{,}444\,\text{k}\Omega/\text{K}$.

1.2 Afleiden met de rekenregels

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Leid af naar de veranderlijke die in de functie staat. Vereenvoudig waar het kan.

a $f(x) = 4x^3 - 2x + 7$ en $g(t) = \dfrac{5}{t^2}$

✓ $f'(x) = 12x^2 - 2$; $g(t) = 5t^{-2}$ geeft $g'(t) = -10t^{-3} = -\dfrac{10}{t^3}$.

b $h(x) = \sqrt{x}\,(x+1)$

✓ Product: $h' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) + \sqrt{x} = \dfrac{x+1+2x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$. (Of eerst uitwerken: $x^{3/2} + x^{1/2}$ geeft $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, hetzelfde.)

c $u(t) = 12\,\text{e}^{-t/4}$ en $y(t) = \sin(100\pi t)$

✓ $u'(t) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\text{e}^{-t/4} = -3\,\text{e}^{-t/4}$; $y'(t) = 100\pi\cos(100\pi t)$ (ketting).

d $R(T) = R_0\,(1 + \alpha T)$ met constanten R_0 en α

✓ $R'(T) = R_0\,\alpha$: een constante helling, want R is lineair in T.

e $q(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

✓ Quotiënt: $q' = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

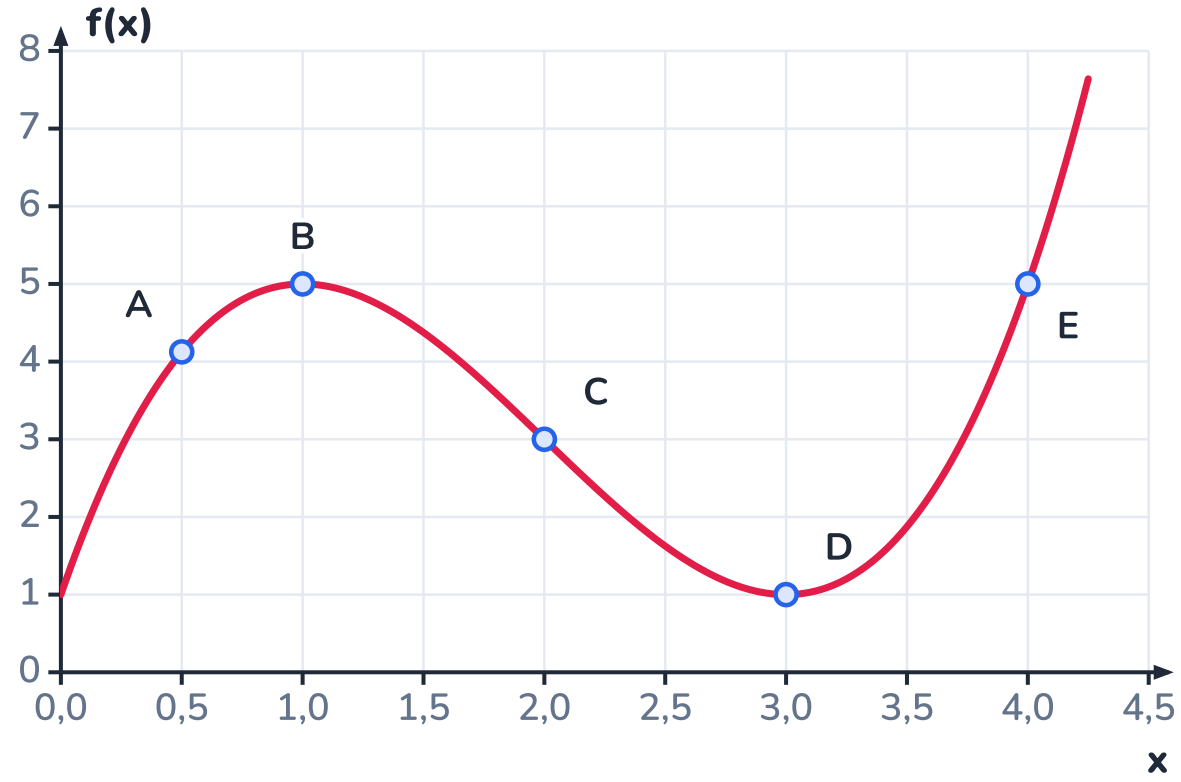
f $P(R) = \dfrac{U^2 R}{(R+r)^2}$ met constanten U en r

✓ Quotiënt en ketting: $P' = U^2\dfrac{(R+r)^2 - R\cdot 2(R+r)}{(R+r)^4} = \dfrac{U^2\,(r-R)}{(R+r)^3}$. Nul bij $R = r$: daar is het vermogen maximaal (hoofdstuk 2).

1.3 Functie, helling en bolling

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Lees de grafiek. Je hoeft geen formule te kennen.



De grafiek van een functie f met vijf gemarkeerde punten A tot E.

a Vul voor elk punt het teken van f' en van f'' in (+, – of 0).

✓ A: f' +, f'' – (stijgt, bol). B: f' 0, f'' – (maximum). C: f' –, f'' 0 (buigpunt). D: f' 0, f'' + (minimum). E: f' +, f'' + (stijgt, hol).

b In welk punt daalt de functie het snelst? Hoe zie je dat, en wat geldt daar voor f''?

✓ In C: daar is de raaklijn het steilst naar beneden. f' is daar minimaal, dus de afgeleide van f' (dat is f'') is nul: een buigpunt.

c Schets onder de grafiek het verloop van f' (alleen de vorm: waar positief, negatief, nul, maximaal of minimaal).

✓ f' is een dalparabool: positief links van B, nul in B, negatief tussen B en D met het minimum in C, nul in D, positief rechts van D en stijgend. (De functie is $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, dus $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.)

1.4 Een raaklijn opstellen

Oefenen · 6 · Rekenen · 12 min

Een steen valt vanuit stilstand: $s(t) = 4{,}905\,t^2$ (s in m, t in s).

a Bereken de valsnelheid op t = 1,5 s en stel de vergelijking van de raaklijn aan de (s,t)-grafiek op in dat punt.

✓ $v = s'(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715\,\text{m/s}$ en $s(1{,}5) = 4{,}905 \cdot 2{,}25 = 11{,}036\,\text{m}$. Raaklijn: $s = 11{,}036 + 14{,}715\,(t - 1{,}5)$, of $s = 14{,}715\,t - 11{,}036$.

b Waar snijdt die raaklijn de t-as? Wat betekent de raaklijn fysisch?

✓ $s = 0$ bij $t = 11{,}036 / 14{,}715 = 0{,}75\,\text{s}$, precies de helft van 1,5 s (dat geldt voor elke parabool ct^2). Fysisch: de plaats die de steen zou hebben als hij vanaf $t = 1{,}5\,\text{s}$ met constante snelheid verder ging (of ervoor zo gekomen was).

1.5 Eenheden van afgeleiden

Oefenen · 6 · Begrijpen · 10 min

Een afgeleide heeft altijd een eenheid: die van de teller gedeeld door die van de noemer.

Geef de SI-eenheid (of een gebruikelijke) en een naam: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ (E in J), $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ (q in C), $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ (V in L, t in min), $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}h$ (druk tegenover diepte in water), $\mathrm{d}P/\mathrm{d}U$ (P in W, U in V).

J/s = W (vermogen); C/s = A (stroom); L/min (debiet); m/s² (versnelling); Pa/m = N/m³ (in water $\rho g \approx 9{,}8\,\mathrm{kPa/m}$); W/V = A (bij $P = U^2/R$ is $\mathrm{d}P/\mathrm{d}U = 2U/R$, twee keer de stroom).

Toepassen Toepassen

meerdere stappen, in een context

1.6 De afgeleide van een wortel, uit de definitie

Toepassen · 7 · Analyseren · 15 min

De machtsregel werd hier alleen voor natuurlijke n bewezen. Controleer ze voor $n = \frac{1}{2}$.

a Bereken $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ voor $x > 0$. Tip: vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$.

$\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Machtsregel: $\frac{1}{2}x^{-1/2}$. Klopt.

b Waarom bestaat de afgeleide niet in $x = 0$? Wat betekent dat voor de grafiek?

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ groeit onbeperkt als $x \to 0$: de raaklijn wordt verticaal (oneindige helling). De grafiek vertrekt in de oorsprong loodrecht omhoog.

1.7 Het kasdak met een kubisch profiel

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een eenvoudiger glad profiel voor het schuifpaneel is $x(t) = s\,(3u^2 - 2u^3)$ met $u = t/T$, $s = 0{,}60\,\mathrm{m}$, $T = 7{,}0\,\mathrm{s}$.

a Controleer dat x(0) = 0, x(T) = s en dat de snelheid in beide uiteinden nul is.

$x(0) = 0$, $x(T) = s(3-2) = s$. $v = \frac{s}{T}(6u - 6u^2) = \frac{6s}{T}u(1-u)$: nul in $u = 0$ en $u = 1$.

b Bereken v(t) en a(t), de topsnelheid en de versnelling bij de start.

$v_{\max}$ bij $u = \frac{1}{2}$: $\frac{6s}{4T} = 1{,}5 \cdot \frac{0{,}60}{7{,}0} = 0{,}1286\,\mathrm{m/s}$. $a = \frac{6s}{T^2}(1-2u)$, bij de start $\frac{6\cdot 0{,}60}{49} = 0{,}0735\,\mathrm{m/s^2}$.

c Waarom verkiest een ontwerper toch het vijfdegraadsprofiel uit het handboek?

De versnelling springt bij de start van 0 naar 0,0735 m/s² en op het eind van −0,0735 naar 0: net als bij het trapeziumprofiel een oneindige schok (een tik). Het vijfdegraadsprofiel zet ook a(0) = a(T) = 0: de schok blijft eindig.

1.8 Laadstroom van een condensator

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

In hoofdstuk 5 van Intermediate laadde een condensator van 470 µF via 22 kΩ op tot 5,0 V: $u(t) = 5{,}0\,(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$.

a Bereken τ en leid de stroom i(t) = C du/dt af. Hoe groot is i(0) en i(τ)?

✓ $\tau = 22\,000 \cdot 470 \cdot 10^{-6} = 10{,}34\,\text{s}$. $i = C \cdot \frac{5{,}0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{5{,}0}{R} e^{-t/\tau}$; $i(0) = 5{,}0/22\,000 = 227\,\mu\text{A}$, $i(\tau) = i(0)/e = 83{,}6\,\mu\text{A}$.

b Na hoeveel seconden is de stroom kleiner dan 1 % van de beginwaarde?

✓ $e^{-t/\tau} = 0{,}01 \Rightarrow t = \tau \ln 100 = 4{,}61\,\tau = 47{,}6\,\text{s}$.

1.9 Van meterstand naar vermogen

Toepassen · 7 · Analyseren · 20 min

De energiemeter van de klimaatmodule wordt elk kwartier uitgelezen op een zomerochtend.

tijd	5:30	5:45	6:00	6:15	6:30	6:45	7:00	7:15
meterstand (Wh)	18 342,0	18 344,5	18 347,0	18 399,0	18 449,0	18 499,0	18 549,0	18 601,0

a Bereken het gemiddelde vermogen in elk kwartier (in W).

✓ Per kwartier (ΔE / 0,25 h): 10 W, 10 W, 208 W, 200 W, 200 W, 200 W, 208 W.

b Wat gebeurde er om 6:00? En waarom zijn het kwartier van 6:00 en dat van 7:00 2 Wh 'zwaarder'? Gebruik het budget van hoofdstuk 20 van Intermediate.

✓ Om 6:00 gaan de groeilampen aan (2 × 95 W = 190 W): het vermogen springt van 10 W naar ongeveer 200 W. De pomp van de waterkringloop (12 W) draait 10 minuten per uur, vanaf het hele uur: 12 W × 1/6 h = 2 Wh extra in het kwartier van 6:00 en van 7:00.

c Bereken de centrale differentie in 6:00 (van 5:45 tot 6:15). Waarom is dat hier een slechte schatting van het vermogen om 6:00?

✓ (18 399,0 − 18 344,5) / 0,5 h = 109 W: een gemiddelde van 'lampen uit' en 'lampen aan'. Bij een sprong bestaat de afgeleide niet; gebruik aan een schakelmoment een eenzijdige differentie, of meet vaker.

1.10 Snelheid uit gemeten plaatsen

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een afstandssensor meet om de 0,5 s de plaats van het schuifpaneel (afgerond op mm).

t (s)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
x (m)	0,000	0,002	0,014	0,042	0,087	0,148	0,221	0,300

t (s)	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
x (m)	0,379	0,452	0,513	0,558	0,586	0,598	0,600

a Schat de snelheid op t = 2,0 s met een voorwaartse, een achterwaartse en een centrale differentie.

✓ Voorwaarts (0,148 − 0,087)/0,5 = 0,122 m/s; achterwaarts (0,087 − 0,042)/0,5 = 0,090 m/s; centraal (0,148 − 0,042)/1,0 = 0,106 m/s.

b Het paneel volgt het vijfdegraadsprofiel met $s = 0{,}60\,\text{m}$ en $T = 7{,}0\,\text{s}$. Bereken de echte snelheid op 2,0 s en vergelijk.

✓ $u = 2/7$: $v = \frac{30 \cdot 0{,}60}{7} u^2(1-u)^2 = 0{,}1071\,\text{m/s}$. De centrale differentie zit er het dichtst bij; voorwaarts is te groot en achterwaarts te klein, omdat het paneel op dat moment nog versnelt.

c Schat de versnelling op t = 1,0 s en op t = 3,5 s met $\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2}$. Vergelijk met het model.

Op 1,0 s: 0,064 m/s² (model 0,064 m/s²); op 3,5 s: 0,000 m/s² (model 0). De afronding op 1 mm geeft bij h = 0,5 s al een onzekerheid van enkele mm/s² op a: een tweede afgeleide uit meetdata is nog gevoeliger voor ruis.

1.11 Een functie afgeleide() in Python

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Je schrijft een herbruikbare functie voor de centrale differentie en test ze.

a Schrijf een functie afgeleide(f, x, h) die de centrale differentie teruggeeft, met een standaardwaarde voor h.

Zie de code hieronder: de functie staat bovenaan.

```
import math


def afgeleide(f, x, h=1e-5):
    """Centrale differentie: benadert f'(x) met een fout van orde h**2."""
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
```

b Test ze met f = math.sin in x = 1 (exact: cos 1) voor h = 10^{-1} tot 10^{-12}. Druk de fout af. Bij welke h is de fout het kleinst?

De testlus en haar echte uitvoer:

```
exact = math.cos(1.0)
for k in range(1, 13):
    h = 10.0 ** -k
    print("h = 1e-%02d   fout %.1e" % (k, abs(afgeleide(math.sin, 1.0, h) - exact)))
```

```
h = 1e-01   fout 9.0e-04
h = 1e-02   fout 9.0e-06
h = 1e-03   fout 9.0e-08
h = 1e-04   fout 9.0e-10
h = 1e-05   fout 1.1e-11
h = 1e-06   fout 2.8e-11
h = 1e-07   fout 1.9e-10
h = 1e-08   fout 2.6e-09
h = 1e-09   fout 3.0e-09
h = 1e-10   fout 5.8e-08
h = 1e-11   fout 1.2e-06
h = 1e-12   fout 1.2e-05
```

c Verklaar het verloop van de fout met twee oorzaken.

Tot h ≈ 10^{-5} daalt de fout met een factor 100 per stap (afbreekfout ~ $h^2/6 \cdot |f'''|$, tweede orde). Daaronder domineert de afrondingsfout ~ ε/h: de twee functiewaarden verschillen zo weinig dat hun verschil vooral uit afrondingsruis bestaat.

1.12 Habitat: de opwarmsnelheid van de meetkas

Toepassen · 7 · Habitat · 40 min

Het brein van het station krijgt de temperatuur van de meetkas om het kwartier (uit de voorbeeldreeks van de zonnige aprildag). Het dakraam moet open bij 28 °C.

tijd	8:00	8:15	8:30	8:45	9:00	9:15	9:30	9:45	10:00
T (°C)	11,1	12,1	13,0	14,4	15,5	16,8	17,9	19,3	20,7

tijd	10:15	10:30	10:45	11:00	11:15	11:30	11:45	12:00
T (°C)	21,8	22,8	24,0	24,9	25,9	26,8	27,7	28,7

a Bereken de opwarmsnelheid met een centrale differentie (h = 15 min) in elk tijdstip van 8:15 tot 11:45.

Met (T(t + 15 min) − T(t − 15 min)) / 0,5 h:

TIJD	DT/DT (°C/H)	TIJD	DT/DT (°C/H)
8:15	3,8	10:15	4,2
8:30	4,6	10:30	4,4
8:45	5,0	10:45	4,2
9:00	4,8	11:00	3,8
9:15	4,8	11:15	3,8
9:30	5,0	11:30	3,6
9:45	5,6	11:45	3,8
10:00	5,0		

b Wanneer warmt de kas het snelst op, en hoe snel? Vergelijk met de h = 5 min-schatting in het handboek.

Het grootste resultaat is 5,6 °C/h om 9:45. De stap van 15 minuten geeft minder ruis dan 5 minuten (daar piekte de schatting tot 7,2 °C/h); het model zegt 5,0 °C/h om 9:27.

c Voorspel om 11:00 met de raaklijn wanneer 28 °C bereikt wordt. Is dat te vroeg of te laat, en waarom?

$t_{28} = 11 + \frac{28-24{,}9}{3{,}80} = 11{,}82\,\text{h}$, om 11:49. Gemeten: 11:55. Te vroeg: de opwarmsnelheid daalt na 10 uur (de kromme is bol, $\ddot{T} < 0$), dus de raaklijn ligt boven de kromme.

d Schrijf een korte aanbeveling (5 à 8 regels) voor de software: welke stap, welke differentie, en welke regel voor het dakraam.

Bijvoorbeeld: log om de 5 minuten, bereken de opwarmsnelheid met een centrale differentie over 30 à 45 minuten (minder ruis dan 0,2 °C/h) voor de analyse achteraf, en een achterwaartse differentie over 15 à 30 minuten voor de sturing (de toekomst is onbekend). Regel: open het dakraam als T + 0,25 h · dT/dt boven 28 °C komt of T zelf boven 28 °C is; sluit onder 25 °C (hysterese blijft). Negeer een opwarmsnelheid boven 15 °C/h als sensorfout.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Berekening	Alle differenties correct, met eenheid; de tijden kloppen met het middelpunt van elke koorde.
Interpretatie	Maximum juist aangeduid; het verschil met de korte stap verklaard met ruis.
Voorspelling	Raaklijn correct gebruikt; te vroeg/te laat verklaard met de bolling (tweede afgeleide).
Aanbeveling	Stap en methode onderbouwd met ruis en afvlakken; een concrete, veilige regel voor het dakraam.

1.13 Wisselspanning over een condensator

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

Het net levert $u(t) = 325\sin(2\pi \cdot 50\,t)$ V (230 V effectief). Een ontstoringscondensator van 100 nF staat erover. Meet dit niet zelf: 230 V is levensgevaarlijk.

a Leid de stroom i(t) = C du/dt af en bereken de grootste stroom.

✓ $i = C \cdot 325 \cdot 2\pi \cdot 50\,\cos(2\pi \cdot 50\,t)$, dus $i_{\max} = 10^{-7} \cdot 325 \cdot 314{,}2 = 10{,}2\,\text{mA}$.

b Op welke ogenblikken is de stroom maximaal? Wat is dan de spanning? Wat betekent dat?

✓ Wanneer de cosinus ±1 is, dus wanneer de sinus nul is: de stroom is maximaal als de spanning door nul gaat (daar verandert ze het snelst). Stroom en spanning zijn een kwart periode (90°) verschoven: de basis van wisselstroom met condensatoren (hoofdstuk 7 en 20).

●●● Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

1.14 Bewijs de product- en de quotiëntregel

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

Het handboek maakte de productregel aannemelijk met een rechthoek. Maak het nu streng.

a Bewijs $(uv)' = u'v + uv'$ uit de definitie. Tip: tel $u(x+h)v(x)$ op en trek het weer af in de teller.

✓ $\dfrac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\,\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\,\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$. Neem de limiet: de breuken gaan naar $v'(x)$ en $u'(x)$, en $u(x+h) \to u(x)$. Dus $(uv)' = uv' + vu'$.

b Waar gebruik je dat u continu is? Waarom is een afleidbare functie altijd continu?

✓ In de stap $u(x+h) \to u(x)$. Een afleidbare functie is continu: $u(x+h) - u(x) = h \cdot \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \to 0 \cdot u'(x) = 0$.

c Leid de quotiëntregel af uit de productregel en de kettingregel, met $u/v = u \cdot v^{-1}$.

✓ $(v^{-1})' = -v^{-2}\,v'$ (ketting), dus $(uv^{-1})' = u'v^{-1} + u \cdot (-v^{-2}v') = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

1.15 De beste stap, uit een model van de fout

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

Voor de centrale differentie is de totale fout ongeveer $E(h) = \frac{M}{6}h^2 + \frac{\varepsilon F}{h}$, met $M = |f'''|$, $F = |f|$ en $\varepsilon = 2{,}2 \cdot 10^{-16}$.

a Zoek met de afgeleide de h waarvoor E(h) minimaal is, en de kleinste fout.

✓ $E'(h) = \frac{M}{3}h - \frac{\varepsilon F}{h^2} = 0 \Rightarrow h^* = \left(\frac{3\varepsilon F}{M}\right)^{1/3}$. Invullen: $E(h^*) = \frac{M}{6}h^{*2} + \frac{\varepsilon F}{h^*} = \frac{3}{2}\,\varepsilon F/h^*$ (want $\varepsilon F/h^* = \frac{M}{3}h^{*2}$), dus $E_{\min} = \frac{3}{2}(\varepsilon F)^{2/3}(M/3)^{1/3}$.

b Reken het uit voor $f = \mathrm{e}^x$ in $x = 1$ en vergelijk met de uitvoer van stapgrootte.py in het handboek.

✓ $F = M = \mathrm{e}$: $h^* = (3\varepsilon)^{1/3} = 8{,}7 \cdot 10^{-6}$, $E_{\min} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-10}$. De uitvoer toont het kleinste foutje bij $h = 10^{-5}$ à 10^{-7}, van de orde 10^{-11} à 10^{-10}. Klopt (het model geeft een orde van grootte; de afronding is toevallig en valt soms gunstig uit).

c Doe hetzelfde voor de voorwaartse differentie. Waarom haalt die veel minder cijfers?

✓ $E(h) = \frac{M}{2}h + \frac{\varepsilon F}{h}$ geeft $h^* = \sqrt{2\varepsilon F/M} = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ en $E_{\min} = \sqrt{2\varepsilon FM} \approx 5{,}7 \cdot 10^{-8}$. De afbreekfout daalt maar lineair, dus je moet h veel kleiner maken en verliest meer aan afronding: ongeveer 8 in plaats van 10 à 11 juiste cijfers.

1.16 Onderzoek: ruis, stap en de resolutie van een sensor

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 60 min

Je onderzoekt met een simulatie hoe groot de stap moet zijn om een opwarmsnelheid uit ruisende metingen te halen. Het model is een opwarming $T(t) = 20 + 6\sin(0{,}5\,t)$ (°C, t in uur), met gekende afgeleide.

a Schrijf een programma dat om de 5 minuten metingen met normale ruis (σ = 0,1 °C) maakt, voor verschillende k de centrale differentie berekent en de rms-fout tegenover de echte afgeleide afdrukt, samen met de formule σ/(√2 h).

Bijvoorbeeld:

```
import math
import random

random.seed(1)
SIGMA = 0.1                          # ruis van de sensor (graden Celsius)
STAP = 5 / 60                        # 5 minuten tussen twee metingen (uur)


def model(t):                        # een opwarming met gekende afgeleide (graden Celsius, t in uur)
    return 20 + 6 * math.sin(0.5 * t)


def echt(t):
    return 3 * math.cos(0.5 * t)


ts = [i * STAP for i in range(200)]
ys = [model(t) + random.gauss(0, SIGMA) for t in ts]
for k in (1, 2, 4, 6, 9, 12, 18, 24):
    fout = [((ys[i + k] - ys[i - k]) / (2 * k * STAP) - echt(ts[i])) ** 2 for i in range(k, len(ts) -
k)]
    print("h = %3d min   rms-fout %.3f  (ruis alleen: %.3f)"
          % (5 * k, math.sqrt(sum(fout) / len(fout)), SIGMA / (math.sqrt(2) * k * STAP)))
```

b Bij welke stap is de fout het kleinst? Verklaar het verloop met ruis en afvlakken.

Echte uitvoer van dat programma:

```
h =   5 min   rms-fout 0.827  (ruis alleen: 0.849)
h =  10 min   rms-fout 0.413  (ruis alleen: 0.424)
h =  20 min   rms-fout 0.206  (ruis alleen: 0.212)
h =  30 min   rms-fout 0.141  (ruis alleen: 0.141)
h =  45 min   rms-fout 0.099  (ruis alleen: 0.094)
h =  60 min   rms-fout 0.106  (ruis alleen: 0.071)
h =  90 min   rms-fout 0.194  (ruis alleen: 0.047)
h = 120 min   rms-fout 0.335  (ruis alleen: 0.035)
```

Bij kleine stap volgt de fout de ruisformule σ/(√2 h); bij grote stap groeit de afbreekfout $h^2/6 \cdot |T'''|$ (hier $|T'''| \le 6 \cdot 0{,}125 = 0{,}75$ °C/h³). Het minimum ligt waar beide ongeveer even groot zijn: hier bij h = 45 min (rms-fout 0,10 °C/h). Met een andere seed verschuift het wat, niet veel.

c De meetkas meet met een TMP36 op de 10-bits ADC van een Uno: stappen van ongeveer 0,49 °C. Wat gebeurt er met een centrale differentie over 5 minuten als de temperatuur 3 °C/h stijgt? Welke twee maatregelen stel je voor?

Bij 3 °C/h stijgt de temperatuur 0,25 °C in 5 minuten: minder dan één ADC-stap. De meting blijft een tijd gelijk en springt dan 0,49 °C: de differentie over 5 min wisselt tussen 0 en ±5,9 °C/h (0,49 °C / (1/12 h)). Maatregelen: veel metingen middelen (met wat ruis wordt de resolutie fijner, bv. 16 metingen per minuut), een sensor met een fijnere resolutie (een digitale sensor van 0,0625 °C, of de NTC-deler met 0,09 °C per stap), en een differentie over 30 minuten of meer.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Correcte simulatie en differenties, fout tegenover de echte afgeleide, reproduceerbaar (seed).
Analyse	Minimum gevonden en verklaard met $\sigma/(\sqrt{2}\,h)$ en de afbreekfout.
Resolutie	Kwantisatie correct ingeschat; maatregelen realistisch (middelen, betere sensor, grotere stap).

1.17 Ontwerp: een voorspellend dakraam

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 45 min

Het dakraam van de meetkas werkt nu met twee drempels (open boven 28 °C, dicht onder 25 °C). Het brein van het station kan de opwarmsnelheid berekenen en zou het raam eerder kunnen openen. Het raam heeft 8 s nodig, maar de kas reageert pas na enkele minuten.

a Ontwerp een regel die de opwarmsnelheid gebruikt. Schrijf ze als pseudocode of Python.

Bijvoorbeeld:

```
snelheid = (T[nu] - T[nu - 6]) / 0.5          # achterwaarts over 30 min, °C/h
voorspeld = T[nu] + 0.25 * snelheid            # een kwartier vooruit
if T[nu] > 28 or (voorspeld > 28 and snelheid > 1):
    open_raam()
elif T[nu] < 25 and voorspeld < 26:
    sluit_raam()
```

b Welke stap en welke differentie kies je? Wat doe je bij ontbrekende of onmogelijke metingen?

Achterwaarts, want de toekomst is onbekend; over 30 min (ruis op de snelheid dan ongeveer 0,2 à 0,3 °C/h). Ontbrekende meting: deel door het echte tijdsverschil of sla de beslissing over; onmogelijke waarden (buiten −30 tot 60 °C, sprong groter dan 2 °C in 5 min) negeren en alarm geven.

c Hoe voorkom je dat het raam bij een wolk die voorbijtrekt open en dicht klappert?

Hysterese behouden (sluiten pas onder 25 °C), een minimale tijd open (bv. 15 min), en de snelheid alleen gebruiken als ze een tijd positief blijft. Een wolk doet de snelheid even dalen, maar de temperatuur blijft boven 25 °C.

d Hoe test je je regel vóór hij in de echte kas draait?

Offline op opgenomen of gesimuleerde reeksen (de voorbeeldreeks, een bewolkte dag): tel de raambewegingen en de minuten boven 28 °C, vergelijk met de oude regel. Pas daarna in de kas, met de oude regel als vangnet.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Regel	Gebruikt een voorspelling T + Δt · dT/dt met een verantwoorde Δt; behoudt de veilige drempel van 28 °C.
Robuustheid	Achterwaartse differentie met voldoende stap; sensorfouten en ontbrekende data opgevangen.
Stabiliteit	Hysterese of minimale open-tijd tegen klapperen, met getallen.
Test	Simulatie op de voorbeeldreeks of opgenomen data vóór gebruik; criteria om te slagen.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 2

Optimaliseren

Het beste ontwerp vinden: waar de afgeleide nul is, op de rand, of numeriek

Uitgewerkte oplossingen bij de 16 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 8× toepassen · 4× uitdagen · ± 402 min

W Wiskundig modelleren · D Ontwerpen en maken



Hoe breed en hoe hoog moet een tank van 500 L zijn? Minder materiaal, minder vloer, door de deur: drie doelen tegelijk.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

2.1 Stationaire punten en hun aard

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Bepaal de stationaire punten en zeg van elk of het een lokaal maximum, lokaal minimum of geen extremum is.

a $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

✓ $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$: stationair in 1 en 2. $f''(x) = 12x - 18$: $f''(1) = -6 < 0$ maximum $f(1) = 2$; $f''(2) = 6 > 0$ minimum $f(2) = 1$.

b $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-t/2}$ voor $t \geq 0$ (bv. het verloop van een concentratie na een dosis)

✓ $g'(t) = \mathrm{e}^{-t/2} - \frac{t}{2}\mathrm{e}^{-t/2} = \mathrm{e}^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$: nul in $t = 2$. Links positief, rechts negatief: maximum $g(2) = 2/\mathrm{e} \approx 0{,}736$.

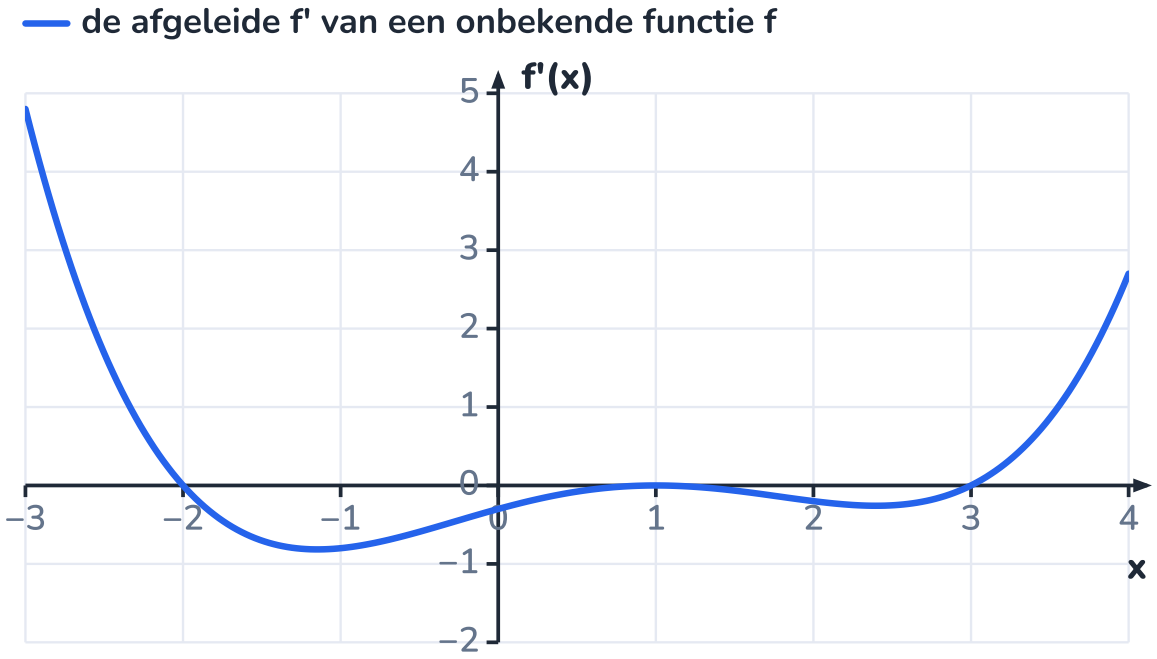
c $h(x) = x^4 - 4x^3$

✓ $h'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$: stationair in 0 en 3. In 0 wisselt het teken niet (negatief aan beide kanten): buigpunt met horizontale raaklijn. In 3 van $-$ naar $+$: minimum $h(3) = -27$.

2.2 Extrema lezen uit de grafiek van de afgeleide

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Een sensor geeft alleen de veranderingssnelheid door. De grafiek toont f' op het interval [−3, 4].



Je ziet niet f zelf, alleen haar afgeleide f'.

a Waar stijgt f, waar daalt ze?

✓ f stijgt waar f' > 0: van −3 tot −2 en van 3 tot 4. f daalt van −2 tot 3 (in x = 1 staat ze even stil).

b Waar heeft f een lokaal maximum, waar een lokaal minimum? Is x = 1 een extremum?

✓ Lokaal maximum in x = −2 (f' van + naar −), lokaal minimum in x = 3 (van − naar +). In x = 1 raakt f' de as zonder van teken te wisselen: geen extremum, maar een buigpunt met horizontale raaklijn.

c Waar heeft f ongeveer een buigpunt? Hoe zie je dat in deze grafiek?

✓ Een buigpunt van f ligt waar f' een extremum heeft (f'' = 0): bij x ≈ −1,1 (minimum van f'), x = 1 (maximum van f') en x ≈ 2,4 (minimum van f').

2.3 Het proefveld met één gevel

Oefenen · 6 · Rekenen · 10 min

Je hebt 20 m gaas voor drie zijden van een rechthoekig veld tegen een muur.

a Stel de doelfunctie op en bereken de afmetingen met de grootste oppervlakte.

✓ $A = x(20 - 2x)$, $A' = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5\,\text{m}$, dan $y = 10\,\text{m}$ en $A = 50\,\text{m}^2$.

b Hoeveel procent oppervlakte verlies je als je de diepte 10 % kleiner maakt dan optimaal?

✓ $x = 4{,}5$: $A = 4{,}5 \cdot 11 = 49{,}5\,\text{m}^2$, dus 1 % minder. Een vlak optimum: 10 % afwijking kost 1 %.

2.4 Extrema op een gesloten interval

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 12 min

Bepaal het globale maximum en minimum van $f(x) = x^3 - 3x$ op $[-2, 3]$.

a Zoek alle kandidaten en vergelijk hun waarden.

✓ $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Waarden: $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$. Globaal maximum 18 in $x = 3$ (rand); globaal minimum -2, tweemaal: in $x = -2$ (rand) en in $x = 1$.

b Waarom volstaat f'(x) = 0 hier niet om het maximum te vinden?

✓ Het globale maximum ligt op de rand, waar de afgeleide niet nul is (f'(3) = 24). Randen zijn altijd kandidaten.

Toepassen

●●○ Toepassen — meerdere stappen, in een context

2.5 Een bak uit één plaat

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

Uit een vierkante plaat PP van 60 cm × 60 cm snijd je in elke hoek een vierkant weg en plooi je de randen omhoog tot een open bak.

a Stel het volume op als functie van de zijde x van de weggesneden vierkanten. Wat is het domein?

✓ $V(x) = x\,(60 - 2x)^2$ (cm³), met $0 < x < 30$.

b Bereken de x met het grootste volume, en dat volume in liter.

✓ $V'(x) = (60 - 2x)^2 - 4x(60 - 2x) = (60 - 2x)(60 - 6x) = 0 \Rightarrow x = 10\,\text{cm}$ ($x = 30$ geeft $V = 0$). $V(10) = 10 \cdot 40^2 = 16\,000\,\text{cm}^3 = 16\,\text{L}$. Tekenschema: $V' > 0$ voor $x < 10$, $V' < 0$ tussen 10 en 30: maximum.

2.6 Vermogen of rendement?

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

Een thermo-elektrische generator op de kachel van het station gedraagt zich als een bron van 4,0 V met 2,0 Ω inwendige weerstand. Hij laadt een kleine buffer voor een noodlampje.

a Bij welke belasting levert hij het grootste vermogen? Hoe groot is dat, met welk rendement?

✓ $R = r = 2{,}0\,\Omega$: $P = U^2/(4r) = 16/8 = 2{,}0\,\text{W}$ bij 50 % rendement.

b Bereken vermogen en rendement voor R = 6 Ω. Wat zou je kiezen, en waarom?

✓ $R = 6\,\Omega$: $I = 4/8 = 0{,}5\,\text{A}$, $P = 0{,}25 \cdot 6 = 1{,}5\,\text{W}$, $\eta = 6/8 = 75\,\%$. De warmte van de kachel is gratis, dus hier telt het vermogen: kies $R \approx r$. Bij een batterij, waar elke joule telt, kies je het rendement.

2.7 De goedkoopste leiding naar de meetkas

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een waterleiding loopt van de technische ruimte (punt A, 4,0 m van de rand van het terras, in het gras) naar de meetkas (punt B, 3,0 m ver op het terras). Langs de rand gemeten liggen A en B 10,0 m uit elkaar. Graven in het gras kost € 12 per meter, tegels uitbreken en terugleggen € 30 per meter. De leiding loopt recht naar een punt op de rand, op afstand x van het voetpunt van A, en dan recht naar B.

a Stel de kostenfunctie K(x) op.

✓ $K(x) = 12\sqrt{4^2 + x^2} + 30\sqrt{3^2 + (10 - x)^2}$ (€), $0 \le x \le 10$.

b Zoek het minimum numeriek (rooster of bisectie op K'). Vergelijk met de rechte lijn van A naar B.

✓ $K'(x) = \dfrac{12x}{\sqrt{16 + x^2}} - \dfrac{30(10 - x)}{\sqrt{9 + (10 - x)^2}}$. Bisectie geeft $x = 8{,}83\ \text{m}$ en $K = €213$. De rechte lijn (kruist de rand bij $x = 5{,}71$) kost € 241: 13 % duurder. Het optimum loopt lang door het goedkope gras.

c Toon aan dat in het optimum $12 \sin\theta_1 = 30 \sin\theta_2$ (hoeken met de loodlijn op de rand). Welke wet herken je?

✓ $K' = 0$ zegt $12 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{16 + x^2}} = 30 \cdot \dfrac{10 - x}{\sqrt{9 + (10 - x)^2}}$, en die breuken zijn $\sin\theta_1$ en $\sin\theta_2$. Numeriek: $\sin\theta_1 = 0{,}911$, $\sin\theta_2 = 0{,}364$, verhouding $2{,}50 = 30/12$. De brekingswet van Snellius, zoals Fermat haar vond: de kost per meter speelt de rol van de traagheid van het licht.

2.8 Gulden snede met de hand

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Zoek het maximum van $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ op $[0, 3]$ met de gulden snede ($\varphi = 0{,}618$).

a Voer drie stappen uit: noteer telkens a, b, x_1, x_2, $f(x_1)$, $f(x_2)$ en welk stuk je schrapt.

✓ Met $x_1 = b - 0{,}618\,(b - a)$ en $x_2 = a + 0{,}618\,(b - a)$: stap 1: [0,000; 3,000], $x_1 = 1{,}146$, $x_2 = 1{,}854$, f = 0,3643 en 0,2903, schrap rechts van x_2; stap 2: [0,000; 1,854], $x_1 = 0{,}708$, $x_2 = 1{,}146$, f = 0,3488 en 0,3643, schrap links van x_1; stap 3: [0,708; 1,854], $x_1 = 1{,}146$, $x_2 = 1{,}416$, f = 0,3643 en 0,3436, schrap rechts van x_2.

b Hoe lang is het interval na drie stappen? Controleer met de exacte oplossing (f' = 0).

✓ Na drie stappen $[0{,}708;\ 1{,}416]$: lengte $0{,}708 = 3 \cdot 0{,}618^3$. Exact: $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1$, en 1 ligt in het interval.

2.9 Perturb and observe: hoe groot moet de stap zijn?

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Je onderzoekt de MPPT-methode uit het handboek met hetzelfde paneelmodel.

a Schrijf een functie perturb_observe(u, stap, n) die n stappen zet en de lijst van gebruikte spanningen teruggeeft.

Zie de code hieronder (de functie en de meting in één programma).

```
import math

ISC, VOC, A = 10.9, 41.0, 2.44
I0 = ISC / (math.exp(VOC / A) - 1)


def P(u):
    return u * (ISC - I0 * (math.exp(u / A) - 1))


def perturb_observe(u, stap, n):
    """n stappen perturb and observe vanaf spanning u; geeft de lijst van gebruikte spanningen."""
    richting, vorig, spoor = +1, P(u), []
    for _ in range(n):
        u += richting * stap
        nu = P(u)
        if nu < vorig:                # slechter geworden: keer om
            richting = -richting
        vorig = nu
        spoor.append(u)
    return spoor


P_MPP = max(P(i / 1000) for i in range(41000))          # referentie: fijn rooster
for stap in (2.0, 0.5, 0.1):
    spoor = perturb_observe(20.0, stap, 300)
    laatste = spoor[-60:]                               # na het inlopen
    gem = sum(P(u) for u in laatste) / len(laatste)
    stappen = next(k for k, u in enumerate(spoor) if abs(u - 34.4) < stap)
    print("stap %.1f V: na %3d stappen bij het MPP, gemiddeld %.2f W (verlies %.2f W)" % (stap,
stappen + 1, gem, P_MPP - gem))
```

b Bereken voor stappen van 2,0, 0,5 en 0,1 V het gemiddelde vermogen rond het MPP (na het inlopen). Hoeveel verlies je tegenover het MPP?

Echte uitvoer:

```
stap 2.0 V: na   7 stappen bij het MPP, gemiddeld 345.26 W (verlies 4.62 W)
stap 0.5 V: na  28 stappen bij het MPP, gemiddeld 349.53 W (verlies 0.35 W)
stap 0.1 V: na 143 stappen bij het MPP, gemiddeld 349.87 W (verlies 0.01 W)
```

Het verlies daalt ongeveer kwadratisch met de stap: het optimum is vlak, dus een schommeling rond de top kost weinig.

c Waarom kiest een echte regelaar toch niet de kleinste stap?

Als de zon verandert (een wolk), verschuift het MPP. Met een kleine stap duurt het lang om het nieuwe MPP te bereiken; met een grote stap volg je sneller maar schommel je meer. Echte regelaars passen de stap aan (groot als het vermogen sterk verandert, klein rond de top).

2.10 Hoe hoog hangt de lamp?

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een groeilamp (als puntbron met lichtsterkte I) hangt op hoogte h boven het midden van het kweekbed van 1,2 m × 2,4 m. De verlichtingssterkte op een punt op horizontale afstand r is $E = \dfrac{I\cos\theta}{d^2} = \dfrac{I\,h}{(h^2+r^2)^{3/2}}$.

a Voor welke h is de verlichtingssterkte in een hoek van het bed maximaal?

$r = \sqrt{0{,}6^2 + 1{,}2^2} = 1{,}342\,\text{m}$. $\dfrac{dE}{dh} = I\,\dfrac{(h^2+r^2)^{3/2} - h\cdot\frac{3}{2}(h^2+r^2)^{1/2}\cdot 2h}{(h^2+r^2)^3} = 0 \Rightarrow h^2 + r^2 = 3h^2 \Rightarrow h = r/\sqrt{2} = 0{,}949\,\text{m}$.

b Bereken bij die h de verhouding hoek/midden. Wat betekent dat voor het aantal lampen?

In het midden $E = I/h^2$; verhouding $\dfrac{h^3}{(h^2+r^2)^{3/2}} = 0{,}19$. De hoek krijgt maar ongeveer een vijfde van het midden: één lamp geeft een erg ongelijk bed. Daarom hangt de module twee lampen (en reflectoren).

c Welke twee doelen werken hier tegen elkaar in?

Zoveel mogelijk licht op het bed (lamp laag) tegenover een gelijkmatig bed (lamp hoog). Een hoogte die de hoek maximaliseert, is niet het beste voor de planten in het midden.

2.11 Een tank in roestvast staal, met lasnaden

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een alternatief voor de drinkwatertank: roestvast staal. Wandplaat kost € 60/m², bodem en deksel € 90/m², en elke meter lasnaad € 25 (twee rondnaden van 2πr en één langsnaad van h). Volume 0,50 m³.

a Stel de kostenfunctie K(r) op.

$K(r) = 60\cdot\dfrac{2V}{r} + 90\cdot 2\pi r^2 + 25\left(4\pi r + \dfrac{V}{\pi r^2}\right)$ (€), $V = 0{,}5\,\text{m}^3$.

b Zonder lassen: zoek het optimum exact. Met lassen: zoek het numeriek.

Zonder lassen: $r^3 = \dfrac{60\,V}{2\pi\cdot 90}$, $r = 0{,}376\,\text{m}$ ($d = 0{,}75\,\text{m}$, $h/d = 90/60 = 1{,}5$). Met lassen (rooster met stap 0,1 mm): $r = 0{,}344\,\text{m}$, $d = 0{,}69\,\text{m}$, $h = 1{,}35\,\text{m}$, $K = €383$.

c Wat doen de lasnaden met de vorm? Verklaar.

De rondnaden groeien met r, de langsnaad met h. Bij een kleine tank weegt de rondnaad (4πr) het zwaarst, dus wordt de tank iets smaller en hoger dan zonder lassen.

2.12 Habitat: de drinkwatertank ontwerpen

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Het stationsdossier legt een drinkwatertank van 500 L vast. Werk het ontwerp zelf uit en verdedig het in een korte nota voor de bewoners. Gegeven: deur met 0,80 m vrije doorgang, technische ruimte 2,6 m hoog, woonmodule van 24 m², woningvloer berekend op ongeveer 2 kN/m², HDPE-tank.

a Kies je doelen en randvoorwaarden en schrijf ze als formules in d.

Doelen: materiaal $A(d) = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{4V}{d}$ en vloeroppervlak $F(d) = \frac{\pi d^2}{4}$ (beide minimaal). Voorwaarden: $d \le 0{,}78\,\text{m}$ (deur), $h = \frac{4V}{\pi d^2} \le 2{,}2\,\text{m}$ (plafond), dus $0{,}54 \le d \le 0{,}78\,\text{m}$.

b Bereken voor minstens vijf diameters materiaal, vloeroppervlak, hoogte en waterdruk (tabel of programma).

Zie de uitvoer van tank.py in het handboek:

```
  d (m)  h (m)  A (m2)  extra  F (m2)  p (kPa)  toegelaten
  0.54   2.183  4.162   19.3%  0.229   21.4     ja
  0.60   1.768  3.899   11.8%  0.283   17.3     ja
  0.70   1.299  3.627    4.0%  0.385   12.7     ja
  0.78   1.046  3.520    0.9%  0.478   10.3     ja
  0.86   0.861  3.487    0.0%  0.581    8.4     nee
  1.00   0.637  3.571    2.4%  0.785    6.2     nee
beste toegelaten diameter: 0.780 m (h = 1.046 m)
```

c Kies een diameter met een gewogen som of een ε-methode. Toon hoe gevoelig je keuze is voor de gewichten.

Bv. $J = 0{,}7\,A/A_{\text{ref}} + 0{,}3\,F/F_{\text{ref}}$ geeft $d \approx 0{,}65\,\text{m}$. Met $w_2 = 0{,}1$ ligt het optimum op 0,78 m (de deurgrens), met $w_2 = 0{,}5$ bij 0,54 m. Of met de ε-methode: minimaal materiaal met $F \le 0{,}40\,\text{m}^2$ geeft $d = 0{,}714\,\text{m}$ (de grootste toegelaten diameter, want A daalt tot 0,86 m).

d Schrijf de nota (8 à 12 regels): keuze, argumenten, wat de tank vraagt van de vloer, en wat je nog moet nagaan.

Bijvoorbeeld: 'We kiezen een gesloten HDPE-tank van 0,78 m binnendiameter en ±1,05 m waterhoogte (plus luchtruimte). Ze past door de deur, vraagt minder dan 1 % meer materiaal dan de theoretisch zuinigste vorm en neemt 0,48 m² vloer in. Vol weegt ze ±530 kg: dat is ±11 kN/m² onder de tank, vijf keer wat een woningvloer draagt; ze komt dus op een eigen sokkel op de fundering. Na te gaan: welke standaardmaat het dichtst ligt, de hoogte van de aansluitingen, een ontluchting, en hoe de tank gereinigd wordt.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Opstellen	Doelen en voorwaarden correct als functie van d, met eenheden; domein juist.
Berekening	Tabel correct; optimum en actieve voorwaarde herkend; vlakheid van het optimum gezien.
Afweging	Gewogen som of ε-methode correct gebruikt; gevoeligheid voor de gewichten getoond.
Nota	Keuze helder en verdedigbaar; vloerbelasting (sokkel) en praktische punten (standaardmaat, luchtruimte, hygiëne) benoemd.

●●● Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

2.13 Waarom grote opslagtanks breed en laag zijn

●●● Uitdagen · 9 · Analyseren · 40 min

Bij een grote stalen tank moet de wand de waterdruk dragen: de ringspanning in een dunne wand is $\sigma = p\,r/t$, dus op diepte y onder het wateroppervlak is minstens $t(y) = \rho g\,y\,r/\sigma$ nodig. Bodem en dak hebben een vaste dikte t_0.

a Toon aan dat het staalvolume van de wand gelijk is aan $\dfrac{\pi\rho g\,r^2h^2}{\sigma}$, en schrijf het totale staalvolume als functie van r bij een vast volume V.

Wandvolume $= \int_0^h 2\pi r\,t(y)\,\mathrm{d}y = 2\pi r\cdot\frac{\rho g r}{\sigma}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{\pi\rho g r^2h^2}{\sigma}$. Met $h = V/(\pi r^2)$: $\frac{\rho g V^2}{\pi\sigma r^2}$. Totaal $M(r) = \frac{\rho g V^2}{\pi\sigma r^2} + 2\pi t_0 r^2$.

b Zoek het optimum en toon aan dat de optimale hoogte $h^* = \sqrt{2\sigma t_0/(\rho g)}$ niet van V afhangt.

$M'(r) = -\frac{2\rho g V^2}{\pi\sigma r^3} + 4\pi t_0 r = 0 \Rightarrow r^4 = \frac{\rho g V^2}{2\pi^2\sigma t_0}$. Dan $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi^2\sigma t_0}{\rho g V^2}} = \sqrt{\frac{2\sigma t_0}{\rho g}}$: het volume valt weg.

c Reken h* uit voor σ = 160 MPa en t_0 = 6 mm, en de optimale diameter voor 1000 m³ en 100 000 m³. Wat besluit je? Waarom geldt dit niet voor de tank van 500 L van het station?

✓ $h^* = \sqrt{2 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}006/(1000 \cdot 9{,}81)} = 14{,}0\,\text{m}$. Voor 1000 m³: $d = 9{,}5\,\text{m}$; voor 100 000 m³: $d = 95\,\text{m}$. Grote tanks worden dus niet hoger maar breder: breed en laag. Bij de tank van 500 L is de wand overal veel dikker dan de druk vraagt (stijfheid, hanteren, minimale wanddikte bij het gieten): dan geldt het model met gelijke dikte, en is $h \approx d$ optimaal.

2.14 Bewijs zonder afgeleide

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 20 min

Voor positieve getallen a, b, c geldt $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, met gelijkheid alleen als $a = b = c$ (ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde).

a Schrijf de oppervlakte van het blik als $A = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$ en gebruik de ongelijkheid om te bewijzen dat $A \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

✓ $\frac{A}{3} = \frac{2\pi r^2 + V/r + V/r}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = \sqrt[3]{2\pi V^2}$: de r valt weg. Dus $A \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ voor elke r.

b Wanneer geldt de gelijkheid? Toon aan dat daaruit h = 2r volgt.

✓ Gelijkheid als $2\pi r^2 = V/r$, dus $V = 2\pi r^3$. Met $V = \pi r^2 h$: $\pi r^2 h = 2\pi r^3 \Rightarrow h = 2r$.

c Wat heeft dit bewijs dat de afleiding met f' = 0 niet heeft?

✓ Het bewijst meteen dat het een globaal minimum is (A kan nergens kleiner zijn), zonder tekenschema of tweede afgeleide.

2.15 Onderzoek: gradiëntafdaling en de stapgrootte

●●● Uitdagen · 8 · Onderzoeken · 45 min

Gebruik de open balkvormige bak uit het handboek: $A(l, b) = lb + \frac{2V}{b} + \frac{2V}{l}$ met $V = 0{,}5\,\text{m}^3$, start in $(0{,}45;\ 1{,}80)$.

a Programmeer de gradiëntafdaling en tel het aantal stappen tot de gradiënt kleiner is dan 10^{-6}, voor η = 0,1; 0,3; 0,6 en 0,7.

✓ Zie de code in het handboek (blad 'Meer variabelen'). Echte uitvoer:

```
eta 0.1: na 142 stappen l = 1.0000, b = 1.0000
eta 0.3: na  41 stappen l = 1.0000, b = 1.0000
eta 0.6: na  71 stappen l = 1.0000, b = 1.0000
eta 0.7: na   3 stappen l = 1.7820, b = 85.0149
```

b Wat gebeurt er bij η = 0,7? Verklaar met een schets van het dal.

✓ Bij η = 0,7 is elke stap te groot: de nieuwe positie ligt aan de overkant van het dal, verder van het minimum dan de vorige. De afwijking groeit elke stap (of de zoektocht springt heen en weer): divergentie.

c Tweede afgeleiden in het minimum: $A_{ll} = 4V/l^3$, $A_{bb} = 4V/b^3$ en $A_{lb} = 1$. Toon aan dat de stap stabiel is zolang $\eta < 2/3$ (de grootste eigenwaarde van de matrix is 3).

✓ In het minimum ($l = b = 1$): $A_{ll} = A_{bb} = 4 \cdot 0{,}5 = 2$ en $A_{lb} = 1$. Eigenwaarden van $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: 1 en 3. Een stap vermenigvuldigt de afwijking in de richting van een eigenvector met $1 - \eta\lambda$; stabiel als $|1 - 3\eta| < 1$, dus $\eta < 2/3$. Hoe steiler (hoe groter λ), hoe kleiner de stap moet zijn.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Correcte gradiënt, stopcriterium, bescherming tegen divergentie.
Waarneming	Aantal stappen per η correct; divergentie of oscillatie bij grote η vastgesteld.
Verklaring	Verband tussen stapgrootte en kromming (tweede afgeleide) gelegd.

2.16 Debat: optimaal of robuust?

Uitdagen · 8 · Argumenteren · 25 min

Een collega: 'Waarom zoveel rekenwerk? Het optimum is toch vlak: neem gewoon een ronde maat.' Een andere collega: 'Een ontwerp dat optimaal is voor één scenario, faalt in het volgende. Ik wil geen optimum, ik wil marge.'

a Geef voor elke stelling een sterk argument met een getal uit dit hoofdstuk.

Vlak optimum: het echte blikje wijkt 12 % af van de optimale straal en kost maar 1,5 % meer; de tank van 0,78 m kost 0,9 % meer. Marge: de tank die 'optimaal' 0,86 m breed was, paste niet door de deur; een MPPT-regelaar die op één MPP afgesteld is, verliest vermogen zodra er een wolk komt. Beide hebben gelijk: optimaliseren toont waar de marge goedkoop is.

b Wanneer loont het echt om nauwkeurig te optimaliseren? Geef twee voorbeelden uit het station.

Waar het optimum steil is of op een actieve grens ligt, en waar kleine winsten vaak herhaald worden: het werkpunt van de zonnepanelen (elke seconde, jaren lang), het energiebeheer van de batterij (elke dag), de regeling van de verwarming. Niet voor een eenmalige maat die in standaardgroottes verkocht wordt.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 3

Integralen: ophopen

Uit een vermogen de energie, uit een stroom de lading, uit een snelheid de weg

Uitgewerkte oplossingen bij de 15 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

5× oefenen · 6× toepassen · 4× uitdagen · ± 400 min

W Wiskundig modelleren · E Energie · K Krachten, beweging en constructies



Een wolk die voorbijdrijft, is een dip in het vermogen en een klein gat in de energie van de dag.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

3.1 Een pomp die aanloopt

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

De pomp van de waterkringloop (werkpunt 4,8 L/min, hoofdstuk 11 van Intermediate) loopt aan. Het debiet elke seconde:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6
Q (L/min)	0,0	0,9	2,6	3,9	4,5	4,8	4,8

a Bereken het verpompte volume in de eerste 6 s met de linker- en de rechtersom (let op de eenheden).

✓ $\Delta t = 1\,\text{s} = \frac{1}{60}\,\text{min}$. Links: $(0 + 0{,}9 + 2{,}6 + 3{,}9 + 4{,}5 + 4{,}8) \cdot \frac{1}{60} = 0{,}278\,\text{L}$. Rechts: $(0{,}9 + 2{,}6 + 3{,}9 + 4{,}5 + 4{,}8 + 4{,}8) \cdot \frac{1}{60} = 0{,}358\,\text{L}$.

b Welke som onderschat, welke overschat? Geef een betere schatting.

✓ Het debiet stijgt, dus links onderschat en rechts overschat. Hun gemiddelde (trapeziumregel): $0{,}318\,\text{L}$, ongeveer 318 mL.

3.2 Primitieven zoeken

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Geef een primitieve functie en controleer door af te leiden.

a $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ en $g(t) = \dfrac{2}{t^3}$

✓ $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$; $G(t) = 2 \cdot \dfrac{t^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{t^2} + C$.

b $h(t) = 5\,\text{e}^{-t/2}$ en $k(x) = \sqrt{x}$

✓ $H(t) = -10\,\text{e}^{-t/2} + C$ (want $\frac{\text{d}}{\text{d}t}(-10\text{e}^{-t/2}) = 5\text{e}^{-t/2}$); $K(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$.

c $u(t) = 325\cos(100\pi t)$ en $v(x) = \dfrac{3}{x}$ $(x > 0)$

✓ $U(t) = \dfrac{325}{100\pi}\sin(100\pi t) + C \approx 1{,}03\sin(100\pi t) + C$; $V(x) = 3\ln x + C$.

3.3 Bepaalde integralen met de hoofdstelling

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Bereken exact en zeg telkens wat het resultaat fysisch betekent (met eenheid).

a $\int_0^3 (2 + 0{,}5t)\,\text{d}t$ met t in s en het integrandum een snelheid in m/s.

✓ $\left[2t + 0{,}25t^2\right]_0^3 = 6 + 2{,}25 = 8{,}25\,\text{m}$: de afgelegde weg van een voorwerp dat eenparig versnelt van 2 naar 3,5 m/s.

b $\int_0^6 \left(1400 + 600\,\text{e}^{-t/1{,}5}\right)\,\text{d}t$: het vermogen van de verwarming (W) in de eerste 6 uur na een koude nacht, t in h.

✓ $\left[1400t - 900\,\text{e}^{-t/1{,}5}\right]_0^6 = 8400 - 900\text{e}^{-4} + 900 = 9284\,\text{Wh} \approx 9{,}28\,\text{kWh}$: de energie om het station op te warmen en warm te houden.

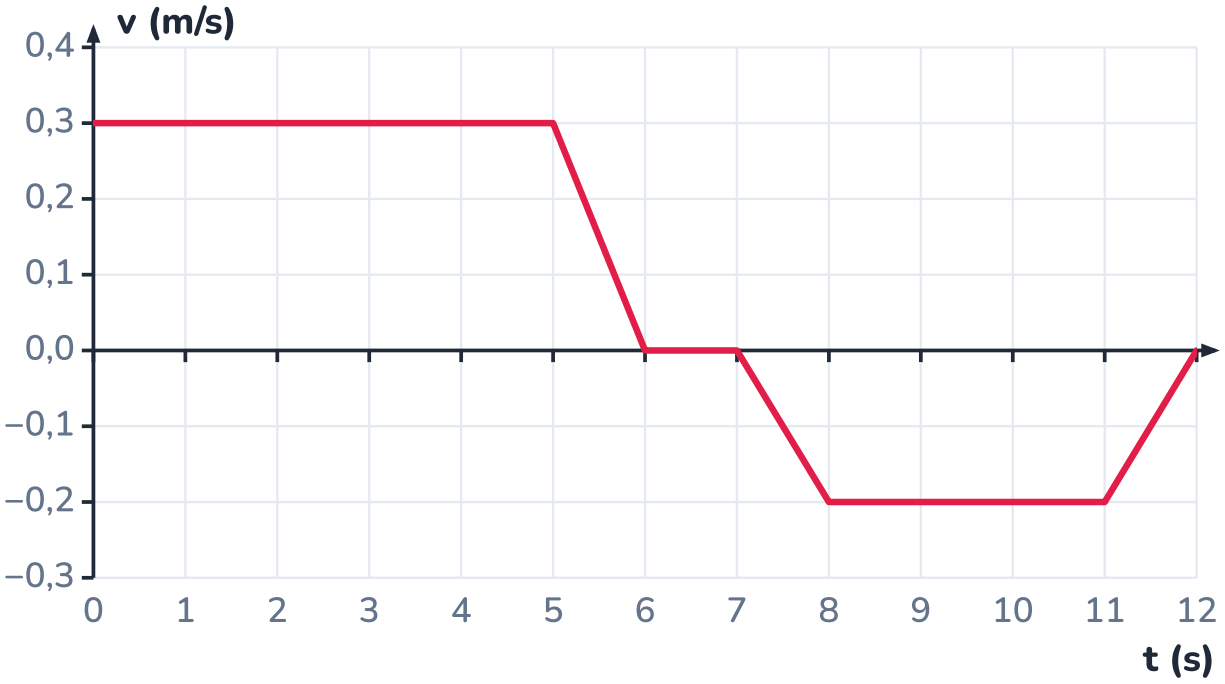
c $\int_0^{0{,}01} 325\sin(100\pi t)\,\text{d}t$ en $\int_0^{0{,}02} 325\sin(100\pi t)\,\text{d}t$ (t in s).

✓ $\left[-\frac{325}{100\pi}\cos(100\pi t)\right]_0^{0{,}01} = \frac{325}{100\pi} \cdot 2 = 2{,}07\,\text{V}\cdot\text{s}$ over een halve periode; over een hele periode 0: de positieve en de negatieve helft heffen elkaar op.

3.4 Heen en terug in de gang

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Het inspectierobotje (hoofdstuk 33 van Intermediate) rijdt door de gang van de module.



De snelheid van het inspectierobotje (positief = weg van het laadstation).

a Bereken de verplaatsing na 12 s (integraal van v) en de afgelegde weg (integraal van |v|).

✓ Heen (0 tot 6 s): $0{,}3 \cdot 5 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}3 = 1{,}65\,\text{m}$. Terug (7 tot 12 s): $\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}80\,\text{m}$. Verplaatsing $1{,}65 - 0{,}80 = 0{,}85\,\text{m}$; afgelegde weg $1{,}65 + 0{,}80 = 2{,}45\,\text{m}$.

b Waar staat het robotje na 12 s tegenover zijn start? Wanneer was het het verst weg?

✓ Het staat 0,85 m van de start, in de richting van de heenweg. Het verst weg was het tussen 6 en 7 s (snelheid nul), op 1,65 m.

3.5 Gemiddelde en effectieve waarde

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

De groeilampen worden met PWM gedimd (hoofdstuk 25 van Intermediate): 12 V gedurende een fractie D van elke periode, anders 0 V.

a Bereken voor D = 0,25 de gemiddelde en de effectieve spanning.

✓ $\bar{u} = D\,U = 3{,}0\,\text{V}$; $\overline{u^2} = D\,U^2 = 36\,\text{V}^2$, dus $U_{\text{eff}} = \sqrt{36} = 6{,}0\,\text{V} = \sqrt{D}\,U$.

b Een weerstand van 6 Ω hangt aan dat PWM-signaal. Welk gemiddeld vermogen? Waarom is U_gem² / R fout?

✓ $\bar{P} = \overline{u^2}/R = 36/6 = 6{,}0\,\text{W}$ (een kwart van 24 W). Met $\bar{u}^2/R = 9/6 = 1{,}5\,\text{W}$ zou je een factor 4 te weinig vinden: het vermogen hangt af van het kwadraat, en het kwadraat van het gemiddelde is niet het gemiddelde van het kwadraat.

c Toon met een integraal aan dat de effectieve waarde van 325 sin(ωt) gelijk is aan 230 V.

✓ $\overline{u^2} = \frac{1}{T}\int_0^T 325^2 \sin^2(\omega t)\,\text{d}t = 325^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\text{d}t = \frac{325^2}{2}$, dus $U_{\text{eff}} = 325/\sqrt{2} = 229{,}8\,\text{V} \approx 230\,\text{V}$.

3.6 Energie van een dimbare lamp

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Bij daglicht dimmen de groeilampen: tussen 6:00 en 10:00 daalt hun vermogen van 190 W naar 40 W volgens $P(t) = 40 + 150\,\mathrm{e}^{-(t-6)/1{,}2}$ (W, t in h). Daarna blijven ze op 40 W tot 16:00.

a Bereken de energie tussen 6:00 en 10:00 exact.

✓ $\int_6^{10} \left(40 + 150\mathrm{e}^{-(t-6)/1{,}2}\right) \mathrm{d}t = 160 + 150 \cdot 1{,}2\,(1 - \mathrm{e}^{-4/1{,}2}) = 333{,}6\,\mathrm{Wh}$.

b Hoeveel energie spaart het dimmen tussen 6:00 en 16:00 tegenover 190 W de hele tijd?

✓ Gedimd: $334 + 40 \cdot 6 = 574\,\mathrm{Wh}$; vol vermogen $190 \cdot 10 = 1900\,\mathrm{Wh}$. Besparing $1326\,\mathrm{Wh}$ (70 %).

c Controleer je antwoord op (a) met de trapeziumregel met stappen van 1 h. Is de fout positief of negatief, en waarom?

✓ Trapezium met $h = 1$: $343{,}5\,\mathrm{Wh}$, dus $9{,}9\,\mathrm{Wh}$ te veel. De kromme is hol ($P'' > 0$): de koorden liggen erboven, de trapeziumregel overschat.

3.7 Arbeid om een koord uit te rekken

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een elastisch koord houdt het dakraam van de meetkas gespannen. Je meet de kracht bij het uittrekken:

x (cm)	0	2	4	6	8	10	12
F (N)	0,0	6,5	12,0	16,5	20,0	22,5	24,0

a Bereken de arbeid tot 12 cm met de trapeziumregel en met Simpson.

✓ $h = 0{,}02\,\mathrm{m}$. Trapezium: $0{,}02\,[\tfrac{1}{2} \cdot 0 + 6{,}5 + 12{,}0 + 16{,}5 + 20{,}0 + 22{,}5 + \tfrac{1}{2} \cdot 24{,}0] = 1{,}790\,\mathrm{J}$. Simpson: $\frac{0{,}02}{3}[0 + 4(6{,}5 + 16{,}5 + 22{,}5) + 2(12{,}0 + 20{,}0) + 24{,}0] = 1{,}800\,\mathrm{J}$.

b Een ideale veer (Hooke) met dezelfde kracht bij 2 cm: hoeveel arbeid tot 12 cm? Waarom verschilt het?

✓ $k = 6{,}5/0{,}02 = 325\,\mathrm{N/m}$, $W = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 325 \cdot 0{,}12^2 = 2{,}34\,\mathrm{J}$. Het koord wordt slapper (de kracht groeit steeds trager): het is geen lineaire veer, dus minder arbeid.

3.8 Hoe ver rijdt het robotje?

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

Bij het vertrek volgt de snelheid van het robotje $v(t) = 0{,}30\,(1 - \mathrm{e}^{-t/0{,}5})$ m/s.

a Bereken de afgelegde weg in de eerste 10 s exact.

✓ $\int_0^{10} 0{,}30(1 - \mathrm{e}^{-t/0{,}5})\,\mathrm{d}t = 0{,}30\left[t + 0{,}5\,\mathrm{e}^{-t/0{,}5}\right]_0^{10} = 0{,}30\,(10 - 0{,}5 + 0{,}5\mathrm{e}^{-20}) = 2{,}85\,\mathrm{m}$.

b Hoeveel minder is dat dan bij een onmiddellijke start aan 0,30 m/s? Interpreteer.

✓ $3{,}00 - 2{,}85 = 0{,}15\,\mathrm{m} = 0{,}30 \cdot 0{,}5$: alsof het robotje een halve seconde (de tijdconstante) later vertrokken is.

3.9 Trapezium en Simpson met de hand

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Benader $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ (exact $\mathrm{e} - 1 = 1{,}718282$).

a Met de trapeziumregel voor n = 4 en n = 8. Hoeveel keer kleiner wordt de fout?

✓ $T_4 = 1{,}727222$ (fout $0{,}008940$), $T_8 = 1{,}720519$ (fout $0{,}002237$): de fout wordt 4,00 keer kleiner, zoals bij een tweede-ordemethode.

b Bereken $T_8 + \frac{T_8 - T_4}{3}$. Vergelijk met Simpson voor $n = 8$.

✓ $T_8 + \frac{T_8 - T_4}{3} = 1{,}71828415$ (fout $0{,}00000233$), precies $S_8 = 1{,}71828415$: de regel van Simpson is de trapeziumregel met haar eigen fout eraf (Richardson).

3.10 Een coulombteller in Python

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Een stroomsensor meet elke minuut de stroom van de batterij (positief = laden). Je schrijft de teller.

a Schrijf een functie laadtoestand(stroom, dt_min, q_start, q_nom) die een lijst met de laadtoestand in procent na elke meting teruggeeft (trapeziumregel).

✓

```
def laadtoestand(stroom, dt_min, q_start, q_nom):
    q, uit = q_start, []
    for i in range(len(stroom) - 1):
        q += (stroom[i] + stroom[i + 1]) / 2 * dt_min / 60   # Ah
        q = min(max(q, 0.0), q_nom)                          # niet voorbij leeg of vol
        uit.append(100 * q / q_nom)
    return uit
```

b Test ze op het voorbeeld uit het handboek (uurwaarden, dt = 60 min). Klopt de uitkomst?

✓ Met de stroom uit het handboek, dt_min = 60, q_start = 132 en q_nom = 240 vind je dezelfde percentages als de uitvoer van coulombteller.py (einde 69 %).

c Een goedkope sensor meet 0,15 A te veel. Hoeveel procent loopt de teller per dag scheef, en hoe corrigeert een BMS dat?

✓ 0,15 A × 24 h = 3,6 Ah per dag, of 1,5 % van 240 Ah: na een week 10 %. Een BMS zet de teller op 100 % als de batterij vol is (laadspanning bereikt en de stroom klein wordt), en soms op 0 % bij de ontlaadgrens.

3.11 Habitat: een bewolkte oktoberdag

Toepassen · 7 · Habitat · 45 min

De logger van de module geeft voor een bewolkte dag in oktober het vermogen van de vier panelen om het uur (plaatselijke tijd):

uur	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P (W)	0	45	180	310	420	390	520	460	300	150	40	0

a Bereken de dagopbrengst met de trapeziumregel en het aantal volle zonuren.

✓ $E = 1 \cdot [\frac{1}{2} \cdot 0 + 45 + 180 + 310 + 420 + 390 + 520 + 460 + 300 + 150 + 40 + \frac{1}{2} \cdot 0] = 2815\ \mathrm{Wh}$; volle zonuren $2815/1400 = 2{,}01\ \mathrm{h}$.

b Vergelijk met PVGIS voor oktober (2,50 Wh per Wp per dag) en met het budget van de module (3,27 kWh per dag).

> PVGIS oktober: $2{,}50 \cdot 1400 = 3500\ \text{Wh}$: deze dag gaf 80 % daarvan. Het budget van 3,27 kWh wordt niet gehaald: de batterij moet 0,45 kWh bijpassen, of lasten wachten.

c Het vermogen sprong tussen 13 en 14 uur (390 → 520 W). Hoe betrouwbaar is je dagopbrengst? Schat de onzekerheid.

> Met één meting per uur en wolken die in minuten komen en gaan, kan elk uur tientallen procent afwijken; over de dag middelt dat deels uit. Een realistische onzekerheid is 5 à 10 % (op de heldere dag van het handboek gaf 'om het uur' al 6 % fout, bij wisselende bewolking is het meer). De teller van de regelaar zelf (per seconde) is betrouwbaarder.

d Schrijf een advies (5 à 8 regels) aan het brein van het station: wat doet het energiebeheer op zo'n dag, en hoe moet de logger ingesteld worden?

> Bijvoorbeeld: lampen op spaarstand (dimmen, minder lichturen) zolang de batterij onder 40 % zit (energiebeheer van hoofdstuk 20 van Intermediate); de pomp in de middag laten draaien, als er zon is; logger om de minuut met de wattuurteller van de regelaar; 's avonds de voorspelling voor morgen gebruiken (hoofdstuk 43).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Berekening	Trapeziumregel correct, met eenheden; volle zonuren juist.
Vergelijking	PVGIS en budget correct omgerekend en vergeleken; verschil verklaard (dag tegenover gemiddelde).
Onzekerheid	Invloed van het meetinterval bij wisselende bewolking onderbouwd, met een schatting.
Advies	Concreet en haalbaar: lasten, batterij, lampen, logfrequentie; verwijst naar de getallen.

●●● Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

3.12 Archimedes met integralen

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Neem de parabool $y = x^2$ en de rechte $y = 1$. Het parabolisch segment is het gebied ertussen.

a Bereken de oppervlakte van het segment met een integraal.

> $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

b Bereken de oppervlakte van de ingeschreven driehoek met dezelfde basis en de top van de parabool, en toon aan dat het segment 4/3 keer zo groot is.

> Driehoek met basis van $(-1, 1)$ tot $(1, 1)$ (lengte 2) en top $(0, 0)$ (hoogte 1): oppervlakte 1. Segment / driehoek $= \frac{4}{3}$, zoals Archimedes vond.

c Doe hetzelfde algemener voor $y = x^2$ en $y = c$ ($c > 0$). Blijft de verhouding 4/3?

> Segment: $\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2)\mathrm{d}x = 2c\sqrt{c} - \frac{2}{3}c\sqrt{c} = \frac{4}{3}c\sqrt{c}$. Driehoek: $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{c} \cdot c = c\sqrt{c}$. Verhouding weer $\frac{4}{3}$ (en voor elke schuine koorde ook, zoals Archimedes bewees).

3.13 De fout van de trapeziumregel

●●● Uitdagen · 9 · Analyseren · 30 min

Bekijk één strook $[0, h]$ en een functie met $f(x) = a + bx + cx^2$.

a Toon aan dat de trapeziumregel exact is als c = 0.

✓ Exact: $\int_0^h (a+bx)\mathrm{d}x = ah + \frac{b}{2}h^2$. Trapezium: $\frac{h}{2}\,(a + a + bh) = ah + \frac{b}{2}h^2$. Gelijk.

b Bereken voor $c \neq 0$ het verschil tussen de trapeziumregel en de exacte integraal. Schrijf het met $f'' = 2c$.

✓ Exact: $ah + \frac{b}{2}h^2 + \frac{c}{3}h^3$. Trapezium: $\frac{h}{2}(2a + bh + ch^2) = ah + \frac{b}{2}h^2 + \frac{c}{2}h^3$. Verschil (trapezium − exact) $= \frac{c}{6}h^3 = \frac{h^3}{12}f''$: positief voor een holle functie (overschatting).

c Leid af dat de totale fout over n stroken van $[a, b]$ ongeveer $\frac{(b-a)h^2}{12}\overline{f''}$ is, en dat ze vier keer kleiner wordt als je h halveert.

✓ Tel $n = (b-a)/h$ stroken op, elk met fout $\approx \frac{h^3}{12}f''(\xi_i)$: samen $\frac{h^3}{12}\sum f''(\xi_i) = \frac{h^3}{12}\cdot n\,\overline{f''} = \frac{(b-a)h^2}{12}\overline{f''}$. Evenredig met h^2: halveer h en de fout wordt vier keer kleiner.

3.14 Onderzoek: hoe vaak moet de logger meten?

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 60 min

Je gebruikt het model van de zonnedag uit het handboek (heldere hemel maal een wolkenfactor) als 'werkelijkheid', met een meting per minuut als referentie.

a Programmeer de trapeziumregel voor meetintervallen van 1, 5, 15, 30 en 60 minuten en druk de fout tegenover de referentie af.

✓ Bijvoorbeeld (met de functies van het handboek):

```
ref = trapezium([5 + i / 60 for i in range(1021)], [p(5 + i / 60) for i in range(1021)])
for m in (1, 5, 15, 30, 60):
    t = [5 + i * m / 60 for i in range(int(17 * 60 / m) + 1)]
    E = trapezium(t, [p(x) for x in t])
    print(m, round(E), round(100 * (E / ref - 1), 2))
```

Met het model van het handboek (zonder meetruis): om de 5 min −0,05 %; om de 15 min −0,67 %; om de 30 min −0,66 %; om de 60 min −6,71 %.

b Verschuif de meetmomenten (bv. om het uur, maar op xx:30 in plaats van xx:00). Wat gebeurt er met de fout? Wat leer je daaruit?

✓ Om het uur maar op xx:30: 5,4 % in plaats van −6,7 %. Bij een heldere dag verandert er weinig, maar bij wolken hangt de fout sterk af van toeval: valt een meting net in een wolk, dan telt die wolk een heel uur mee; anders wordt ze gemist. De fout is dan geen afbreekfout meer (die volgt uit f'') maar een bemonsteringsfout: de wolken zijn korter dan het meetinterval (vergelijk Nyquist, hoofdstuk 21).

c Formuleer een advies voor het meetinterval, rekening houdend met de hoeveelheid data (een jaar lang).

✓ Bijvoorbeeld: om de minuut loggen is 525 600 regels per jaar, een paar MB: geen probleem voor de Pi. Het kwartier volstaat voor dagtotalen (±1 %), maar wie wolken wil zien of voorspellen, heeft minuten nodig. Beste oplossing: de regelaar integreert per seconde en de Pi logt de teller.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Correcte bemonstering en trapeziumregel; referentie en fout juist berekend.
Analyse	Fout tegenover interval besproken; invloed van de fase van de meetmomenten gezien (toeval bij wolken).
Advies	Onderbouwd met getallen; afweging nauwkeurigheid tegenover datavolume.

3.15 Ontwerp: een energieteller op een microcontroller

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 45 min

Je bouwt een wattuurteller op een Arduino Uno: elke seconde meet hij spanning en stroom van de panelen en telt hij P · Δt op bij een variabele. Op een Uno zijn float en double allebei 32 bit (ongeveer 7 beduidende cijfers).

a Schrijf de kern van de teller (C++ of pseudocode) met millis() voor een vaste stap.

```
unsigned long vorige = 0;
uint32_t teller_mWs = 0;          // milliwattseconde van vandaag
uint32_t totaal_Wh = 0;
void loop() {
  if (millis() - vorige >= 1000) {
    vorige += 1000;
    float p = leesSpanning() * leesStroom();      // W
    teller_mWs += (uint32_t)(p * 1000.0);          // P * 1 s
    while (teller_mWs >= 3600000UL) { teller_mWs -= 3600000UL; totaal_Wh++; }
  }
}
```

b Na enkele jaren staat de teller op ongeveer 2 000 000 Wh. Wat gebeurt er als je dan 350 W · 1 s = 0,097 Wh optelt bij een float? En bij 100 W? Reken het na (of simuleer met numpy.float32).

Bij 2 000 000 is de afstand tussen twee opeenvolgende float32-getallen 0,125 Wh: elke optelling wordt afgerond op een veelvoud daarvan. Een simulatie van een uur bij 350 W (0,097 Wh per seconde): bij een teller op 100 Wh komen er 350,0 Wh bij (juist: 350), bij een teller op 2 000 000 Wh komen er 450 Wh bij (0,097 wordt telkens 0,125). Bij 100 W (0,028 Wh per seconde, minder dan een halve stap) komt er 0 Wh bij: de teller staat stil. De fout hangt dus af van het vermogen en groeit met de stand van de teller.

c Stel een betere oplossing voor en verantwoord ze.

Tel in gehele getallen in een kleine eenheid (milliwattseconde) en draag over naar wattuur zoals in de code: exact, zonder afronding. Of houd een dagteller (klein, nauwkeurig) en tel die 's nachts bij het totaal. Bewaar het totaal regelmatig in EEPROM (niet elke seconde: slijtage) en herstel het na een stroomuitval; controleer met de Pi (trapeziumregel op de log).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Vaste stap met millis(), P · Δt in de juiste eenheid, geen verloren tijd.
Analyse	Afrondingsprobleem van float32 correct uitgelegd, met getallen.
Oplossing	Gehele tellers (mWs, mWh) of twee niveaus (dag en totaal), overloop en opslag bij stroomuitval behandeld.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 4

Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Wie weet hoe snel iets verandert, kan uitrekenen hoe het verder gaat: exact of stap voor stap

Uitgewerkte oplossingen bij de 16 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

5× oefenen · 6× toepassen · 5× uitdagen · ± 480 min

W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken · E Energie · B Leven en systemen



Wat de sensor in de meetkas meet, kan het brein van het station nu ook voorspellen: met een model van hoe snel de kas opwarmt en afkoelt.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

4.1 Een oplossing controleren

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Controleer telkens of de functie een oplossing is van de vergelijking én voldoet aan de beginwaarde. Toon je berekening.

a $y(t) = 3\,\mathrm{e}^{-2t}$ voor $\dot{y} = -2y$, $y(0) = 3$.

✓ $\dot{y} = 3 \cdot (-2)\mathrm{e}^{-2t} = -2 \cdot 3\mathrm{e}^{-2t} = -2y$ en $y(0) = 3$: ja.

b $u(t) = 12\,(1 - \mathrm{e}^{-50t})$ voor $0{,}02\,\dot{u} = 12 - u$, $u(0) = 0$. Wat is τ?

✓ $\dot{u} = 12 \cdot 50\,\mathrm{e}^{-50t} = 600\,\mathrm{e}^{-50t}$, dus $0{,}02\,\dot{u} = 12\,\mathrm{e}^{-50t}$; en $12 - u = 12\,\mathrm{e}^{-50t}$. Gelijk, en $u(0) = 0$: ja. $\tau = 0{,}02\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{ms}$ (en $1/\tau = 50$).

c $T(t) = 20 + 5\,\mathrm{e}^{-t}$ voor $\dot{T} = -(T - 20)$, $T(0) = 30$.

> ✓ $\dot{T} = -5\,\mathrm{e}^{-t} = -(T - 20)$: de vergelijking klopt, maar $T(0) = 25 \neq 30$. Geen oplossing van dit beginwaardeprobleem; de juiste is $20 + 10\,\mathrm{e}^{-t}$.

d $N(t) = \dfrac{10}{1 + 9\,\mathrm{e}^{-t}}$ voor $\dot{N} = N\,(1 - N/10)$, $N(0) = 1$.

> ✓ $\dot{N} = \dfrac{10 \cdot 9\,\mathrm{e}^{-t}}{(1 + 9\mathrm{e}^{-t})^2}$ (kettingregel). Rechterlid: $N(1 - N/10) = \dfrac{10}{1 + 9\mathrm{e}^{-t}} \cdot \dfrac{9\mathrm{e}^{-t}}{1 + 9\mathrm{e}^{-t}}$: hetzelfde. $N(0) = 10/10 = 1$: ja (logistisch met $r = 1$, $K = 10$).

4.2 Van woorden naar een vergelijking

Oefenen · 6 · Begrijpen · 20 min

Schrijf voor elke situatie een differentiaalvergelijking. Geef de eenheid van elke constante, het evenwicht, en zeg of de vergelijking lineair is.

a De batterij van de meetkas verliest in rust 3 % van haar lading per maand (zelfontlading).

> ✓ $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = -k\,Q$ met $k = -\ln 0{,}97 = 0{,}0305$ per maand (ongeveer 3 % per maand); evenwicht $Q = 0$ (leeg); lineair.

b Een regenton loopt leeg door een kraantje onderaan; het debiet is evenredig met de wortel uit de waterhoogte h (Torricelli).

> ✓ $A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = -c\sqrt{h}$, dus $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = -k\sqrt{h}$ met k in $\mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$; evenwicht $h = 0$; niet lineair ($\sqrt{h}$). Scheiden geeft $\sqrt{h}$ lineair dalend in de tijd: de ton is na een eindige tijd leeg.

c Een fles uit de koelkast (4 °C) warmt op in een kamer van 21 °C met een tijdconstante van 40 minuten.

> ✓ $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = (21 - T)/40$ (t in min); evenwicht 21 °C (stabiel); lineair. Oplossing $T = 21 - 17\,\mathrm{e}^{-t/40}$.

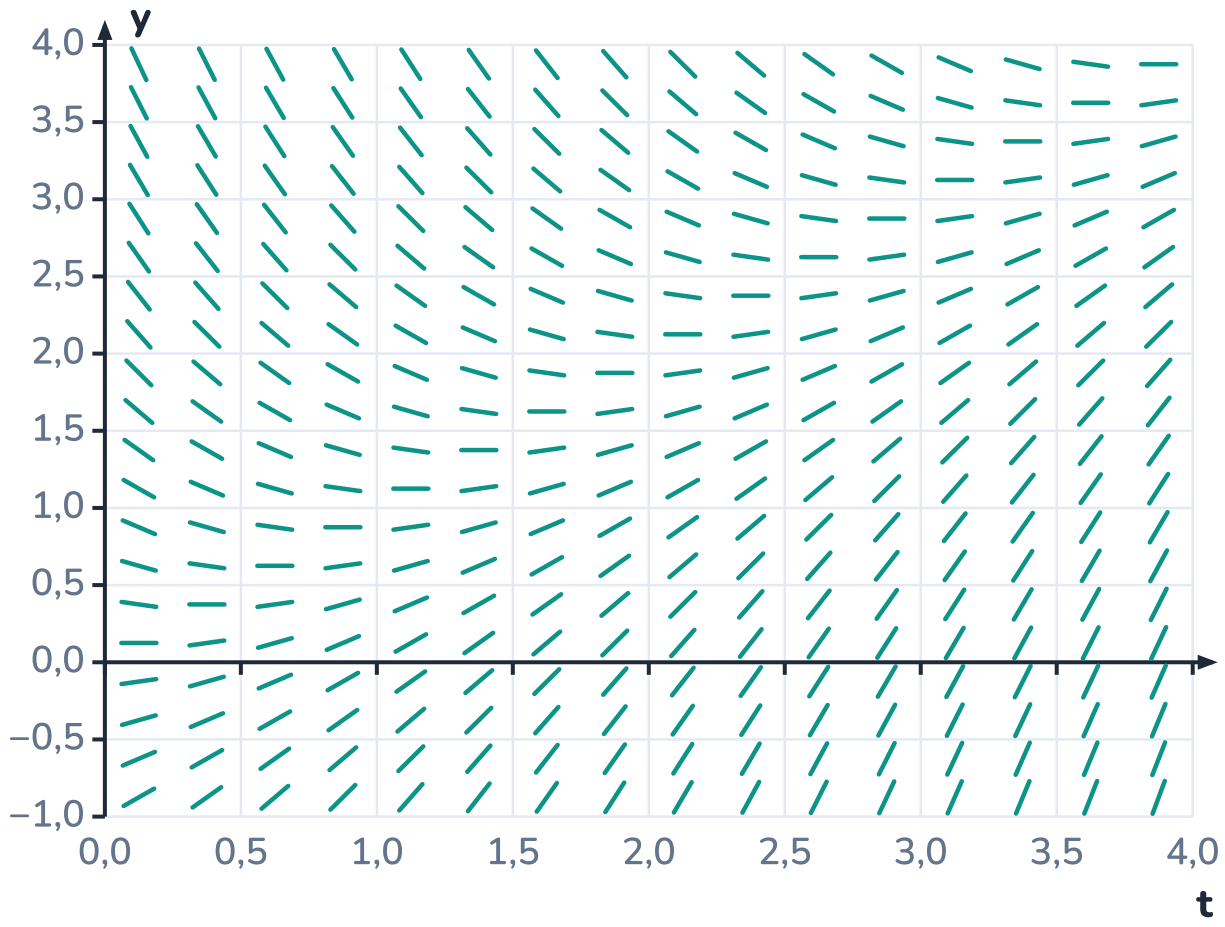
d In een afgesloten kamer met één bewoner stijgt de CO_2-concentratie met 760 ppm per uur (hoofdstuk 14 van I). Wat verandert er als je verlucht met een debiet Q?

> ✓ Zonder verluchting: $\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = 760\,\mathrm{ppm/h}$, een constante: geen evenwicht, de concentratie stijgt lineair. Met verluchting: $V\,\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = G - Q\,(c - c_\mathrm{b})$, lineair, met evenwicht $c_\mathrm{b} + G/Q$ en $\tau = V/Q$ (opdracht 4.7).

4.3 Een richtingsveld lezen en schetsen

Oefenen · 6 · Tekenen · 15 min

De figuur toont het richtingsveld van $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t - y$.



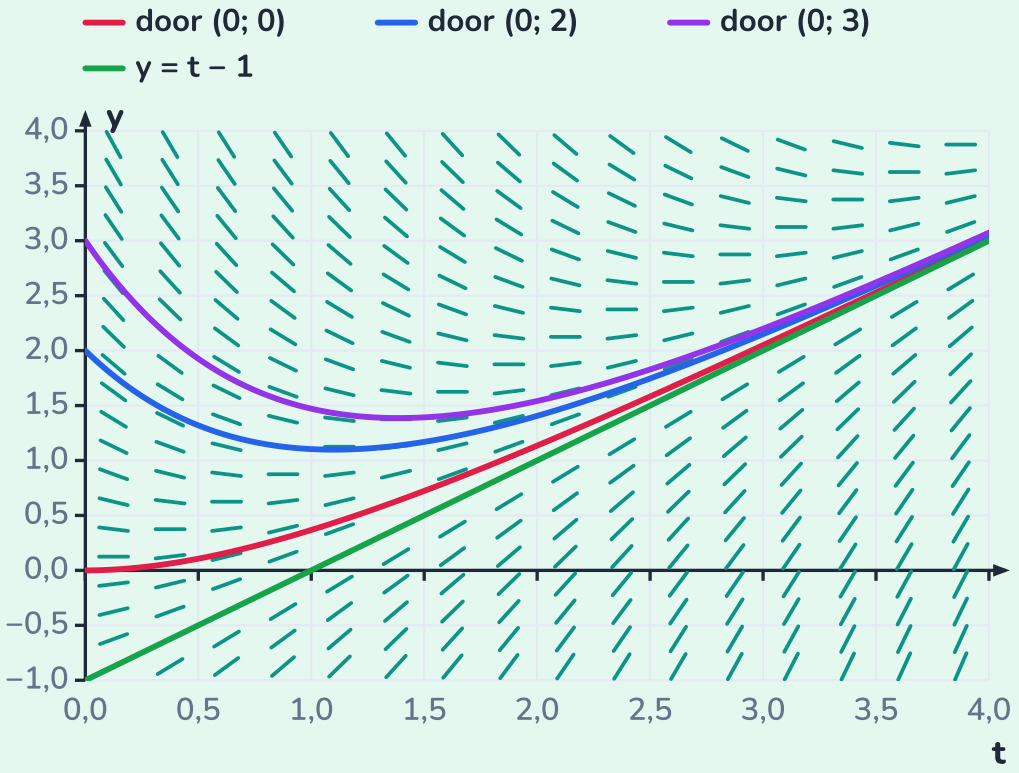
Het richtingsveld van dy/dt = t − y.

a Waar zijn de lijnstukjes horizontaal? Teken die lijn in de figuur.

Waar t − y = 0: op de rechte y = t (een isokline met helling 0). Boven die rechte dalen de oplossingen, eronder stijgen ze.

b Schets de oplossingen door (0; 0), (0; 2) en (0; 3).

Zie de figuur hieronder. De oplossing door (0; 2) daalt eerst en heeft een minimum waar ze de rechte y = t kruist, in (1,10; 1,10); die door (0; 3) ook, iets verder; die door (0; 0) vertrekt horizontaal en stijgt.



c Eén oplossing is een rechte. Welke? Controleer door in te vullen.

$y = t - 1$: $\dot{y} = 1$ en $t - y = t - (t - 1) = 1$. Klopt, voor elke t (door (0; −1)). De algemene oplossing is $y = t - 1 + C\,\mathrm{e}^{-t}$.

d Wat gebeurt er met alle oplossingen voor grote t?

$C\,\mathrm{e}^{-t} \to 0$: alle oplossingen naderen de rechte $y = t - 1$, ongeacht de beginwaarde.

4.4 Scheiden van veranderlijken

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Los op en beantwoord de vraag. Geef eenheden.

a $\dot{y} = -0{,}2\,y$ (t in s), $y(0) = 50$. Bereken de halveringstijd en $y(10)$.

$y = 50\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$; $t_{1/2} = \ln 2 / 0{,}2 = 3{,}47$ s; $y(10) = 50\,\mathrm{e}^{-2} = 6{,}77$.

b $\dot{N} = 0{,}35\,N$ (t in h), $N(0) = 1000$ bacteriën. Bereken de verdubbelingstijd en N na 24 h.

$N = 1000\,\mathrm{e}^{0{,}35t}$; $t_2 = \ln 2 / 0{,}35 = 1{,}98$ h; $N(24) = 1000\,\mathrm{e}^{8{,}4} = 4{,}45 \cdot 10^6$.

c $\dot{T} = -(T - 20)/15$ (t in min), $T(0) = 80$ °C. Wanneer is $T = 30$ °C?

$T = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-t/15}$; $30 = 20 + 60\mathrm{e}^{-t/15}$ geeft $\mathrm{e}^{-t/15} = 1/6$, $t = 15 \ln 6 = 26{,}9$ min.

d $\dot{y} = y^2$ met $y(0) = 1$. Wat is er vreemd aan de oplossing?

✓ $\mathrm{d}y/y^2 = \mathrm{d}t$ geeft $-1/y = t + c$, met $y(0) = 1$: $c = -1$, dus $y = \dfrac{1}{1-t}$. De oplossing ontploft na een eindige tijd: $y \to \infty$ voor $t \to 1$. Een niet-lineaire vergelijking kan dat; een lineaire niet.

4.5 Euler met de hand

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Gegeven $\dot{y} = y - t$ met $y(0) = 2$. De exacte oplossing is $y = t + 1 + \mathrm{e}^t$.

a Zet drie stappen Euler met h = 0,5 tot t = 1,5. Noteer telkens de helling.

✓ Tabel: t = 0,0: y = 2,000 (exact 2,000, fout 0,000); t = 0,5: y = 3,000 (exact 3,149, fout −0,149); t = 1,0: y = 4,250 (exact 4,718, fout −0,468); t = 1,5: y = 5,875 (exact 6,982, fout −1,107). Hellingen: 2; 2,5; 3,25.

b Bereken y(0,5) opnieuw met twee stappen van 0,25. Hoeveel keer kleiner is de fout?

✓ $y(0{,}25) = 2 + 0{,}25 \cdot 2 = 2{,}5$; helling $2{,}5 - 0{,}25 = 2{,}25$; $y(0{,}5) = 3{,}0625$. Fout $-0{,}086$ tegenover $-0{,}149$: $1{,}72$ keer kleiner, bijna 2 (orde 1).

c Waarom ligt Euler hier onder de echte oplossing?

✓ De oplossing is hol ($\ddot{y} = \dot{y} - 1 = \mathrm{e}^t > 0$): de helling neemt toe tijdens elke stap, en Euler gebruikt de helling van het begin. Dus blijft Euler achter.

Toepassen

Toepassen — meerdere stappen, in een context

4.6 De klimaatmodule in een lentenacht

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Om 22 uur gaan de lampen van de klimaatmodule uit; het is dan 26 °C binnen en 4 °C buiten. Met de nachtbuffer (hoofdstuk 18 van I) is C ≈ 1,1 MJ/K; het warmteverlies is 20,2 W/K, met nachtscherm 16,3 W/K (hoofdstuk 19 van I). De sla mag niet onder 16 °C.

a Stel de differentiaalvergelijking op en bereken τ.

✓ $C\,\dot{T} = -UA\,(T - 4)$, dus $\dot{T} = -(T-4)/\tau$ met $\tau = C/UA = 1{,}1 \cdot 10^6/20{,}2 = 54\,455\,\mathrm{s} = 15{,}1\,\mathrm{h}$.

b Bereken de temperatuur om 6 uur, zonder en met nachtscherm.

✓ $T(8\,\mathrm{h}) = 4 + 22\,\mathrm{e}^{-8/15{,}13} = 17{,}0$ °C. Met scherm: $\tau = 18{,}7\,\mathrm{h}$, $T = 18{,}4$ °C. Beide boven 16 °C.

c Simuleer zonder nachtscherm met Euler met stappen van 2 h. Hoe groot is de fout om 6 uur? Is die stap stabiel?

✓ Per stap blijft $1 - 2/15{,}13 = 0{,}8678$ van het verschil over: $4 + 22 \cdot 0{,}8678^4 = 16{,}5$ °C, 0,5 °C te koud. Stabiel: $h = 2\,\mathrm{h}$ is veel kleiner dan $2\tau \approx 30\,\mathrm{h}$.

d Hoe lang mag de nacht (zonder scherm) duren voor de sla onder 16 °C zakt?

✓ $16 = 4 + 22\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ geeft $t = \tau \ln(22/12) = 9{,}2\,\mathrm{h}$: tot ongeveer 7:10.

4.7 CO₂ in de woonmodule

Toepassen · 7 · Rekenen · 30 min

De woonmodule is 6,0 × 4,0 × 2,6 m. Twee bewoners ademen elk ongeveer 1,0 kg CO_2 per dag uit (hoofdstuk 14 van I). CO_2 heeft bij 20 °C een dichtheid van 1,83 kg/m³. Buiten is er 420 ppm. De ventilatie ververst Q m³ lucht per uur. Waarschuwing bij 1000 ppm.

a Bereken de CO_2-productie G in m³/h en stel een vergelijking op voor de concentratie c (als volumefractie).

✓ $G = 2 \cdot 1{,}0\,\text{kg}/24\,\text{h}/1{,}83\,\text{kg/m}^3 = 0{,}0455\,\text{m}^3/\text{h}$. Balans voor het CO_2-volume in de module: $V\,\text{d}c/\text{d}t = G - Q\,(c - c_\text{b})$ met $V = 62{,}4\,\text{m}^3$.

b Zonder ventilatie: hoeveel ppm per uur stijgt c, en na hoeveel minuten wordt 1000 ppm bereikt vanaf 420 ppm?

✓ $\text{d}c/\text{d}t = G/V = 7{,}30 \cdot 10^{-4}$ per uur $= 730\,\text{ppm/h}$. Van 420 naar 1000 ppm: $580/730 = 0{,}79\,\text{h}$, ongeveer 48 minuten.

c Met Q = 50 m³/h: bereken het evenwicht, τ en de tijd tot 1000 ppm vanaf 420 ppm.

✓ Evenwicht $c_\text{b} + G/Q = 420 + 911 = 1331\,\text{ppm}$; $\tau = V/Q = 1{,}25\,\text{h}$. $1000 = 1331 - 911\,\text{e}^{-t/\tau}$ geeft $t = \tau \ln \frac{911}{331} = 1{,}26\,\text{h}$.

d Welk debiet is minstens nodig om onder 1000 ppm te blijven? Hoeveel keer per uur is dat de lucht van de module?

✓ Evenwicht onder 1000 ppm: $G/Q \le 580 \cdot 10^{-6}$, dus $Q \ge 79\,\text{m}^3/\text{h}$: 1,26 keer per uur het volume van de module. Met warmteterugwinning (basisfiche) kost dat weinig warmte.

4.8 τ uit een afkoelcurve

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Na een stroomuitval logt het station om het half uur de binnentemperatuur. Buiten meet de sensor −8,0 °C. De snelle warmtecapaciteit van het station is 540 kJ/K.

t (h)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
T (°C)	20,0	15,6	12,1	9,1	6,4	4,2	2,3	0,9	−0,8

a Bereken $\ln(T + 8)$ voor elke meting en toon dat die punten ongeveer op een rechte liggen.

✓ ln(T + 8): 3,332; 3,161; 3,001; 2,839; 2,667; 2,501; 2,332; 2,186; 1,974. Ze dalen gelijkmatig, ongeveer 0,17 per half uur: een rechte.

b Bepaal τ uit de helling (met een rekenblad of Python), en ook uit enkel de eerste en de laatste meting.

✓ Kleinste kwadraten: helling $-0{,}3344$ per uur, dus $\tau = 2{,}99\,\text{h}$. Uit twee punten: $\tau = 4/\ln\frac{28{,}0}{7{,}2} = 2{,}95\,\text{h}$.

c Hoe groot is het warmteverlies UA volgens deze meting?

✓ $UA = C/\tau = 540\,000/(2{,}99 \cdot 3600) = 50\,\text{W/K}$, zoals het dossier (50 W/K).

d Stel dat het buiten eigenlijk −7,0 °C was. Welke τ vind je dan met ln(T + 7)? Wat leer je daaruit?

✓ Met −7 °C: $\tau = 2{,}77\,\text{h}$, en de punten liggen niet meer op een rechte: $T + 7$ gaat niet naar nul maar naar −1, dus de punten buigen naar beneden af. Een fout van 1 °C in het evenwicht verandert τ met −7 %: meet de buitentemperatuur even zorgvuldig als de binnentemperatuur.

4.9 Euler in Python op de algen

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

De algen in het testreservoir volgen $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ met $r = 0{,}70$ per dag, $K = 7{,}7 \cdot 10^5$ per mL en $N(0) = 1900$ per mL.

a Schrijf een functie euler(f, y0, t0, t1, h) en simuleer tot dag 10 met h = 1; 0,5; 0,25; 0,1 en 0,01 dag.

Bijvoorbeeld:

```
import math

r, K, N0 = 0.70, 7.7e5, 1900.0                    # per dag, cellen per mL


def f(N, t):
    return r * N * (1 - N / K)


def euler(f, y0, t0, t1, h):
    n = round((t1 - t0) / h)
    t, y = t0, y0
    for k in range(n):
        y = y + h * f(y, t)
        t = t + h
    return y


exact = K / (1 + (K - N0) / N0 * math.exp(-r * 10))
print(f"exact op dag 10: {exact:.4g}")
for h in (1.0, 0.5, 0.25, 0.1, 0.01):
    N = euler(f, N0, 0, 10, h)
    print(f"h = {h:5.2f} dag: N(10) = {N:.4g}   relatieve fout {N / exact - 1:+.3f}")
```

b Vergelijk met de exacte oplossing op dag 10. Bevestigt de fout dat Euler van orde 1 is?

Echte uitvoer:

```
exact op dag 10: 5.626e+05
h =  1.00 dag: N(10) = 2.919e+05   relatieve fout -0.481
h =  0.50 dag: N(10) = 4.266e+05   relatieve fout -0.242
h =  0.25 dag: N(10) = 4.986e+05   relatieve fout -0.114
h =  0.10 dag: N(10) = 5.384e+05   relatieve fout -0.043
h =  0.01 dag: N(10) = 5.603e+05   relatieve fout -0.004
```

Voor kleine h halveert de relatieve fout ongeveer bij elke halvering van h (orde 1). Bij h = 1 dag is de fout veel groter dan lineair zou voorspellen: daar is de stap niet meer klein.

c Waarom is een stap van 1 dag hier zo slecht, terwijl de algen maar één keer per dag verdubbelen?

Per stap vermenigvuldigt Euler in het begin met $1 + rh = 1{,}70$ in plaats van $\mathrm{e}^{rh} = 2{,}01$: 15 % te weinig per dag, en dat stapelt op (samengestelde interest). Een stap is pas klein als $rh \ll 1$.

4.10 Het filter op de batterijmeting

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De batterijspanning van de module komt via een deler (100 kΩ boven, 33 kΩ onder) op A3, met 100 nF over de onderste weerstand (hoofdstuk 22 van I). Als de lampen aangaan, zakt de batterij van 13,30 V naar 12,80 V.

a Stel met de knooppuntwet een vergelijking op voor de spanning u over de condensator. Toon dat τ = (R₁ ∥ R₂) · C, en bereken τ.

Knooppunt boven C: stroom door R_1 erin = stroom door R_2 + stroom in C: $\frac{U_{\text{bat}} - u}{R_1} = \frac{u}{R_2} + C\dot{u}$. Herschikken: $C\dot{u} = \frac{U_{\text{th}} - u}{R_{\text{th}}}$ met $U_{\text{th}} = U_{\text{bat}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ en $R_{\text{th}} = R_1 \parallel R_2 = 24{,}8\,\text{k}\Omega$. $\tau = 2{,}48\,\text{ms}$.

b Hoe lang duurt het tot u minder dan één ADC-stap (4,88 mV) van de nieuwe waarde af ligt?

Van $3{,}300$ naar $3{,}176\,\text{V}$: een sprong van $124{,}1\,\text{mV}$. $124{,}1\,\text{e}^{-t/\tau} = 4{,}88$ geeft $t = \tau \ln \frac{124{,}1}{4{,}88} = 8{,}0\,\text{ms}$.

c Simuleer de sprong met Euler met stappen van 1 ms en van 5 ms (5 stappen volstaan). Wat gebeurt er?

Met 1 ms: factor $1 - 1/2{,}48 = 0{,}597$ per stap, de simulatie daalt netjes: $3{,}300;\ 3{,}250;\ 3{,}220;\ 3{,}202;\ 3{,}192;\ 3{,}185\,\text{V}$. Met 5 ms: $h/\tau = 2{,}015 > 2$, factor $-1{,}015$: de simulatie springt om beurten boven en onder $3{,}176\,\text{V}$ en de sprongen worden groter ($3{,}300;\ 3{,}050;\ 3{,}304;\ 3{,}046;\ 3{,}308;\ 3{,}042\,\text{V}$). Onstabiel, al is de stap maar 5 ms.

4.11 Habitat: een warmtebuffer voor de meetkas

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Het team wil eis K7 halen: 's nachts minstens 1 °C warmer dan buiten. Gebruik kas.py uit het handboek (C = 30 kJ/K, a = 0,30 m², UA = 16,7 W/K) en simuleer drie keer dezelfde aprildag na elkaar. Water: 4,19 kJ/K per liter. Het energiebudget van de meetkas is 44 tot 63 Wh per dag.

a Pas kas.py aan zodat het drie dagen simuleert en P_verw en extra water (in liter) als parameter heeft.

Bijvoorbeeld een parameter `dagen=3` (de tijd modulo 24 voor zon en buitentemperatuur), `P_verw` als functie van de klok en `C = 30e3 + liter * 4186`; evalueer de laatste 1441 punten.

b Vul de tabel in voor: niets, 17 W verwarming van 21 tot 6 uur, 20 L water, 40 L water.

Model:

VARIANT (MODEL)	HOOGSTE T OVERDAG	22-6 UUR: KLEINSTE T − T_B	22-6 UUR: GEMIDDELD T − T_B
zonder buffer	30,5 °C	0,1 °C	0,3 °C
17 W verwarming 's nachts	30,5 °C	1,1 °C	1,3 °C
+ 20 L water	28,8 °C	0,5 °C	1,5 °C
+ 40 L water	26,6 °C	1,4 °C	3,4 °C

Energie: 0 Wh, 150 Wh, 0 Wh, 0 Wh per nacht.

c Welke oplossing kies je? Weeg K7, het energiebudget, de hoogste temperatuur en de praktische inpassing af.

Verwarmen haalt K7 maar kost ongeveer 150 Wh per nacht: drie keer het dagbudget, onhaalbaar met 50 Wp. 20 L haalt K7 volgens het model niet (kleinste verschil 0,5 °C); 40 L wel (1,4 °C) en verlaagt bovendien de top van 30,5 naar 26,6 °C. Keuze: ongeveer 40 L in donkere flessen langs de achterwand, in de zon (let op het gewicht: 40 kg extra, wel gunstig tegen kantelen).

d Welke twee beperkingen van het model kunnen je conclusie veranderen, en hoe test je ze?

Eén knoop: water en lucht hebben in het model dezelfde temperatuur, in werkelijkheid geeft een fles zijn warmte traag af (tweede knoop, hoofdstuk 17), dus het echte effect is kleiner. En de trage massa van grond en reservoir ontbreekt al in het basismodel (dat 's nachts te koud is). Test: flessen plaatsen en een week loggen, met en zonder, en het model met twee knopen fitten.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Simulatie	Drie dagen, laatste dag geëvalueerd; P_verw alleen 's nachts; water als extra C.
Resultaten	Tabel volledig en juist, met eenheden.
Afweging	K7, energie (17 W · 9 h ≈ 150 Wh tegenover ±50 Wh per dag), temperatuur overdag en plaats/gewicht afgewogen.
Kritiek	Eén knoop als bovengrens; koppeling water-lucht en trage massa; een proef met de logger voorgesteld.

●●● Uitdagen Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

4.12 De logistische oplossing afleiden

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Het handboek gaf de oplossing van $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ met een schets van de afleiding. Maak ze volledig.

a Toon dat $\dfrac{K}{N(K-N)} = \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{K-N}$ en leid daarmee $N(t)$ af voor $0 < N_0 < K$.

Samen: $\dfrac{(K-N)+N}{N(K-N)} = \dfrac{K}{N(K-N)}$. Scheiden: $\dfrac{K\,\mathrm{d}N}{N(K-N)} = r\,\mathrm{d}t$, integreren: $\ln N - \ln(K-N) = rt + c$ (voor $0 < N < K$). Dus $\dfrac{N}{K-N} = A\,\mathrm{e}^{rt}$ met $A = \dfrac{N_0}{K-N_0}$. Oplossen: $N = Ae^{rt}(K-N)$, $N(1 + Ae^{rt}) = AK\mathrm{e}^{rt}$, $N = \dfrac{K}{1 + \mathrm{e}^{-rt}/A} = \dfrac{K}{1 + \frac{K-N_0}{N_0}\mathrm{e}^{-rt}}$.

b Toon dat $N(t)$ een buigpunt heeft waar $N = K/2$, op $t^* = \dfrac{1}{r}\ln\dfrac{K-N_0}{N_0}$. Bereken t^* en $\dot{N}(t^*)$ voor de algen ($r = 0{,}704$ per dag, $K = 7{,}68 \cdot 10^5$, $N_0 = 1900$).

$\ddot{N} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(N) = f'(N)\,\dot{N} = r\left(1 - \dfrac{2N}{K}\right)\dot{N}$ (kettingregel). Nul (en van teken wisselend) waar $N = K/2$: een buigpunt. $N = K/2$ invullen: $1 + \frac{K-N_0}{N_0}\mathrm{e}^{-rt} = 2$, dus $t^* = \frac{1}{r}\ln\frac{K-N_0}{N_0} = 8{,}52$ dagen. $\dot{N}(t^*) = rK/4 = 1{,}35 \cdot 10^5$ per mL per dag.

c Wat verandert er in de afleiding als $N_0 > K$? Is de formule dan nog geldig?

Voor $N > K$ is $K - N < 0$: gebruik $\ln|K-N|$. Dan is $A = \frac{N_0}{K-N_0} < 0$ en dezelfde formule geldt: de noemer $1 + \frac{K-N_0}{N_0}\mathrm{e}^{-rt}$ ligt tussen 0 en 1, dus $N > K$ en dalend naar K (de bovenste kromme in het richtingsveld).

4.13 De fout van Euler, exact

●●● Uitdagen · 9 · Analyseren · 30 min

Voor $\dot{y} = -y/\tau$ kan je de Euler-benadering exact opschrijven: $y_n = (1 - h/\tau)^n\,y_0$ op $t = nh$.

a Toon met $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots$ dat $\dfrac{y_n}{y(t)} \approx 1 - \dfrac{t\,h}{2\tau^2}$ voor kleine h/τ.

$\ln y_n = \ln y_0 + n\ln(1 - h/\tau) = \ln y_0 - \frac{nh}{\tau} - \frac{nh^2}{2\tau^2} - \cdots = \ln y(t) - \frac{t\,h}{2\tau^2} - \ldots$ Dus $\frac{y_n}{y(t)} = \mathrm{e}^{-th/(2\tau^2)} \approx 1 - \frac{th}{2\tau^2}$: de relatieve fout is evenredig met h (orde 1) en groeit met t.

b Leid daaruit de fout van het station af (het verschil met buiten is $28\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$) op $t = 3\,\mathrm{h}$, en vergelijk met de kolom fout/h van euler.py.

✓ Absolute fout: $-\frac{th}{2\tau^2} \cdot 28\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Op $t = \tau = 3$: $-\frac{3h}{18} \cdot 28\,\mathrm{e}^{-1} = -1{,}717\,h$. euler.py toont fout/h $= -1{,}719$ bij $h = 0{,}01$: klopt.

c Voor welke t is de absolute fout het grootst (bij vaste h)? Interpreteer.

✓ $E(t) \propto t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ is maximaal waar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\mathrm{e}^{-t/\tau}) = \mathrm{e}^{-t/\tau}(1 - t/\tau) = 0$: op $t = \tau$. Eerst groeien de fouten aan (ze stapelen), later dooft alles uit naar het evenwicht, ook de fout.

d Wat zegt $(1 - h/\tau)^n$ als $h > 2\tau$?

✓ $|1 - h/\tau| > 1$: $|y_n|$ groeit geometrisch en wisselt van teken. De reeksontwikkeling geldt dan niet meer: de fout is niet klein maar onbegrensd (instabiliteit).

4.14 Onderzoek: een stijf stelsel

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 45 min

Het station ($\tau = 3\,\mathrm{h}$, $K = 0{,}020$ °C/W) wordt verwarmd met constant 1000 W; zijn sensor volgt met $\tau_\mathrm{s} = 60\,\mathrm{s}$ (hoofdstuk 39). Met y de stijging boven buiten en y_m de meting: $\tau\,\dot{y} = -y + Ku$ en $\tau_\mathrm{s}\,\dot{y}_\mathrm{m} = y - y_\mathrm{m}$.

a Simuleer twee uur met Euler voor dt = 10, 60, 110 en 130 s en druk y en y_m af.

✓ Bijvoorbeeld (beide toestanden in één toewijzing, zodat de oude waarden gebruikt worden):

```
TAU, K, TAU_S = 10800.0, 0.02, 60.0     # station (s), versterking (°C/W), sensor (s)
u = 1000.0                                # constante verwarming (W)

for dt in (10.0, 60.0, 110.0, 130.0):
    y, ym, t = 0.0, 0.0, 0.0                  # stijging boven buiten: echt en gemeten (°C)
    while t < 7200.0 - 1e-9:                  # twee uur
        y, ym = y + dt * (-y + K * u) / TAU, ym + dt * (y - ym) / TAU_S
        t += dt
    print(f"dt = {dt:5.0f} s: y = {y:6.3f} °C, gemeten {ym:10.3f} °C")
```

Echte uitvoer:

```
dt =    10 s: y =  9.735 °C, gemeten      9.677 °C
dt =    60 s: y =  9.751 °C, gemeten      9.693 °C
dt =   110 s: y =  9.824 °C, gemeten      9.767 °C
dt =   130 s: y =  9.849 °C, gemeten    636.691 °C
```

b Verklaar het resultaat met de stabiliteitsgrens. Welke tijdconstante beslist, en waarom?

✓ Het station zelf is na 2 uur 9,7 °C gestegen (exact 20 · (1 − e^(−2/3)) = 9,73 °C): voor y zijn alle stappen ruim klein genoeg tegenover τ = 3 h. De sensor volgt netjes tot dt = 110 s; bij 130 s is h/τ_s = 2,17 > 2 en ontploft y_m. De snelste tijdconstante (60 s) beslist, ook al verandert de meting na een minuut niet meer wezenlijk: dat is een stijf stelsel.

c De **impliciete** Euler gebruikt de helling aan het *eind* van de stap: $y_{n+1} = y_n + h f(y_{n+1})$. Toon dat die voor $\dot{y} = -y/\tau$ geeft $y_{n+1} = y_n/(1 + h/\tau)$, en dat ze voor elke $h > 0$ stabiel is.

✓ $y_{n+1} = y_n - \frac{h}{\tau} y_{n+1}$ geeft $y_{n+1}(1 + h/\tau) = y_n$. De factor $\frac{1}{1+h/\tau}$ ligt tussen 0 en 1 voor elke $h > 0$: altijd dalend, nooit ontploffend. Voor een lineair stelsel moet je per stap wel een stelsel oplossen (hoofdstuk 5, en hoofdstuk 36).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Correct stelsel, beide toestanden tegelijk bijgewerkt (met de oude waarden).
Analyse	Grens 2τ_s = 120 s herkend; de snelste tijdconstante beslist, al is ze oninteressant.
Impliciet	Afleiding correct; |1/(1 + h/τ)| < 1 voor elke h > 0.

4.15 Open modelleervraag: algen oogsten

Uitdagen · 8 · Onderzoeken · 50 min

In hoofdstuk 31 kweekt het station algen voor zuurstof. Stel dat ze logistisch groeien zoals in het testreservoir (r = 0,70 per dag, K = 7,7 · 10^5 per mL) in een vat van 60 L, en dat je ze oogst.

a Continu oogsten met een fractie E per dag: $\dot{N} = rN(1 - N/K) - EN$. Zoek de evenwichten en de voorwaarde op E opdat de kweek niet uitsterft.

✓ $\dot{N} = N\,(r - E - rN/K) = 0$: $N = 0$ of $N^* = K(1 - E/r)$. Positief alleen als $E < r$; dan is N^* stabiel en $N = 0$ onstabiel. Bij $E \geq r$ sterft de kweek uit.

b De oogst per dag is E · N*. Welke E geeft de grootste oogst (hoofdstuk 2)? Hoeveel cellen per dag is dat voor het hele vat?

✓ $Y(E) = E\,K(1 - E/r)$: $Y'(E) = K(1 - 2E/r) = 0$ bij $E = r/2 = 0{,}35$ per dag, $N^* = K/2$, $Y = rK/4 = 1{,}35 \cdot 10^5$ per mL per dag. Voor 60 L (60 000 mL): $8{,}1 \cdot 10^9$ cellen per dag.

c Eén keer per dag oogsten is praktischer: elke dag een fractie f weghalen, daartussen logistisch groeien. Welke f is best (simuleer)? Vergelijk met continu.

✓ Simulatie (exacte logistische groei over één dag, dan oogsten, 60 dagen tot een vaste cyclus): de beste fractie is ongeveer $f = 0{,}30$, met $1{,}34 \cdot 10^5$ cellen per mL per dag, 99 % van het continue optimum. Dagelijks oogsten kost dus maar weinig.

d Waarom zegt de K van het testreservoir weinig over een echte algenreactor? Welke grootheden zou je eerst meten?

✓ In het testreservoir begrensde het licht de algen (ze beschaduwen elkaar in een diep, weinig belicht vat). Een reactor is ontworpen voor licht (dunne lagen, lampen), CO_2 en voeding: K en r kunnen tien tot honderd keer groter zijn. Meet in de reactor zelf de groei van een kleine beginwaarde (r) en de eindwaarde zonder oogst (K), bij het gekozen licht.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Evenwichten 0 en K(1 − E/r); voorwaarde E < r; stabiliteit besproken.
Optimum	E = r/2, N* = K/2, oogst rK/4, per vat omgerekend.
Simulatie	Dagelijkse oogst correct gemodelleerd; optimum gevonden en vergeleken.
Kritiek	K hangt af van licht (en voeding, CO_2); r en K meten in de reactor zelf.

4.16 Programmeeronderzoek: hoe klein moet de stap zijn?

Uitdagen · 9 · </> Programmeren · 45 min

Je weet niet altijd wat de exacte oplossing is. Dan schat je de numerieke fout door de stap te halveren. Gebruik kas.py (C = 30 kJ/K, a = 0,30 m²) en bekijk de temperatuur om 14:00.

a Bereken T(14:00) met stappen van 60, 30, 15, 7,5, 3,75, … minuten (zeven stappen). Maak een tabel.

✓ Een lus over `dt = 3600 / 2**i` met `simuleer` tot 14 h. Resultaat:

STAP (MIN)	60	30	15	7,5	3,75	1,875	0,9375
T om 14:00 (°C)	32,11	30,69	30,62	30,58	30,56	30,55	30,55

b Toon dat het verschil tussen twee opeenvolgende resultaten telkens ongeveer halveert. Wat zegt dat?

Verschillen: −1,418, −0,070, −0,037, −0,018, −0,009, −0,005 °C: telkens ongeveer de helft. De fout is evenredig met de stap: orde 1, zoals voorspeld. (Bij 60 min is h net iets groter dan 2τ: de simulatie is al zwak onstabiel en 1,4 °C te warm; daar klopt de verhouding niet.)

c Bij orde 1 is $T(h) \approx T^* + ch$. Leid af dat $T^* \approx 2\,T(h/2) - T(h)$ (extrapolatie van Richardson) en schat zo de exacte waarde.

$T(h) = T^* + ch$ en $T(h/2) = T^* + ch/2$; aftrekken: $ch/2 = T(h) - T(h/2)$, dus $T^* = T(h/2) - ch/2 = 2T(h/2) - T(h)$. Met de twee kleinste stappen: $T^* \approx 30{,}543$ °C (met een stap van 5 s: $30{,}543$ °C).

d Welke stap volstaat voor een fout onder 0,05 °C? Waarom rekent de Pi toch met 1 minuut?

De fout bij stap h is ongeveer T(h) − T*: bij 15 min 0,07 °C, bij 7,5 min 0,04 °C. Een stap van 7,5 minuten volstaat dus. De Pi rekent met 1 minuut omdat het niets kost (1440 stappen per dag) en een ruime marge geeft tegenover de stabiliteitsgrens (2τ ≈ 60 min), ook als C kleiner blijkt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Stappen correct gehalveerd, telkens tot 14:00 gesimuleerd.
Orde	Halverende verschillen herkend als orde 1.
Richardson	Afleiding en toepassing correct.
Keuze	Stap met onderbouwde marge; stabiliteit (τ ≈ 30 min) mee in rekening gebracht.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 5

Vectoren en matrices

Richtingen in de ruimte en veel vergelijkingen tegelijk: het rekenwerk achter krachten, netwerken en constructies

Uitgewerkte oplossingen bij de 18 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 8× toepassen · 4× uitdagen · ± 460 min

W Wiskundig modelleren · K Krachten, beweging en constructies · L Elektriciteit en elektronica



Drie tuidraden, drie krachten in drie richtingen: samen duwen ze de mast recht naar beneden.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

5.1 Rekenen met vectoren

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Gegeven $\vec{a} = (2;\ -1;\ 3)$ en $\vec{b} = (1;\ 4;\ -2)$.

a Bereken $\vec{a} + \vec{b}$ en $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

✓ $\vec{a} + \vec{b} = (3;\ 3;\ 1)$; $3\vec{a} - 2\vec{b} = (6-2;\ -3-8;\ 9+4) = (4;\ -11;\ 13)$.

b Bereken $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en de eenheidsvector $\hat{a}$.

✓ $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = 3{,}742$; $|\vec{b}| = \sqrt{21} = 4{,}583$; $\hat{a} = (0{,}535;\ -0{,}267;\ 0{,}802)$.

c Bereken $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

✓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 4 - 6 = -8$; $\cos\theta = \dfrac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -0{,}4666$, $\theta = 117{,}8°$ (stomp).

d Bereken de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$ (als getal en als vector).

✓ Als getal: $\vec{b} \cdot \hat{a} = -8/\sqrt{14} = -2{,}138$ (negatief: $\vec{b}$ wijst een beetje tegen $\vec{a}$ in). Als vector: $\frac{-8}{14}\vec{a} = (-1{,}143;\ 0{,}571;\ -1{,}714)$.

5.2 Het vectorproduct

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Opnieuw $\vec{a} = (2;\ -1;\ 3)$ en $\vec{b} = (1;\ 4;\ -2)$.

a Bereken $\vec{a} \times \vec{b}$ en controleer dat het loodrecht staat op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$.

✓ $\vec{a} \times \vec{b} = ((-1)(-2) - 3 \cdot 4;\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2);\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) = (-10;\ 7;\ 9)$. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -20 - 7 + 27 = 0$ en $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -10 + 28 - 18 = 0$.

b Controleer $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

✓ Links: $100 + 49 + 81 = 230$. Rechts: $14 \cdot 21 - 64 = 230$. Klopt (dat is de identiteit van Lagrange, opdracht 5.15).

c Bereken de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $P = (0;\ 0;\ 0)$, $Q = (2;\ 0;\ 0)$, $R = (0;\ 3;\ 4)$.

✓ $\vec{PQ} \times \vec{PR} = (2;\ 0;\ 0) \times (0;\ 3;\ 4) = (0 \cdot 4 - 0 \cdot 3;\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 4;\ 2 \cdot 3 - 0) = (0;\ -8;\ 6)$, lengte 10. De driehoek is de helft van het parallellogram: 5.

5.3 Matrices vermenigvuldigen

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a Welke afmetingen hebben AB en BA? Bereken beide.

✓ $(2 \times 3)(3 \times 2) = 2 \times 2$ en $(3 \times 2)(2 \times 3) = 3 \times 3$. $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & 14 & 4 \end{pmatrix}$. Niet eens van dezelfde grootte: $AB \neq BA$.

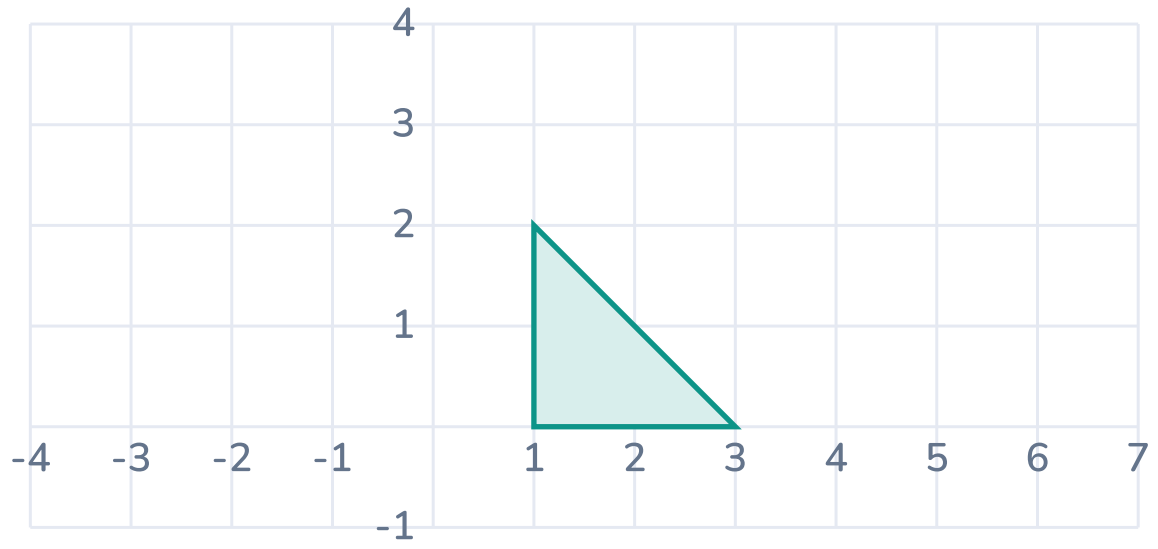
b Bereken $\det(AB)$ en $(AB)^{-1}$, en controleer met $(AB)(AB)^{-1} = I$.

✓ $\det(AB) = 2 \cdot 0 - (-1)(-1) = -1$. $(AB)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Controle: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4 Transformaties tekenen

Oefenen · 6 · Tekenen · 20 min

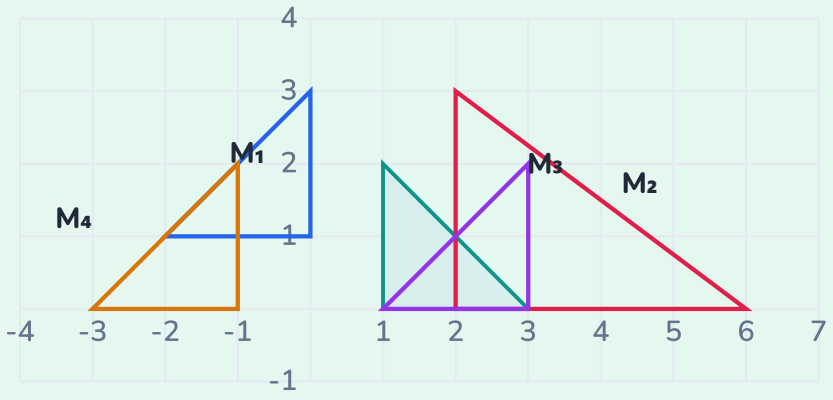
Pas op de driehoek vier matrices toe: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



De driehoek met hoekpunten (1; 0), (3; 0) en (1; 2).

a Bereken de beelden van de drie hoekpunten voor elke matrix en teken de vier beelddriehoeken in het rooster.

M_1: (0; 1), (0; 3), (−2; 1). M_2: (2; 0), (6; 0), (2; 3). M_3: (1; 0), (3; 0), (3; 2). M_4: (−1; 0), (−3; 0), (−1; 2).



b Beschrijf elke transformatie in woorden.

M_1: rotatie over 90° tegen de klok in. M_2: in x twee keer zo breed, in y anderhalve keer zo hoog. M_3: afschuiving (elk punt schuift evenwijdig met de x-as, evenredig met zijn hoogte). M_4: spiegeling in de y-as.

c De oorspronkelijke driehoek heeft oppervlakte 2. Bereken met de determinant de oppervlakte van elk beeld. Wat betekent het teken?

$\det M_1 = 1$: 2. $\det M_2 = 3$: 6. $\det M_3 = 1$: 2 (afschuiven bewaart de oppervlakte). $\det M_4 = -1$: 2, maar de driehoek is gespiegeld: de volgorde van de hoekpunten draait om (met de klok mee in plaats van tegen de klok in).

5.5 Het graanprobleem uit de Negen hoofdstukken

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Drie bundels graan van de beste soort, twee van de middelste en één van de slechtste leveren 39 dou; twee, drie en één leveren 34 dou; één, twee en drie leveren 26 dou (het eerste probleem van hoofdstuk 8 van de Jiuzhang suanshu).

a Schrijf het stelsel als aangevulde matrix.

✓ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$ met x, y, z de opbrengst van één bundel van de beste, middelste en slechtste soort.

b Los het op met de methode van Gauss, met de hand. Toon elke rijbewerking.

✓ $R_2 \leftarrow 3R_2 - 2R_1$: $(0\ \ 5\ \ 1 \mid 24)$. $R_3 \leftarrow 3R_3 - R_1$: $(0\ \ 4\ \ 8 \mid 39)$. $R_3 \leftarrow 5R_3 - 4R_2$: $(0\ \ 0\ \ 36 \mid 99)$. Terug: $z = 99/36 = 11/4$; $y = (24 - 11/4)/5 = 17/4$; $x = (39 - 2 \cdot 17/4 - 11/4)/3 = 37/4$.

c Controleer je oplossing door ze in te vullen.

✓ $x = 9\frac{1}{4}$, $y = 4\frac{1}{4}$, $z = 2\frac{3}{4}$ dou. Invullen: $3 \cdot 9{,}25 + 2 \cdot 4{,}25 + 2{,}75 = 39$, $2 \cdot 9{,}25 + 3 \cdot 4{,}25 + 2{,}75 = 34$, $9{,}25 + 2 \cdot 4{,}25 + 3 \cdot 2{,}75 = 26$. Klopt.

5.6 Hoeveel oplossingen?

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

(a) $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x + y - z = 1$. (b) $x + y + z = 6$, $x + y + z = 4$, $x - y = 0$. (c) $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x + 2z = 8$.

a Welk stelsel heeft één oplossing, welk geen, welk oneindig veel? Toon het met Gauss.

✓ (a) Eén oplossing: $(1;\ 2;\ 3)$ (de eerste twee geven $2y = 4$; dan $x + z = 4$ en $2x - z = -1$). (b) Geen: de eerste twee zeggen $6 = 4$ (rij $0 = 2$). (c) Oneindig veel: de derde is de som van de eerste twee (rij $0 = 0$); $y = 2$, $x + z = 4$: alle punten $(t;\ 2;\ 4 - t)$.

b Geef voor elk stelsel de meetkundige betekenis (drie vlakken in de ruimte) en de waarde van de determinant.

✓ (a) Drie vlakken door één punt; $\det = 6$. (b) Twee evenwijdige vlakken, dus geen gemeenschappelijk punt; $\det = 0$. (c) Drie vlakken door dezelfde rechte (zoals de bladzijden van een boek); $\det = 0$. Een determinant nul zegt dus 'niet precies één oplossing', maar niet welk van de twee andere gevallen.

●●○ Toepassen Toepassen

meerdere stappen, in een context

5.7 Het kasdak openen

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Het schuifpaneel van de kasmodule (10 kg) schuift 0,60 m omhoog over rails onder 25° (hoofdstuk 7 en 8 van I). De riem trekt met 60 N.

a Schrijf de verplaatsing $\vec{s}$ en de zwaartekracht $\vec{G}$ als vectoren (x horizontaal, y omhoog) en bereken W_G.

✓ $\vec{s} = 0{,}60\,(\cos 25°;\ \sin 25°) = (0{,}5438;\ 0{,}2536)$ m; $\vec{G} = (0;\ -98{,}1)$ N; $W_G = -98{,}1 \cdot 0{,}2536 = -24{,}9$ J $(= -mgh)$.

b Bereken de arbeid van de riem als hij evenwijdig met de rails trekt, en als hij onder 10° boven de rails trekt.

✓ Evenwijdig: $\vec{F} = 60\,(\cos 25°;\ \sin 25°)$, $W = 60 \cdot 0{,}60 = 36{,}0$ J. Onder 10°: $\vec{F} = 60\,(\cos 35°;\ \sin 35°) = (49{,}1;\ 34{,}4)$ N, $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 35{,}45$ J $= 36\cos 10°$.

c Waar gaat het verschil naartoe? Is een schuine riem slechter?

✓ De component loodrecht op de rails (60 sin 10° = 10,4 N) doet geen arbeid: ze duwt het paneel een beetje van de rails. Dat vermindert de normaalkracht en dus de wrijving, maar vraagt een riem die 1,5 % harder trekt voor dezelfde arbeid. Een kleine hoek kost weinig; een grote hoek kost veel kracht (en belast de geleiding).

5.8 De zon op het paneel door het jaar

●●○ Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Het zonnepaneel van de module staat onder 60° op het zuiden, het jaaroptimum voor Brussel is 39° (hoofdstuk 6 van I). De zon staat om 12:00 zonnetijd in het zuiden op een hoogte h = 90° − 50,8° + δ, met δ = 0° op 21 maart, +23,44° op 21 juni en −23,44° op 21 december.

a Schrijf $\hat{s}$ en de normaal $\hat{n}$ van een paneel onder een hoek β op het zuiden als vectoren. Toon met het scalair product dat om 12:00 $\cos\theta = \cos(h + \beta - 90°)$.

✓ $\hat{s} = (0;\ -\cos h;\ \sin h)$, $\hat{n} = (0;\ -\sin\beta;\ \cos\beta)$. $\hat{s} \cdot \hat{n} = \cos h \sin\beta + \sin h \cos\beta = \sin(h + \beta) = \cos(h + \beta - 90°)$.

b Vul de tabel in voor β = 60° en β = 39°.

✓ Resultaat:

DATUM (MIDDAG)	ZONNEHOOGTE	ϑ BIJ 60°	COS ϑ	ϑ BIJ 39°	COS ϑ
21 maart	39,2°	9,2°	0,987	11,8°	0,979
21 juni	62,6°	32,6°	0,842	11,6°	0,979
21 december	15,8°	14,2°	0,969	35,2°	0,817

c Op 21 juni om 15:00 is $\hat{s} = (-0{,}649;\ -0{,}251;\ 0{,}718)$. Bereken $\cos\theta$ voor beide hellingen.

✓ 60°: $\cos\theta = 0{,}577$; 39°: $\hat{n} = (0;\ -0{,}629;\ 0{,}777)$, $\cos\theta = 0{,}716$.

d Waarom koos hoofdstuk 6 van I toch 60°? Gebruik je tabel.

✓ Om 12:00 in de zomer vangt 39° meer (0,979 tegenover 0,842), in de winter 60° (0,969 tegenover 0,817). In de winter is de energie schaars (hoofdstuk 20 van I: tekort van november tot februari); in de zomer is er overschot. Het paneel is dus ontworpen voor de maand waarin elke kilowattuur telt.

5.9 Het dakraam van de meetkas

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Het dakraam van de meetkas (0,60 × 0,60 m, 1,2 kg) draait om een scharnier achteraan. De duwstang duwt verticaal omhoog op 0,12 m van het scharnier (hoofdstuk 12 van F). Neem het scharnier als oorsprong, x horizontaal naar voren, y omhoog.

a Bereken met $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ het moment van het gewicht om het scharnier als het raam dicht is, en als het 20° open staat.

Dicht: $\vec{r} = (0{,}30;\ 0;\ 0)$, $\vec{G} = (0;\ -11{,}77;\ 0)$: $M_z = 0{,}30 \cdot (-11{,}77) = -3{,}53\,\text{N}\cdot\text{m}$. Open: $\vec{r} = 0{,}30\,(\cos 20°;\ \sin 20°;\ 0)$, $M_z = r_x G_y - r_y G_x = -3{,}32\,\text{N}\cdot\text{m}$.

b Hoe groot moet de verticale duwkracht in beide standen zijn? Vergelijk met de 29,5 N van hoofdstuk 12 van F.

Dicht: $0{,}12 \cdot F = 3{,}53$, dus $F = 29{,}4\,\text{N}$ (hoofdstuk 12 van F vond 29,5 N, met het gewicht afgerond op 11,8 N). Open: $\vec{r} = 0{,}12\,(\cos 20°;\ \sin 20°)$, $\vec{F} = (0;\ F)$: $M_z = 0{,}12\cos 20° \cdot F$, dus $F = 29{,}4\,\text{N}$.

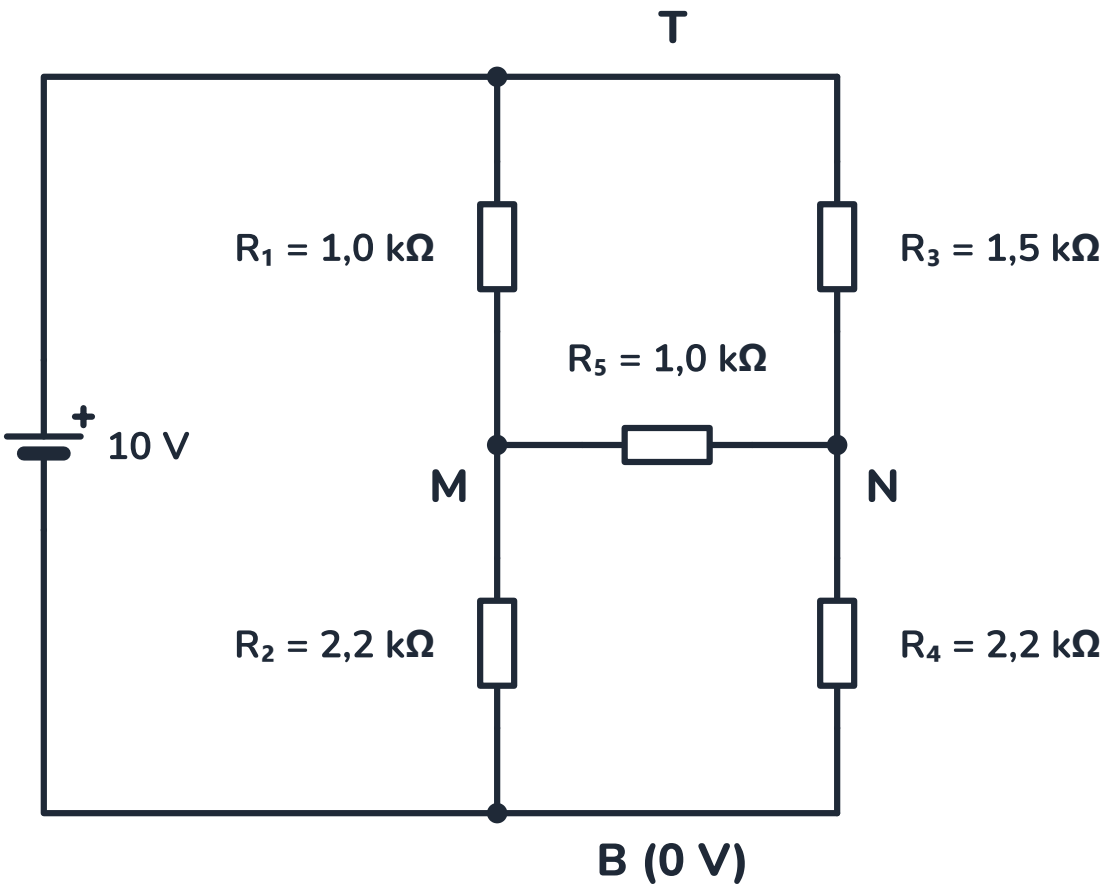
c Waarom hangt die kracht niet af van de openingshoek? Zou dat zo blijven als de stang loodrecht op het raam duwt?

Bij een verticale kracht is de arm de horizontale afstand: voor het gewicht $0{,}30\cos 20°$, voor de stang $0{,}12\cos 20°$. De factor $\cos 20°$ valt weg. Duwt de stang loodrecht op het raam, dan blijft haar arm 0,12 m terwijl die van het gewicht krimpt: de kracht wordt kleiner naarmate het raam opengaat.

5.10 De brug van hoofdstuk 21 met twee knopen

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

De brug van hoofdstuk 21 van I: R_1 = 1,0 kΩ, R_2 = 2,2 kΩ, R_3 = 1,5 kΩ, R_4 = 2,2 kΩ, R_5 = 1,0 kΩ op 10 V. T ligt op 10 V, B op 0 V.



De brug van opdracht 21.14 van Intermediate.

a Stel de knooppuntvergelijkingen op voor M en N als $G\vec{v} = \vec{i}$ (in mS, V en mA).

$G = \begin{pmatrix} 2{,}4545 & -1{,}0000 \\ -1{,}0000 & 2{,}1212 \end{pmatrix}$ mS, $\vec{i} = \begin{pmatrix} 10/1{,}0 \\ 10/1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6{,}667 \end{pmatrix}$ mA (de vaste 10 V van T gaat als stroombron naar rechts).

b Los het stelsel met de hand op (Gauss of de inverse van een 2 × 2-matrix) en bereken de stroom door R_5.

✓ $\det G = 4{,}2066$. $V_M = \dfrac{10 \cdot 2{,}1212 + 6{,}667}{4{,}2066} = 6{,}627\,\text{V}$, $V_N = \dfrac{2{,}4545 \cdot 6{,}667 + 10}{4{,}2066} = 6{,}267\,\text{V}$. Door R_5: $(V_M - V_N)/1{,}0 = 0{,}3602\,\text{mA}$ van M naar N.

c gauss.py loste dezelfde brug op met drie maasstromen. Waarom heeft de knooppuntenmethode hier minder onbekenden?

✓ De mazen tellen de vensters (3), de knopen de knopen min de referentie min de knopen met een vaste spanning (4 – 1 – 1 = 2). Welke methode kleiner is, hangt van het netwerk af; computers gebruiken bijna altijd knopen, omdat de matrix zo eenvoudig op te bouwen is.

5.11 De sensorkast op drie meter, als matrix

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De 5 V-rail van de klimaatmodule voedt de sensorkast boven het kweekbed: 3,0 m kabel met aders van 0,14 mm², 156 mA bij de piek (hoofdstuk 21 van I). Vanuit de sensorkast loopt 2,0 m dezelfde kabel verder naar een lichtsensor op het kasdak (25 mA). Rekenwaarde: de rail staat vast op 5,00 V; reken met de weerstand van plus- en minader samen.

a Bereken de weerstand van beide kabelstukken en stel het stelsel G v = i op voor de sensorkast K en de lichtsensor L.

✓ $R_{VK} = 2 \cdot 0{,}0172 \cdot 3{,}0/0{,}14 = 0{,}737\,\Omega$, $R_{KL} = 0{,}491\,\Omega$. $G = \begin{pmatrix} 3{,}391 & -2{,}035 \\ -2{,}035 & 2{,}035 \end{pmatrix}\,\text{S}$, $\vec{i} = \begin{pmatrix} 5/R_{VK} - 0{,}156 \\ -0{,}025 \end{pmatrix}$.

b Los op. Welke spanning krijgen de sensoren?

✓ $v_K = 4{,}867\,\text{V}$, $v_L = 4{,}854\,\text{V}$. (Zonder matrix: door de eerste kabel loopt 181 mA, door de tweede 25 mA.)

c Je trekt ook een kabel van 4,0 m rechtstreeks van de rail naar de lichtsensor (een ring). Stel het nieuwe stelsel op en los het op. Wat verandert er?

✓ Met de ring komt $1/R = 1/0{,}983\,\text{S}$ bij op de diagonaal van L en $5/0{,}983\,\text{A}$ in het rechterlid. $v_K = 4{,}915\,\text{V}$, $v_L = 4{,}935\,\text{V}$: beide hoger, en L krijgt nu stroom langs twee kanten. De CO_2-sensor vraagt minstens 4,5 V: beide oplossingen volstaan, de ring met meer marge.

5.12 Gauss in Python, en waarom je rijen verwisselt

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Je schrijft zelf een functie gauss(A, b) en onderzoekt wat de rijverwisseling doet.

a Schrijf gauss(A, b, spil=True) met eliminatie, rijverwisseling (als spil=True) en terug invullen. Test op het graanprobleem.

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np


def gauss(A, b, spil=True):
    A, b = np.array(A, float), np.array(b, float)
    n = len(b)
    for k in range(n - 1):
        if spil:                                    # rijverwisseling: grootste element als spil
            p = k + np.argmax(abs(A[k:, k]))
            A[[k, p]], b[[k, p]] = A[[p, k]], b[[p, k]]
        for i in range(k + 1, n):
            m = A[i, k] / A[k, k]
            A[i, k:] -= m * A[k, k:]
            b[i] -= m * b[k]
    x = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        x[i] = (b[i] - A[i, i + 1:] @ x[i + 1:]) / A[i, i]
    return x


print("rijstprobleem:", gauss([[3, 2, 1], [2, 3, 1], [1, 2, 3]], [39, 34, 26]))
A, b = [[1e-17, 1.0], [1.0, 1.0]], [1.0, 2.0]
print("zonder rijverwisseling:", gauss(A, b, spil=False))
print("met rijverwisseling:   ", gauss(A, b))
```

b Los $\begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ op met en zonder rijverwisseling. De exacte oplossing is bijna $(1;\ 1)$. Wat gebeurt er?

Echte uitvoer:

```
rijstprobleem: [9.25 4.25 2.75]
zonder rijverwisseling: [0. 1.]
met rijverwisseling:    [1. 1.]
```

Zonder rijverwisseling is x = 0 in plaats van 1: volledig fout. Met rijverwisseling klopt het.

c Verklaar het resultaat met de afronding van een float (ongeveer 16 cijfers).

Zonder verwisseling is de vermenigvuldiger $m = 1/10^{-17} = 10^{17}$. De tweede rij wordt $1 - 10^{17}$ en $2 - 10^{17}$: in een float allebei -10^{17}, want 1 en 2 vallen weg tegenover 10^{17}. Dan is $y = 1$ en $x = (1 - y)/10^{-17} = 0$: de kleine fout in y wordt door 10^{-17} gedeeld. Met verwisseling is de spil 1 en de vermenigvuldiger 10^{-17}: niets gaat verloren.

5.13 Habitat: de voedingslijnen van de module toetsen

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Gebruik netwerk.py uit het handboek (het 12,8 V-net van de klimaatmodule). Ontwerpregel: hoogstens 3 % spanningsval (0,38 V) in de kabel naar een verbruiker bij normaal bedrijf, ook als de ringkabel breekt. Standaarddoorsneden: 1,5 - 2,5 - 4 - 6 - 10 - 16 mm²; koper weegt 8,96 g/cm³.

a Voeg een lastgeval toe: de dakmotor blokkeert (10 A). Wat is de spanning aan de motor en aan de rail?

Last D = 10 A: $v_D = 12{,}09\ \mathrm{V}$, rail $12{,}92\ \mathrm{V}$; de val over de motorkabel is 0,83 V (6,4 %). De batterijen leveren samen 26,5 A.

b Welke kabel moet dikker om de 3 %-regel te halen als de ring breekt? Kies de kleinste doorsnede die volstaat.

Zonder ring valt er 0,391 V tot L2 (3,06 %): net te veel. Met 10 mm² voor de kabel V–L1 wordt dat 0,255 V (2,0 %): goed. (16 mm² geeft 0,179 V, niet nodig.) Voor de dakmotor volstaat 2,5 mm² bij normaal bedrijf (0,152 V); 4 mm² halveert bijna de val bij blokkeren (0,52 V).

c Hoeveel koper (in gram) zit er nu in alle kabels samen, en hoeveel komt erbij met je keuze?

Koper: $2 \cdot L \cdot A \cdot 8{,}96\,\mathrm{g/cm^3}$ per kabel (twee aders), samen 1446 g. De kabel V–L1 van 6 naar 10 mm²: $2 \cdot 4{,}0\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{mm^2} \cdot 8{,}96 = 287\,\mathrm{g}$ extra.

d Schrijf een advies van 5 à 8 regels voor het ontwerp van het net, met getallen.

Bijvoorbeeld: 'De lampen blijven in een ring gevoed (grootste val 1,5 %). Kabel V–L1 wordt 10 mm², zodat ook bij een breuk van de ring de val onder 3 % blijft (2,0 %, 287 g koper extra). Pomp (1,5 mm²) en dakmotor (2,5 mm²) blijven; bij een blokkerende dakmotor valt de spanning aan de motor tot 12,1 V, en de zekering van 5 A traag moet de motor binnen enkele seconden afschakelen. De batterijen delen de last ongelijk (14,6 en 3,7 A) zolang hun laadtoestand verschilt; dat is normaal.'

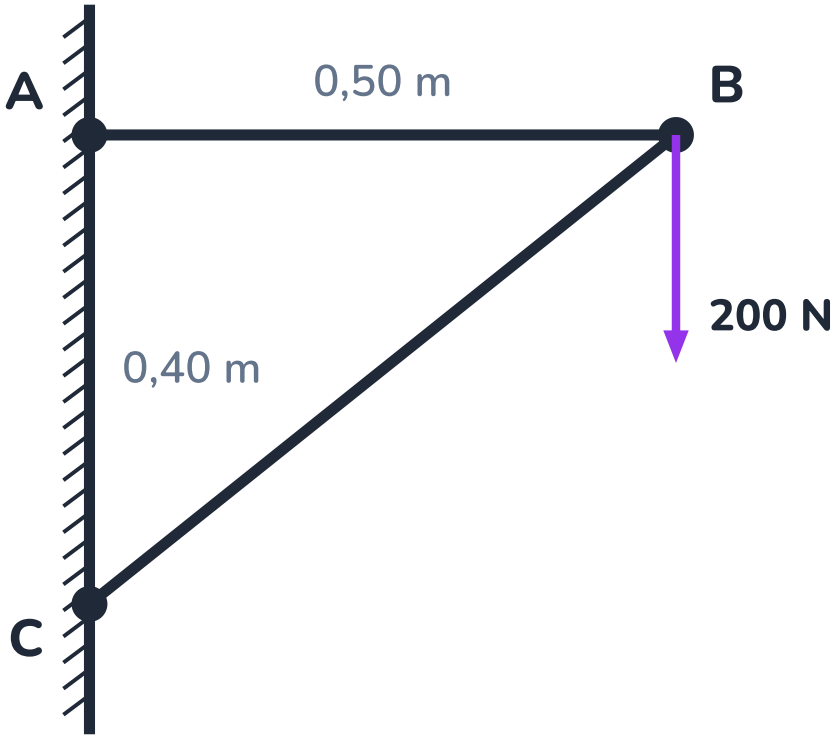
ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Lastgeval en kabelbreuk correct in het stelsel gezet (last D = 10 A; tak L2-V weggelaten).
Toets	Spanningsvallen per kabel berekend tegenover 0,38 V; de zwakke kabel gevonden.
Keuze	Kleinste doorsnede die volstaat, met koperverbruik als afweging.
Advies	Onderbouwd met getallen; ring, dakmotor en zekering besproken.

5.14 Een wandconsole als stelsel

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een console aan de wand draagt in B een omvormer van 20 kg (200 N als rekenwaarde). A en C zijn scharnieren aan de wand.



Een console met een horizontale staaf AB en een schuine staaf CB; last 200 N in B.

a Geef de eenheidsvectoren van B naar A en van B naar C. Stel het evenwicht van knoop B op als 2 × 2-stelsel en los op.

✓ $\hat{e}_{BA} = (-1;\ 0)$, $\hat{e}_{BC} = (-0{,}50;\ -0{,}40)/0{,}640 = (-0{,}781;\ -0{,}625)$. Evenwicht in B: $s_{AB}\,\hat{e}_{BA} + s_{CB}\,\hat{e}_{BC} + (0;\ -200) = \vec{0}$. Uit de y-vergelijking: $s_{CB} = -200/0{,}625 = -320{,}2\,\mathrm{N}$; uit de x-vergelijking: $s_{AB} = -0{,}781\,s_{CB} = 250{,}0\,\mathrm{N}$.

b Welke staaf staat op trek, welke op druk? Controleer met het momentenevenwicht om C.

✓ AB trek (250 N), CB druk (320 N). Momenten om C: de last geeft $200 \cdot 0{,}50 = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$, de trek in AB met arm 0,40 m: $250 \cdot 0{,}40 = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Klopt.

c Hoeveel vergelijkingen en onbekenden heeft het volledige vakwerk (met de reacties in A en C)? Is het statisch bepaald?

✓ 3 knopen: 6 vergelijkingen. Onbekenden: 2 staafkrachten en 4 reacties (A en C elk twee). 6 = 6 en de matrix is niet singulier: statisch bepaald. Knoop B alleen volstaat voor de staafkrachten; A en C geven dan de reacties.

Uitdagen

Uitdagen — transfer, open problemen, leerlijnen combineren

5.15 Twee formules bewezen

Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Het handboek gebruikte twee verbanden tussen de componenten en de meetkunde van vectoren. Bewijs ze.

a Bewijs $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ met de cosinusregel. Leid daaruit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz af: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

✓ Driehoek met zijden $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$: $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. Per component: $\sum(a_i-b_i)^2 = \sum a_i^2 + \sum b_i^2 - 2\sum a_i b_i$. Vergelijk: $\sum a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. Omdat $|\cos\theta| \le 1$: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$.

b Bewijs de identiteit van Lagrange $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ door beide kanten in componenten uit te schrijven, en leid er $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$ uit af.

Links: $(a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2$. Rechts: $(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2) - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2$. Uitwerken: de termen $a_x^2b_x^2$ enz. vallen rechts weg; wat overblijft, is $\sum_{i\neq j} a_i^2b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_ib_ia_jb_j$, precies de som van de drie kwadraten links. Dan $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta$, en $\sin\theta \geq 0$ voor $0 \leq \theta \leq 180°$.

c Toon dat $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.

$a_x(a_yb_z - a_zb_y) + a_y(a_zb_x - a_xb_z) + a_z(a_xb_y - a_yb_x)$: elke term komt twee keer voor met een tegengesteld teken ($a_xa_yb_z$ en $-a_ya_xb_z$, enz.). Som 0.

5.16 Rotaties en de somformules

Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ draait tegen de klok in over φ.

a Bereken $R(\alpha)\,R(\beta)$. Leid uit $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta)$ de somformules voor $\cos(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha+\beta)$ af.

$R(\alpha)R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$. Twee keer draaien is één keer over de som, dus dit is $R(\alpha+\beta)$. Vergelijk de eerste kolom: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ en $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

b Toon dat $\det R(\varphi) = 1$ en $R(\varphi)^T R(\varphi) = I$. Wat is dus $R(\varphi)^{-1}$?

$\det R = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. $R^TR = \begin{pmatrix} \cos^2+\sin^2 & -\cos\sin+\sin\cos \\ \dots & \sin^2+\cos^2 \end{pmatrix} = I$. Dus $R^{-1} = R^T = R(-\varphi)$: terugdraaien is transponeren.

c Toon met $|\vec{x}|^2 = \vec{x}^T\vec{x}$ dat een rotatie lengtes bewaart.

$|R\vec{x}|^2 = (R\vec{x})^T(R\vec{x}) = \vec{x}^TR^TR\,\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = |\vec{x}|^2$. Een rotatie verandert geen lengtes (en dus ook geen hoeken).

5.17 Onderzoek: de conditie van een ijking

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Een TMP36 op de 10-bits ADC geeft ongeveer N = 102,4 + 2,048 T, met ruis van een halve ADC-stap. Je ijkt hem met twee referentiepunten rond 20 °C op een zekere afstand van elkaar, en gebruikt de ijking daarna om 35 °C te meten.

a Schrijf een simulatie: kies twee ijkpunten, meet ze met ruis en afronding, los het 2 × 2-stelsel op voor a en b, meet daarmee 35 °C. Herhaal 2000 keer per afstand (0,5 tot 40 °C).

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np

rng = np.random.default_rng(17)


def adc(T):                           # TMP36 op een 10-bits ADC: 2,048 stappen per graad, ruis 0,5
stap
    return np.round(102.4 + 2.048 * T + rng.normal(0, 0.5))


for afstand in (0.5, 2, 5, 10, 20, 40):
    T1, T2 = 20 - afstand / 2, 20 + afstand / 2          # twee ijkpunten rond 20 °C
    fouten, onbruikbaar = [], 0
    for _ in range(2000):
        N1, N2 = adc(T1), adc(T2)
        if N1 == N2:                                     # singuliere matrix: geen rechte te bepalen
            onbruikbaar += 1
            continue
        a, b = np.linalg.solve([[N1, 1.0], [N2, 1.0]], [T1, T2])
        fouten.append(abs(a * adc(35.0) + b - 35.0))     # meting bij 35 °C met die ijking
    cond = np.linalg.cond([[102.4 + 2.048 * T1, 1], [102.4 + 2.048 * T2, 1]])
    print(f"{afstand:4} °C: onbruikbaar {onbruikbaar / 20:4.1f} %, 95 % van de fouten onder "
          f"{np.percentile(fouten, 95):5.2f} °C, conditiegetal {cond:6.0f}")
```

b Maak een tabel: afstand, aandeel onbruikbare ijkingen, 95 %-grens van de fout, conditiegetal.

Echte uitvoer:

```
 0.5 °C: onbruikbaar 21.5 %, 95 % van de fouten onder  9.92 °C, conditiegetal  40143
   2 °C: onbruikbaar  0.0 %, 95 % van de fouten onder  6.00 °C, conditiegetal  10038
   5 °C: onbruikbaar  0.0 %, 95 % van de fouten onder  2.50 °C, conditiegetal   4019
  10 °C: onbruikbaar  0.0 %, 95 % van de fouten onder  1.36 °C, conditiegetal   2017
  20 °C: onbruikbaar  0.0 %, 95 % van de fouten onder  1.00 °C, conditiegetal   1024
  40 °C: onbruikbaar  0.0 %, 95 % van de fouten onder  0.78 °C, conditiegetal    543
```

c Verklaar het verband tussen afstand, conditiegetal en fout. Welke ijking raad je aan voor de meetkas?

Hoe dichter de ijkpunten bij elkaar, hoe groter het conditiegetal (ruwweg omgekeerd evenredig met de afstand) en hoe groter de fout: een halve stap ruis op twee punten die maar één of twee stappen uit elkaar liggen, verandert de helling met tientallen procent, en die fout wordt nog eens versterkt als je 15 °C buiten het ijkbereik gaat meten. Bij 0,5 °C is een op vijf ijkingen zelfs onbruikbaar (beide metingen gelijk: singuliere matrix). Advies: ijk met ijswater (0 °C) en een warm waterbad (40 °C) met een goede referentiethermometer, of met meer punten en een rechte door de kleinste kwadraten; dan is de ijking niet meer de beperkende factor, maar de ADC-stap zelf (±0,25 °C).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Simulatie	Ruis en afronding correct; singuliere gevallen opgevangen; reproduceerbaar (seed).
Resultaten	Tabel volledig; trend herkend.
Verklaring	Conditiegetal en afstand gekoppeld; extrapolatie naar 35 °C als versterker.
Advies	Ijkpunten over het meetbereik (bv. ijswater en 40 °C), meer punten en kleinste kwadraten (hoofdstuk 41).

5.18 Een vakwerk dat niet werkt

Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Een vierkant van staven (0,50 × 0,50 m) met knopen A, B, C, D, een scharnier in A en een rol in B. Je vergelijkt drie varianten: zonder diagonaal, met diagonaal AC, en met beide diagonalen.

a Tel voor elke variant de vergelijkingen en de onbekenden. Voorspel wat er gebeurt.

Vierkant: 8 vergelijkingen, 4 + 3 = 7 onbekenden: te weinig onbekenden voor een willekeurige last: een mechanisme. Met één diagonaal: 8 en 8, statisch bepaald. Met twee: 8 vergelijkingen, 9 onbekenden: statisch onbepaald.

b Bouw de matrices in Python (gebruik de opbouw van het handboek) en bereken hun rang met np.linalg.matrix_rank.

Echte uitvoer van de code:

```
import numpy as np


def matrix(knopen, staven, reacties):
    rij = {k: 2 * i for i, k in enumerate(knopen)}
    A = np.zeros((2 * len(knopen), len(staven) + len(reacties)))
    for j, (p, q) in enumerate(staven):
        e = np.subtract(knopen[q], knopen[p])
        e = e / np.linalg.norm(e)
        A[rij[p]:rij[p] + 2, j] += e
        A[rij[q]:rij[q] + 2, j] -= e
    for j, (k, r) in enumerate(reacties):
        A[rij[k]:rij[k] + 2, len(staven) + j] += r
    return A


knopen = {"A": (0, 0), "B": (0.5, 0), "C": (0.5, 0.5), "D": (0, 0.5)}
reacties = [("A", (1, 0)), ("A", (0, 1)), ("B", (0, 1))]
rand = [("A", "B"), ("B", "C"), ("C", "D"), ("D", "A")]
for naam, staven in (("vierkant", rand), ("met diagonaal AC", rand + [("A", "C")]),
                     ("met twee diagonalen", rand + [("A", "C"), ("B", "D")])):
    A = matrix(knopen, staven, reacties)
    print(f"{naam:20s}: {A.shape[0]} vergelijkingen, {A.shape[1]} onbekenden, rang
{np.linalg.matrix_rank(A)}")
```

```
vierkant            : 8 vergelijkingen, 7 onbekenden, rang 7
met diagonaal AC    : 8 vergelijkingen, 8 onbekenden, rang 8
met twee diagonalen : 8 vergelijkingen, 9 onbekenden, rang 8
```

c Interpreteer: wat betekent een rang kleiner dan het aantal onbekenden, of minder vergelijkingen dan onbekenden? Wat doet een ingenieur in elk geval?

Het vierkant heeft rang 7 < 8 vergelijkingen: niet elke last kan in evenwicht zijn (een horizontale kracht in C duwt het vierkant scheef: het vervormt tot een ruit zonder dat een staaf rekt). Oplossing: een diagonaal of stijve hoeken (zoals de hoekplaatjes van de meetkas, hoofdstuk 13 van F). Met één diagonaal is de matrix vierkant en van volle rang: één oplossing. Met twee diagonalen is de rang 8 maar zijn er 9 onbekenden: oneindig veel krachtverdelingen voldoen aan het evenwicht; welke echt optreedt, hangt af van hoe stijf de staven zijn (hoofdstuk 12 en 13). Ingenieurs kiezen dat soms bewust: een extra staaf maakt de constructie veiliger als er één bezwijkt.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 6

Statistiek en meetonzekerheid

Van ruis op één meting tot een onderbouwd besluit: hoe zeker weet je wat je gemeten hebt?

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 6× toepassen · 5× uitdagen · ± 442 min

W Wiskundig modelleren · O Onderzoeken en meten · A Data en AI



Twaalf vakjes, twee lamptypes, één vraag: is de nieuwe lamp echt beter, of was het toeval?

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

6.1 Kansen met de normale verdeling

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

De SHT31 in de sensorkast van de module geeft bij een constante temperatuur waarden die normaal verdeeld zijn rond de echte waarde, met $\sigma = 0{,}04\,^{\circ}\mathrm{C}$ (voorbeeldmeting).

a Hoe groot is de kans dat één meting meer dan 0,10 °C van de echte waarde afwijkt (in een van beide richtingen)?

✓ $z = 0{,}10/0{,}04 = 2{,}5$; $P(|Z| > 2{,}5) = 2\,(1 - \Phi(2{,}5)) = 0{,}0124$, ongeveer 1,24 %.

b Binnen welk symmetrisch interval rond de echte waarde valt 95 % van de metingen? En 99,7 %?

✓ 95 %: $\pm 1{,}96 \cdot 0{,}04 = \pm 0{,}078\,^{\circ}\mathrm{C}$; 99,7 %: $\pm 3 \cdot 0{,}04 = \pm 0{,}12\,^{\circ}\mathrm{C}$.

c De module logt één waarde per minuut. Hoe vaak per dag verwacht je een meting die meer dan 0,10 °C afwijkt?

✓ $1440 \cdot 0{,}0124 \approx 18$ keer per dag. Wie op één meting een alarm zou zetten bij 0,1 °C afwijking, krijgt dat elke dag.

6.2 Een ijking controleren met een interval

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

De pH-module van de klimaatmodule (hoofdstuk 15 van I) staat in een bufferoplossing van pH 7,00. Acht metingen: 7,04 · 6,98 · 7,06 · 7,01 · 6,97 · 7,03 · 7,05 · 7,00.

a Bereken het gemiddelde, s en de standaardfout.

✓ $\bar{x} = 7{,}0175$, $s = 0{,}0328$, $s/\sqrt{8} = 0{,}0116$.

b Bereken het 95 %-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

✓ $t_7^* = 2{,}365$: $7{,}0175 \pm 0{,}0275$, dus $[6{,}990;\ 7{,}045]$.

c Is er een aanwijzing dat de module scheef meet? Leg uit met het interval.

✓ Het interval bevat 7,00: de gegevens passen bij een juist geijkte module. Dat bewijst niet dat de afwijking nul is; ze is kleiner dan ongeveer 0,05 pH, ruim binnen de marge van de bijsturing (5,5 tot 6,5).

6.3 t of z, en wat gebeurt er met n?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 12 min

Drie meetsituaties in het station.

a (a) Vier metingen van de vultijd van een reservoir, σ onbekend. (b) 400 metingen van de NTC. (c) Een sensor waarvan de fabrikant σ opgeeft, één meting. Kies telkens z of t (en ν), en leg uit.

✓ (a) t met ν = 3: σ is geschat uit maar vier metingen (t* = 3,18). (b) t met ν = 399, praktisch z = 1,96: s is dan een zeer goede schatting. (c) z: σ is gekend (als je de fabrikant vertrouwt), en met één meting kan je s niet eens berekenen.

b Een interval met 5 metingen is ±0,8 °C. Hoe breed wordt het ongeveer met 20 metingen (zelfde s)? Reken het exact met t en vergelijk met de ruwe schatting via √n.

✓ Ruw: $\sqrt{20/5} = 2$, dus $\pm 0{,}4\,^{\circ}\mathrm{C}$. Exact: de halve breedte is $t^*\,s/\sqrt{n}$; uit $t_4^*\,s/\sqrt{5} = 0{,}8$ volgt $s = 0{,}8 \cdot \sqrt{5}/2{,}776 = 0{,}644$, en met 20 metingen $2{,}093 \cdot 0{,}644/\sqrt{20} = 0{,}30\,^{\circ}\mathrm{C}$. Smaller dan de helft: je wint ook doordat t^* daalt van 2,78 naar 2,09.

6.4 Onzekerheden doorrekenen

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Het vermogen van één zonnepaneel is $P = \eta\, G\, A$ met $A = l \cdot b$. Gegeven: $l = (1{,}650 \pm 0{,}003)\,\mathrm{m}$, $b = (1{,}000 \pm 0{,}003)\,\mathrm{m}$, $\eta = 0{,}21 \pm 0{,}01$, $G = (900 \pm 30)\,\mathrm{W/m^2}$ (alle $\pm$ zijn standaardonzekerheden).

a Bereken A en u(A).

✓ $A = 1{,}650\,\mathrm{m}^2$; relatief $\sqrt{(0{,}003/1{,}65)^2 + (0{,}003/1{,}0)^2} = 0{,}351\,\%$, $u(A) = 0{,}0058\,\mathrm{m}^2$.

b Bereken P en u(P). Welke bron domineert?

✓ $P = 0{,}21 \cdot 900 \cdot 1{,}650 = 311{,}8\,\mathrm{W}$; relatief $\sqrt{(4{,}76\,\%)^2 + (3{,}33\,\%)^2 + (0{,}35\,\%)^2} = 5{,}82\,\%$, $u(P) = 18{,}2\,\mathrm{W}$. Het rendement domineert (4,76 %), de afmetingen doen er nauwelijks toe.

c Hoe groot zou u(P) zijn als je de relatieve fouten lineair optelt (zoals in hoofdstuk 1 van I)?

✓ Lineair: $4{,}76 + 3{,}33 + 0{,}48 = 8{,}58\,\%$, dus $26{,}7\,\mathrm{W}$: een bovengrens, ruim een derde groter dan de standaardonzekerheid.

6.5 De resolutie van drie temperatuursensoren

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 10 min

Afronden op een stap q geeft (met wat ruis) een uniforme fout met $\sigma = q/\sqrt{12}$.

a Bereken σ van de afrondingsfout voor: de TMP36 op een 10-bits ADC van 5 V (10 mV/°C); een logger die op 0,1 °C afrondt; de SHT31, die de temperatuur als 16-bits getal S geeft met T = −45 + 175 · S / 65535 (°C).

✓ TMP36: $q = 0{,}488\,^\circ\mathrm{C}$, $\sigma = 0{,}141\,^\circ\mathrm{C}$. Logger: $\sigma = 0{,}029\,^\circ\mathrm{C}$. SHT31: $q = 175/65535 = 0{,}00267\,^\circ\mathrm{C}$, $\sigma = 0{,}00077\,^\circ\mathrm{C}$: verwaarloosbaar tegenover haar ruis.

b Waarom is de afrondingsfout van een perfect constante, ruisvrije temperatuur géén toevallige fout?

✓ Dan valt de temperatuur elke keer op dezelfde plek tussen twee stappen: de fout is elke meting dezelfde (systematisch). Middelen helpt niet. Pas als ruis of een veranderend signaal de waarde over meerdere stappen laat springen, gedraagt de afrondingsfout zich toevallig (zo werkt 'dithering').

6.6 Juist of fout: intervallen en p-waarden

●○○ Oefenen · 7 · Begrijpen · 15 min

Een proef gaf voor het verschil in versgewicht een 95 %-interval van [3; 27] g en p = 0,02.

(a) Er is 95 % kans dat het echte verschil tussen 3 en 27 g ligt. (b) Als de lamp geen effect had, dan was een resultaat als dit of extremer zeldzaam (2 %). (c) Er is 2 % kans dat de lamp geen effect heeft. (d) Het effect is groot. (e) Een nieuwe proef met hetzelfde ontwerp geeft zeker weer p < 0,05. Zeg telkens juist of fout, met een zin uitleg.

✓ (a) Strikt genomen fout: het echte verschil ligt erin of niet; 95 % is de trefkans van de methode (in de praktijk zegt men het zo, en dat is verdedigbaar als je vooraf niets wist). (b) Juist: dat is de definitie van p. (c) Fout: p is geen kans op H0. (d) Fout: p zegt niets over de grootte; het interval zegt 'ergens tussen klein en behoorlijk'. (e) Fout: stel dat het echte effect precies de geschatte 15 g is; dan ligt het verwachte resultaat van een herhaling 2,3 standaardfouten van nul, en haalt de herhaling de grens van 1,96 maar in ongeveer 64 % van de gevallen. 'Zeker' is veel te sterk.

●●○ Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

6.7 Bijsturen door ruis

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

De pH van de voedingsoplossing is 5,80; de module stuurt bij als een meting onder 5,50 komt (hoofdstuk 15 van I). De pH-meting ruist met $\sigma = 0{,}08$ per meting, en er wordt om de 2 s gemeten.

a Bereken de kans per meting op een valse 'te zuur'-melding, en het verwachte aantal per dag.

✓ $z = (5{,}80 - 5{,}50)/0{,}08 = 3{,}75$; $P = 8{,}84 \cdot 10^{-5}$; per dag $43\,200 \cdot P = 3{,}8$.

b Het programma beslist voortaan op het gemiddelde van 15 metingen (30 s). Herbereken.

✓ $\sigma = 0{,}08/\sqrt{15} = 0{,}0207$, $z = 14{,}5$: de kans is kleiner dan 10^{-40}, dus nooit.

c Waarom is een vals 'te zuur' hier erger dan een vals CO_2-alarm?

✓ Een vals alarm is hinderlijk; een valse bijsturing doet iets: de module doseert pH-plus (of salpeterzuur in de andere richting) terwijl er niets mis was, en verstoort zo zelf de oplossing. Een actie op een meting vraagt een robuustere beslissing dan een melding.

6.8 Wat is de proefeenheid?

Toepassen · 7 · Analyseren · 20 min

Vier proefopzetten uit Habitat. Geef telkens de proefeenheid, het echte aantal herhalingen per groep, en of de conclusie deugt.

(a) Twee lampen boven de twee helften van het kweekbed, 24 planten per helft; t-toets op 24 + 24 planten. (b) De groeiproef van hoofdstuk 27 van F: 12 bakjes met eigen druppelaar, geloot, 3 per behandeling. (c) Eén NTC wordt 400 keer gemeten om 'de ruis van het type NTC' te bepalen. (d) Vijf sensoren van merk A en vijf van merk B, elk 20 keer gemeten; toets op 100 + 100 metingen.

✓ (a) Proefeenheid = lamp (met haar helft van het bed): 1 per groep. Lamp en plek vallen samen; geen toets mogelijk over het lamptype. De t-toets op planten is pseudoreplicatie. (b) Het bakje, 3 per groep: deugt (eigen behandeling, geloot). (c) Eén sensor: de 400 metingen zeggen iets over déze NTC (en haar deler), niet over het type; voor het type heb je meerdere exemplaren nodig. (d) De sensor, 5 per groep: toets de 5 sensorgemiddelden per merk (Welch met $\nu \approx 8$), niet 100 metingen; anders is p veel te klein.

6.9 Monte Carlo voor het zonnepaneel

Toepassen · 7 · Programmeren · 20 min

Neem de gegevens van opdracht 6.4 (vermogen van een zonnepaneel).

a Schrijf een Monte Carlo-programma met numpy dat P = η G A 100 000 keer berekent met normaal verdeelde invoer, en u(P) en het 95 %-gebied afdrukt.

✓ Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np

rng = np.random.default_rng(1)
M = 100_000
eta = rng.normal(0.21, 0.01, M)
G = rng.normal(900, 30, M)
A = rng.normal(1.650, 0.003, M) * rng.normal(1.000, 0.003, M)
P = eta * G * A
print("P = %.1f W, u(P) = %.1f W (%.2f %%)" % (P.mean(), P.std(ddof=1), 100 * P.std(ddof=1) /
P.mean()))
print("95 %% tussen %.1f en %.1f W" % tuple(np.percentile(P, [2.5, 97.5])))
```

Echte uitvoer:

```
P = 311.8 W, u(P) = 18.1 W (5.82 %)
95 % tussen 276.9 en 347.9 W
```

b Vergelijk met je resultaat uit opdracht 6.4. Is lineariseren hier goed genoeg?

De formule gaf $u(P) = 18{,}2\ \mathrm{W}$ (5,82 %). Monte Carlo geeft hetzelfde op een tiende watt: bij relatieve onzekerheden van enkele procenten is een product bijna lineair. Het 95 %-gebied is ongeveer $\pm 2u$, symmetrisch.

6.10 Twee soorten druppelaars

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Voor de meetkas twijfelt het team tussen twee druppelaars. Het debiet van 8 exemplaren van type A en 7 van type B, gemeten bij dezelfde druk:

type	debiet (mL/min)
A (8 stuks)	32,1 · 30,8 · 33,5 · 31,2 · 29,9 · 32,8 · 31,5 · 30,6
B (7 stuks)	34,2 · 33,1 · 35,8 · 32,9 · 34,6 · 33,4 · 36,1

a Bereken per type het gemiddelde en s.

A: $\bar{x} = 31{,}550$, $s = 1{,}194$ mL/min. B: $\bar{x} = 34{,}300$, $s = 1{,}278$ mL/min.

b Voer de Welch-toets uit (α = 0,05, tweezijdig): t, ν, besluit.

Standaardfout $\sqrt{s_B^2/7 + s_A^2/8} = 0{,}642$; $t = 2{,}750/0{,}642 = 4{,}29$; $\nu = 12{,}4$; $p = 0{,}00097$. H0 verworpen: type B geeft meer water.

c Geef het 95 %-interval van het verschil. Doet het verschil ertoe als elke plant 150 mL per dag nodig heeft en het debiet de pomptijd bepaalt?

$2{,}75 \pm 2{,}170 \cdot 0{,}642$, dus $[1{,}36;\ 4{,}14]\ \mathrm{mL/min}$, ongeveer 9 % meer. Voor één druppelaar is dat klein, maar alle bakjes hangen aan dezelfde pomptijd: met type B krijgt elk bakje 9 % meer water, en belangrijker is de spreiding binnen een type (s ≈ 1 mL/min, 3 %): die bepaalt of alle bakjes evenveel krijgen.

6.11 Gepaard of niet? De DHT11 opnieuw

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

In hoofdstuk 1 van I hingen een DHT11 en een referentiethermometer een dag lang naast elkaar:

uur	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
referentie (°C)	12,6	13,4	14,7	16,6	19,4	22,4	25,2	27,0	26,7	25,1	22,6	19,5
DHT11 (°C)	14	14	16	18	20	24	26	28	27	26	23	21

a Voer een Welch-toets uit op de twee kolommen alsof het onafhankelijke groepen waren. Besluit?

Welch: verschil van de gemiddelden $0{,}98\ ^\circ\mathrm{C}$, maar $s \approx 5\ ^\circ\mathrm{C}$ per kolom (de dag warmt op); $t = 0{,}47$, $p = 0{,}64$: 'geen significant verschil'.

b Voer een gepaarde t-toets uit op de verschillen DHT11 − referentie. Besluit?

Verschillen: $\bar{d} = 0{,}983$, $s_d = 0{,}451$; $t = 0{,}983/(0{,}451/\sqrt{12}) = 7{,}55$ met $\nu = 11$: $p = 11{,}2 \cdot 10^{-6}$. De DHT11 meet systematisch te hoog: $0{,}98 \pm 0{,}29\ ^\circ\mathrm{C}$ (95 %).

c Verklaar waarom de twee toetsen zo verschillen. Welke is juist?

De metingen zijn paren (hetzelfde ogenblik). De Welch-toets ziet de grote spreiding door de dagcyclus als ruis en verdrinkt het kleine, constante verschil erin. De gepaarde toets trekt elk paar af, waardoor de dagcyclus wegvalt. De gepaarde toets is juist.

6.12 Habitat: de tweede teelt van de lampproef

Toepassen · 8 · Habitat · 45 min

Het team herhaalt de lampproef in de winter met exact hetzelfde ontwerp (nieuwe loting, blind gewogen). De vakjesgemiddelden:

vakjesgemiddelde (g)	1	2	3	4	5	6
oude lamp	186,6	198,3	186,2	205,7	209,2	198,2
nieuwe lamp	202,8	208,6	204,2	199,7	202,4	208,4

Eerste teelt (handboek): verschil 15,00 g met standaardfout 5,78 g (ν = 9,9).

a Voer de Welch-toets uit op de tweede teelt: verschil, standaardfout, ν, p en 95 %-interval.

Oud: $\bar{x} = 197{,}37$, $s = 9{,}50$; nieuw: $\bar{x} = 204{,}35$, $s = 3{,}53$. Verschil $6{,}98\,\text{g}$, standaardfout $4{,}14\,\text{g}$, $t = 1{,}69$, $\nu = 6{,}4$, $p = 0{,}140$. Interval $7{,}0 \pm 10{,}0$: $[-3{,}0;\ 17{,}0]\,\text{g}$. Alleen: niet significant.

b Combineer beide teelten: neem het gemiddelde van de twee verschillen. Wat is de standaardfout daarvan (onafhankelijke teelten)? Geef een 95 %-interval (gebruik ν ≈ 16).

$\bar{d} = (15{,}00 + 6{,}98)/2 = 10{,}99\,\text{g}$; $se = \sqrt{5{,}78^2 + 4{,}14^2}/2 = 3{,}56\,\text{g}$. Met $t^* = 2{,}12$ ($\nu \approx 16$): $[3{,}5;\ 18{,}5]\,\text{g}$.

c Pas de vooraf vastgelegde beslisregel toe op het gecombineerde resultaat. Verandert het besluit?

Het interval ligt boven 0 (er is een effect), en de schatting 11,0 g blijft onder 20 g. Bovendien ligt nu het hele interval onder 20 g: een winst van 10 % is nu zo goed als uitgesloten. Het besluit blijft 'niet vervangen', maar nu met meer zekerheid.

d Schrijf een advies van 6 à 10 regels voor de bewoners: wat weten we nu over de nieuwe lamp, hoe zeker, en wat kost het?

Bijvoorbeeld: 'Twee teelten in het proefrek, blind gewogen, tonen dat de nieuwe lamp gemiddeld ongeveer 11 g (5 %) meer sla per krop geeft, met een onzekerheid van ruwweg 3 tot 19 g. De beloofde 15 % halen we niet, en 10 % is onwaarschijnlijk. De lamp verbruikt 5 % meer stroom, net in de winter als die schaars is. We houden de huidige lampen; bij vervanging kiezen we het type met het beste rendement in µmol/J en nemen de verroodlamp alleen mee als ze niet duurder is. De proefopzet blijft klaar voor een volgende vraag.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Toets	Welch correct (gemiddelden, s, standaardfout, ν, p) en een interval met de juiste t*.
Combineren	Standaardfout van een gemiddelde van twee onafhankelijke verschillen correct: $\sqrt{(se_1^2 + se_2^2)}/2$.
Besluit	Beslisregel letterlijk toegepast; onderscheid tussen significant en relevant.
Advies	Effect met interval, energie (5 % meer stroom) en kosten meegewogen; eerlijk over wat onzeker blijft.

Uitdagen

Uitdagen — transfer, open problemen, leerlijnen combineren

6.13 Waar komt de 16 vandaan? Afleiden en simuleren

Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Hoofdstuk 2 van I gaf de vuistregel $n \approx 16\,(s/\delta)^2$ per groep voor 80 % vermogen bij $\alpha = 0{,}05$.

a Leid de formule af met de normale verdeling. Waar komen 1,960 en 0,842 vandaan?

Standaardfout van het verschil: $\sigma\sqrt{2/n}$. Verwerpen als het gemeten verschil $> z_{0{,}975}\sigma\sqrt{2/n}$ ($z_{0{,}975} = 1{,}960$: 2,5 % in elke staart). Bij een echt verschil δ is het gemeten verschil normaal rond δ; 80 % ervan ligt boven $\delta - z_{0{,}80}\sigma\sqrt{2/n}$ met $z_{0{,}80} = 0{,}842$. Dus $\delta - 0{,}842\,\sigma\sqrt{2/n} = 1{,}960\,\sigma\sqrt{2/n}$, en $n = 2(1{,}960 + 0{,}842)^2(\sigma/\delta)^2 = 15{,}70(\sigma/\delta)^2$.

b Hoe verandert de factor voor 90 % vermogen? En voor α = 0,01?

90 %: $z_{0{,}90} = 1{,}282$, factor $2(3{,}242)^2 = 21{,}0$. $\alpha = 0{,}01$: $z_{0{,}995} = 2{,}576$, factor $2(3{,}418)^2 = 23{,}4$.

c Schrijf een simulatie die voor σ = 11, δ = 20 en n = 5, 6 en 7 het vermogen schat (duizenden gesimuleerde proeven, Welch-toets). Vergelijk met de formule.

Bijvoorbeeld:

```
rng = np.random.default_rng(0)
for n in (5, 6, 7):
    a = rng.normal(0, 11, (20000, n)); b = rng.normal(20, 11, (20000, n))
    p = stats.ttest_ind(b, a, axis=1, equal_var=False).pvalue
    print(n, np.mean(p < 0.05))
```

De exacte waarden met de t-verdeling (Student) zijn 71 %, 81 % en 88 %; een Welch-simulatie geeft een paar procentpunt minder (Welch is bij kleine groepen iets voorzichtig). De normale formule is dus optimistisch bij kleine n: ze zegt 5, je hebt er 6 à 7 nodig.

6.14 Onderzoek: toetsen tot het lukt

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Een onderzoeker test een lamp die in werkelijkheid niets doet. Hij weegt na elke drie planten per groep, toetst, en stopt zodra p < 0,05 (hoogstens 30 planten per groep). Zijn collega legt n = 30 vooraf vast.

a Schrijf een simulatie (numpy en scipy) die beide werkwijzen 4000 keer uitvoert en telt hoe vaak ze een 'effect' vinden.

Bijvoorbeeld (met echte uitvoer):

```
# stoppen.py - 'we toetsen na elke drie planten en stoppen zodra p < 0,05' bij een lamp die NIETS doet
import numpy as np
from scipy import stats

rng = np.random.default_rng(5)
K, NMAX = 4000, 30                                  # 4000 gesimuleerde proeven, hoogstens 30 planten
per groep
a = rng.normal(200, 20, (K, NMAX))                  # oude lamp
b = rng.normal(200, 20, (K, NMAX))                  # nieuwe lamp: zelfde verdeling, dus H0 is waar
gevonden = np.zeros(K, dtype=bool)
for n in range(3, NMAX + 1, 3):
    p = stats.ttest_ind(a[:, :n], b[:, :n], axis=1, equal_var=False).pvalue
    gevonden |= p < 0.05                            # wie ooit onder 0,05 zakte, stopte en
'publiceerde'
print("vooraf n = 30 vastgelegd: %.3f vals positief" % np.mean(p < 0.05))
print("toetsen na elke 3 planten: %.3f vals positief" % np.mean(gevonden))
```

```
vooraf n = 30 vastgelegd: 0.046 vals positief
toetsen na elke 3 planten: 0.189 vals positief
```

b Verklaar het verschil. Waarom is de kans op een vals effect bij de eerste werkwijze groter dan 5 %, hoewel elke afzonderlijke toets 5 % heeft?

> Met vaste n vindt de toets in 4,6 % van de proeven een vals effect, zoals beloofd. Wie tien keer kijkt, krijgt tien kansen om toevallig onder 0,05 te zakken: 18,9 %. De tien toetsen zijn sterk gecorreleerd (ze delen de eerste planten), anders was het $1 - 0{,}95^{10} = 40$ %; maar elke nieuwe blik geeft een extra kans.

c Hoe beschermt voorregistratie hiertegen? Mag je nooit tussentijds kijken?

> Wie vooraf n en analyse vastlegt, kan niet stoppen 'als het goed uitkomt'. Tussentijds kijken mag wel, als dat vooraf gepland is met een strengere grens per blik (zoals in medische studies met een tussentijdse analyse), zodat de totale kans op een vals effect 5 % blijft.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Simulatie	Correcte opzet onder H0, beide werkwijzen, reproduceerbaar (seed), genoeg herhalingen.
Verklaring	Meerdere kansen op een vals alarm per proef; de toetsen zijn gecorreleerd maar niet gelijk.
Voorregistratie	Legt n en analyse vast; tussentijds kijken mag met een vooraf vastgelegde, gecorrigeerde regel.

6.15 Ontwerp: het meetplan van de reservoirtemperatuur

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 45 min

Het brein van het station wil de temperatuur van het voedingsreservoir kennen tot op ±0,1 K (uitgebreide onzekerheid, k = 2) voor de warmtebalans. Je hebt de NTC-deler (ruis 1,2 ADC-stap per meting, 0,087 K per stap), de geijkte R25 (u = 30 Ω) en B (u = 15 K), en een referentiethermometer met u = 0,05 K voor een nieuwe ijking.

a Stel het onzekerheidsbudget op voor één meting en voor het gemiddelde van n metingen. Haal je ±0,1 K?

> Eén meting: ruis $0{,}105$, R_{25}: $0{,}064$, B: $0{,}019$ K → $u = 0{,}124$ K, $U = 0{,}25$ K. Gemiddelde van 28: ruis $0{,}020$ → $u = 0{,}069$ K, $U = 0{,}138$ K: net niet (de ijking domineert).

b Welke maatregel(en) stel je voor om de eis te halen, en wat kost elk ervan?

> De ijking verbeteren: R_{25} opnieuw bepalen met de referentie van 0,05 K in water rond de werktemperatuur (bij 20 °C is de bijdrage van R_{25} en B samen dan ongeveer die van de referentie, 0,05 K), plus 28 metingen middelen: $u \approx \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}05^2} = 0{,}054$ K, $U \approx 0{,}11$ K; met twee ijkpunten (15 en 25 °C) en het gemiddelde van enkele referentiemetingen per punt haal je 0,1 K. Kost: een uur werk, geen onderdelen. Een NTC van betere kwaliteit helpt niet zolang je niet ijkt.

c Hoe controleer je na installatie of het plan werkt?

> Na installatie een dag naast de referentiethermometer loggen bij verschillende temperaturen; de verschillen moeten binnen ±0,1 K blijven (95 % ervan), zonder trend. Om het halfjaar herhalen (drift).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Budget	Alle bronnen met type en u; kwadratisch opgeteld; ruis gedeeld door √n, ijking niet.
Maatregel	Richt zich op de grootste bron; kwantitatief onderbouwd.
Controle	Vergelijking met een referentie in meerdere punten; herhaalbaar.

6.16 Twee sensoren samen: het gewogen gemiddelde

Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

In het reservoir hangen de NTC ($T_1 = 20{,}12\,°\mathrm{C}$, $u_1 = 0{,}07\,\mathrm{K}$) en een digitale sensor ($T_2 = 19{,}95\,°\mathrm{C}$, $u_2 = 0{,}20\,\mathrm{K}$). De fouten zijn onafhankelijk.

a Zoek het gewicht w in $T = w\,T_1 + (1-w)\,T_2$ waarvoor $u(T)$ minimaal is (afgeleide!). Toon dat w evenredig is met $1/u_1^2$.

✓ $u(T)^2 = w^2u_1^2 + (1-w)^2u_2^2$. Afleiden naar w: $2wu_1^2 - 2(1-w)u_2^2 = 0 \Rightarrow w = \dfrac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2} = \dfrac{1/u_1^2}{1/u_1^2+1/u_2^2}$. Elke sensor telt mee met het omgekeerde van zijn variantie; minimaal is $u(T)^2 = \dfrac{1}{1/u_1^2+1/u_2^2}$.

b Bereken T en u(T). Is de gecombineerde meting beter dan de beste sensor alleen?

✓ $w = 0{,}891$; $T = 20{,}101\,^\circ\mathrm{C}$, $u(T) = 0{,}066\,\mathrm{K}$: iets beter dan de NTC alleen (0,07 K). Een slechte sensor voegt weinig toe, maar nooit iets slechts, als zijn u juist is.

c Liggen de twee metingen verenigbaar? Toets het verschil.

✓ Verschil $0{,}17\,\mathrm{K}$, $u = \sqrt{0{,}07^2+0{,}20^2} = 0{,}212\,\mathrm{K}$, $z = 0{,}80$: verenigbaar. Is $|z| > 3$, dan is een van beide sensoren stuk: zo werkt foutdetectie in hoofdstuk 40, en het Kalman-filter is precies dit gewogen gemiddelde, stap na stap.

6.17 Debat: moet de grens van 0,05 weg?

●●● Uitdagen · 8 · Argumenteren · 45 min

In 2018 stelden 72 onderzoekers voor om de grens voor 'significant' te verstrengen tot 0,005. In 2019 riepen meer dan 800 wetenschappers in Nature op om 'statistisch significant' als ja-neegrens helemaal te laten vallen en intervallen en effecten te rapporteren. Anderen vinden een vaste grens juist nodig tegen wensdenken.

a Bereid met je groep één standpunt voor (verstrengen, afschaffen, behouden). Gebruik minstens twee argumenten uit dit hoofdstuk (meervoudig toetsen, onderscheidingsvermogen, effectgrootte, winner's curse, voorregistratie).

✓ Verstrengen: minder valse ontdekkingen, maar grotere proeven nodig (factor n ongeveer 1,7 voor hetzelfde vermogen) en nog steeds een ja-neegrens. Afschaffen: dwingt tot effecten met intervallen en verhindert 'net significant'; risico: zonder grens rekt iedereen zijn besluit op. Behouden: eenvoudig en bekend; zinvol mét voorregistratie, één hoofduitkomst en het interval erbij.

b Welke regel zou jij invoeren voor de beslissingen van het brein van het station (lampen, sensoren, alarmen)? Is dat dezelfde als voor een wetenschappelijk tijdschrift?

✓ Voor een technische beslissing (zoals de lamp) is een vooraf vastgelegde beslisregel op het effect en zijn interval, gekoppeld aan kosten en risico, beter dan een p-grens: 'vervang als het interval boven 0 ligt en de winst ≥ 10 %'. Voor alarmen reken je met kansen op vals alarm en gemiste gevaren (zoals CO_2 en pH). Een tijdschrift moet vooral eerlijkheid afdwingen: voorregistratie, alle uitkomsten, open data.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Argumenten	Minstens twee inhoudelijke argumenten uit het hoofdstuk, correct gebruikt.
Tegenargument	Het sterkste argument van de andere kant eerlijk weergegeven en beantwoord.
Toepassing	Een concrete, werkbare regel voor Habitat, met het verschil tussen onderzoek en een technische beslissing.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 7

Sinusoïden, complexe getallen en fasoren

Een sinus is een draaiende wijzer; met complexe getallen reken je ermee zoals met gewone getallen

Uitgewerkte oplossingen bij de 18 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 7× toepassen · 5× uitdagen · ± 447 min

W Wiskundig modelleren · L Elektriciteit en elektronica · K Krachten, beweging en constructies



De omvormer maakt van 48 V gelijkspanning een sinus van 325 V piek, vijftig keer per seconde.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

7.1 Een sinusoïde ontleden

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een signaalgenerator geeft $u(t) = 12\sin(2000\pi t + \pi/6)$ V (t in s).

a Geef de amplitude, de hoekfrequentie, de frequentie en de periode.

✓ $\hat{U} = 12\,\text{V}, \omega = 2000\pi = 6283\,\text{rad/s}, f = 1000\,\text{Hz}, T = 1\,\text{ms}$.

b Schrijf u(t) als een cosinus met de fase in graden.

✓ $\sin x = \cos(x - 90°)$ en $\pi/6 = 30°$: $u = 12\cos(\omega t + 30° - 90°) = 12\cos(\omega t - 60°)$ V.

c Op welk tijdstip na t = 0 bereikt u voor het eerst haar maximum?

✓ Maximum als $\omega t - 60° = 0$: $t = \frac{60}{360} \cdot 1\,\text{ms} = 0{,}167\,\text{ms}$. Controle: $\sin(2000\pi \cdot 1{,}667 \cdot 10^{-4} + \pi/6) = \sin(\pi/3 + \pi/6) = \sin(\pi/2) = 1$.

7.2 Rekenen met complexe getallen

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

$z_a = 2 - 3j$ en $z_b = -1 + 4j$.

a Bereken $z_a + z_b$, $z_a - z_b$, $z_a z_b$ en $\bar{z}_a$.

✓ $z_a + z_b = 1 + 1\,j$; $z_a - z_b = 3 - 7\,j$; $z_a z_b = -2 + 8j + 3j - 12j^2 = 10 + 11\,j$; $\bar{z}_a = 2 + 3j$.

b Bereken z_a / z_b in de vorm $a + bj$.

✓ $\frac{(2-3j)(-1-4j)}{(-1)^2 + 4^2} = \frac{-2 - 8j + 3j + 12j^2}{17} = \frac{-14 - 5j}{17} = -0{,}824 - 0{,}294\,j$.

c Bereken $|z_b|$ en $\arg z_b$ in graden. In welk kwadrant ligt z_b?

✓ $|z_b| = \sqrt{17} = 4{,}123$; tweede kwadrant ($a < 0, b > 0$): $\arg z_b = \text{atan2}(4, -1) = 104{,}04°$ (niet $\arctan(-4) = -75{,}96°$).

7.3 Van en naar poolvorm

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Reken zonder complexe functies op je rekenmachine; controleer daarna eventueel.

a Schrijf $-3 + 3j$ in poolvorm.

✓ $r = \sqrt{18} = 4{,}243$, tweede kwadrant: $135°$. $-3 + 3j = 4{,}243 \angle 135°$.

b Schrijf $5\angle -120°$ in de vorm $a + bj$.

✓ $5(\cos(-120°) + j\sin(-120°)) = -2{,}500 - 4{,}330\,j$.

c Bereken $(-3 + 3j) \cdot 5\angle -120°$ en $\frac{5\angle -120°}{-3 + 3j}$ in poolvorm.

✓ Product: $21{,}21 \angle 15°$ $(135 - 120)$. Quotiënt: $\frac{5}{4{,}243} \angle (-120° - 135°) = 1{,}179 \angle -255° = 1{,}179 \angle 105°$.

7.4 Van tijd naar fasor en terug

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Referentie: $\cos \omega t$ met $\omega = 100\pi\,\text{rad/s}$; fasoren met de amplitude als lengte.

a Geef de fasoren van $u_1 = 10\cos(\omega t - 30°)$, $u_2 = 4\sin\omega t$ en $u_3 = -6\cos\omega t$, in poolvorm en als $a + bj$.

✓ $U_1 = 10\angle -30° = 8{,}66 - 5{,}00\,j$; $U_2 = 4\angle -90° = -4j$; $U_3 = 6\angle 180° = -6$.

b Welke signalen horen bij de fasoren $3j$ en $2 - 2j$?

✓ $3j = 3\angle 90°$: $3\cos(\omega t + 90°) = -3\sin\omega t$. $2 - 2j = 2{,}83\angle -45°$: $2{,}83\cos(\omega t - 45°)$.

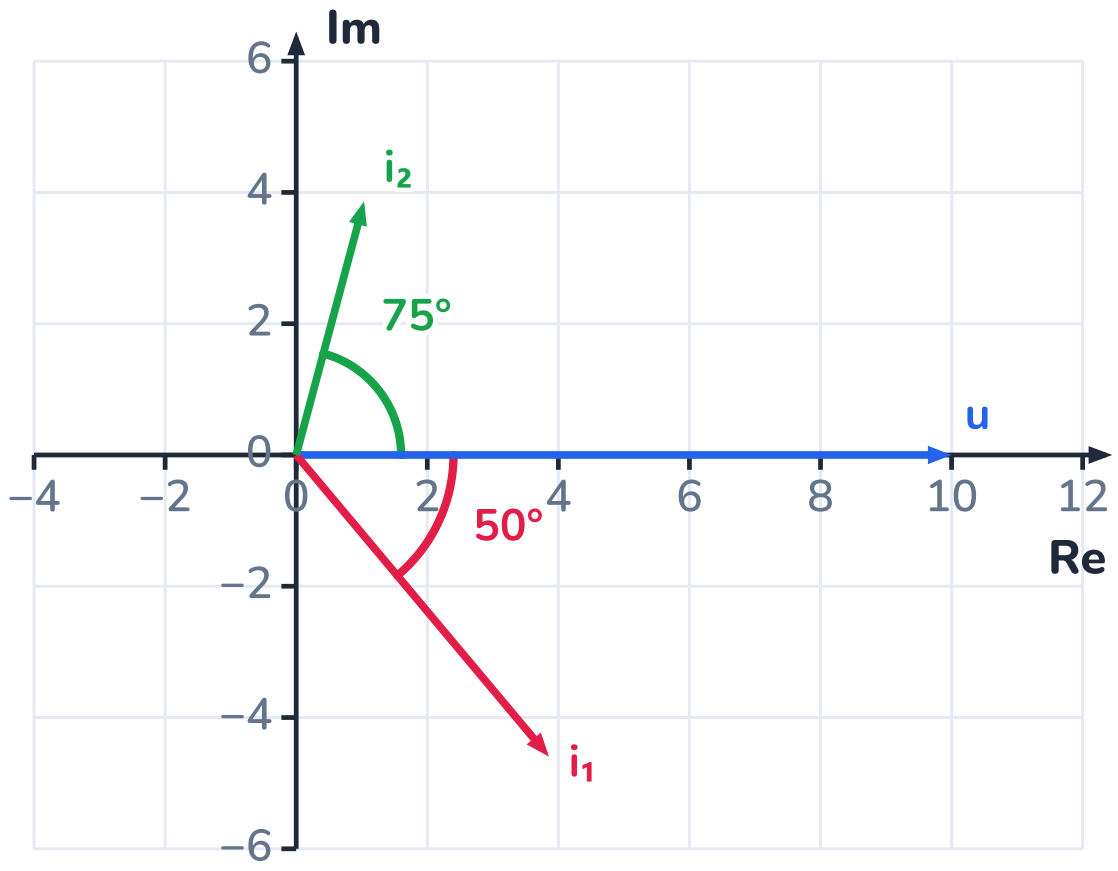
c Geef de fasor van $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ en schrijf het signaal uit.

✓ $j\omega U_1 = 100\pi \cdot 10\angle(-30° + 90°) = 3142\angle 60°$, dus $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 3142\cos(\omega t + 60°)$ (V/s). Controle: $-10\omega\sin(\omega t - 30°) = 10\omega\cos(\omega t - 30° + 90°)$.

7.5 Voorijlen of naijlen?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 12 min

Lees het fasordiagram (50 Hz, de wijzers draaien tegen de klok in).



Drie fasoren bij 50 Hz: de spanning u en twee stromen i_1 en i_2.

a Welke stroom ijlt voor op u, welke na? Met hoeveel graden?

✓ i_2 ligt 75° voor op u (tegen de draaizin in verder), i_1 ijlt 50° na.

b Hoeveel milliseconden na de piek van u komt de piek van i_1? En die van i_2?

✓ i_1: $\frac{50}{360} \cdot 20\,\text{ms} = 2{,}78\,\text{ms}$ later. i_2: $\frac{75}{360} \cdot 20 = 4{,}17\,\text{ms}$ vroeger (of 15,83 ms later, bij de volgende piek).

c Welk soort toestel zou i_2 kunnen trekken, en welk i_1?

✓ i_2: een capacitieve belasting (een condensator met wat weerstand, of een toestel met een ingangsfilter). i_1: een inductieve belasting, zoals een motor of een spoel met weerstand.

7.6 Euler in de praktijk

Oefenen · 7 · Rekenen · 15 min

Gebruik $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$.

a Bereken $e^{j\pi/2}$, $e^{j\pi}$, $e^{j2\pi}$ en $e^{-j\pi/3}$.

✓ $e^{j\pi/2} = j$; $e^{j\pi} = -1$; $e^{j2\pi} = 1$; $e^{-j\pi/3} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}5 - 0{,}866j$.

b Toon aan dat $\cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$.

✓ $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = (\cos\varphi + j\sin\varphi) + (\cos\varphi - j\sin\varphi) = 2\cos\varphi$ (cos is even, sin oneven).

c Bereken j^j. Tip: $j = e^{j\pi/2}$. Wat is er bijzonder aan het resultaat?

✓ $j^j = (e^{j\pi/2})^j = e^{j^2\pi/2} = e^{-\pi/2} = 0{,}2079$: een imaginair getal tot een imaginaire macht geeft een reëel getal. (Strikt genomen zijn er meer waarden, $e^{-\pi/2-2k\pi}$, omdat j ook $e^{j(\pi/2+2k\pi)}$ is; $0{,}2079$ is de hoofdwaarde die Python geeft.)

Toepassen

Toepassen — meerdere stappen, in een context

7.7 Twee spanningen in serie

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

Twee sinusvormige spanningen van 50 Hz staan in serie: $u_1 = 20\cos\omega t$ en $u_2 = 15\cos(\omega t - 90°)$ (V).

a Bereken de fasor van u = u_1 + u_2 en schrijf u(t).

✓ $U = 20 - 15j$, $|U| = 25$, $\arg U = -36{,}87°$: $u = 25\cos(\omega t - 36{,}87°)$ V.

b Controleer je resultaat op t = 0 en op t = 5 ms.

✓ $t = 0$: $u_1 + u_2 = 20 + 0 = 20$ en $25\cos(-36{,}87°) = 20$. $t = 5\,\text{ms}$ ($\omega t = 90°$): $0 + 15 = 15$ en $25\cos(53{,}13°) = 15$. Klopt.

c Een voltmeter meet effectieve waarden. Wat wijst hij aan over u_1, over u_2 en over beide samen?

✓ $20/\sqrt{2} = 14{,}1$ V, $15/\sqrt{2} = 10{,}6$ V en $25/\sqrt{2} = 17{,}7$ V: niet $14{,}1 + 10{,}6 = 24{,}7$ V. Spanningen over onderdelen in serie tel je bij wisselstroom als wijzers op.

7.8 Fasordiagram en tijdbeeld tekenen

Toepassen · 7 · Tekenen · 25 min

Drie stromen komen samen in een knooppunt: $i_1 = 3\cos\omega t$, $i_2 = 2\cos(\omega t + 90°)$ en $i_3 = 2\cos(\omega t - 150°)$ (A).

a Teken de drie fasoren op schaal (1 A = 2 cm) en construeer hun som kop aan staart. Meet lengte en hoek van de som.

✓ Kop aan staart: 3 naar rechts, 2 omhoog, 2 onder $-150°$ (naar links onder). De som komt uit op ongeveer $(1{,}27;\ 1{,}00)$: lengte ongeveer 1,6 A onder ongeveer 38°.

b Bereken de som met complexe getallen en vergelijk met je tekening.

✓ $3 + 2j + 2(\cos(-150°) + j\sin(-150°)) = 3 + 2j - 1{,}732 - j = 1{,}268 + 1{,}000\,j$, $|I| = 1{,}615$ A onder $38{,}3°$.

c Schets de vier signalen over één periode in één grafiek (ωt van 0 tot 360°).

✓ Vier cosinussen met amplitudes 3, 2, 2 en 1,61: de som piekt bij $\omega t = -38°$, dus op $322°$, en gaat door nul bij $52°$ en $232°$. Controle op $\omega t = 0$: $3 + 0 + 2\cos(-150°) = 1{,}27$ en $1{,}62\cos(38°) = 1{,}27$.

7.9 Van versnelling naar uitwijking

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

Een versnellingsmeter op de ventilatie-unit meet na onderhoud $a(t) = 0{,}8\cos(2\pi \cdot 25\,t)\ \mathrm{m/s^2}$.

a Bereken met fasoren (delen door jω) de snelheid en de uitwijking, met amplitude en fase.

✓ $\omega = 157{,}1\ \mathrm{rad/s}$. $V = A/(j\omega) = \frac{0{,}8}{157{,}1}\angle -90° = 5{,}09\ \mathrm{mm/s}\angle -90°$; $X = A/(j\omega)^2 = -A/\omega^2 = 32{,}4\ \mu\mathrm{m}\angle 180°$.

b Een richtlijn voor trillingen van kleine machines noemt een effectieve trilsnelheid tot ongeveer 1,8 mm/s 'goed'. Hoe scoort de unit?

✓ Effectief $5{,}09/\sqrt{2} = 3{,}60\ \mathrm{mm/s}$: onder 1,8 mm/s, dus in de categorie 'goed' (de juiste grenzen per machineklasse staan in de norm; hoofdstuk 11).

7.10 Een fasor uit een meetreeks

Toepassen · 8 · Programmeren · 30 min

Je schrijft zelf de functie die het handboek gebruikte om amplitude en fase uit metingen te halen.

a Maak met numpy 0,1 s van een signaal 2,5 cos(2π · 50 t + 40°) met normale ruis (σ = 0,3), bemonsterd op 2 kHz. Schrijf een functie fasor(x, t, f) en druk amplitude en fase af.

✓ Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np
rng = np.random.default_rng(0)
fs, f = 2000, 50.0
t = np.arange(0, 0.1, 1 / fs)
x = 2.5 * np.cos(2 * np.pi * f * t + np.radians(40)) + rng.normal(0, 0.3, t.size)

def fasor(x, t, f):
    return 2 * np.mean(x * np.exp(-1j * 2 * np.pi * f * t))

X = fasor(x, t, f)
print(abs(X), np.degrees(np.angle(X)))
```

Je vindt ongeveer 2,5 en 40°, tot op enkele honderdsten en enkele tienden van een graad (de ruis middelt over 200 metingen).

b Neem nu 0,105 s in plaats van 0,1 s. Wat gebeurt er met de fout, en waarom?

✓ Met 0,105 s bevat het venster 5,25 periodes: de wijzer met 2ω middelt niet meer weg, en er komt een fout bij die van de fase afhangt (enkele procenten). Oplossing: altijd over hele periodes middelen, of een venster gebruiken (hoofdstuk 21).

c Hoe zou je met dezelfde functie de fase tussen de spanning en de stroom van een toestel meten?

✓ Bereken U = fasor(u, t, f) en I = fasor(i, t, f) over dezelfde metingen; het faseverschil is np.angle(U) − np.angle(I) (of np.angle(U / I)). De gemeenschappelijke tijdsoorsprong valt weg.

7.11 Twee ventilatoren die zweven

Toepassen · 7 · Analyseren · 20 min

In de technische ruimte hangen de ventilator van de omvormer (1450 tpm) en die van de batterijkast (1500 tpm) op hetzelfde rek.

a Met welke frequentie zweeft het gebrom? Hoe lang duurt één aanzwelling?

✓ $1450\,\text{tpm} = 24{,}17\,\text{Hz}$ en $1500\,\text{tpm} = 25\,\text{Hz}$: zweving $0{,}83\,\text{Hz}$, één aanzwelling per $1{,}2\,\text{s}$.

b Leg met twee wijzers uit waarom het geluid aanzwelt en wegsterft.

✓ Bekeken vanuit de ene wijzer draait de andere langzaam rond met het verschil van de frequenties. Liggen ze samen, dan tellen de trillingen op (luid); een halve omwenteling later liggen ze tegengesteld (stil).

c Stel twee manieren voor om de hinder weg te nemen.

✓ De toerentallen ver uit elkaar leggen (zweving sneller dan ongeveer 15 per seconde klinkt als een vaste ruwheid in plaats van een deining), of de ventilatoren trillingsvrij ophangen (rubber, hoofdstuk 11) zodat het rek niet meetrilt. Exact gelijke toerentallen helpen alleen als ze ook in fase blijven, en dat gebeurt niet vanzelf.

7.12 Habitat: de ontwerpbelasting van de omvormer

Toepassen · 8 · Habitat · 45 min

Het energiebeheer van het station laat hoogstens deze toestellen tegelijk draaien (230 V, 50 Hz; stromen ijlen na, behalve bij de verwarming):

belasting	P (W)	$\cos\varphi$	I (A)	hoek
noodverwarming	2000	1,00		
drukpomp drinkwater	750	0,81		
koelkast	150	0,70		
rest (licht, elektronica, WTW, Pi)	300	0,95		
samen				

a Bereken per toestel de schijnbare belasting S = P/cos φ, de stroom en zijn hoek. Vul de tabel aan.

✓ Per toestel (hoek = −arccos(cos φ)):

BELASTING	$S = P/\cos\Phi$ (VA)	I (A)	HOEK	I ALS $A + BJ$ (A)
noodverwarming	2000	8,70	−0,0°	8,70
drukpomp drinkwater	927	4,03	−36,0°	3,26 − 2,37j
koelkast	214	0,93	−45,6°	0,65 − 0,67j
rest (licht, elektronica, WTW, Pi)	316	1,37	−18,2°	1,30 − 0,43j
samen	3298	**14,34**	−14,0°	13,91 − 3,46j

b Tel de stromen op als fasoren. Hoe groot is de totale stroom, onder welke hoek, en welke schijnbare belasting ziet de omvormer?

✓ $I = 13{,}91 - 3{,}46\,j\,\text{A}$, $|I| = 14{,}34\,\text{A}$ onder $-14{,}0°$; $S = 230 \cdot 14{,}34 = 3298\,\text{VA}$ voor $P = 3200\,\text{W}$.

c Vergelijk met de gewone som van de stromen. Welke fout maak je zo, en is dat een veilige fout?

> ✓ Gewone som: $15{,}03\ \text{A}$, 5 % te veel. De gewone som is altijd minstens zo groot als de fasorsom (driehoeksongelijkheid): een veilige, maar te dure schatting.

d Het dossier kiest een omvormer van 4,0 kVA continu en 8 kVA gedurende 5 s. Beoordeel die keuze; houd rekening met de aanloopstroom van de pomp (zes keer de nominale stroom, bijna zuiver inductief).

> ✓ Continu: 3,30 kVA tegenover 4,0 kVA, een marge van 21 %. Aanloop: de pomp trekt kort ongeveer 6 × 4,03 = 24,2 A, bijna 90° achter op de spanning; met de andere toestellen erbij is de totale stroom dan ongeveer 27 A, of 6,3 kVA: binnen de 8 kVA gedurende 5 s. Aan de 48 V-kant vraagt 4 kW bij een rendement van 93 % ongeveer 90 A: dikke kabels en een zware zekering (hoofdstuk 24). Noodverwarming en koken tegelijk zou 4 kVA overschrijden: het energiebeheer moet dat verhinderen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Fasoren	Elke stroom correct als fasor (grootte en hoek, teken van de hoek), in poolvorm en als a + bj.
Som	Complexe som correct; modulus en hoek met atan2; S = U · I|.
Interpretatie	Verschil met de gewone som verklaard; begrijpt dat de gewone som een veilige bovengrens is.
Keuze	Marge onderbouwd met getallen, aanloopstroom meegenomen, koppeling naar de 48 V-kant (stroom).

7.13 Impedanties uitrekenen

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een condensator van 100 nF, een spoel van 10 mH en een weerstand van 1,0 kΩ.

a Bereken de impedantie van de condensator bij 50 Hz en bij 10 kHz, en die van de spoel bij 50 Hz.

> ✓ $Z_C(50\,\text{Hz}) = -j\,31{,}8\,\text{k}\Omega$; $Z_C(10\,\text{kHz}) = -j\,159\,\Omega$; $Z_L(50\,\text{Hz}) = j\,3{,}14\,\Omega$.

b De weerstand en de condensator staan in serie aan een sinusvormige spanning van 5,0 V amplitude en 1,0 kHz. Bereken de stroom (amplitude en fase) en de spanning over de condensator.

> ✓ $Z = 1000 - j\,1592\,\Omega = 1880\angle -57{,}9°\,\Omega$. $I = 5/Z = 2{,}66\angle 57{,}9°\,\text{mA}$: de stroom ijlt 57,9° voor. $U_C = Z_C I = 1592\angle -90° \cdot 0{,}00266\angle 57{,}9° = 4{,}23\angle -32{,}1°\,\text{V}$. Controle: $|U_R|^2 + |U_C|^2 = 2{,}66^2 + 4{,}23^2 = 25$.

●●● Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

7.14 Goniometrie uit Euler

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

Met $e^{j(\alpha+\beta)} = e^{j\alpha}e^{j\beta}$ en $(e^{j\varphi})^n = e^{jn\varphi}$ vind je de goniometrische formules terug zonder ze te onthouden.

a Leid de somformules voor $\cos(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha+\beta)$ af door beide kanten uit te werken en reële en imaginaire delen gelijk te stellen.

> ✓ $e^{j\alpha}e^{j\beta} = (\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$, en dat is $\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)$. Reële delen: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; imaginaire: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

b Leid met De Moivre $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ af.

✓ $(c+js)^3 = c^3 + 3c^2(js) + 3c(js)^2 + (js)^3 = (c^3 - 3cs^2) + j(3c^2 s - s^3)$ met $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$. Reëel deel: $\cos 3\varphi = c^3 - 3c(1-c^2) = 4c^3 - 3c$.

c Toon met Euler aan dat $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$, en gebruik het om te verklaren waarom het vermogen $u\,i$ in een weerstand met de dubbele frequentie schommelt.

✓ $\cos^2\varphi = \left(\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2j\varphi}+2+e^{-2j\varphi}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$. In een weerstand is $p = u\,i = \frac{\hat{U}^2}{R}\cos^2\omega t = \frac{\hat{U}^2}{2R}(1+\cos 2\omega t)$: een gemiddelde $\hat{U}^2/(2R) = U_{\text{eff}}^2/R$ plus een schommeling met 2ω (100 Hz bij het net). Daarom brommen transformatoren op 100 Hz.

7.15 Onderzoek: aliasing als draaiende wijzer

Uitdagen · 8 · Onderzoeken · 40 min

Een goedkope logger meet de netspanning (via een veilige meettransformator) maar 60 keer per seconde.

a Hoeveel graden draait de wijzer van 50 Hz tussen twee metingen? Welke draai 'ziet' de logger, en welke frequentie lijkt het signaal te hebben?

✓ $360° \cdot 50/60 = 300°$ per meting; de logger ziet de kortste draai: $300° - 360° = -60°$. Dat is $-60° \cdot 60/360 = -10$ Hz: een signaal van 10 Hz dat 'achteruit' draait (voor een cosinus zie je gewoon 10 Hz).

b Controleer met een Python-programma: vergelijk de metingen van cos(2π · 50 t) met die van de schijnbare frequentie.

✓ Programma en echte uitvoer:

```
# alias.py - bemonsteren is de wijzer in stapjes bekijken
import numpy as np

f, fs = 50.0, 60.0                      # signaal van 50 Hz, 60 metingen per seconde
stap = 360 * f / fs                     # zoveel graden draait de wijzer tussen twee metingen
print("draai per meting: %.0f graden, dus schijnbaar %.0f graden" % (stap, (stap + 180) % 360 - 180))
k = np.arange(6)
z = np.exp(1j * 2 * np.pi * f * k / fs)  # de wijzer op de meetmomenten
print("hoeken (graden):", np.round(np.degrees(np.angle(z))).astype(int))
f_schijn = ((f + fs / 2) % fs) - fs / 2
print("schijnbare frequentie: %.0f Hz" % f_schijn)
t = k / fs
print("cos 50 Hz :", np.round(np.cos(2 * np.pi * f * t), 3))
print("cos -10 Hz:", np.round(np.cos(2 * np.pi * f_schijn * t), 3))
```

```
draai per meting: 300 graden, dus schijnbaar -60 graden
hoeken (graden): [   0  -60 -120  180  120   60]
schijnbare frequentie: -10 Hz
cos 50 Hz : [ 1.   0.5 -0.5 -1.  -0.5  0.5]
cos -10 Hz: [ 1.   0.5 -0.5 -1.  -0.5  0.5]
```

De metingen zijn identiek: uit de getallen alleen kan niemand zien of het 50 Hz of 10 Hz was.

c Bij welke bemonsteringsfrequenties zou het 50 Hz-signaal als 0 Hz (een constante) verschijnen? Waarom is dat gevaarlijk voor een meting?

✓ Als de wijzer tussen twee metingen een geheel aantal omwentelingen draait: fs = 50, 25, 16,7, 12,5 Hz, … Dan meet de logger elke keer dezelfde waarde, een schijnbaar constante spanning, die afhangt van het toevallige startmoment (tussen −325 en 325 V). Een filter vóór de ADC (hoofdstuk 21) of fs boven 100 Hz voorkomt dat.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Redenering	Draai per meting correct; schijnbare draai tussen −180° en 180°; frequentie met teken.
Programma	Metingen van beide signalen vallen samen; resultaat correct geïnterpreteerd.
Veralgemening	fs = 50/k Hz gevonden; gevaar van een schijnbaar constant signaal uitgelegd.

7.16 Ontwerp: de synchronisatiecontrole van de omvormer

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 50 min

Voor de omvormer op het net inschakelt, moet het brein van het station controleren dat hij in de pas loopt. Koppelspoel 2,0 mH (X = 0,63 Ω); nominale stroom 17,4 A (4,0 kVA); de omvormer verdraagt kort 35 A.

a Leid af dat het vermogen naar het net $P = \frac{U_1 U_2}{X}\sin\delta$ is, met U_1 de omvormer, U_2 het net en δ het faseverschil.

$I = \frac{U_1 e^{j\delta} - U_2}{jX}$. Vermogen dat het net ontvangt: $P = \mathrm{Re}(U_2 \bar{I})$ met $\bar{I} = \frac{U_1 e^{-j\delta} - U_2}{-jX}$. Dus $U_2\bar{I} = \frac{U_1 U_2 e^{-j\delta} - U_2^2}{-jX} = \frac{j(U_1U_2\cos\delta - U_2^2) + U_1U_2\sin\delta}{X}$, en het reële deel is $\frac{U_1U_2\sin\delta}{X}$.

b Hoe groot mag het faseverschil bij het inschakelen hoogstens zijn om onder 35 A te blijven (gelijke spanningen)? En het spanningsverschil bij δ = 0?

$|I| = 2U\sin(\delta/2)/X \le 35 \Rightarrow \sin(\delta/2) \le \frac{35\cdot 0{,}628}{460} = 0{,}0478$, dus $\delta \le 5{,}5°$. Bij $\delta = 0$: $|U_1 - U_2| \le 35 \cdot 0{,}628 = 22\,\mathrm{V}$ (ongeveer 10 %).

c Ontwerp de controle: welke grootheden meet je, met welke methode (denk aan de fasor uit metingen), welke grenzen, en hoe lang wacht je tot je inschakelt?

Bijvoorbeeld: meet beide spanningen synchroon (enkele kHz) en bereken elke periode hun fasor (amplitude en fase, zoals in het handboek); frequentie uit de draaiing van de fasor per periode. Schakel in als het frequentieverschil < 0,1 Hz, het faseverschil < 3° (marge onder 5,5°) en het spanningsverschil < 5 % gedurende minstens 10 periodes na elkaar; anders niet inschakelen (veilige toestand). Na het inschakelen volgt een fasevolger (PLL) het net. De hardware moet zelf ook een beveiliging hebben (hoofdstuk 23: noodstop los van de software).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	P = U_1U_2 sin δ / X correct afgeleid met fasoren (Re van U_2 maal de toegevoegde stroom).
Grenzen	Faseverschil en spanningsverschil correct berekend uit X en de toegelaten stroom.
Ontwerp	Meet frequentie, fase en amplitude van beide spanningen (fasor over hele periodes); grenzen en wachttijd onderbouwd; veilige toestand bij twijfel.

7.17 Debat: bestaan imaginaire getallen?

Uitdagen · 8 · Argumenteren · 40 min

Descartes noemde ze denkbeeldig, Cardano nutteloos. Toch rekent elk elektriciteitsnet, elke gsm en elke MRI-scanner ermee, en in de kwantummechanica staat j in de basisvergelijking. Maar een stroommeter wijst nooit '3j ampère' aan.

a Verdedig één van de standpunten: (a) complexe getallen zijn een handige rekentruc, meer niet; (b) ze beschrijven iets echts. Gebruik minstens twee voorbeelden uit dit hoofdstuk.

(a) Wat je meet, is altijd reëel: het reële deel van een fasor. j is een boekhoudkundig middel om amplitude en fase samen te dragen, en je kan alles ook met sinussen en cosinussen doen (alleen veel langer). (b) Een complex getal is een draaiing met schaling; die is in een wisselstroomnet, een trilling of een golf even echt als een lengte. De hoek van een impedantie of het imaginaire deel van een eigenwaarde (de trillingsfrequentie) meet je wel degelijk, en in de kwantummechanica is een complexe amplitude onvermijdelijk.

b Bestaan negatieve getallen of de wortel uit twee 'echt'? Wat zegt dat over je antwoord op de vorige vraag?

Ook negatieve getallen en irrationale getallen werden lang gewantrouwd (een negatief aantal schapen?). Ze werden aanvaard omdat ze een consistent systeem vormen dat de werkelijkheid goed beschrijft: een schuld, een temperatuur onder nul, de diagonaal van een vierkant. Het 'bestaan' van een getalsoort is een vraag over modellen, en met die maatstaf staan complexe getallen even sterk als negatieve.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Argumenten	Minstens twee voorbeelden uit het hoofdstuk (fasor, impedantie, Euler, trilling) correct gebruikt.
Tegenargument	Het sterkste argument van de andere kant eerlijk weergegeven.
Reflectie	Vergelijking met andere getalsoorten; onderscheid tussen een meetbare grootheid en een model.

7.18 Het gemiddelde vermogen met fasoren

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Een toestel krijgt $u = \hat{U}\cos\omega t$ en neemt $i = \hat{I}\cos(\omega t - \varphi)$.

a Bereken het gemiddelde van $p = u\,i$ over één periode met een integraal (hoofdstuk 3). Tip: productformule of Euler.

$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$: $p = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$. De tweede term heeft over een periode gemiddelde nul (hoofdstuk 3), dus $\bar{p} = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\varphi$.

b Toon aan dat dat gelijk is aan $\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(U\bar{I})$ met de fasoren $U = \hat{U}$ en $I = \hat{I}\,\mathrm{e}^{-j\varphi}$, en aan $U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\varphi$.

$U\bar{I} = \hat{U}\hat{I}\,\mathrm{e}^{j\varphi}$, reëel deel $\hat{U}\hat{I}\cos\varphi$; de helft is $\bar{p}$. En $\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}$.

c Reken na voor de pomp uit het handboek (325 V, 5,70 A, 36°).

$\frac{1}{2}\cdot 325{,}3\cdot 5{,}70\cdot\cos 36^\circ = 750\ \mathrm{W}$: de 750 W van de pomp.

E EXPERT · DEEL E2 · MECHANICA EN CONSTRUCTIES

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 8

Beweging in twee dimensies

Van een druppel uit de sproeier tot een drone in de wind: beweging als vector

Uitgewerkte oplossingen bij de 18 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 8× toepassen · 4× uitdagen · ± 470 min

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Elke druppel volgt zijn eigen baan: de grote vliegen het verst, de kleine remt de lucht af.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen — één stap, direct toepassen

8.1 Een baan uit r(t)

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een bal volgt $\vec{r}(t) = (3{,}0\,t;\ 4{,}0\,t - 4{,}9\,t^2)$ (in m, t in s), vanaf de grond.

a Bereken $\vec{v}(t)$ en $\vec{a}(t)$. Wat is $\vec{v}$ en de snelheid op $t = 0{,}50$ s?

✓ $\vec{v} = (3{,}0;\ 4{,}0 - 9{,}8\,t)$ m/s, $\vec{a} = (0;\ -9{,}8)$ m/s². Op $t = 0{,}50$ s: $\vec{v} = (3{,}0;\ -0{,}90)$ m/s, $v = \sqrt{9 + 0{,}81} = 3{,}13\,\text{m/s}$ (de bal daalt al).

b Wanneer en op welke hoogte bereikt de bal zijn top? Waar landt hij?

✓ Top: $v_y = 0$ bij $t = 4{,}0/9{,}8 = 0{,}408\,\text{s}$, hoogte $4{,}0 \cdot 0{,}408 - 4{,}9 \cdot 0{,}408^2 = 0{,}816\,\text{m}$. Landing: $y = 0$ bij $t = 4{,}0/4{,}9 = 0{,}816\,\text{s}$, $x = 3{,}0 \cdot 0{,}816 = 2{,}45\,\text{m}$.

c Schrijf de baan als $y(x)$.

✓ $t = x/3{,}0$ invullen: $y = \frac{4}{3}x - \frac{4{,}9}{9}x^2 = 1{,}333\,x - 0{,}544\,x^2$: een parabool door (0; 0) en (2,45; 0).

8.2 Van de tafel

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een knikker rolt van een tafel van 0,80 m hoog en landt 1,20 m van de voet van de tafel. Geen lucht.

a Bereken de valtijd en de beginsnelheid.

✓ $t = \sqrt{2 \cdot 0{,}80/9{,}81} = 0{,}404\,\text{s}$; $v_0 = 1{,}20/0{,}404 = 2{,}97\,\text{m/s}$.

b Met welke snelheid en onder welke hoek met de vloer landt de knikker?

✓ $v_y = g\,t = 3{,}96\,\text{m/s}$; $v = \sqrt{2{,}97^2 + 3{,}96^2} = 4{,}95\,\text{m/s}$ onder $\tan^{-1}(3{,}96/2{,}97) = 53{,}1°$ met de vloer.

c Hoe ver landt hij als hij twee keer zo snel van de tafel rolt? En als de tafel twee keer zo hoog is?

✓ Twee keer zo snel: dezelfde valtijd, dus 2,40 m. Twee keer zo hoog: valtijd $\times\sqrt{2}$, dus $1{,}20 \cdot \sqrt{2} = 1{,}70\,\text{m}$.

8.3 Een schuine worp

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een bal vertrekt vanaf de grond met 15 m/s onder 35° en landt op dezelfde hoogte. Geen lucht.

a Bereken de vliegtijd, de hoogte van de top en het bereik.

✓ $T = 2 \cdot 15\sin 35°/9{,}81 = 1{,}754\,\text{s}$; $H = (15\sin 35°)^2/(2 \cdot 9{,}81) = 3{,}77\,\text{m}$; $R = 15^2 \sin 70°/9{,}81 = 21{,}6\,\text{m}$.

b Onder welke andere hoek landt de bal op dezelfde plaats? Welke baan duurt het langst?

✓ $90° - 35° = 55°$ (want $\sin 110° = \sin 70°$). De baan onder 55° is hoger en duurt langer: $T = 2 \cdot 15\sin 55°/9{,}81 = 2{,}51\,\text{s}$.

c Wat is de snelheid in de top, en de versnelling?

✓ In de top is $v_y = 0$, dus $v = v_x = 15\cos 35° = 12{,}3\,\text{m/s}$ (niet nul!). De versnelling is overal $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ naar beneden, ook in de top.

8.4 Waar of niet waar?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Beoordeel elke uitspraak en verklaar in één of twee zinnen.

a (a) In de top van een schuine worp is de snelheid nul. (b) Een druppel die in de wind valt, heeft tegenover de grond een schuine eindsnelheid. (c) Een voorwerp dat met constante snelheid een cirkel beschrijft, versnelt niet.

✓ (a) Niet waar: alleen de verticale snelheid is nul, de horizontale blijft. (b) Waar: tegenover de lucht valt hij verticaal met zijn eindsnelheid, en de lucht beweegt met de wind mee; tegenover de grond is dat de som van beide. (c) Niet waar: de richting van de snelheid verandert, dus er is een versnelling v²/R naar het middelpunt.

b (d) Met luchtweerstand draagt 45° het verst. (e) Een pakket dat een drone loslaat, valt tegenover de grond recht naar beneden. (f) De middelpuntzoekende kracht moet je in een vrijlichaamsdiagram apart tekenen, naast de andere krachten.

> (d) Niet waar: met lucht ligt het optimum lager (voor druppels 27 tot 35°), want een steile baan duurt langer en remt meer af. (e) Niet waar: het pakket krijgt de snelheid van de drone mee; tegenover de drone valt het (zonder lucht) recht naar beneden, tegenover de grond is het een worp. (f) Niet waar: het is geen extra kracht, maar de resultante van de getekende krachten (wrijving, spanning, normaalkracht, gewicht). Je tekent ze niet dubbel.

8.5 De rivier oversteken

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Een bootje vaart met 3,0 m/s tegenover het water over een rivier van 60 m breed; het water stroomt met 1,5 m/s.

a De stuurman richt recht naar de overkant. Hoe lang duurt de oversteek, hoe ver drijft het bootje af, en hoe snel beweegt het tegenover de oever?

> De stroming verandert de component naar de overkant niet: $t = 60/3{,}0 = 20\,\text{s}$. Afdrijven: $1{,}5 \cdot 20 = 30\,\text{m}$. Snelheid tegenover de oever $\sqrt{3{,}0^2 + 1{,}5^2} = 3{,}35\,\text{m/s}$.

b Onder welke hoek moet hij stroomopwaarts richten om recht over te steken? Hoe lang duurt het dan?

> De component stroomopwaarts moet de stroming opheffen: $3{,}0 \sin\beta = 1{,}5$, $\beta = 30°$. Naar de overkant blijft $3{,}0 \cos 30° = 2{,}60\,\text{m/s}$: $t = 60/2{,}60 = 23{,}1\,\text{s}$.

c Teken voor beide gevallen de snelheidsdriehoek.

> (a) Pijl 3,0 recht naar de overkant, kop aan staart 1,5 stroomafwaarts, resultante schuin. (b) Pijl 3,0 schuin stroomopwaarts (30° met de loodlijn), plus 1,5 stroomafwaarts: resultante 2,60 recht naar de overkant. De rechte oversteek duurt langer.

8.6 Het wiel van het robotje

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Het inspectierobotje (hoofdstuk 33 van I) rijdt 0,20 m/s op wielen van Ø 65 mm; de motor draait via een tandwielkast 1:48.

a Bereken de hoeksnelheid van het wiel (rad/s en toeren per minuut) en de omlooptijd.

> $\omega = v/r = 0{,}20/0{,}0325 = 6{,}15\,\text{rad/s}$, $n = 58{,}8$ tpm, $T = 2\pi/\omega = 1{,}02\,\text{s}$.

b Hoe snel draait de motoras? Hoe groot is de centripetale versnelling van een steentje in het profiel van de band, tegenover de as?

> Motor: $48 \cdot 58{,}8 = 2821$ tpm. Steentje: $a = \omega^2 r = 6{,}15^2 \cdot 0{,}0325 = 1{,}23\,\text{m/s}^2$ (ook v^2/r).

c In de bocht van zijn lus (R = 0,15 m) houdt het robotje 0,20 m/s aan. Bereken zijn centripetale versnelling en de kracht op het robotje van 0,8 kg. Welke kracht levert die?

> $a = 0{,}20^2/0{,}15 = 0{,}267\,\text{m/s}^2$, $F = 0{,}8 \cdot 0{,}267 = 0{,}21\,\text{N}$, geleverd door de zijdelingse wrijving van de banden op de vloer (ruim onder $\mu mg \approx 4\,\text{N}$).

8.7 Naar het depot, met zuidwestenwind

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De drone vliegt 12 m/s tegenover de lucht naar het depot, 6,0 km recht ten noorden. De wind komt nu uit het zuidwesten met 5,0 m/s (de lucht beweegt naar het noordoosten).

a Schrijf $\vec{w}$ in componenten (x oost, y noord).

✓ $\vec{w} = 5{,}0\,(\sin 45°;\ \cos 45°) = (3{,}54;\ 3{,}54)\,\text{m/s}$.

b Welke koers houdt de drone aan op de heenweg? Hoe snel gaat hij over de grond, en hoe lang duurt de heenvlucht?

✓ x: $v_{\text{lucht},x} = -3{,}54$; dan $v_{\text{lucht},y} = \sqrt{144 - 3{,}54^2} = 11{,}47\,\text{m/s}$. Koers $\sin^{-1}(3{,}54/12) = 17{,}1°$ ten westen van het noorden. Over de grond: $11{,}47 + 3{,}54 = 15{,}00\,\text{m/s}$; $6000/15{,}00 = 400\,\text{s} = 6{,}7\,\text{min}$.

c Idem voor de terugweg. Vergelijk de totale tijd met windstil weer (16,7 min).

✓ Terug naar het zuiden: opnieuw $v_{\text{lucht},x} = -3{,}54$ (koers 17,1° ten westen van het zuiden), $v_{\text{lucht},y} = -11{,}47$; over de grond $11{,}47 - 3{,}54 = 7{,}93\,\text{m/s}$: $12{,}6\,\text{min}$. Samen $19{,}3\,\text{min}$, meer dan de 16,7 min zonder wind.

8.8 Een pakket op een platform

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Je gooit een zakje zaden van 1,0 m hoog naar een plat dak dat 6,0 m verder en 2,0 m hoger ligt dan je hand, met 10 m/s. Geen lucht.

a Bereken beide hoeken waaronder het zakje de rand van het dak (6,0 m; 2,0 m) raakt.

✓ $\dfrac{gx^2}{2v_0^2} = \dfrac{9{,}81 \cdot 36}{200} = 1{,}7658$: $1{,}7658\,u^2 - 6\,u + 3{,}7658 = 0$, $u = 0{,}831$ of $2{,}567$: $\alpha = 39{,}7°$ of $68{,}7°$.

b Bereken voor beide de tijd tot de dakrand. Bij welke hoek komt het zakje van boven op het dak, bij welke nog stijgend?

✓ $t = x/(v_0 \cos\alpha)$: 0,78 s en 1,65 s. Onder 69° is de top op $t = v_0 \sin\alpha / g = 0{,}95\,\text{s}$, vóór de dakrand: het zakje valt van boven op het dak. Onder 40° is de top op 0,65 s, ná 0,78 s: het zakje stijgt nog als het de rand passeert.

c Wat is de kleinste snelheid waarmee je de dakrand nog haalt, en onder welke hoek?

✓ $v_{\min} = \sqrt{g\,(y + \sqrt{x^2 + y^2})} = \sqrt{9{,}81\,(2 + 6{,}325)} = 9{,}04\,\text{m/s}$; de hoek is $\frac{1}{2}(90° + \tan^{-1}\frac{2}{6}) = 54{,}2°$.

8.9 Loslaten uit een stijgende drone

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een drone laat op 30 m hoogte een pakket los terwijl hij met (10; 2,0) m/s vliegt (x vooruit, y omhoog). Geen lucht.

a Wat is de beginsnelheid van het pakket tegenover de grond en tegenover de drone?

✓ Tegenover de grond (10; 2,0) m/s: de snelheid van de drone. Tegenover de drone nul.

b Wanneer en waar landt het pakket? Met welke snelheid?

✓ $0 = 30 + 2{,}0\,t - 4{,}905\,t^2$: $t = \dfrac{2{,}0 + \sqrt{4 + 588{,}6}}{9{,}81} = 2{,}685\,\text{s}$; $x = 10 \cdot 2{,}685 = 26{,}9\,\text{m}$; $\vec{v} = (10;\ -24{,}3)$, $v = 26{,}3\,\text{m/s}$.

c Waar is de drone dan (hij vliegt eenparig verder)? Beschrijf de beweging van het pakket gezien vanuit de drone.

Drone: $(26{,}9;\ 30 + 2{,}0 \cdot 2{,}69) = (26{,}9;\ 35{,}4)$ m: recht boven het pakket, 35,4 m hoger. Vanuit de drone valt het pakket recht naar beneden met versnelling g, vanuit stilstand: $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$.

8.10 De beste hoek voor een druppel van 2 mm

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Gebruik de functie baan() uit baan.py (handboek). De sproeier: 19,0 m/s, mondje 0,30 m hoog, druppel van 2 mm (vt = 6,49 m/s).

a Schrijf een programma dat het bereik berekent voor hoeken van 10° tot 55° en de beste hoek zoekt.

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np
# baan() uit baan.py (handboek)

hoeken = np.arange(10, 56, 1)
bereik = [baan(19.0, a, 0.30, vt=6.49, dt=0.002)[-1, 1] for a in hoeken]
i = int(np.argmax(bereik))
print(f"beste hoek {hoeken[i]}°: {bereik[i]:.2f} m")
for a in (20, 25, 30, 35, 40, 45):
    print(f"{a}°: {bereik[a - 10]:.2f} m")
```

Echte uitvoer:

```
beste hoek 32°: 7.04 m
20°: 6.65 m
25°: 6.91 m
30°: 7.03 m
35°: 7.01 m
40°: 6.88 m
45°: 6.64 m
```

b Hoeveel bereik verlies je met 25° in plaats van de beste hoek? Is dat de moeite?

Het verschil is een paar procent (enkele decimeter): de kromme is vlak rond haar top. De lagere hoek maakt de sproeier minder windgevoelig, en dat weegt zwaarder.

8.11 Videoanalyse van een tennisbal

Toepassen · 7 · Analyseren · 30 min

Een tennisbal wordt schuin weggegooid en gefilmd; uit de video (bv. met Tracker) haal je om de 0,1 s de plaats. Voorbeeldmeting:

t (s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
x (m)	0,000	0,910	1,798	2,664	3,515	4,356	5,178	5,988
y (m)	1,798	2,511	3,114	3,604	3,991	4,270	4,444	4,524

t (s)	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
x (m)	6,781	7,564	8,334	9,092	9,834	10,565	11,280
y (m)	4,500	4,384	4,169	3,865	3,466	2,976	2,396

a Bereken met centrale differenties v_x en v_y op $t = 0{,}1$ s tot $1{,}3$ s.

Resultaat (ook de versnellingen):

T (S)	V_X (M/S)	V_Y (M/S)	A_X (M/S²)	A_Y (M/S²)
0,1	8,99	6,58	−2,2	−11,0
0,2	8,77	5,46	−2,2	−11,3
0,3	8,58	4,39	−1,5	−10,3
0,4	8,46	3,33	−1,0	−10,8
0,5	8,31	2,26	−1,9	−10,5
0,6	8,16	1,27	−1,2	−9,4
0,7	8,01	0,28	−1,7	−10,4
0,8	7,88	−0,70	−1,0	−9,2
0,9	7,76	−1,66	−1,3	−9,9
1,0	7,64	−2,60	−1,2	−8,9
1,1	7,50	−3,51	−1,6	−9,5
1,2	7,36	−4,45	−1,1	−9,1
1,3	7,23	−5,35	−1,6	−9,0

b Bereken met de tweede differentie $(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})/\Delta t^2$ ook a_x en a_y. Wat is hun gemiddelde?

Gemiddeld $a_x = -1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ en $a_y = -9{,}9\,\mathrm{m/s^2}$.

c Wijst de meting op luchtweerstand? Waaraan zie je dat? Waarom is a_y zo onrustig?

Ja: v_x daalt van 8,99 naar 7,23 m/s, dus a_x is negatief, en $|a_y|$ is in het begin, als de bal stijgt, groter dan g (weerstand en zwaartekracht wijzen allebei naar beneden) en aan het eind kleiner. Een tweede differentie deelt door $\Delta t^2 = 0{,}01\,\mathrm{s^2}$: een fout van 2 mm in één plaats wordt al 0,4 m/s² (hoofdstuk 1: differentiëren versterkt ruis).

8.12 De hellende bocht van een wielerbaan

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een wielrenner neemt een bocht met straal R die onder een hoek θ helt. Neem aan dat er geen wrijving nodig is.

a Teken het vrijlichaamsdiagram (renner met fiets als één punt) en toon aan dat $\tan\theta = \dfrac{v^2}{gR}$.

Alleen G (verticaal) en F_N (loodrecht op de baan, dus onder θ met de verticaal). Verticaal: $F_\mathrm{N}\cos\theta = mg$. Horizontaal, naar het middelpunt: $F_\mathrm{N}\sin\theta = mv^2/R$. Delen: $\tan\theta = v^2/(gR)$.

b Bereken θ voor R = 25 m en 15 m/s (54 km/h).

$\tan\theta = 225/(9{,}81\cdot 25) = 0{,}917$, $\theta = 42{,}5°$.

c Waarom hellen de bochten van een autosnelweg maar een paar procent?

Een autosnelweg heeft een grote straal (honderden meter), dus v²/(gR) is klein; en een sterke helling zou een trage of stilstaande auto (file, ijzel) naar binnen laten glijden. De wrijving doet de rest.

8.13 Habitat: het beregeningsplan van de moestuin

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

De moestuin van 9,0 × 9,0 m krijgt vier kwartcirkelsproeiers (handboek). Rekenwaarden: overdruk aan het mondje Δp, snelheidscoëfficiënt 0,95, pomp met een rendement van 30 %. Uit de simulatie (druppels tot 3 mm, 25°, 0,30 m hoog): bereik 8,0 m bij 1,5 bar, 9,0 m bij 2,0 bar, 9,8 m bij 2,5 bar (model). Een droge zomerdag vraagt 5 mm water; in een droge week zonder regen 30 mm.

a Kies een spuitmond (1,5 / 2,0 / 2,5 mm) en een druk zodat de straal 9 m haalt. Bereken v_0 en Q per sproeier.

Met 2,0 mm en 2,0 bar (handboek): $v_0 = 0{,}95\sqrt{2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^5/1000} = 19{,}0\,\mathrm{m/s}$, $Q = 3{,}58\,\mathrm{L/min}$, straal 9,0 m. (Met 1,5 mm op 2,0 bar blijft de snelheid gelijk en dus ook het bereik van een druppel van 3 mm, maar het debiet daalt tot 2,01 L/min en een dunnere straal geeft kleinere druppels: kortere straal. 2,5 mm geeft 5,60 L/min.)

b Bereken de neerslag in mm/h en de sproeitijd per dag voor 5 mm. Hoeveel regenwater gaat er in een droge week door?

Neerslag $4 \cdot 3{,}58\,\mathrm{L/min} \cdot 60/81\,\mathrm{m^2} = 10{,}6\,\mathrm{mm/h}$. 5 mm = 405 L: 28 min. Droge week (30 mm): $30 \cdot 81 = 2430\,\mathrm{L}$, bijna 2,5 m³ regenwater.

c Bereken het hydraulisch en het elektrisch vermogen van de pomp en de energie per dag.

Hydraulisch $4 \cdot \Delta p\,Q = 4 \cdot 11{,}9 = 48\,\mathrm{W}$ (aan de mondjes; de leidingen vragen nog wat extra, hoofdstuk 18). Elektrisch $48/0{,}30 = 159\,\mathrm{W}$, gedurende 28 min: 75 Wh per dag.

d Schrijf voor het brein van het station een regel van 3 à 5 zinnen: wanneer mag er gesproeid worden (tijdstip, wind, regen)?

Bijvoorbeeld: 'Sproei tussen 5 en 8 uur 's ochtends, als de gemiddelde wind over de laatste 10 minuten onder 3 m/s ligt. Sla over als er de voorbije 24 uur meer dan 5 mm regen viel of als de bodemvochtsensor boven de drempel zit. Stijgt de wind tijdens het sproeien boven 4 m/s, stop dan en probeer 's avonds opnieuw.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Keuze	Druk en mondje samen kloppen met 9 m straal; v_0 uit ½ρv² = Δp met 0,95; Q = A v_0.
Water	Neerslag = 4Q / 81 m²; tijd voor 5 mm; weekvolume in liter.
Energie	Δp · Q per sproeier, gedeeld door het pomprendement; Wh per dag.
Regel	Windgrens met getal (bv. 3 m/s: 2 à 3 m verschuiving), vroeg in de ochtend, niet na regen; meetbaar voor de sensoren.

8.14 Regen op het treinraam

Toepassen · 7 · Analyseren · 15 min

Een trein rijdt 120 km/h door windstille regen. De regendruppels maken op het zijraam strepen die 76° met de verticaal maken.

a Teken de snelheidsdriehoek: druppel tegenover de grond, trein tegenover de grond, druppel tegenover de trein.

$\vec{v}_{\text{druppel,trein}} = \vec{v}_{\text{druppel,grond}} - \vec{v}_{\text{trein,grond}}$: verticaal naar beneden v_e, plus 33,3 m/s naar achteren. De streep maakt een hoek $\tan\beta = 33{,}3/v_e$ met de verticaal.

b Bereken de valsnelheid van de druppels. Hoe groot zijn ze ongeveer (gebruik de tabel van het handboek)?

$v_e = 33{,}3/\tan 76° = 8{,}31\,\mathrm{m/s}$: tussen 8,06 (3 mm) en 8,83 m/s (4 mm), dus druppels van ongeveer 3 mm: een stevige bui.

8.15 Twee afleidingen: omhullende en bereik vanaf een hoogte

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Zonder lucht, beginsnelheid v_0, vertrek in de oorsprong (of op hoogte h).

a Schrijf de baan als $y = x\,u - \dfrac{g x^2}{2v_0^2}(1+u^2)$ met $u = \tan\alpha$. Voor een vaste x: welke u geeft de grootste y? Toon dat die grootste y de omhullende $y = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g x^2}{2v_0^2}$ is.

✓ $\partial y/\partial u = x - \dfrac{g x^2}{v_0^2}u = 0$ geeft $u = \dfrac{v_0^2}{gx}$. Invullen: $y = \dfrac{v_0^2}{g} - \dfrac{g x^2}{2v_0^2} - \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g x^2}{2v_0^2}$. Geen enkele baan komt boven deze kromme, en elke kromme raakt haar in één punt: de omhullende.

b Een worp vanaf hoogte h landt op $y = -h$. Gebruik de omhullende om het grootste bereik te vinden en toon dat $R_{\max} = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

✓ Het verste punt op hoogte $-h$ ligt op de omhullende: $-h = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{gR^2}{2v_0^2}$, dus $R^2 = \dfrac{v_0^2}{g^2}(v_0^2 + 2gh)$ en $R_{\max} = \dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh}$.

c Toon dat de beste hoek dan voldoet aan $\tan\alpha = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$, kleiner dan 45°. Bereken hoek en bereik voor de sproeier zonder lucht (19,0 m/s, 0,30 m).

✓ $\tan\alpha = u = \dfrac{v_0^2}{gR_{\max}} = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}} < 1$. Sproeier: $\tan\alpha = 19{,}0/\sqrt{361+5{,}89} = 0{,}9919$, $\alpha = 44{,}77°$; $R_{\max} = 37{,}10\,\text{m}$ (met lucht: rond 9,3 m bij 34°).

8.16 Onderzoek: één kromme voor alle druppels

●●● Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

De vergelijking $\dot{\vec{v}} = \vec{g} - \dfrac{g}{v_e^2}|\vec{v}|\vec{v}$ bevat alleen g en v_e. Hypothese: het bereik hangt alleen af van de hoek en van v_0/v_e, als je het uitdrukt in $L = v_e^2/g$.

a Toon met dimensieanalyse dat $R\,g/v_e^2 = F(v_0/v_e,\ \alpha)$. Schrijf de vergelijking in de dimensieloze tijd $\tau = gt/v_e$ en snelheid $\vec{u} = \vec{v}/v_e$.

✓ Met $\tau = gt/v_e$ en $\vec{u} = \vec{v}/v_e$: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{v_e}{g}\cdot\dfrac{1}{v_e}\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\hat{e}_y - |\vec{u}|\,\vec{u}$: geen parameter meer. De beginwaarde is $\vec{u}_0 = (v_0/v_e)(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Plaatsen in eenheden $L = v_e^2/g$: $\mathrm{d}(\vec{r}/L)/\mathrm{d}\tau = \vec{u}$. Dus R/L hangt alleen af van v_0/v_e en α (Buckingham: vier grootheden R, v_0, v_e, g met twee dimensies geven twee dimensieloze groepen).

b Toets de hypothese met een simulatie: bereken $R\,g/v_e^2$ bij 30° voor v_0/v_e = 0,5 tot 4 en drie verschillende v_e.

Bijvoorbeeld:

```
import math
import numpy as np

g = 9.81


def bereik(v0, hoek, vt, dt=0.0005):
    """Horizontale afstand tot de grond, vanaf de grond, met kwadratische weerstand (Heun)."""
    a = math.radians(hoek)
    s = np.array([0.0, 0.0, v0 * math.cos(a), v0 * math.sin(a)])

    def f(s):
        k = g / vt**2 * math.hypot(s[2], s[3])
        return np.array([s[2], s[3], -k * s[2], -g - k * s[3]])
    while True:
        k1 = f(s)
        s2 = s + dt / 2 * (k1 + f(s + dt * k1))
        if s2[1] < 0:
            return s[0] + s[1] / (s[1] - s2[1]) * (s2[0] - s[0])
        s = s2


print("v0/vt   R g / vt^2 voor vt = 4,03  6,49  8,06 m/s   zonder lucht")
for q in (0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0):
    rij = [bereik(q * vt, 30.0, vt) * g / vt**2 for vt in (4.03, 6.49, 8.06)]
    print(f"{q:5.1f}   " + "  ".join(f"{r:7.3f}" for r in rij) + f"   {q * q *
math.sin(math.radians(60)):9.3f}")
```

Echte uitvoer:

```
v0/vt   R g / vt^2 voor vt = 4,03  6,49  8,06 m/s   zonder lucht
  0.5     0.189    0.189    0.189       0.217
  1.0     0.558    0.558    0.558       0.866
  2.0     1.195    1.195    1.195       3.464
  3.0     1.625    1.625    1.625       7.794
  4.0     1.932    1.932    1.932      13.856
```

c Interpreteer: vanaf welke v_0/v_e wijkt het bereik sterk af van de parabool? Wat betekent dat voor een sproeier en voor een kogel uit een geweer (v_e van een kogel ±100 m/s en meer)?

De drie kolommen zijn gelijk: de hypothese klopt, één kromme voor alle druppels. Bij $v_0/v_e = 0{,}5$ zit het bereik nog dicht bij de parabool, bij 1 al merkbaar lager, bij 2 à 4 een fractie ervan. De sproeier ($19/8 \approx 2{,}4$) zit diep in het gebied waar de lucht beslist. Een geweerkogel met 800 m/s en v_e van een paar honderd m/s zit ook boven 1: ballistici rekenen altijd met lucht.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	Correct dimensieloos gemaakt; enkel v_0/v_e en α blijven over.
Simulatie	Correct (Heun, landing geïnterpoleerd, kleine stap), reproduceerbaar.
Toets	Kolommen vergeleken; hypothese aanvaard of verworpen met getallen.
Interpretatie	Grens rond $v_0/v_e \approx 1$; toepassing op sproeier en kogel.

8.17 Een satelliet die stilhangt

Uitdagen · 8 · Rekenen · 25 min

Een geostationaire satelliet draait boven de evenaar mee met de aarde en staat voor ons stil aan de hemel (tv, weer). De aarde draait tegenover de sterren één keer in 86 164 s (een sterrendag). GM = 3,986 · 10^{14} m³/s², straal aan de evenaar 6378 km.

a Leid uit $GMm/r^2 = m\omega^2 r$ de derde wet van Kepler voor cirkelbanen af: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r^3$.

✓ $GM/r^2 = \omega^2 r$ met $\omega = 2\pi/T$: $GM = 4\pi^2 r^3/T^2$, dus $T^2 = 4\pi^2 r^3/(GM)$.

b Bereken de straal, de hoogte en de snelheid van de geostationaire baan. Waarom een sterrendag en niet 24 h?

✓ $r = \sqrt[3]{GM\,T^2/(4\pi^2)} = 42\,164\,\text{km}$, hoogte $35\,786\,\text{km}$, $v = 2\pi r/T = 3{,}07\,\text{km/s}$. De satelliet moet meedraaien met de aarde tegenover de sterren; 24 h is de tijd tegenover de zon, die ook nog 1° per dag verschuift.

c Brussel draait zelf ook mee: bereken de snelheid en de centripetale versnelling van een punt op 50,8° noorderbreedte (straal 6371 km). Welk deel van g is dat?

✓ Straal van de breedtecirkel $6371\cos 50{,}8° = 4027\,\text{km}$; $v = \omega r = 294\,\text{m/s}$, $a = \omega^2 r = 0{,}0214\,\text{m/s}^2$: 0,22 % van g. De gemeten g in Brussel bevat die kleine correctie al.

8.18 Ontwerp: een bekertest voor de sproeier

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 45 min

Het model van het handboek zegt dat de sproeier ongeveer 9 m ver reikt. Voor je vier sproeiers koopt, wil je dat meten. Sproeifabrikanten doen dat met bekers op een rij op de grond: na een vaste tijd meet je hoeveel water er in elke beker zit. Je hebt 25 plastic bekers (Ø 10 cm), een maatcilinder van 25 mL, een manometer, een windmeter en een stopwatch.

a Ontwerp de opstelling: stand van de sproeier (vol rond of kwartcirkel?), plaats en onderlinge afstand van de bekers, duur van de test, weersomstandigheden. Schat hoeveel water er gemiddeld in een beker komt.

✓ Zet de sproeier op kwartcirkel: al het water valt dan in een sector van 90° en de bekers vullen vier keer sneller. Bekers om de 0,50 m op de middellijn van de sector, van 0,25 m tot 12,25 m (25 bekers, voorbij de verwachte 9 m). Duur 30 min, 's ochtends vroeg, wind onder 1 m/s, druk aan het mondje 2,0 bar (manometer). Schatting: in 30 min $107\,\text{L}$ op $\frac{\pi}{4}9^2 = 63{,}6\,\text{m}^2$: gemiddeld 1,69 mm, of 13 mL in een beker van 10 cm. Dat meet je nauwkeurig genoeg met een maatcilinder van 25 mL.

b Hoe haal je uit de metingen de straal van de sproeier en het neerslagprofiel (mm/h tegen de afstand)? Hoe controleer je met een massabalans dat je niets vergeten bent?

✓ Waterhoogte per beker: $h = V_{\text{beker}}/(\pi \cdot 0{,}05^2)$, neerslag $h/0{,}5\,\text{h}$. De straal is de afstand van de laatste beker die nog water heeft (een fabrikant neemt de plaats waar het profiel onder 0,26 mm/h zakt). Massabalans: elke beker staat voor een boog van een kwartring met oppervlakte $\frac{\pi}{2}\,r\,\Delta r$ ($\Delta r = 0{,}5\,\text{m}$); $\sum h_i \frac{\pi}{2} r_i \Delta r$ moet het volume $Q\,t$ geven. Komt er veel minder uit, dan is er water verdampt of weggewaaid, of klopt Q niet (meet Q apart met een emmer en een stopwatch).

c Hoe gebruik je het resultaat om het model uit het handboek te toetsen of bij te stellen?

✓ Vergelijk de gemeten straal met de banen van het model: landt het laatste water op 9 m, dan passen druppels van ongeveer 3 mm; op 10 m ongeveer 4 mm. Stel zo de grootste druppel in het model bij (of de snelheidscoëfficiënt van het mondje, als je ook de uitstroomsnelheid meet met een foto met korte sluitertijd). Het profiel toont ook waar de kleine druppels vallen: dicht bij de sproeier.

d Noem vier foutenbronnen en hoe je ze klein houdt.

(1) Wind: verschuift de druppels 2 à 3 m bij 3 m/s; alleen meten bij windstilte, windmeter erbij. (2) Verdamping uit de bekers: kort meten, meteen aflezen. (3) Spatten in of uit de bekers: bekers met hoge randen, niet te dicht bij de sproeier. (4) Druk en debiet: manometer aan het mondje, drukschommelingen van de pomp noteren; een beker die schuin staat of een mondje dat verstopt, geeft ook fouten.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Opstelling	Kwartcirkel om het water te concentreren; bekers op de middellijn van de sector, om de 0,5 m tot voorbij de verwachte straal; 30 min; windstil.
Schatting	Volume in de testtijd verdeeld over de sector; mL per beker berekend en vergeleken met de maatcilinder.
Verwerking	Straal = laatste beker met water; profiel; massabalans $\Sigma\, h \cdot (\pi/2)\, r\, \Delta r = Q\, t$.
Model	Waar de straal eindigt, welke druppels daar landen; bijsturen (druppelgrootte, snelheidscoëfficiënt).
Fouten	Wind, verdamping, spatten, druk; telkens een maatregel.

E EXPERT · DEEL E2 · MECHANICA EN CONSTRUCTIES

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 9

Impuls en botsingen

Wat een botsing doet, hangt af van hoe lang ze duurt: van karretjes tot raketten en pakketten aan een parachute

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 7× toepassen · 4× uitdagen · ± 505 min

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Een pakket van 2 kg valt van 40 m: zonder parachute met bijna 18 m/s, met parachute met minder dan 5 m/s.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

9.1 Een tennisservice

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een tennisbal van 57 g wordt bij de opslag in 4,0 ms van (bijna) stilstand tot 50 m/s geslagen.

a Bereken de impuls na de slag, de stoot en de gemiddelde kracht van het racket.

✓ $p = 0{,}057 \cdot 50 = 2{,}85\,\text{kg}\cdot\text{m/s} = J$; $F_{\text{gem}} = 2{,}85/0{,}0040 = 712\,\text{N}$, ongeveer 1274 keer het gewicht van de bal.

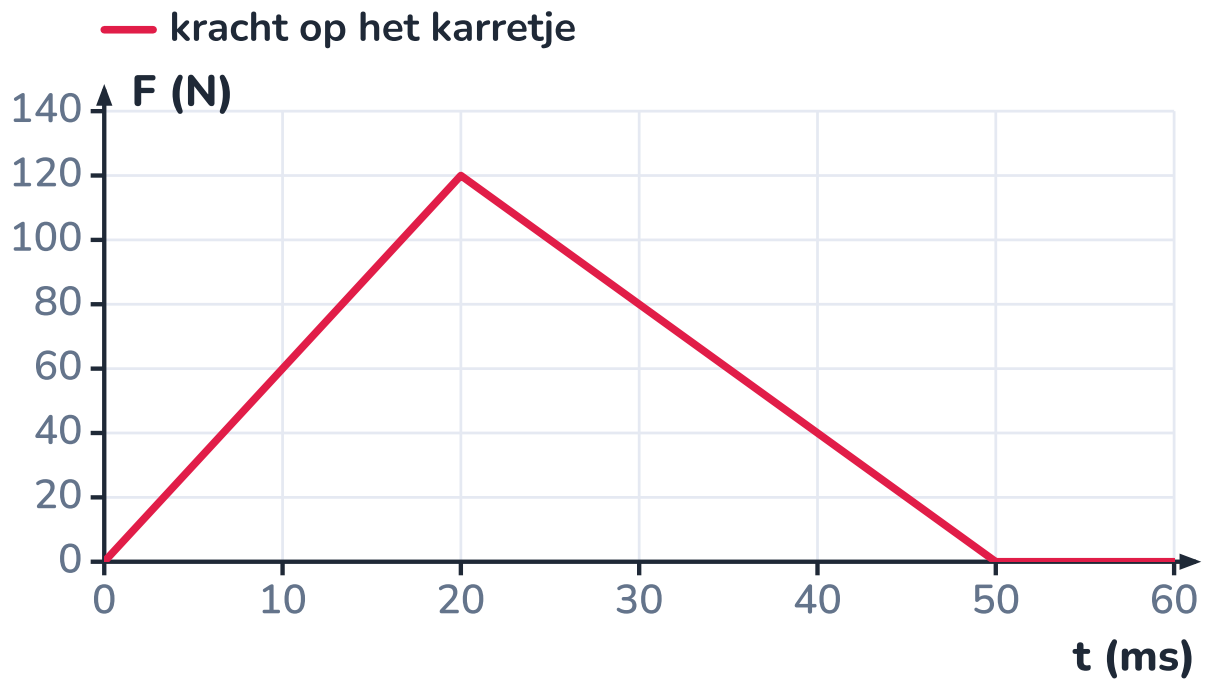
b De bal komt met 30 m/s loodrecht op een muur en kaatst terug met 20 m/s. Bereken de stoot van de muur (grootte en richting).

✓ Weg van de muur positief: $\Delta p = 0{,}057\,(20 - (-30)) = 2{,}85\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$, van de muur weg gericht. Het teken van de snelheid telt: terugkaatsen kost meer stoot dan stoppen.

9.2 Stoot uit een grafiek

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een karretje van 0,50 kg staat stil op een rail zonder wrijving en krijgt de getekende stoot.



De kracht op een karretje van 0,50 kg dat stilstond.

a Bereken de stoot als oppervlakte onder de grafiek.

✓ Driehoek: $J = \frac{1}{2} \cdot 0{,}050\,\text{s} \cdot 120\,\text{N} = 3{,}0\,\text{N s}$.

b Hoe snel rijdt het karretje na 50 ms? En na 20 ms?

✓ $v = J/m = 3{,}0/0{,}50 = 6{,}0\,\text{m/s}$. Na 20 ms is alleen de eerste driehoek voorbij: $\frac{1}{2} \cdot 0{,}020 \cdot 120 = 1{,}2\,\text{N s}$, dus $2{,}4\,\text{m/s}$.

c Hoe groot is de gemiddelde kracht over de 50 ms?

✓ $F_{\text{gem}} = 3{,}0/0{,}050 = 60\,\text{N}$, de helft van de top (dat geldt voor elke driehoek).

9.3 Een zandzak op het ijs

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een schaatser van 60 kg staat stil op glad ijs en gooit een zandzak van 5,0 kg horizontaal weg met 4,0 m/s.

a Met welke snelheid glijdt de schaatser weg?

✓ $0 = 60\,V + 5{,}0 \cdot 4{,}0$: $V = -0{,}333\,\text{m/s}$ (tegengesteld).

b Hoeveel arbeid leverde hij? Welk deel van de energie kreeg de zak?

✓ $W = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0{,}333^2 = 40 + 3{,}33 = 43{,}3\,\text{J}$; de zak kreeg $40/43{,}3 = 92\,\%$.

c Waar is het zwaartepunt van schaatser en zak 2,0 s na de worp?

Nog op dezelfde plaats: zonder uitwendige (horizontale) kracht blijft het zwaartepunt in rust. (Zak 8,0 m ver, schaatser 0,67 m de andere kant op: (5 · 8,0 – 60 · 0,667)/65 = 0.)

9.4 Twee karretjes haken in

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Karretje A (1,2 kg) rijdt met 0,80 m/s naar rechts, karretje B (0,80 kg) met 0,30 m/s naar links. Ze haken met klittenband aan elkaar.

a Bereken de gemeenschappelijke snelheid na de botsing (grootte en richting).

Rechts positief: $1{,}2 \cdot 0{,}80 + 0{,}80 \cdot (-0{,}30) = 0{,}72\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$; $v' = 0{,}72/2{,}0 = 0{,}36\,\text{m/s}$ naar rechts.

b Hoeveel kinetische energie ging verloren? Waar is ze naartoe?

Voor: $0{,}420\,\text{J}$; na: $\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}0 \cdot 0{,}36^2 = 0{,}130\,\text{J}$; verlies $0{,}290\,\text{J}$ (69 %), naar vervorming van het klittenband, geluid en warmte.

9.5 Waar of niet waar?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Beoordeel elke uitspraak en verklaar in één of twee zinnen.

a (a) Bij een volledig inelastische botsing gaat alle kinetische energie verloren. (b) Een raket in de ruimte versnelt omdat haar gassen zich afzetten tegen de lucht. (c) Een airbag verkleint de stoot op je hoofd.

(a) Niet waar: alleen de energie van de beweging tegenover het zwaartepunt; het zwaartepunt beweegt verder met dezelfde snelheid (dus die energie blijft). Alleen als de totale impuls nul is, gaat alles verloren. (b) Niet waar: ze duwt de gassen weg en de gassen duwen terug; in het luchtledige werkt het zelfs beter. (c) Niet waar: de stoot (m Δv) blijft gelijk; de airbag verlengt de tijd en spreidt de kracht, zodat de kracht kleiner wordt.

b (d) Als een bal tegen een muur kaatst, blijft de impuls van de bal behouden. (e) Twee voorwerpen met dezelfde impuls hebben dezelfde kinetische energie. (f) Een drone die een pakket loslaat, stijgt even op.

(d) Niet waar: de muur (en de aarde) oefent een uitwendige kracht uit; de impuls van bal + aarde blijft behouden, die van de bal alleen niet. (e) Niet waar: E = p²/(2m); het lichtere voorwerp heeft meer energie. (f) Waar: de stuwkracht was ingesteld op het gewicht met pakket; zonder pakket is ze groter dan het gewicht, tot de regelaar ingrijpt.

9.6 De raketvergelijking toepassen

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een bovenste trap met waterstof en zuurstof heeft een uitstroomsnelheid van 4,4 km/s.

a Welke Δv haalt ze als 80 % van haar massa stuwstof is?

$m_0/m_1 = 1/0{,}2 = 5$: $\Delta v = 4{,}4 \ln 5 = 7{,}08\,\text{km/s}$.

b Welke massaverhouding is nodig voor Δv = 3,0 km/s? Welk deel is dan stuwstof?

$m_0/m_1 = \text{e}^{3{,}0/4{,}4} = 1{,}977$; stuwstof $1 - 1/1{,}977 = 49\,\%$.

c Hoeveel stuwkracht levert ze als ze 250 kg stuwstof per seconde verbruikt?

$F = \dot{m}\, v_\text{e} = 250 \cdot 4400 = 1{,}1 \cdot 10^6\,\text{N} = 1{,}1\,\text{MN}$.

9.7 Een botsingsproef verwerken

●●○ Toepassen ■■■■■■■□ 7 Labo 30 min

Drie botsingen op een rail, B staat telkens stil, snelheden naar rechts positief (voorbeeldmeting):

poging	m_A (kg)	m_B (kg)	v_A (m/s)	v'_A (m/s)	v'_B (m/s)
1	0,750	0,250	0,499	0,257	0,710
2	0,250	0,750	0,502	−0,210	0,242
3	0,750	0,250	0,491	0,372	0,372

a Bereken voor elke poging de impuls en de kinetische energie voor en na, en de restitutiecoëfficiënt.

Resultaat:

POGING	P VOOR	P NA	E_K VOOR (MJ)	E_K NA (MJ)	E
1	0,374	0,370	93,4	87,8	0,91
2	0,126	0,129	31,5	27,5	0,90
3	0,368	0,372	90,4	69,2	0,00

b Welke poging was met klittenband? Met welke koppeling werden de andere gedaan? Leg uit waarom A bij poging 2 terugrijdt.

Poging 3 (A en B rijden samen verder, $e = 0$). Pogingen 1 en 2 met magneten ($e \approx 0{,}9$). Bij poging 2 is A lichter dan B: $(m_A - e\,m_B)/(m_A + m_B)$ is negatief, dus A kaatst terug.

c De bewegingssensor meet op ±0,004 m/s. Is het verschil tussen p voor en p na significant?

De onzekerheid op p na is ongeveer $\sqrt{(m_A \cdot 0{,}004)^2 + (m_B \cdot 0{,}004)^2} \approx 3\,\mathrm{g \cdot m/s}$; de verschillen zijn van dezelfde orde of kleiner: niet significant. Impuls blijft behouden binnen de meetfout.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Berekening	Impuls en energie correct met teken; e als relatieve snelheden.
Interpretatie	Klittenband herkend (e = 0, zelfde snelheid); terugkaatsen verklaard doordat A lichter is dan B.
Onzekerheid	Onzekerheid op p geschat (m · 0,004 per snelheid) en vergeleken.

9.8 De ballistische slinger

●●○ Toepassen ■■■■■■■□ 7 Rekenen 20 min

Om de snelheid van een pijltje te meten, schiet je het in een blok hout van 2,0 kg dat als slinger aan twee touwen hangt. Het pijltje (10 g) blijft steken; het blok zwaait 5,0 cm omhoog.

a Welke twee fasen onderscheid je, en welke behoudswet gebruik je in elke fase? Waarom niet omgekeerd?

Fase 1, de botsing (kort): impulsbehoud; energie niet, want de botsing is volledig inelastisch. Fase 2, het zwaaien: energiebehoud (kinetisch → zwaarte-energie); impuls niet, want de touwen en het gewicht werken als uitwendige krachten.

b Bereken de snelheid van blok met pijltje net na de botsing en de snelheid van het pijltje.

Fase 2: $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}050} = 0{,}990\,\mathrm{m/s}$. Fase 1: $v = \dfrac{m+M}{m}V = \dfrac{2{,}010}{0{,}010} \cdot 0{,}990 = 199\,\mathrm{m/s}$.

c Welk deel van de kinetische energie van het pijltje wordt warmte?

✓ Na/voor $= \dfrac{\frac{1}{2}(m+M)V^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \dfrac{m}{m+M} = 0{,}0050$: 99,5 % wordt warmte en vervorming.

9.9 Biljart in het vlak

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een biljartbal met 3,0 m/s botst elastisch en schuin op een even zware bal in rust. Na de botsing gaat bal 1 onder 40° met zijn oorspronkelijke richting verder.

a Onder welke hoek gaat bal 2 weg? Bereken beide snelheden.

✓ Gelijke massa's, elastisch: 90° tussen de twee, dus bal 2 onder 50° aan de andere kant. $v_1' = 3{,}0\cos 40^\circ = 2{,}30\,\text{m/s}$, $v_2' = 3{,}0\sin 40^\circ = 1{,}93\,\text{m/s}$.

b Controleer de impuls per component en de energie.

✓ x: $2{,}30\cos 40^\circ + 1{,}93\cos 50^\circ = 3{,}00$; y: $2{,}30\sin 40^\circ - 1{,}93\sin 50^\circ = 0$. Energie: $2{,}298^2 + 1{,}928^2 = 9{,}0$.

c Teken de impulsdriehoek op schaal.

✓ Rechthoekige driehoek met schuine zijde 3,0 (impuls voor, per kg), de rechthoekszijden 2,30 en 1,93 onder 40° en 50°.

9.10 Een kreukelzone beoordelen

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een auto van 1500 kg botst met 30 km/h op een vaste paal. Stel een constante vertraging.

a Bereken vertraging (in g) en botsduur als de voorkant 0,20 m, 0,40 m of 0,60 m plooit.

✓ Met v = 8,33 m/s: 0,20 m: 174 m/s² = 17,7 g, 48 ms; 0,40 m: 87 m/s² = 8,8 g, 96 ms; 0,60 m: 58 m/s² = 5,9 g, 144 ms.

b Hoeveel energie moet de kreukelzone opnemen? Hoe groot is de gemiddelde kracht bij 0,40 m?

✓ $E = \frac{1}{2}\cdot 1500\cdot 8{,}33^2 = 52{,}1\,\text{kJ}$; $F = E/s = 130\,\text{kN}$ bij 0,40 m.

c Waarom kan een ontwerper de kreukelzone niet gewoon zo zacht mogelijk maken?

✓ De energie ½ m v² moet binnen de beschikbare lengte opgenomen worden: een te zachte zone is bij hogere snelheden al helemaal plat voor de auto stilstaat, en dan botst de stijve kooi alsnog. De zone moet ook bij 64 km/h (energie × 1,6) werken, en bij een lichte aanrijding weinig schade geven. Het is een afweging, meestal met trappen van toenemende stijfheid.

9.11 De waterraket optimaliseren

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Gebruik waterraket.py uit het handboek.

a Zoek voor 3, 4, 5 en 6 bar de beste vulling en de bijhorende hoogte. Schrijf de code.

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np
# lancering() uit waterraket.py
for p in (3e5, 4e5, 5e5, 6e5):
    vullingen = np.arange(0.2, 1.01, 0.05)
    h = [lancering(V * 1e-3, p_over=p)[2] for V in vullingen]
    i = int(np.argmax(h))
    print(f"{p / 1e5:.0f} bar: beste vulling {vullingen[i]:.2f} L, {h[i]:.1f} m
```

Echte uitvoer:

```
3 bar: beste vulling 0.55 L, 28.6 m
4 bar: beste vulling 0.60 L, 37.0 m
5 bar: beste vulling 0.60 L, 44.4 m
6 bar: beste vulling 0.65 L, 50.8 m
```

b Verschuift de beste vulling met de druk? Hoeveel hoogte levert elke extra bar op?

De beste vulling verschuift weinig (van 0,55 naar 0,65 L); de hoogte stijgt met de druk, maar minder dan evenredig (per extra bar 8, 7 en 6 m): de luchtweerstand groeit met v^2.

c Wat verandert er als je het mondstuk halveert (Ø 10,75 mm)? Voorspel eerst, simuleer dan.

Voorspelling: dezelfde uitstroomsnelheid (die hangt alleen van de druk af), maar vier keer minder debiet: de stuwing duurt vier keer langer en de stuwkracht is vier keer kleiner. Zolang die ruim boven het gewicht blijft, verandert Δv weinig, maar de zwaartekracht knabbelt langer mee (zwaartekrachtverlies, opdracht 9.16): de raket komt iets lager. De simulatie met 0,6 L en 4 bar: stuwing 0,31 s in plaats van 0,08 s, 29,6 m/s in plaats van 32,2 m/s, en 35,9 m hoog in plaats van 37,0 m.

9.12 Habitat: de drop voorbereiden

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Een pakket van 2,0 kg (doos 30 cm) moet op het afzetpunt naast de moestuin landen. De drone hangt op 40 m. Ontwerpeisen: landingssnelheid hoogstens 5,0 m/s, inhoud hoogstens 30 g, het pakket landt binnen 5 m van het kruis. Rekenwaarden: parachute cd 0,8 op de nominale oppervlakte, lucht 1,2 kg/m³, schuim hoogstens 70 % indrukbaar. De windmeter meldt 4 m/s uit het westen.

a Bereken de kleinste parachutediameter (verwaarloos eerst de doos, controleer dan met de doos erbij).

$mg = \frac{1}{2}\rho c_d A v^2$: $A = \dfrac{2 \cdot 2{,}0 \cdot 9{,}81}{1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 25} = 1{,}64\,\mathrm{m}^2$, $D = \sqrt{4A/\pi} = 1{,}44\,\mathrm{m}$. Met de doos erbij ($k = 0{,}057$) mag het iets kleiner, maar kies een standaardmaat: 1,5 m geeft 4,66 m/s.

b Dimensioneer het schuim: dikte en plateauspanning over de bodem.

Met $v = 4{,}66\,\mathrm{m/s}$: remweg $3{,}8\,\mathrm{cm}$, dikte $\geq 5{,}4\,\mathrm{cm}$ (6 cm); plateauspanning $589\,\mathrm{N}/0{,}09\,\mathrm{m}^2 = 6{,}5\,\mathrm{kPa}$.

c Waar laat de drone het pakket los? Schat de valtijd met de eindsnelheid (40 m / 4,7 m/s) en de drift; vergelijk met de simulatie (3 m/s: 22 m, 5 m/s: 37 m).

Valtijd $\approx 40/4{,}7 \approx 8{,}5\,\mathrm{s}$ (simulatie: 8,5 s); drift $\approx 4 \cdot 8{,}5 = 34\,\mathrm{m}$. De simulatie geeft tussen 22 en 37 m voor 3 en 5 m/s, dus ongeveer 30 m bij 4 m/s. Loslaten ongeveer 30 m ten westen van het kruis. Een windvlaag van 1 m/s verschuift de landing al 8 m: de eis van 5 m haal je alleen bij stabiele, zwakke wind.

d Noem drie risico's van de drop en een maatregel voor elk. Welke regel geldt voor afwerpen in de EU?

Bijvoorbeeld: (1) de parachute gaat niet open: pakket van 18 m/s → afzetgebied van 20 m afgezet, niemand onder de vliegroute, schuim beschermt de inhoud niet: breekbare inhoud nooit droppen; (2) windvlaag: niet droppen boven 5 m/s gemiddeld, wachten; (3) de drone springt omhoog bij het loslaten: loslaten ver genoeg boven obstakels. In de EU mag in de open categorie niets afgeworpen worden; dit kan alleen in de specifieke categorie met een vergunning.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Parachute	Eindsnelheid ≤ 5 m/s correct omgerekend naar A en D; de doos meegerekend.
Verpakking	Remweg voor 29 g netto; dikte met 70 %; plateauspanning uit F = m · 30 g.
Drift	Loslaatpunt boven de wind op ±w · t; onzekerheid besproken.
Risico's	Concreet (parachute gaat niet open, windvlaag, mensen op het terrein) met maatregel; open categorie verbiedt afwerpen.

9.13 De drone met een zwaarder pakket

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Iemand wil met dezelfde drone (8,0 kg, 4 rotoren van 0,56 m) een pakket van 3,0 kg meegeven.

a Bereken de geïnduceerde snelheid en het vermogen om te hangen (figure of merit 0,65, motoren 85 %).

$T = 11 \cdot 9{,}81 = 107{,}9\,\mathrm{N}$, $v_\mathrm{i} = 6{,}76\,\mathrm{m/s}$, $P_\mathrm{ideaal} = 729\,\mathrm{W}$, uit de batterij $1319\,\mathrm{W}$.

b Met hoeveel procent stijgt het vermogen tegenover 2,0 kg? Waarom meer dan de massa?

$+15{,}4\,\%$ voor $+10\,\%$ massa: $P \sim T^{3/2}$, want een zwaardere drone moet meer lucht én sneller versnellen ($1{,}1^{1{,}5} = 1{,}154$).

c Welke rotordiameter zou nodig zijn om met 11 kg hetzelfde vermogen te vragen als nu met 10 kg?

$P \sim T^{3/2}/\sqrt{A}$: gelijk vermogen vraagt $A \sim T^3$, dus A maal $1{,}1^3 = 1{,}331$ en D maal $\sqrt{1{,}331} = 1{,}154$: $0{,}65\,\mathrm{m}$.

Uitdagen

Uitdagen — transfer, open problemen, leerlijnen combineren

9.14 Energieverlies bij een botsing afgeleid

Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Twee voorwerpen botsen frontaal: m_1, v_1 en m_2, v_2, met restitutiecoëfficiënt e.

a Leid uit impulsbehoud en $v_2' - v_1' = -e(v_2 - v_1)$ de snelheden v_1' en v_2' af. Controleer met $e = 1$ en $e = 0$.

$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2$ en $v_2' = v_1' - e(v_2 - v_1)$: $v_1' = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e\,m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$, $v_2' = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + e\,m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$. Met $e = 1$ de elastische formules, met $e = 0$ beide gelijk aan v_zw.

b Schrijf de snelheden als $v_\mathrm{zw}+$ een deel dat alleen van de relatieve snelheid afhangt, en toon dat $E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}Mv_\mathrm{zw}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\, v_\mathrm{rel}^2$ met $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

$v_1 = v_\mathrm{zw} + \dfrac{m_2}{M}v_\mathrm{rel}$ en $v_2 = v_\mathrm{zw} - \dfrac{m_1}{M}v_\mathrm{rel}$ met $v_\mathrm{rel} = v_1 - v_2$ en $M = m_1 + m_2$. Invullen in $\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2$: de kruistermen $m_1 v_\mathrm{zw}\tfrac{m_2}{M}v_\mathrm{rel} - m_2 v_\mathrm{zw}\tfrac{m_1}{M}v_\mathrm{rel}$ vallen weg, en $\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{m_1 m_2^2}{M^2} + \tfrac{m_2 m_1^2}{M^2}\right)v_\mathrm{rel}^2 = \tfrac{1}{2}\mu\, v_\mathrm{rel}^2$.

c Leid af: $\Delta E_\text{k} = \frac{1}{2}\mu\,(v_1 - v_2)^2(1 - e^2)$. Controleer met poging 3 van de proef in het handboek.

Het zwaartepunt verandert niet; de relatieve snelheid wordt met e vermenigvuldigd: $\Delta E_\text{k} = \frac{1}{2}\mu\, v_\text{rel}^2(1 - e^2)$. Poging 3: $\mu = 0{,}25\,\text{kg}$, $v_\text{rel} = 0{,}597$, $e = 0$: $\Delta E = 44{,}6\,\text{mJ}$; gemeten $89{,}1 - 43{,}2 = 45{,}9\,\text{mJ}$.

9.15 Onderzoek: hoeveel botsingen remmen een neutron af?

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Bij een elastische botsing van een neutron met een kern (massagetal A) in rust, isotroop verstrooid in het zwaartepuntstelsel, is de energie na de botsing $E' = E\,\dfrac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta}{2}$ met $\alpha = \left(\dfrac{A-1}{A+1}\right)^2$ en $\cos\theta$ gelijkmatig verdeeld tussen −1 en 1.

a Toon dat αE de kleinste energie na een botsing is. Welke botsing is dat? Vergelijk met het handboek.

E' is lineair in $\cos\theta$: kleinste bij $\cos\theta = -1$: $E' = E\,\dfrac{1+\alpha-1+\alpha}{2} = \alpha E$. Dat is de frontale botsing (het neutron keert om). Controle: $1 - \alpha = 1 - \dfrac{(A-1)^2}{(A+1)^2} = \dfrac{4A}{(A+1)^2}$, het deel uit het handboek.

b Schrijf een Monte-Carlosimulatie: laat 20 000 neutronen van 2 MeV botsen tot ze onder 0,025 eV zitten, voor waterstof, deuterium en koolstof. Rapporteer gemiddelde, kleinste en grootste aantal botsingen.

Bijvoorbeeld:

```
import math
import numpy as np

rng = np.random.default_rng(1942)


def botsingen(A, n=20000, E0=2.0e6, E1=0.025):
    """Aantal elastische botsingen tot een neutron onder E1 (eV) komt; verstrooiing isotroop in het
zwaartepuntstelsel."""
    alfa = ((A - 1) / (A + 1))**2
    E = np.full(n, E0)
    teller = np.zeros(n, dtype=int)
    actief = E > E1
    while actief.any():
        mu = rng.uniform(-1.0, 1.0, actief.sum())          # cos van de verstrooiingshoek
(zwaartepuntstelsel)
        E[actief] *= ((1 + alfa) + (1 - alfa) * mu) / 2
        teller[actief] += 1
        actief = E > E1
    return teller


for naam, A in (("waterstof", 1), ("deuterium", 2), ("koolstof", 12)):
    t = botsingen(A)
    print(f"{naam:10s} A = {A:2d}: gemiddeld {t.mean():6.1f} botsingen (van {t.min()} tot {t.max()})")
```

Echte uitvoer:

```
waterstof  A =  1: gemiddeld   19.2 botsingen (van 6 tot 38)
deuterium  A =  2: gemiddeld   25.9 botsingen (van 13 tot 44)
koolstof   A = 12: gemiddeld  116.0 botsingen (van 93 tot 146)
```

c Vergelijk met de tabel van het handboek. Waarom is het aantal botsingen geen vast getal? Welke moderator kies je als je ook weet dat waterstof neutronen invangt en deuterium bijna niet?

De gemiddelden liggen dicht bij 18, 25 en 115 (de standaardformule $\ln(E_0/E_1)/\xi$), telkens iets hoger: je telt tot een neutron ónder 0,025 eV zit, en de laatste botsing schiet er gemiddeld een stuk voorbij. Elke botsing heeft een toevallige hoek; sommige neutronen zijn met een paar frontale botsingen klaar, andere hebben er veel meer nodig. Waterstof remt het snelst af, maar vangt neutronen in: in een reactor met natuurlijk uranium kiest men zwaar water (bijna even snel, weinig invangst) of grafiet (traag, maar goedkoop en weinig invangst).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	$\cos\theta = -1$ geeft αE: frontale botsing, zoals $1 - 4A/(1+A)^2 = \alpha$.
Simulatie	Correct, reproduceerbaar (vaste seed), gevectoriseerd of met een lus.
Resultaten	Gemiddelden dicht bij 18, 25, 115; spreiding gerapporteerd.
Interpretatie	Toeval van de hoek; afweging vertraging tegenover invangst (zwaar water, grafiet).

9.16 Zwaartekrachtverlies en trappen

Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Een raket stijgt verticaal op met een constante massadebiet en uitstroomsnelheid v_e; verwaarloos de lucht.

a Toon dat $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \dot{m}\,v_e - mg$ leidt tot $v(t_b) = v_e \ln\dfrac{m_0}{m_1} - g\,t_b$.

$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \dfrac{\dot{m}\,v_e}{m} - g$ met $m = m_0 - \dot{m}t$: $\dfrac{\dot{m}}{m} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln m$. Integreren van 0 tot t_b: $v = v_e \ln\dfrac{m_0}{m_1} - g\,t_b$.

b Een trap met $v_e = 3{,}0\,\mathrm{km/s}$ en $m_0/m_1 = 4{,}0$ brandt 150 s. Hoeveel snelheid gaat verloren aan de zwaartekracht? Wat als ze dezelfde stuwstof in 75 s verbrandt?

Zonder zwaartekracht $3{,}0\ln 4 = 4{,}16\,\mathrm{km/s}$; verlies $9{,}81\cdot 150 = 1{,}47\,\mathrm{km/s}$, dus $2{,}69\,\mathrm{km/s}$. In 75 s: verlies 0,74 km/s, $3{,}42\,\mathrm{km/s}$.

c Waarom branden echte raketten dan niet in een paar seconden op? Noem twee redenen.

(1) Een snelle verbranding vraagt een enorme stuwkracht en dus zware motoren en een sterke structuur; en de versnelling (tientallen g) moet de last en eventueel mensen verdragen. (2) In de dichte lucht onderaan zou een heel snelle raket veel verliezen aan luchtweerstand en verhitting. Het optimum is een compromis: stuwkracht ongeveer 1,2 à 1,5 keer het gewicht bij de start.

9.17 Ontwerp: de eivalproef

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 90 min

Ontwerp een verpakking die een rauw ei (60 g) heel houdt als ze van 3,0 m hoog op een betonvloer valt. Materiaal: 10 rietjes, 1 m plakband, een A4-blad, een plastic zakje, 2 elastiekjes, katoen. Rekenwaarde: een ei breekt bij ongeveer 25 N als de kracht over een klein stukje schaal komt (met marge). De verpakking mag samen met het ei hoogstens 150 g wegen.

a Bereken de snelheid bij de grond, de stoot op het ei en de kleinste remweg van het ei zodat de kracht onder 25 N blijft.

$v = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 3{,}0} = 7{,}67\,\mathrm{m/s}$, $J = 0{,}060\cdot 7{,}67 = 0{,}46\,\mathrm{N\,s}$. Met $F \le 25\,\mathrm{N}$ is de vertraging hoogstens $25/0{,}060 - 9{,}81 = 407\,\mathrm{m/s^2}$ ($41\,g$), dus de remweg minstens $v^2/(2a) = 7{,}2\,\mathrm{cm}$, in ongeveer 19 ms.

b Vergelijk twee strategieën met getallen: (a) langer remmen (kreukelzone van rietjes, katoen), (b) trager vallen (parachute uit het zakje). Hoe groot moet de parachute zijn voor 3 m/s?

(a) Een kreukelzone van ongeveer 7 cm plus marge: rietjes die knikken of platgaan, of katoen dat samengedrukt wordt; alleen als de kracht ongeveer constant blijft tijdens het indrukken (een stijve kreukelzone die op het eind 'hard' wordt, geeft een piek). (b) Een parachute voor 3 m/s: $A = \frac{2mg}{\rho c_d v^2}$; met de hele verpakking van 150 g is dat $0{,}34\,\mathrm{m}^2$ (Ø 0,66 m), meer dan een plastic zakje; voor een ei van 60 g alleen zou 0,14 m² (Ø 0,42 m) volstaan. Bovendien moet de parachute binnen een halve meter opengaan. Landt het ei met 3 m/s, dan volstaat 1,1 cm remweg. Het beste is een combinatie: een kleine parachute die de snelheid wat verlaagt, en een kreukelzone.

c Schets je ontwerp met maten en leg uit hoe het de kracht verdeelt en de remweg haalt.

Bijvoorbeeld: het ei in katoen in een piramide van rietjes (hoogte 12 cm), met de punt naar boven; bij de landing knikken de onderste rietjes en zakt het ei 7 à 9 cm. De rietjes verdelen de kracht over vier steunpunten op de schaal, via katoen, zodat de kracht niet op één punt komt. Massa: rietjes ±8 g, papier ±5 g, katoen ±10 g, samen met het ei ±85 g.

d Test, noteer het resultaat en verbeter één keer. Wat leerde de test dat de berekening niet zei?

Een typisch resultaat: de eerste versie kantelt en landt op een zijkant, waar geen kreukelzone zit. Verbetering: het zwaartepunt laag leggen (het ei onderaan) of rondom rietjes. De berekening zegt hoeveel remweg nodig is, maar niet in welke richting het pakket landt: net als bij het echte pakket van de drone moet het schuim rondom zitten.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Berekening	v, J, remweg en duur correct; eis vertaald naar een remweg.
Strategieën	Kreukelzone en parachute vergeleken met getallen; beperkingen (opengaan op 3 m) besproken.
Ontwerp	Schets met maten; remweg en spreiding van de kracht zichtbaar; massa onder 150 g.
Test en verbetering	Resultaat eerlijk gerapporteerd; één gerichte verbetering met reden.

E EXPERT · DEEL E2 · MECHANICA EN CONSTRUCTIES

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 10

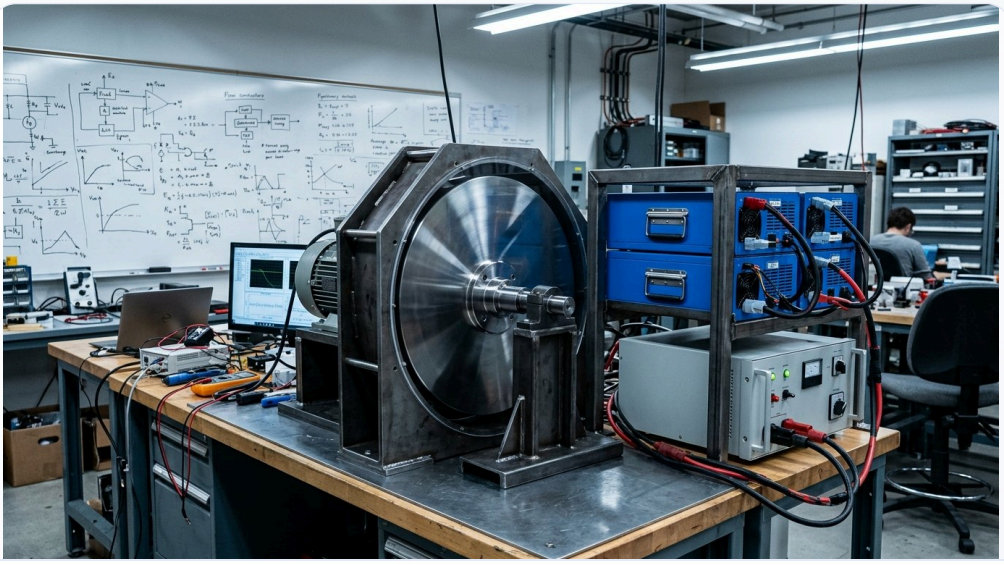
Rotatie

Van riemschijf tot vliegwiel en pirouette: wat een draaiende massa doet en bewaart

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 7× toepassen · 4× uitdagen · ± 475 min

K Krachten, beweging en constructies · E Energie · W Wiskundig modelleren



Een vliegwiel en een batterij bewaren allebei energie. Het ene houdt zich met staal bij elkaar, het andere met chemie.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

10.1 Van toerental naar snelheid

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

De wielen van het inspectierobotje (Ø 65 mm) draaien onbelast 187,5 tpm (hoofdstuk 33 van I).

a Bereken ω in rad/s, de snelheid van het robotje en de centripetale versnelling van een punt op de band.

✓ $\omega = 2\pi \cdot 187{,}5/60 = 19{,}63\,\text{rad/s}$; $v = \omega r = 0{,}638\,\text{m/s}$; $a_c = \omega^2 r = 12{,}5\,\text{m/s}^2$.

b Het robotje trekt in 0,40 s op van stilstand tot 0,20 m/s. Bereken α van het wiel (constant) en het aantal toeren in die tijd.

✓ $\omega_{\text{eind}} = 0{,}20/0{,}0325 = 6{,}15\,\text{rad/s}$, $\alpha = 6{,}15/0{,}40 = 15{,}4\,\text{rad/s}^2$; $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 1{,}231\,\text{rad} = 0{,}196$ toer.

c Een propeller van de drone (Ø 0,56 m) draait 3500 tpm. Bereken de snelheid van de tip in m/s en km/h.

✓ $v = \omega r = 2\pi \cdot 3500/60 \cdot 0{,}28 = 103\,\text{m/s} = 369\,\text{km/h}$: bijna een derde van de geluidssnelheid.

10.2 Traagheidsmomenten uit de tabel

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Gebruik de tabel van het handboek.

a Een wiel van het robotje als volle schijf (30 g, Ø 65 mm), en als ring met dezelfde massa. Welke verhouding?

Schijf $\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}030\cdot 0{,}0325^2 = 1{,}58\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$; ring het dubbele, $3{,}17\cdot 10^{-5}$. Verhouding 2.

b Het vliegwiel van de gyrobus: 1500 kg, Ø 1,6 m, als volle schijf. Hoeveel energie bij 3000 tpm, in MJ en kWh?

$I = \tfrac{1}{2}\cdot 1500\cdot 0{,}8^2 = 480\,\mathrm{kg\,m^2}$; $\omega = 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$; $E = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = 23{,}7\,\mathrm{MJ} = 6{,}6\,\mathrm{kWh}$.

c Een dikwandige buis (R_1 = 4,0 cm, R_2 = 5,0 cm, 2,0 kg). Vergelijk met een volle cilinder en een dunne buis met dezelfde buitenstraal.

$\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}0\,(0{,}04^2+0{,}05^2) = 4{,}10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$; vol: $\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}0\cdot 0{,}05^2 = 2{,}5\cdot 10^{-3}$; dun: $2{,}0\cdot 0{,}05^2 = 5{,}0\cdot 10^{-3}$. De dikwandige buis zit ertussen, dicht bij de dunne ($k = 0{,}82$).

10.3 De verschuivingsstelling

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een dunne staaf van 1,0 m en 0,60 kg.

a Bereken I om een as loodrecht door het midden, door een uiteinde, en door een punt op 25 cm van een uiteinde.

Midden: $\tfrac{1}{12}\cdot 0{,}60\cdot 1{,}0^2 = 0{,}050\,\mathrm{kg\,m^2}$. Uiteinde: $0{,}050 + 0{,}60\cdot 0{,}50^2 = 0{,}200\,\mathrm{kg\,m^2}$. Op 25 cm: $d = 0{,}25\,\mathrm{m}$: $0{,}050 + 0{,}60\cdot 0{,}0625 = 0{,}0875\,\mathrm{kg\,m^2}$.

b Om welke evenwijdige as is I het kleinst? Waarom geldt dat voor elk voorwerp?

Door het zwaartepunt: $I = I_{zw} + Md^2$ en $Md^2 \geq 0$. Elke verschuiving uit het zwaartepunt maakt I groter.

c Toon met een integraal dat I om een uiteinde ML²/3 is, zonder Steiner.

$$\int_0^L x^2\,\frac{M}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{L}\cdot\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2.$$

10.4 Een slijpschijf loopt uit

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een slijpschijf (volle schijf, 1,8 kg, Ø 20 cm) draait 3000 tpm. Na het uitschakelen staat ze na 40 s stil (constante vertraging).

a Bereken I, de hoekvertraging en het wrijvingsmoment.

$I = \tfrac{1}{2}\cdot 1{,}8\cdot 0{,}10^2 = 0{,}009\,\mathrm{kg\,m^2}$; $\omega_0 = 314{,}2\,\mathrm{rad/s}$, $\alpha = 314{,}2/40 = 7{,}85\,\mathrm{rad/s^2}$; $\tau = I\alpha = 0{,}0707\,\mathrm{N\,m}$.

b Hoeveel toeren maakt de schijf nog? Hoeveel energie wordt warmte?

$\theta = \tfrac{1}{2}\omega_0 t = 6283\,\mathrm{rad}$, dat is 1000 toeren (gemiddeld 1500 tpm gedurende 40 s: 1000 toeren). Warmte $\tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = 444\,\mathrm{J}$; controle $\tau\theta = 444\,\mathrm{J}$.

10.5 Rollen en glijden

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een volle bol, een volle cilinder en een dunne ring rollen zonder slippen van een hoogte van 0,80 m.

a Bereken hun snelheid onderaan.

✓ Bol: 3,35 m/s; cilinder: 3,23 m/s; ring: 2,80 m/s (glijdend zonder wrijving: 3,96 m/s).

b Welk deel van de energie is voor elk voorwerp rotatie-energie?

✓ Rotatie-energie / totaal $= k/(1+k)$: bol $0{,}4/1{,}4 = 29\,\%$, cilinder 33 %, ring 50 %.

c Waarom mag je hier energiebehoud gebruiken, terwijl er toch wrijving nodig is om te rollen?

✓ Het contactpunt staat op elk ogenblik stil: de statische wrijving grijpt aan in een punt dat niet beweegt en doet dus geen arbeid. Ze zet alleen een deel van de energie om in draaien.

10.6 Waar of niet waar?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Beoordeel elke uitspraak en verklaar in één of twee zinnen.

a (a) Alle punten van een draaiend wiel hebben dezelfde snelheid. (b) Een voorwerp heeft één traagheidsmoment. (c) Een grote cilinder rolt sneller van een helling dan een kleine van hetzelfde materiaal.

✓ (a) Niet waar: dezelfde ω, maar v = ωr hangt van de afstand tot de as af. (b) Niet waar: I hangt van de as af (Steiner). (c) Niet waar: straal en massa vallen weg; alleen k = I/(MR²) telt, en die is voor elke volle cilinder 0,5.

b (d) Een kunstschaatser die haar armen intrekt, krijgt er energie bij zonder dat iemand arbeid levert. (e) Een vliegwiel van koolstofvezel slaat meer energie op dan een even zwaar van staal omdat koolstofvezel zwaarder is. (f) Een helikopter zonder staartrotor zou tegen zijn rotor in draaien.

✓ (d) Niet waar: haar armen leveren arbeid door de massa naar binnen te trekken. (e) Niet waar: juist lichter; wat telt is σ/ρ, en koolstofvezel is veel sterker per kilogram. (f) Waar: de motor duwt de rotor rond met een moment, en de rotor duwt met een tegengesteld moment op de romp; zonder staartrotor blijft het totale impulsmoment behouden en draait de romp de andere kant op.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

10.7 Een emmer aan een haspel

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een emmer water van 10 kg hangt aan een touw rond een haspel (straal 0,10 m, I = 0,20 kg·m², wrijving verwaarloosbaar). Je laat de slinger los.

a Teken de krachten op de emmer en de momenten op de haspel. Stel de vergelijkingen op.

✓ Emmer: G = 98,1 N omlaag, T omhoog. Haspel: moment T · r. Vergelijkingen: m g − T = m a; T r = I α; a = r α.

b Bereken de versnelling van de emmer en de spankracht in het touw.

✓ $a = \dfrac{mg}{m + I/r^2} = \dfrac{98{,}1}{10 + 20} = 3{,}27\,\mathrm{m/s^2}$; $T = m(g-a) = 65{,}4\,\mathrm{N}$.

c Hoe snel valt de emmer na 8,0 m, en hoe snel draait de haspel dan? Controleer met energie.

✓ $v = \sqrt{2ah} = 7{,}23\,\text{m/s}$, $\omega = v/r = 72{,}3\,\text{rad/s}$. Energie: $mgh = 785\,\text{J}$ en $\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = 262 + 523 = 785\,\text{J}$.

10.8 Eigen meting: een traagheidsmoment

Toepassen · 7 · Labo · 30 min

Een fietswiel ligt horizontaal op een as met straal 12 mm; een gewicht van 80 g valt 0,80 m. Voorbeeldmeting van de valtijd: zonder blokjes 11,27 s; met twee blokjes van 150 g op 8 cm van de as 12,39 s; op 12 cm 13,85 s.

a Leid de formule I = m r²(g t²/(2h) − 1) af.

✓ Gewicht: $mg - T = ma$, wiel: $Tr = I\alpha = Ia/r$; samen $mg = a(m + I/r^2)$. Met $a = 2h/t^2$: $I = mr^2(g/a - 1) = mr^2\left(\dfrac{gt^2}{2h} - 1\right)$.

b Bereken I voor de drie metingen en controleer het verschil met 2 m d².

✓ I = 0,00896; 0,01083; 0,01354 kg·m². Verschillen met de eerste: 0,00187 en 0,00458 kg·m², tegenover 2 m d² = 0,00192 en 0,00432 kg·m².

c Een fout van 0,05 s op de tijd: hoe groot is de fout op I? Wat zou je verbeteren?

✓ I ≈ m r² g t²/(2h): de relatieve fout op I is ongeveer twee keer die op t: 0,05 s op 11,3 s is 0,4 %, dus 0,9 % op I. Beter: een langere valhoogte, een lichtpoort in plaats van een stopwatch, vijf herhalingen, en de wrijving compenseren.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	Twee vergelijkingen (gewicht en wiel) en a = r α correct gecombineerd.
Verwerking	I per opstelling; verschil vergeleken met 2 m d².
Fout	Relatieve fout op I ≈ 2 × die op t; verbeteringen (langere val, meer herhalingen, lichtpoort, wrijving compenseren).

10.9 Een demper voor het dakraam

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Het dakraam van de meetkas (I = 0,144 kg·m² om het scharnier, 1,2 kg, 0,60 m) valt van 20° dicht (handboek).

a Toon dat de voorrand bij de start versnelt met (3/2) g cos θ.

✓ $\alpha = \dfrac{Mg(L/2)\cos\theta}{ML^2/3} = \dfrac{3g\cos\theta}{2L}$, dus $a = \alpha L = \tfrac{3}{2}g\cos\theta = 13{,}8\,\text{m/s}^2$ bij 20°.

b Een rubberen aanslag op de voorrand drukt 5 mm in. Schat de gemiddelde kracht op het frame bij het dichtslaan.

✓ De voorrand stopt van 2,46 m/s over 5 mm: gemiddelde vertraging $v^2/(2s) = 604\,\text{m/s}^2$. Als stoot: $I\omega = 0{,}590\,\text{N m s}$ moet weg in $\Delta t = 2s/v = 4{,}1\,\text{ms}$: $F = I\omega/(L\,\Delta t) = 242\,\text{N}$ aan de voorrand.

c Een gasveertje vlak bij het scharnier remt het raam af met een constant moment. Hoe groot moet dat moment zijn om de voorrand met hoogstens 0,5 m/s te laten neerkomen?

✓ Energie: $mg\,\Delta h - \tau_d\,\theta_0 = \tfrac{1}{2}I\omega_e^2$ met $\omega_e = 0{,}5/0{,}60 = 0{,}833\,\text{rad/s}$ en $\theta_0 = 0{,}349\,\text{rad}$: $\tau_d = \dfrac{1{,}208 - \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}144\cdot 0{,}833^2}{0{,}349} = 3{,}32\,\text{N m}$. (Het gewicht geeft bij 20° 3,32 N·m: de demper houdt het raam bijna in evenwicht.)

10.10 Een pirouette

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een kunstschaatser draait met gestrekte armen 1,5 toer per seconde; haar traagheidsmoment is dan 3,5 kg·m², met de armen tegen het lichaam 1,0 kg·m².

a Hoe snel draait ze met de armen in?

✓ $n_2 = 1{,}5 \cdot 3{,}5/1{,}0 = 5{,}25$ toer/s.

b Bereken haar rotatie-energie voor en na. Waar komt het verschil vandaan?

✓ $E_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot (3\pi)^2 = 155\,\text{J}$, $E_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}0 \cdot (2\pi \cdot 5{,}25)^2 = 544\,\text{J}$: haar armen leveren 389 J.

c Het ijs oefent een klein wrijvingsmoment van 0,5 N·m uit. Hoe lang zou haar snelle pirouette duren?

✓ $L = 1{,}0 \cdot 2\pi \cdot 5{,}25 = 33{,}0\,\text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$; $t = L/\tau = 66\,\text{s}$ (in werkelijkheid korter: ze stopt zelf).

10.11 Het verlies van een vliegwiel fitten

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

De stalen demonstrator (I = 2,408 kg·m²) wordt op 6000 tpm gebracht en losgelaten; het toerental wordt elke kwartier gelogd (voorbeeldmeting):

t (h)	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
n (tpm)	6000	5916	5832	5752	5672	5593	5516	5441	5367	5293	5220

t (h)	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
n (tpm)	5151	5079	5012	4944	4877	4812	4748	4684	4622	4560

a Bereken uit het logboek het verliesvermogen P = −dE/dt (centrale differenties) en fit P = a (ω/ω₀) + b (ω/ω₀)³ met kleinste kwadraten.

✓ Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np
# vliegwiel.py: verlies() en I = 2,408 kg m²; het toerental wordt elke 15 min gelogd
t = np.arange(0, 5.01, 0.25) * 3600                # s
n = np.array(NS)                                    # tpm, uit het logboek (zie tabel)
w = n * 2 * np.pi / 60
E = 0.5 * I * w**2
P = -np.gradient(E, t)                              # verliesvermogen (W), centrale differenties
A = np.vstack([w / w[0], (w / w[0])**3]).T          # model P = a (w/w0) + b (w/w0)³
(a, b), *_ = np.linalg.lstsq(A, P, rcond=None)
print(f"lagers a = {a:.1f} W, lucht b = {b:.1f} W bij {n[0]:.0f} tpm")
print(f"na 5 h nog {100 * E[-1] / E[0]:.1f} % van de energie")
```

Echte uitvoer:

```
lagers a = 5.3 W, lucht b = 9.7 W bij 6000 tpm
na 5 h nog 57.8 % van de energie
```

b Vergelijk a en b met de rekenwaarden van het handboek (5 W en 10 W). Wat verandert als de vacuümpomp uitvalt?

De fit vindt de rekenwaarden terug (binnen de ruis van het afronden op 1 tpm). Valt het vacuüm weg, dan stijgt het luchtverlies (b) met een factor die evenredig is met de dichtheid van het gas: bij gewone luchtdruk is dat al snel tientallen keren meer, en het vliegwiel is in minder dan een uur leeg.

10.12 Habitat: een vliegwiel voor het station?

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Een leverancier biedt een vliegwielopslag aan met een koolstofvezelring: 5 kWh bruikbaar, 250 kW vermogen, systeemmassa 1000 kg, stilstandsverlies 2 % per uur, 100 000 cycli. Habitat heeft 2,46 kWh bruikbaar in LiFePO4 (±28 kg, ±3000 cycli), een netomvormer van 4 kVA (8 kVA gedurende 5 s), een drukpomp met een korte aanloop van ±6,3 kVA, en 's nachts ±1,2 à 1,4 kWh verbruik in de module (hoofdstuk 20 van I).

a Bereken voor beide opslagtechnieken de specifieke energie (Wh/kg) en het verlies over één nacht van 12 h zonder laden.

Vliegwiel: $5000/1000 = 5\,\mathrm{Wh/kg}$; na 12 h: $0{,}98^{12} = 0{,}785$, dus 22 % weg. Batterij: $2460/28 = 88\,\mathrm{Wh/kg}$; zelfontlading een paar procent per maand, over 12 h een paar honderdste procent.

b Beoordeel de drie taken van het handboek (pomp, wolk, nacht) voor dit aanbod. Is 250 kW nuttig voor Habitat?

Pomp: het probleem is vermogen gedurende een fractie van een seconde, en dat dekt de omvormer al. Wolk: een paar tientallen Wh, 1 % van de batterij. Nacht: het vliegwiel verliest over 12 h een vijfde van zijn inhoud, meer dan de hele nachtvraag verschilt. 250 kW is zestig keer wat de omvormer kan leveren: dat vermogen kan het station niet eens gebruiken.

c Bereken hoeveel jaar de batterij meegaat bij één cyclus per dag, en het vliegwiel bij 100 cycli per dag.

Batterij: 3000 cycli / 365 ≈ 8 jaar. Vliegwiel: 100 000 / 100 = 1000 dagen ≈ 2,7 jaar, maar bij één cyclus per dag 270 jaar: de cycli zijn het sterke punt van het vliegwiel, niet nodig voor Habitat.

d Schrijf een advies van 5 à 8 regels aan het brein van het station, met getallen, en één situatie waarin je het advies zou herzien.

Bijvoorbeeld: 'Geen vliegwiel. De LiFePO4-batterijen leveren 18 keer meer energie per kg, verliezen 's nachts bijna niets en dekken een wolk met 1 % van hun inhoud; de omvormer dekt de aanloop van de pomp. Het vliegwiel zou 1000 kg wegen en 's nachts 21 % verliezen. Herzien als het station verhuist naar een plek waar de batterijen onder 0 °C moeten laden, of als er een toestel komt met honderden zware, korte cycli per dag (een lier, een lift).'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Rekenwerk	Wh/kg (5 en 88); nachtverlies (±21 % tegenover ±0,05 %); levensduur in jaren.
Beoordeling	Per taak onderbouwd; vermogen tegenover energie onderscheiden; 250 kW is 60 keer de omvormer.
Advies	Duidelijk besluit met getallen en één voorwaarde om het te herzien (kou, veel korte cycli, afgelegen site).
Eerlijkheid	Dezelfde grenzen voor beide (bruikbare energie, systeemmassa, tijd).

10.13 Een reactiewiel met een grens

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Dezelfde satelliet (40 kg·m²) en hetzelfde reactiewiel (0,050 kg·m²) als in het handboek; het wiel mag hoogstens 6000 tpm draaien, de motor levert hoogstens 0,10 N·m.

a Wat is de grootste hoeksnelheid die de satelliet met dit wiel kan krijgen?

$\omega_w = 628{,}3\,\mathrm{rad/s}$: $\omega_s = 0{,}050 \cdot 628{,}3/40 = 0{,}785\,\mathrm{rad/s}$ (45°/s).

b De satelliet moet zich 180° draaien: eerst versnellen met het grootste moment, dan even hard remmen. Hoe lang duurt dat, en hoe snel draait het wiel op zijn snelst? Wordt de grens van 6000 tpm gehaald?

✓ $\alpha_s = 0{,}10/40 = 0{,}0025\,\text{rad/s}^2$. Halverwege is de hoek $\pi/2 = \frac{1}{2}\alpha t_h^2$: $t_h = \sqrt{\pi/\alpha} = 35{,}4\,\text{s}$, samen 71 s. Grootste $\omega_s = \alpha t_h = 0{,}0886\,\text{rad/s}$, dus het wiel $40 \cdot 0{,}0886/0{,}050 = 70{,}9\,\text{rad/s}$ = 677 tpm: ruim onder 6000 tpm.

c Welke grens beslist hier: het moment of het toerental? Hoe snel zou de draai kunnen met een onbeperkt sterke motor?

✓ Het moment beslist: de motor is te zwak om het wiel tot zijn grens te brengen binnen een halve draai. Met een onbeperkt sterke motor zou de satelliet meteen 0,785 rad/s halen en 180° draaien in $\pi/0{,}785 = 4{,}0\,\text{s}$; om dat in de buurt te komen, is een motor van tientallen N·m nodig (en een satelliet die zulke schokken verdraagt).

●●● Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

10.14 Bol en bolschil met een integraal

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Leid de traagheidsmomenten van de volle bol en de dunne bolschil af, met straal R en massa M.

a Snij de volle bol in schijven loodrecht op de as, op hoogte z en met dikte $\mathrm{d}z$. Toon dat $I = \dfrac{\pi\rho}{2}\displaystyle\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2\,\mathrm{d}z = \frac{2}{5}MR^2$.

✓ Schijf met straal $\sqrt{R^2 - z^2}$ en massa $\rho\pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z$: $\mathrm{d}I = \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}m = \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - z^2)^2\,\mathrm{d}z$. $\displaystyle\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\,\mathrm{d}z = 2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{5}R^5 = \frac{16}{15}R^5$. Dus $I = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$; met $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$: $I = \frac{2}{5}MR^2$.

b Leid voor de bolschil af: $I = \frac{2}{3}MR^2$ (tip: $I_x + I_y + I_z = 2\int r^2\,\mathrm{d}m$ voor een symmetrisch voorwerp, of snij in ringen).

✓ Voor een bolschil ligt alle massa op afstand R van het middelpunt: $\int r^2\,\mathrm{d}m = MR^2$, met $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Om de z-as telt $x^2 + y^2$; door symmetrie is $I_x = I_y = I_z$ en $I_x + I_y + I_z = 2\int r^2\,\mathrm{d}m = 2MR^2$, dus $I = \frac{2}{3}MR^2$. (Zelfde truc voor de volle bol: $\int r^2\,\mathrm{d}m = \frac{3}{5}MR^2$, dus $I = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}MR^2 = \frac{2}{5}MR^2$.)

c Controleer de bol numeriek: bereken de integraal met de trapeziumregel in Python.

✓ Met $R = 1$: $k = \dfrac{\int \frac{1}{2}(1 - z^2)^2\,\mathrm{d}z}{\int (1 - z^2)\,\mathrm{d}z}$ (de massa in dezelfde schijven). Trapeziumregel met 200 000 stukjes: $k = 0{,}400000$, dus $\frac{2}{5}$.

10.15 Onderzoek: van glijden naar rollen

●●● Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Een bowlingbal (volle bol) wordt met 8,0 m/s weggegooid zonder te draaien. Hij glijdt eerst; de wrijving (μ = 0,10) remt hem af en laat hem tegelijk draaien, tot hij rolt zonder slippen.

a Stel de vergelijkingen op voor $v(t)$ en $\omega(t)$ tijdens het glijden. Toon dat het rollen begint na $t = \dfrac{2v_0}{7\mu g}$, met $v = \frac{5}{7}v_0$, voor elke μ.

✓ Glijden: $m\dot{v} = -\mu mg$, dus $v = v_0 - \mu g t$; $I\dot{\omega} = \mu mgR$, dus $\omega = \dfrac{5\mu g}{2R}t$ (met $I = \frac{2}{5}mR^2$). Rollen als $v = R\omega$: $v_0 - \mu g t = \frac{2}{5}\mu g t$, dus $t = \dfrac{2v_0}{7\mu g}$ en $v = v_0 - \frac{2}{7}v_0 = \frac{5}{7}v_0$, voor elke μ.

b Bereken de tijd, de afstand en welk deel van de kinetische energie warmte wordt.

✓ $t = 16/(7 \cdot 0{,}981) = 2{,}33\,\text{s}$; $s = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 = 16{,}0\,\text{m}$; $v = 5{,}71\,\text{m/s}$. Energie na: $\frac{1}{2}mv^2(1 + 0{,}4) = \frac{7}{10}\cdot\frac{25}{49}\,mv_0^2 = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$: $\frac{2}{7}$ of 28,6 % wordt warmte, ook voor elke μ.

c Verklaar $\frac{5}{7}$ met het impulsmoment om het contactpunt met de grond. Wat verandert er voor een ring of een cilinder?

Om het contactpunt (een punt op de grond) werkt de wrijving zonder arm en de zwaartekracht en normaalkracht heffen elkaar op: L om dat punt blijft behouden. Voor: $L = mv_0R$ (alleen translatie). Na: $L = mvR + I\omega = mvR(1+k)$. Dus $v = v_0/(1+k)$: bol $\frac{5}{7}$, cilinder $\frac{2}{3}$, ring $\frac{1}{2}$ van de beginsnelheid.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Wrijving μmg tegen de beweging; tegelijk moment μmgR dat ω laat groeien.
Afleiding	Rolvoorwaarde v = Rω opgelost; resultaat onafhankelijk van μ.
Rekenwerk	Tijd, afstand en energieverlies correct.
Inzicht	Impulsmoment om het contactpunt behouden; algemeen v = v_0/(1 + k).

10.16 De precessie van een fietswiel

Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Een fietswiel (I = 0,10 kg·m² om zijn as, 2,0 kg) draait 5,0 toer per seconde. Je hangt het aan een touwtje aan het ene uiteinde van de as, 0,15 m van het wiel; de as staat horizontaal.

a Teken $\vec{L}$, het gewicht en het moment om het ophangpunt. Leg uit waarom het wiel niet valt maar horizontaal gaat ronddraaien.

$\vec{L}$ ligt langs de as, horizontaal. Het gewicht grijpt aan in het wiel, 0,15 m van het ophangpunt: het moment $\vec{r} \times \vec{F}$ staat horizontaal en loodrecht op $\vec{L}$. Het verandert dus niet de grootte van $\vec{L}$, alleen de richting: de as draait in het horizontale vlak, ze valt niet.

b Toon met $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{\tau}\,\mathrm{d}t$ dat de as ronddraait met $\Omega = \dfrac{mgd}{I\omega}$. Bereken Ω en de tijd voor één toer.

In $\mathrm{d}t$ draait $\vec{L}$ over $\mathrm{d}\varphi = \tau\,\mathrm{d}t/L$, dus $\Omega = \tau/L = \dfrac{mgd}{I\omega}$. $L = 0{,}10 \cdot 2\pi \cdot 5{,}0 = 3{,}142\,\mathrm{kg\,m^2/s}$; $\tau = 2{,}0 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 = 2{,}94\,\mathrm{N\,m}$; $\Omega = 0{,}94\,\mathrm{rad/s}$, één toer in 6,7 s.

c Wat gebeurt er als het wiel langzamer gaat draaien? Waar houdt het model op te kloppen?

Hoe trager het wiel, hoe kleiner L en hoe sneller de precessie. Het model veronderstelt dat L bijna helemaal van het draaien van het wiel komt; draait de precessie zelf niet meer traag tegenover het wiel (Ω niet meer ≪ ω), dan telt ook het impulsmoment van de precessie mee, gaat de as schommelen (nutatie) en zakt het wiel uiteindelijk.

10.17 Ontwerp: een vliegwiel van koolstofvezel voor 1 kWh

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 60 min

Ontwerp de rotor van een vliegwielopslag met 1,0 kWh bruikbare energie: een dunne ring van koolstofvezel (toelaatbare spanning 1000 MPa in de omtreksrichting, 1600 kg/m³), gebruikt tussen de helft en het volle toerental. De buitenmaat mag hoogstens 0,70 m zijn (de deur van de technische ruimte is 0,80 m).

a Kies een straal. Bereken de grootste randsnelheid, het toerental, de massa van de ring en een doorsnede (breedte × hoogte).

Met $R = 0{,}30\,\mathrm{m}$: $v = \sqrt{10^9/1600} = 791\,\mathrm{m/s}$, $\omega = 2635\,\mathrm{rad/s}$ = 25 165 tpm. Energie per kg ring $\sigma/(2\rho) = 86{,}8\,\mathrm{Wh/kg}$; met 75 % bruikbaar is de massa $1000/(0{,}75 \cdot 86{,}8) = 15{,}4\,\mathrm{kg}$. Doorsnede $A = m/(2\pi R\rho) = 51\,\mathrm{cm^2}$, bv. 5 cm dik (radiaal) en 10 cm hoog.

b Welk deel van de energie haal je eruit tussen de helft en het volle toerental? Hoeveel energie zit er in het vliegwiel bij vol toerental? Vergelijk met de energie in TNT (4,2 MJ/kg).

✓ $E \sim \omega^2$: tussen $\frac{1}{2}\omega$ en ω komt $1 - \frac{1}{4} = 75\,\%$ vrij. Vol: $1{,}0/0{,}75 = 1{,}33\,\text{kWh} = 4{,}8\,\text{MJ}$, de energie van ongeveer 1,1 kg TNT. Bij een breuk moet de omhulling dat opvangen.

c Waarom maakt de straal voor de massa niet uit, maar wel voor het toerental? Welke straal kies je, en waarom?

✓ De massa volgt uit σ/(2ρ): elke dunne ring van dit materiaal bewaart evenveel per kg, welke straal ook. Het toerental is v/R: een kleine ring moet sneller draaien (lagers, motor en balans worden moeilijker), een grote past niet door de deur en vraagt een grotere behuizing. R = 0,30 m (buitendiameter van de ring ±0,65 m) is een compromis: 25 000 tpm is haalbaar met magnetische lagers.

d Vergelijk met LiFePO4 (110 Wh/kg nominaal, 80 % bruikbaar) en noem twee onderdelen die de systeemmassa van het vliegwiel nog zwaar maken.

✓ LiFePO4: $1000/(110 \cdot 0{,}8) = 11{,}4\,\text{kg}$ voor 1 kWh bruikbaar, tegenover 15,4 kg voor de ring alleen. Maar de ring is niet het systeem: de omhulling die een breuk moet opvangen (vaak zwaarder dan de rotor), de vacuümbehuizing met pomp, de magnetische lagers, de motor-generator en de elektronica maken een vliegwielsysteem meestal zwaarder per kWh dan een batterij.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Rotor	v = √(σ/ρ), ω = v/R, massa uit σ/(2ρ) en 75 % bruikbaar, doorsnede uit m = 2πR A ρ.
Energie	75 % tussen ½ω en ω; volle energie 4,8 MJ ≈ 1 kg TNT: omhulling nodig.
Keuze	Straal onderbouwd: groot genoeg voor een haalbaar toerental, klein genoeg voor de deur; massa onafhankelijk van R.
Vergelijking	Batterijmassa berekend; behuizing, lagers, motor en vacuüm genoemd.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 11

Trillingen en resonantie

Van veer en slinger tot windturbine: waarom dingen trillen, hoe hard, en hoe je ze stilhoudt

Uitgewerkte oplossingen bij de 16 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 6× toepassen · 4× uitdagen · ± 505 min

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren · L Elektriciteit en elektronica



De windturbine van het station staat op een eigen mast, vijftien meter van de woonmodule. In dit hoofdstuk ontdek je waarom.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

11.1 Een massa aan een veer

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een massa van 0,40 kg hangt aan een veer met k = 60 N/m. Je trekt ze 3,0 cm onder haar evenwicht en laat los.

a Bereken de eigenfrequentie, de periode en hoeveel de veer in evenwicht is uitgerekt.

✓ $\omega_0 = \sqrt{60/0{,}40} = 12{,}25\,\text{rad/s}$, $f_0 = 1{,}949\,\text{Hz}$, $T = 0{,}513\,\text{s}$. Uitgerekt: $mg/k = 3{,}92/60 = 0{,}0654\,\text{m}$ (6,5 cm).

b Bereken de grootste snelheid, de grootste versnelling en de trillingsenergie.

✓ $v_{\max} = A\omega_0 = 0{,}030 \cdot 12{,}25 = 0{,}367\,\text{m/s}$; $a_{\max} = A\omega_0^2 = 0{,}030 \cdot 150 = 4{,}5\,\text{m/s}^2$; $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0{,}030^2 = 0{,}027\,\text{J}$.

c Je hangt twee zulke veren onder elkaar (serie) en daarna naast elkaar (parallel). Wat wordt de frequentie telkens?

✓ Serie: dezelfde kracht rekt beide veren, dus dubbele verlenging: $k = 30\,\text{N/m}$ en $f = 1{,}378\,\text{Hz}$ ($f_0/\sqrt{2}$). Parallel: $k = 120\,\text{N/m}$, $f = 2{,}757\,\text{Hz}$ ($\sqrt{2}\,f_0$).

11.2 Slingers

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Gebruik g = 9,81 m/s² op aarde en 1,62 m/s² op de maan.

a Hoe lang is een slinger met een periode van 2,0 s (één tik per seconde)?

✓ $L = gT^2/(4\pi^2) = 9{,}81 \cdot 4/39{,}48 = 0{,}994\,\text{m}$.

b Welke periode heeft diezelfde slinger op de maan?

✓ $T = 2\pi\sqrt{0{,}994/1{,}62} = 4{,}92\,\text{s}$ (of $2{,}0 \cdot \sqrt{9{,}81/1{,}62}$).

c Een meetlat van 1,00 m slingert om een uiteinde. Bereken de periode en de lengte van de 'gewone' slinger met dezelfde periode.

✓ $I_O = \frac{1}{3}mL^2$, $d = L/2$: $T = 2\pi\sqrt{2L/(3g)} = 1{,}638\,\text{s}$. Een gewone slinger met $L' = 2L/3 = 0{,}667\,\text{m}$ is even snel: dat punt heet het slingercentrum.

11.3 Inzakken en trillen

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Gebruik $f_0 \approx 15{,}8/\sqrt{\delta}$ met δ de statische inzakking in mm.

a Een koelkast zakt 2,0 mm in op haar rubberen voeten. Schat haar eigenfrequentie.

✓ $15{,}8/\sqrt{2{,}0} = 11{,}1\,\text{Hz}$.

b Een auto zakt 15 cm in als je hem op zijn wielen zet. Schat de eigenfrequentie van de carrosserie. Waarom kiezen autobouwers ongeveer deze waarde?

✓ $15{,}8/\sqrt{150} = 1{,}29\,\text{Hz}$. Rond 1 à 1,5 Hz voelt een auto comfortabel: ongeveer het ritme van stappen; veel zachter wordt misselijkmakend en laat de wagen te veel duiken en rollen.

c Hoeveel moet een machine inzakken voor een eigenfrequentie van 5 Hz? En voor 1 Hz?

✓ $\delta = (15{,}8/5)^2 = 10\,\text{mm}$; voor 1 Hz: $15{,}8^2 = 248\,\text{mm}$, een kwart meter.

d Waarom mag je deze vuistregel niet gebruiken voor de mast van de windturbine?

✓ De regel volgt uit kδ = mg: de zwaartekracht moet in de richting van de trilling werken. De mast trilt horizontaal en het gewicht van de gondel duwt verticaal; de horizontale stijfheid meet je met een trekproef of berekent je met 3EI/L³.

11.4 Demping uit een meting

Oefenen · 6 · Analyseren · 20 min

Een sensorarm in de meetkas krijgt een tik en dooft uit. Opeenvolgende toppen van de uitwijking (mm): 12,0, 9,8, 8,0, 6,6, 5,4. De periode is 0,12 s.

a Bereken het logaritmisch decrement over de vier perioden samen, en de dempingsverhouding ζ.

✓ $\delta = \frac{1}{4}\ln(12{,}0/5{,}4) = 0{,}1996$; $\zeta = \delta/\sqrt{4\pi^2+\delta^2} = 0{,}0318$ (3,2 %).

b Bereken Q. Na hoeveel perioden is de amplitude gehalveerd?

✓ $Q = 1/(2\zeta) = 15{,}7$. Halveren: $\ln 2/\delta = 3{,}5$ perioden, $0{,}42\,\text{s}$.

c Waarom neem je de verhouding over vier perioden in plaats van tussen twee opeenvolgende toppen?

✓ Toppen zijn afgelezen tot op 0,1 mm: over één periode verandert de top maar 18 %, en een afleesfout weegt dan zwaar. Over vier perioden wordt de verhouding groter en de relatieve fout kleiner. Nog beter: een rechte fitten door ln(top) tegenover het nummer, zoals in het handboek.

11.5 Waar of niet waar?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Beoordeel elke uitspraak en verklaar in één of twee zinnen.

a (a) De Tacoma Narrows Bridge stortte in omdat de wind precies op haar eigenfrequentie blies. (b) Een slinger met een zwaardere massa heeft een langere periode. (c) Bij resonantie loopt de beweging 90° achter op de kracht.

✓ (a) Niet waar: het was aero-elastisch fladderen, een negatieve demping; de wervelfrequentie lag rond 1 Hz, de torsie op 0,2 Hz. (b) Niet waar: de massa valt weg; alleen de lengte (en g) telt. (c) Waar: dan duwt de kracht met de snelheid mee en levert ze het meeste vermogen.

b (d) Een machine isoleer je het best met zo stijf mogelijke rubberen voeten. (e) Meer demping verlaagt altijd de kracht die naar de vloer gaat. (f) Een stijvere mast is voor een windturbine altijd beter.

✓ (d) Niet waar: isoleren vraagt een eigenfrequentie ver onder de storende frequentie, dus zachte voeten (binnen hun draagvermogen). (e) Niet waar: boven r = √2 geeft meer demping juist meer kracht door; demping helpt alleen rond de resonantie. (f) Niet waar: het gaat om waar de eigenfrequentie ligt; een stijvere mast kan precies in de 1P-band belanden.

11.6 Een Campbell-diagram lezen

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Een andere turbine (Ø 5,6 m, drie bladen) draait van 60 tot 200 tpm. Haar mast heeft een eerste eigenfrequentie van 2,5 Hz en een tweede van 14 Hz.

a Bereken de 1P- en 3P-banden in bedrijf.

✓ 1P: 1,0 tot 3,33 Hz; 3P: 3,0 tot 10 Hz.

b Bij welke toerentallen raken 1P en 3P de twee eigenfrequenties? Welke liggen in het werkgebied?

✓ 1P raakt f_1 bij 150 tpm (in het werkgebied: slecht) en f_2 bij 840 tpm (buiten). 3P raakt f_1 bij 50 tpm (net onder het werkgebied: bij aanlopen) en f_2 bij 280 tpm (buiten).

c Welke strategie (stijf-stijf, zacht-stijf, zacht-zacht) zou je kiezen, en tussen welke waarden moet f_1 dan liggen (10 % marge)?

> Zacht-stijf past hier: f_1 tussen 1P_max en 3P_min, dus tussen 3,33 · 1,1 = 3,7 Hz en 3,0/1,1 = 2,7 Hz. Dat kan niet (de ondergrens ligt boven de bovengrens): de banden overlappen. Dus zacht-zacht: f_1 onder 1,0/1,1 = 0,91 Hz (een slankere mast), of stijf-stijf boven 11 Hz (veel te zwaar). Met f_1 = 2,5 Hz moet de regelaar in elk geval 135 tot 165 tpm vermijden, midden in het werkgebied: een slecht ontwerp.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

11.7 Eigen meting: veer en slinger

Toepassen · 7 · Labo · 50 min

Meet de veerconstante van een schroefveer op twee manieren (uitrekken en trillen) en de periode van een slinger bij verschillende lengtes. Een smartphone met een app die de versnellingsmeter uitleest, geeft de periode heel nauwkeurig als je hem als massa gebruikt.

a Veer: meet voor vijf massa's de verlenging in rust en de tijd voor 10 trillingen.

> Een voorbeeld staat in de proef van het handboek (k ≈ 20 N/m, massa's 50 tot 250 g, 10 T tussen 3,5 en 7,2 s).

b Bepaal k uit beide grafieken en de meebewegende massa van de veer uit het snijpunt. Vergelijk met de gewogen massa van de veer gedeeld door drie.

> Uit $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m + m_v/3)$: $k = 4\pi^2/\text{helling}$ en $m_v/3 = \text{snijpunt}/\text{helling}$; statisch: $k = \Delta F/\Delta x$. De twee waarden moeten binnen enkele procenten overeenkomen; het snijpunt geeft ±10 g voor een veer van 30 g. Ligt het snijpunt negatief, dan is de meting onnauwkeurig of de veer niet lineair bij kleine lasten (windingen die tegen elkaar liggen).

c Slinger: meet T voor L = 0,25; 0,50; 0,75 en 1,00 m (kleine uitwijking) en bepaal g uit de helling van T² tegen L.

> $T^2 = (4\pi^2/g)\,L$: helling ±4,02 s²/m, dus $g = 4\pi^2/4{,}02 \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Meet L tot het zwaartepunt van het gewicht.

d Meet bij L = 1,00 m ook T bij 10°, 30°, 60°. Vergelijk met de figuur van het handboek.

> Bij 10° is T nog 0,2 % langer (niet meetbaar met een stopwatch), bij 30° 1,7 %, bij 60° 7,3 % (T/T_0 = 1,073). Luchtweerstand doet de uitwijking dalen tijdens de meting: meet weinig perioden bij grote hoeken.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Tien perioden per meting, start bij een doorgang door het evenwicht, eenheden in de tabel.
Verwerking	Twee grafieken met rechte en helling; k twee keer bepaald; snijpunt geïnterpreteerd als meebewegende massa.
Slinger	g uit de helling $4\pi^2/g$ met een relatieve fout; effect van grote hoeken zichtbaar.
Besluit	Verschillen tussen de methoden verklaard (afleesfout, massa van de veer, luchtweerstand, amplitude).

11.8 Een wasmachine centrifugeert

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De trommel van een wasmachine (met kuip en motor 30 kg) hangt aan veren van samen 40 kN/m, met demping ζ = 0,1. Een prop natte was zorgt voor een onbalans van 0,5 kg op 0,25 m. De machine centrifugeert op 1400 tpm.

a Bereken de eigenfrequentie van de kuip in Hz en in tpm.

✓ $f_\mathrm{n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{40\,000/30} = 5{,}81\,\mathrm{Hz}$, dus 349 tpm.

b Bereken de uitwijking van de kuip bij 1400 tpm, en bij het doorlopen van de resonantie als de trommel daar zou blijven draaien.

✓ $U/m = 0{,}125/30 = 4{,}17\,\mathrm{mm}$. Bij 1400 tpm: $r = 4{,}02$ en $X = (U/m)\,r^2/\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} = 4{,}44\,\mathrm{mm}$. Bij resonantie: $(U/m)/(2\zeta) = 20{,}8\,\mathrm{mm}$: vijf keer meer.

c Hoe groot is de onbalanskracht bij 1400 tpm, en welk deel daarvan gaat naar de behuizing?

✓ $F = U\omega^2 = 0{,}125 \cdot 146{,}6^2 = 2687\,\mathrm{N}$ (meer dan 270 kg!). Doorgegeven: $T = 0{,}085$, dus $228\,\mathrm{N}$.

d Waarom verdeelt een wasmachine eerst de was op een laag toerental voor ze versnelt?

✓ Een kleinere onbalans verkleint alle krachten evenredig, ook bij het doorlopen van de resonantie rond 350 tpm. Blijft de onbalans te groot, dan weigert de machine hoog te centrifugeren: ze meet de onbalans uit de schommelingen van het motortoerental.

11.9 Een resonantiekromme simuleren

Toepassen · 7 · Programmeren · 35 min

Een model van de mast met een extra demper: $k = 9839\,\mathrm{N/m}$, $m = 233{,}5\,\mathrm{kg}$, $\zeta = 0{,}05$, en een kracht van 100 N amplitude.

a Schrijf een programma dat voor een reeks frequenties de beweging simuleert (Heun) tot de vrije trilling uitgestorven is, en de amplitude van de evenwichtstoestand bepaalt.

Bijvoorbeeld:

```
import math
k, m, zeta = 9839.0, 233.5, 0.05            # mast met een extra demper (model)
w0, c, F0 = math.sqrt(k / m), 2 * zeta * math.sqrt(k * m), 100.0

def evenwichtsamplitude(f, duur=60.0, h=0.004):
    """Heun op m x'' + c x' + k x = F0 cos(w t); de grootste uitwijking in de laatste 10 s."""
    w, x, v, t, top = 2 * math.pi * f, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
    a = lambda t, x, v: (F0 * math.cos(w * t) - c * v - k * x) / m
    while t < duur:
        a1 = a(t, x, v)
        xp, vp = x + h * v, v + h * a1
        a2 = a(t + h, xp, vp)
        x, v, t = x + h / 2 * (v + vp), v + h / 2 * (a1 + a2), t + h
        if t > duur - 10:
            top = max(top, abs(x))
    return top

for f in (0.5, 0.8, 0.95, 1.0, 1.03, 1.06, 1.1, 1.3, 2.0):
    r = 2 * math.pi * f / w0
    formule = F0 / k / math.sqrt((1 - r * r)**2 + (2 * zeta * r)**2)
    print(f"f = {f:4.2f} Hz: simulatie {1000 * evenwichtsamplitude(f):5.1f} mm, formule {1000 *
formule:5.1f} mm")
```

Echte uitvoer:

```
f = 0.50 Hz: simulatie  13.2 mm, formule  13.2 mm
f = 0.80 Hz: simulatie  24.9 mm, formule  24.9 mm
f = 0.95 Hz: simulatie  56.5 mm, formule  56.5 mm
f = 1.00 Hz: simulatie  87.9 mm, formule  88.0 mm
f = 1.03 Hz: simulatie 101.7 mm, formule 101.8 mm
f = 1.06 Hz: simulatie  88.2 mm, formule  88.1 mm
f = 1.10 Hz: simulatie  59.5 mm, formule  59.5 mm
f = 1.30 Hz: simulatie  17.0 mm, formule  17.0 mm
f = 2.00 Hz: simulatie   3.7 mm, formule   3.7 mm
```

b Vergelijk met de formule van het handboek. Hoe lang moet je minstens simuleren, en waarom?

De simulatie volgt de formule tot op een paar tienden mm. De vrije trilling sterft uit met $\tau = 1/(\zeta\omega_0) = 3{,}1\ \mathrm{s}$; na 50 s is ze gezakt tot $\mathrm{e}^{-50/3{,}1} = 0{,}0000$ van haar begin. Daarom 60 s simuleren en pas de laatste 10 s meten. Bij $\zeta = 0{,}005$ zou het tien keer langer duren.

c Bepaal uit de kromme de breedte van de piek op $1/\sqrt{2}$ van de top. Toon dat $\zeta \approx \Delta f/(2f_0)$.

De top is $F_0/(2\zeta k) = 102\,\mathrm{mm}$; op $1/\sqrt{2}$ daarvan ligt de kromme bij $r \approx 1 \pm \zeta$, dus $\Delta f \approx 2\zeta f_0 = 0{,}103\,\mathrm{Hz}$. Zo meet men demping ook: met een frequentiezwaai in plaats van een uitslingerproef.

11.10 Een auto op een ribbelweg

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een onverharde weg golft: ze gaat sinusvormig 1,0 cm op en neer rond haar gemiddelde, met een golflengte van 5,0 m. De carrosserie van een auto heeft een eigenfrequentie van 1,3 Hz op haar veren, met ζ = 0,3. De weg beweegt de wielen op en neer; de carrosserie

volgt via de veren.

a Bij welke snelheid rijdt de auto in resonantie? Hoe groot is de beweging van de carrosserie dan?

De wielen volgen de weg met $f = v/5{,}0$: resonantie bij $v = 5{,}0 \cdot 1{,}3 = 6{,}5\,\mathrm{m/s} = 23\,\mathrm{km/h}$. Voor een bewegende steun geldt dezelfde T: bij $r = 1$ is $T = \sqrt{1 + 0{,}36}/0{,}6 = 1{,}94$, dus ±1,9 cm, bijna twee keer de weg.

b Hoe groot is ze bij 90 km/h?

$f = 25/5 = 5\,\mathrm{Hz}$, $r = 3{,}85$: $T = 0{,}180$, ±1,8 mm.

c Een chauffeur zegt: 'over zo'n weg moet je snel rijden, dan voel je het minder.' Klopt dat? Wat is het nadeel?

Voor de carrosserie klopt het: ver boven de resonantie beweegt ze nauwelijks. Maar de wielen en banden stuiteren dan heftig over de ribbels (hun eigen, veel hogere eigenfrequentie), de grip daalt en de remweg wordt langer. Snel rijden op een ribbelweg is comfortabel en gevaarlijk.

11.11 Habitat: een trillingsplan voor het station

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Het team wil twee dingen vastleggen. (1) Iemand stelt voor de mast 'voor de zekerheid' te maken uit een dikkere buis van 273,0 × 6,3 mm (497 kg, I = 4696 cm⁴). (2) Het station krijgt misschien een warmtepomp (hoofdstuk 16). Neem als rekenwaarden: de buitenunit weegt 60 kg, staat op vier voeten naast de woonmodule en haar compressor draait met een frequentieregelaar tussen 30 en 90 Hz. Gebruik de catalogus van het handboek.

type (voorbeeldcatalogus)	stijfheid per voet	grootste last per voet	opbouw
A	25 kN/m	60 N	zacht rubber, drukbelast
B	40 kN/m	100 N	rubber, drukbelast
C	90 kN/m	250 N	rubber, drukbelast
D	250 kN/m	600 N	hard rubber, drukbelast
E	45 kN/m	250 N	rubber op afschuiving (duurder)

a Bereken de eerste eigenfrequentie van de mast met de dikkere buis (gondel 150 kg, E = 210 GPa). Vergelijk met 1P bij 80 tpm. Wat besluit je?

$k = 3 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 4696 \cdot 10^{-8}/12^3 = 17\,120\,\mathrm{N/m}$; $m_{\mathrm{eff}} = 150 + 0{,}236 \cdot 497 = 267{,}2\,\mathrm{kg}$; $f_1 = 1{,}274\,\mathrm{Hz}$. 1P bij 80 tpm is 1,33 Hz: maar 5 % marge. De dikkere mast zou bij zwakke wind in bedrijf bijna in resonantie draaien. Besluit: de buis van 244,5 × 5,0 mm blijft (1,03 Hz, 29 % marge); 'sterker' is hier niet 'veiliger'.

b Kies voeten voor de warmtepomp: bereken voor elk type f_n, de inzakking, T bij 30 Hz en bij 90 Hz, en of de last per voet past.

Last per voet 147 N; type A en B zijn overbelast. A: 6,5 Hz, 5,9 mm, T(30) = 0,054, T(90) = 0,009 (overbelast); B: 8,2 Hz, 3,7 mm, T(30) = 0,086, T(90) = 0,012 (overbelast); C: 12,3 Hz, 1,6 mm, T(30) = 0,209, T(90) = 0,024; D: 20,5 Hz, 0,6 mm, T(30) = 0,886, T(90) = 0,060; E: 8,7 Hz, 3,3 mm, T(30) = 0,097, T(90) = 0,014. Keuze: type E (afschuifrubber): 10 % doorgang bij 30 Hz, 1,4 % bij 90 Hz; C laat bij 30 Hz 21 % door, D bijna alles.

c Welke eisen stel je aan de aansluitingen van de warmtepomp (leidingen, kabels) opdat de voeten hun werk kunnen doen?

Koelleidingen en condensafvoer met een flexibele lus of trillingsdemper (gevlochten slang), de voedingskabel met een ruime lus, geen stijve steun die de unit ook nog met de muur verbindt. Anders lopen de trillingen om de voeten heen.

d Schrijf een trillingsplan van 6 à 8 regels voor het dossier: mast, regels voor de turbine, voeten voor pomp en warmtepomp, en wat het brein bewaakt.

> Bijvoorbeeld: 'Mast: buis 244,5 × 5,0 mm, f_1 = 1,03 Hz (zacht-zacht, 29 % marge tegenover 1P bij 80 tpm); een stijvere buis is afgewezen. Turbine: snel door 56 à 68 tpm, geen vrij draaien onder 80 tpm, venster rond 163 tpm snel doorlopen. Station: drukpomp op 4 voeten type B (12 Hz, 7 %), warmtepomp op 4 voeten type E (8,7 Hz, 10 % bij 30 Hz), overal flexibele aansluitingen. Brein: versnellingsmeter in de gondel, alarm en stop als het niveau bij f_1 of bij 1P stijgt; uitslingerproef elk jaar (f_1 en ζ vergelijken).'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Mast	f_1 met k = 3EI/L³ en de meebewegende massa; vergelijking met 1P; besluit onderbouwd (marge 5 % is te klein).
Voeten	Alle types doorgerekend; overbelasting herkend; keuze met T bij de laagste frequentie.
Aansluitingen	Flexibele stukken in leidingen en kabels; geen stijve verbinding naast de voeten.
Plan	Kort, met getallen, en met een bewakingstaak voor het brein.

11.12 Door de resonantie

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De mast van de turbine: $f_1 = 1{,}033\,\mathrm{Hz}$, $\zeta = 0{,}005$, onbalans $U = 0{,}05\,\mathrm{kg\,m}$, $k = 9839\,\mathrm{N/m}$. In zwakke wind draait de rotor zonder last.

a Na hoeveel seconden haalt de trilling de helft van haar evenwichtsamplitude als de rotor precies op het kritische toerental blijft draaien?

> De omhullende groeit als $1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$ met $\tau = 1/(\zeta\omega_0) = 30{,}8\,\mathrm{s}$; de helft na $\tau \ln 2 = 21{,}4\,\mathrm{s}$.

b Hoe groot is die evenwichtsamplitude? Welke horizontale kracht moet de mast dan heen en weer leveren?

> $X = U\omega_0^2/(c\,\omega_0) = 21{,}4\,\mathrm{mm}$; de mast levert de veerkracht $kX = 211\,\mathrm{N}$ (de onbalanskracht zelf is maar 2,11 N: resonantie vergroot ze honderd keer).

c Welk buigmoment en welke spanning geeft dat aan de voet ($W = 221\,\mathrm{cm}^3$, hoofdstuk 12)? Hoeveel wisselingen per dag? Waarom is dat een probleem, ook al is de spanning klein?

> $M = kX\,L = 2528\,\mathrm{N\,m}$, $\sigma = M/W = 11{,}5\,\mathrm{MPa}$ heen en weer. Bij 1,03 Hz zijn dat 89 254 wisselingen per dag. Staal houdt zulke kleine spanningen op zich goed, maar niet in een las of rond een boutgat, waar de spanning plaatselijk veel hoger is: vermoeiing telt de wisselingen (hoofdstuk 12 en 46). Daarom mag de rotor daar niet urenlang hangen.

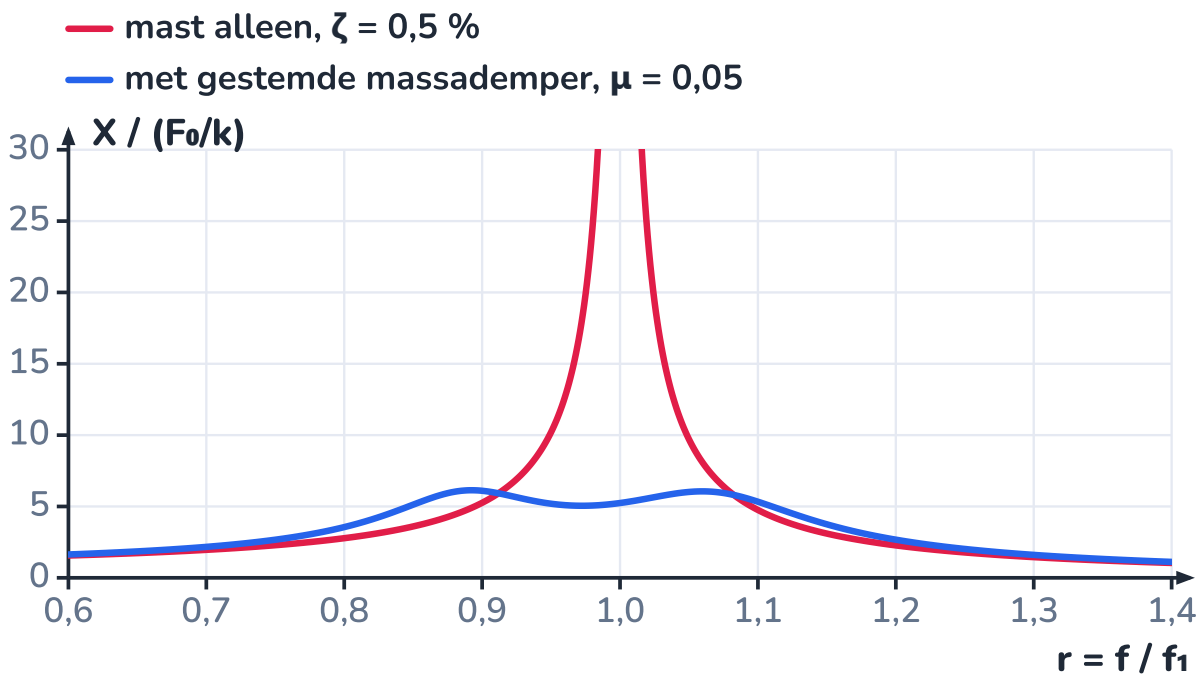
Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

11.13 Een gestemde massademper voor de mast

Uitdagen · 8 · Analyseren · 45 min

Een gestemde massademper is een kleine massa $m_\mathrm{d} = \mu m$ aan een veer met demper, bovenin de mast. De regels van Den Hartog geven de beste afstemming: $f_\mathrm{d} = f_1/(1+\mu)$ en $\zeta_\mathrm{d} = \sqrt{3\mu/(8(1+\mu)^3)}$; de hoogste amplitude van de mast wordt dan ongeveer $\sqrt{1 + 2/\mu}$ keer de statische. De figuur is berekend met twee vrijheidsgraden (mast en demper).



Met de demper splitst de scherpe piek in twee lage bulten.

a Kies $\mu = 0{,}05$. Bereken de massa, de frequentie en de veerconstante van de demper, en ζ_d.

✓ $m_\mathrm{d} = 0{,}05 \cdot 233{,}5 = 11{,}7\,\mathrm{kg}$; $f_\mathrm{d} = 1{,}033/1{,}05 = 0{,}984\,\mathrm{Hz}$; $k_\mathrm{d} = m_\mathrm{d}(2\pi f_\mathrm{d})^2 = 446\,\mathrm{N/m}$; $\zeta_\mathrm{d} = \sqrt{0{,}15/(8 \cdot 1{,}158)} = 0{,}127$.

b Hoe hoog is de piek met en zonder demper? Met welke 'gelijkwaardige' demping ζ komt dat overeen?

✓ Zonder: $1/(2\zeta) = 100$. Met: $\sqrt{1 + 2/0{,}05} = 6{,}4$ (de berekende kromme: 6,1). Dat is alsof de mast een demping $\zeta \approx 1/(2 \cdot 6{,}1) = 0{,}081$ had: 16 keer meer.

c Een slinger in de mast kan als demper dienen. Hoe lang moet hij zijn? Past dat?

✓ $L = g/(2\pi f_\mathrm{d})^2 = 0{,}257\,\mathrm{m}$: een slinger van een kwart meter, met 12 kg, past in de gondel of bovenin de buis (binnendiameter 23 cm is krap; eerder een veer met een glijdende massa).

d Waarom werkt de demper alleen rond één frequentie, en waarom is dat voor deze mast toch nuttig?

✓ Buiten zijn afstemfrequentie beweegt de demper nauwelijks en neemt hij geen energie weg. Maar het probleem van de mast zit net bij f_1: de stilstaande rotor in een storm en het doorlopen van de resonantie. Daarvoor helpt een gestemde demper veel, zoals op de Millennium Bridge en in de wolkenkrabber Taipei 101 (een slinger van 660 ton tussen de 87e en de 92e verdieping).

11.14 Onderzoek: de slinger bij grote uitwijking

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

De vergelijking $\ddot{\theta} = -(g/L)\sin\theta$ heeft geen oplossing met elementaire functies.

a Schrijf een programma dat met Heun de periode berekent voor een uitwijking θ_0 (tip: de tijd tot θ voor het eerst nul wordt, is een kwart periode).

Bijvoorbeeld:

```
import math
g, L = 9.81, 1.00

def periode(th0_graden, h=1e-4):
    """Heun op th'' = -(g/L) sin th vanuit rust; de tijd tot th voor het eerst door nul gaat is een
kwart periode."""
    th, w, t = math.radians(th0_graden), 0.0, 0.0
    while th > 0:
        a1 = -g / L * math.sin(th)
        thp, wp = th + h * w, w + h * a1
        a2 = -g / L * math.sin(thp)
        th_nieuw, w = th + h / 2 * (w + wp), w + h / 2 * (a1 + a2)
        if th_nieuw <= 0:                                    # lineair interpoleren tot het nulpunt
            t += h * th / (th - th_nieuw)
            break
        th, t = th_nieuw, t + h
    return 4 * t

T0 = 2 * math.pi * math.sqrt(L / g)
for a in (5, 10, 20, 30, 45, 60, 90):
    print(f"{a:2d} graden: T/T0 = {periode(a) / T0:.4f}   benadering {1 + math.radians(a)**2 /
16:.4f}")
```

Echte uitvoer:

```
 5 graden: T/T0 = 1.0005   benadering 1.0005
10 graden: T/T0 = 1.0019   benadering 1.0019
20 graden: T/T0 = 1.0077   benadering 1.0076
30 graden: T/T0 = 1.0174   benadering 1.0171
45 graden: T/T0 = 1.0400   benadering 1.0386
60 graden: T/T0 = 1.0732   benadering 1.0685
90 graden: T/T0 = 1.1803   benadering 1.1542
```

b Bereken T/T_0 voor 5° tot 90° en vergelijk met $1 + \theta_0^2/16$. Tot welke hoek wijkt de reeks minder dan 0,1 % af?

De reeks $1 + \theta_0^2/16$ mist de volgende term $\frac{11}{3072}\theta_0^4$; die wordt 0,1 % bij $\theta_0 \approx 42^\circ$. Tot daar volstaat de reeks; bij 90° zit ze 2,2 % te laag.

c Toon met energiebehoud dat $T = 4\int d\theta/\dot\theta$ van 0 tot θ_0, met $\dot\theta = \sqrt{(2g(\cos\theta - \cos\theta_0)/L)}$. Waarom is die integraal numeriek lastig?

$\frac{1}{2}mL^2\dot\theta^2 = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0)$, dus $\dot\theta$ zoals gegeven; een kwart periode is $\int_0^{\theta_0} d\theta/\dot\theta$. Bij $\theta \to \theta_0$ gaat $\dot\theta$ naar nul en de integrand naar oneindig (integreerbaar, maar een trapeziumregel faalt aan de rand; een substitutie $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2)\sin u$ maakt ze glad).

d Een slingeruurwerk loopt met 5° uitwijking goed. Hoeveel seconden per dag loopt het achter als de uitwijking 6° wordt?

T/T_0 stijgt van $1 + (0{,}0873)^2/16 = 1{,}000476$ naar $1 + (0{,}1047)^2/16 = 1{,}000685$: $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ trager, of $86\,400 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-4} = 18\,\text{s}$ per dag. Daarom houdt een uurwerk zijn uitwijking constant.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Programma	Heun correct voor een tweedeordesysteem; nulpunt geïnterpoleerd; kleine stap.
Resultaten	Tabel met T/T_0; vergelijking met de reeks; grens van 0,1 % gevonden.
Afleiding	Energiebehoud correct; de singulariteit bij $\theta = \theta_0$ benoemd.
Toepassing	Verschil in periode omgezet naar seconden per dag.

11.15 Ontwerp: een trillingsopnemer voor de gondel

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 50 min

Een trillingsopnemer is zelf een massa aan een veer in een behuizing. Beweegt de behuizing met $y = Y\cos\omega t$, dan beweegt de massa ten opzichte van de behuizing met amplitude $Z = Y\dfrac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$. De gondel trilt tussen 0,5 en 15 Hz.

a Toon dat voor $r \gg 1$ geldt $Z \approx Y$ (de opnemer meet de uitwijking) en voor $r \ll 1$ geldt $Z \approx Y\omega^2/\omega_\mathrm{n}^2$ (hij meet de versnelling).

$r \gg 1$: de noemer $\approx r^2$, dus $Z \approx Y$: de massa blijft stil in de ruimte en de behuizing beweegt eromheen (een seismometer). $r \ll 1$: de noemer ≈ 1, dus $Z \approx r^2 Y = Y\omega^2/\omega_\mathrm{n}^2 = a/\omega_\mathrm{n}^2$: de uitwijking van de massa is evenredig met de versnelling.

b Welk type kies je voor de gondel? Met $\zeta = 0{,}7$: hoe hoog moet f_n minstens zijn opdat de fout onder 5 % blijft tot 15 Hz?

Een seismometer voor 0,5 Hz zou f_n ver onder 0,5 Hz vragen: groot en fragiel. Dus een versnellingsmeter. Met $\zeta = 0{,}7$ zakt $1/\sqrt{(1-r^2)^2 + (1{,}4r)^2}$ onder 0,95 bij $r = 0{,}59$: $f_\mathrm{n} \geq 15/0{,}59 = 25\,\mathrm{Hz}$.

c Waarom is $\zeta = 0{,}7$ een gunstige keuze?

Bij $\zeta \approx 0{,}7$ blijft de versterking het langst vlak (geen resonantiepiek) en is de faseverschuiving bijna evenredig met de frequentie: een vorm van het signaal komt ongeschonden door. Om dezelfde reden heeft een Butterworth-filter van de tweede orde die demping.

d Een MEMS-versnellingsmeter heeft een eigenfrequentie van enkele kHz. Welke andere eisen stel je (bereik, bemonstering, montage)?

Bereik: de trilling van een paar tienden m/s² plus schokken (±2 g volstaat). Bemonstering: minstens twee keer de hoogste frequentie die je wil zien, in de praktijk 100 à 200 per seconde, met een antialiasfilter. Montage: stijf (geschroefd, niet geplakt op een dun plaatje met een eigen resonantie). Verder: temperatuur van −20 tot +50 °C, afgeschermde kabel, drie assen (voor-achter, zijwaarts, verticaal).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	Beide grensgevallen correct uit de formule.
Keuze	Versnellingsmeter gekozen; f_n berekend met $\zeta = 0{,}7$.
Demping	Vlakke amplitude en kleine faseverschuiving bij $\zeta \approx 0{,}7$ uitgelegd.
Eisen	Bereik, bemonstering (Nyquist), stijve montage, temperatuur, kabel.

11.16 Voetgangers als negatieve demping

Uitdagen · 9 · Analyseren · 40 min

Na de sluiting van de Millennium Bridge mat men dat een voetganger op een zijwaarts bewegende brug een kracht geeft die evenredig is met de snelheid van het dek, in de richting van die snelheid: ongeveer $c_\mathrm{p} = 300\,\mathrm{N\,s/m}$ per persoon. Neem een (fictieve) voetgangersbrug met een zijwaartse mode van 0,80 Hz, een modale massa van 120 t en $\zeta = 0{,}7\,\%$.

a Schrijf de bewegingsvergelijking met N voetgangers als een extra demper $-Nc_\mathrm{p}$. Bij welk aantal wordt de totale demping nul?

✓ $m\ddot{x} + (c - Nc_\mathrm{p})\dot{x} + kx = 0$. De demping verdwijnt als $Nc_\mathrm{p} = c = 2\zeta m\omega_0 = 4\pi\zeta fm$: $N = \dfrac{4\pi \cdot 0{,}007 \cdot 0{,}80 \cdot 120\,000}{300} = 28$ voetgangers.

b Hoeveel voetgangers mogen er op na het plaatsen van dempers die ζ op 20 % brengen?

✓ $N = 4\pi \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}80 \cdot 120\,000/300 = 804$: meer mensen dan er op de brug passen.

c In werkelijkheid staat niet elke voetganger op de plaats waar de mode het grootst is. Leg uit waarom het kritische aantal voor een mode met de vorm van een halve sinus ongeveer het dubbele wordt.

✓ Een voetganger op plaats s werkt met de modevorm $\varphi(s)$ zowel in de kracht (hij voelt de beweging φ) als in het effect op de mode (zijn kracht telt met φ): hij telt mee met φ^2. Het gemiddelde van $\sin^2$ over de overspanning is 1/2, dus zijn er twee keer zoveel mensen nodig (de formule van de ingenieurs van de brug heeft daarom 8π in plaats van 4π).

d Waarom is dit geen resonantie, maar zelfexcitatie, net als bij Tacoma Narrows?

✓ Er is geen uitwendige kracht met een vaste frequentie die de brug toevallig raakt: de voetgangers passen hun stappen aan de beweging aan, en hun kracht wordt groter naarmate de brug meer beweegt. Dat is terugkoppeling: de beweging voedt zichzelf, zoals de luchtkrachten bij Tacoma. Onder het kritische aantal dooft ze uit, erboven groeit ze tot de mensen niet meer kunnen stappen.

E EXPERT · DEEL E2 · MECHANICA EN CONSTRUCTIES

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 12

Sterkteleer

Wat er in een staaf, een balk en een mast gebeurt als je ze belast, en hoe dik ze moeten zijn

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

7× oefenen · 6× toepassen · 4× uitdagen · ± 505 min

K Krachten, beweging en constructies · M Materie en chemie · D Ontwerpen en maken



Een trekproef: de staaf wordt langer, dunner in het midden, en breekt. Uit die ene proef haal je de getallen waarmee dit hoofdstuk rekent.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

12.1 Spanning en rek

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een trekstang Ø 10 mm van 2,0 m draagt 8,0 kN.

a Bereken de spanning, de rek en de verlenging als de stang uit staal is (E = 210 GPa).

✓ $A = \pi \cdot 10^2/4 = 78{,}5\,\text{mm}^2$; $\sigma = 8000/78{,}5 = 101{,}9\,\text{MPa}$; $\varepsilon = 101{,}9/210\,000 = 4{,}85 \cdot 10^{-4}$; $\Delta L = \varepsilon L = 0{,}97\,\text{mm}$.

b Hoeveel verlengt ze als ze uit aluminium is (E = 70 GPa)?

✓ Zelfde spanning, drie keer de rek: $\Delta L = 2{,}91\,\text{mm}$.

c Welke kracht mag een stalen stang S235 van die diameter dragen met een veiligheidsfactor 1,5 op de vloeigrens?

✓ $\sigma_{\text{toel}} = 235/1{,}5 = 157\,\text{MPa}$; $F = 157 \cdot 78{,}5 = 12{,}3\,\text{kN}$.

12.2 E uit een meting

Oefenen · 6 · Analyseren · 15 min

Een staaldraad Ø 0,50 mm hangt 2,00 m lang aan een haak, met een kleine voorbelasting die hem strak trekt. Extra gewichten geven deze verlengingen:

a Bereken de doorsnede en bepaal E uit de helling van ΔL tegen F: F (N) = 10, 20, 30, 40; ΔL (mm) = 0,51, 1,01, 1,54, 2,03.

$A = \pi \cdot 0{,}5^2/4 = 0{,}1963\,\text{mm}^2$. Helling (rechte door de punten) $0{,}0509\,\text{mm/N}$; $E = L/(\text{helling} \cdot A) = 2000/(0{,}0509 \cdot 0{,}1963) = 200\,116\,\text{MPa}$, dus ±200 GPa: staal.

b Welke spanning heeft de draad bij 40 N? Waarom mag je die veilig gebruiken voor pianodraad, maar niet voor een koperdraad van dezelfde dikte?

$\sigma = 40/0{,}1963 = 204\,\text{MPa}$. Pianodraad (verenstaal) vloeit pas boven 1500 MPa; zacht koper vloeit al rond een honderdtal MPa en zou blijvend uitrekken: de meting geeft dan geen E meer.

12.3 Een tank hijsen

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

De drinkwatertank van het station (hoofdstuk 2) weegt vol 530 kg; leeg wordt hij bij de plaatsing aan vier draadstangen van staal klasse 4.6 (vloeigrens 240 MPa) gehesen, samen met een stalen frame: 130 kg. Rekenregels voor hijswerk: een dynamische factor 1,5 (schokken bij het optrekken) en een veiligheidsfactor 3 op de vloeigrens. Spanningsdoorsnede van de schroefdraad: M6 20,1 mm², M8 36,6 mm², M10 58,0 mm².

a Welke kracht komt op één stang? Welke spanningsdoorsnede is nodig, en welke maat kies je?

$F = 130 \cdot 9{,}81/4 = 319\,\text{N}$; met 1,5 en 3: $A_s \geq 319 \cdot 1{,}5 \cdot 3/240 = 6{,}0\,\text{mm}^2$. M6 (20,1 mm²) volstaat ruim.

b Mag je dezelfde stangen gebruiken om de volle tank te hijsen?

Vol: $530 \cdot 9{,}81/4 = 1300\,\text{N}$ per stang, vereiste $A_s = 24{,}4\,\text{mm}^2$: M6 is te klein, M8 (36,6 mm²) zou volstaan. Toch hijs je een volle tank beter niet: het water klotst (een grotere dynamische last dan de factor 1,5 dekt), het zwaartepunt verschuift, en 530 kg boven mensen is een onnodig risico.

12.4 Een T-profiel

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Een T-profiel heeft een flens van 100 × 10 mm bovenaan en een lijf van 10 × 90 mm eronder (totale hoogte 100 mm).

a Zoek de hoogte van het zwaartepunt boven de onderkant.

$$\bar{y} = \frac{1000 \cdot 95 + 900 \cdot 45}{1900} = 71{,}32\,\text{mm}.$$

b Bereken I om de horizontale as door het zwaartepunt met de verschuivingsstelling.

$I = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + 1000 \cdot (95 - 71{,}32)^2 + \frac{10 \cdot 90^3}{12} + 900 \cdot (45 - 71{,}32)^2 = 1\,800\,044\,\text{mm}^4$ $(180\,\text{cm}^4)$.

c Bereken W voor de bovenkant en de onderkant. Waar treedt de grootste buigspanning op, en is dat bij een balk op twee steunen trek of druk?

$W_{\text{boven}} = I/28{,}68 = 62\,754\,\text{mm}^3$, $W_{\text{onder}} = I/71{,}32 = 25\,240\,\text{mm}^3$. De grootste spanning zit in de verste vezel: onderaan, in het lijf. Bij een balk op twee steunen is dat trek. Met de flens naar onder draai je het om: dan zit de grootste spanning (druk) bovenaan in het dunne lijf, dat kan plooien.

12.5 Opleggingen tellen

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een aluminium koker 20 × 20 × 1,5 mm (I = 6373 mm⁴, E = 70 GPa) van 0,60 m draagt 50 N.

a Bereken de grootste doorbuiging als de koker (a) aan één kant ingeklemd is met de last aan het vrije uiteinde, (b) op twee steunen ligt met de last in het midden, (c) aan beide kanten ingeklemd is met de last in het midden.

✓ $EI = 70\,000 \cdot 6373 = 4{,}46 \cdot 10^8\ \mathrm{N\,mm^2}$. (a) $FL^3/(3EI) = 8{,}07\ \mathrm{mm}$; (b) $FL^3/(48EI) = 0{,}504\ \mathrm{mm}$; (c) $FL^3/(192EI) = 0{,}126\ \mathrm{mm}$.

b Welke factor ligt er tussen (a) en (c)? Wat leer je daaruit voor het ontwerp van een frame?

✓ Factor 64. Stijve verbindingen (hoekplaatjes, lassen) en een tweede steunpunt maken een frame veel stijver dan dikkere profielen: daarom kreeg het kasframe hoekplaatjes en diagonalen.

12.6 Knik in vier gevallen

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Een aluminium koker 20 × 20 × 1,5 mm (A = 111 mm², I = 6373 mm⁴, E = 70 GPa, Rp0,2 = 170 MPa) van 1,0 m staat op druk.

a Bereken de kniklast van Euler voor de vier gevallen van de tabel.

✓ L_k = 2000 mm: F_k = 1101 N; L_k = 1000 mm: F_k = 4403 N; L_k = 700 mm: F_k = 8986 N; L_k = 500 mm: F_k = 17 612 N.

b Bereken de kracht waarbij de koker zou vloeien (A · Rp0,2). Voor welk geval is Euler niet meer te vertrouwen? Waarom?

✓ $111 \cdot 170 = 18\,870\ \mathrm{N}$. Bij beide uiteinden ingeklemd ($L_k = 500\ \mathrm{mm}$) geeft Euler bijna evenveel als de vloeikracht: $\bar{\lambda} = 1{,}04$, rond 1, waar onvolkomenheden het meest wegen. Dan geldt de knikkromme: het echte draagvermogen ligt duidelijk onder beide getallen.

12.7 Waar of niet waar?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Beoordeel elke uitspraak en verklaar in één of twee zinnen.

a (a) S355 buigt minder door dan S235 onder dezelfde last. (b) Een buis is sterker bij buiging dan een volle staaf met dezelfde massa. (c) De neutrale lijn ligt altijd in het midden van de hoogte.

✓ (a) Niet waar: E is gelijk, dus ook de doorbuiging; S355 houdt alleen meer spanning. (b) Waar: het materiaal ligt verder van de neutrale lijn, I en W zijn groter. (c) Niet waar: ze gaat door het zwaartepunt van de doorsnede, bij een T-profiel dus dichter bij de flens.

b (d) Een staaf die twee keer zo lang is, knikt bij de helft van de kracht. (e) Een veiligheidsfactor 1,5 betekent dat het onderdeel 1,5 keer te zwaar is. (f) Een bros materiaal krijgt een grotere veiligheidsfactor.

✓ (d) Niet waar: bij een kwart (L^2 in de noemer). (e) Niet waar: het is een marge voor de spreiding van lasten, materiaal en model; zonder die marge zou het onderdeel in een ongunstig geval falen. (f) Waar: het waarschuwt niet door te vervormen en is gevoeliger voor krassen en spanningspieken.

12.8 Eigen meting: een lat als uitkraging

Toepassen · 7 · Labo · 45 min

Klem een lat met één uiteinde vast aan een tafel, zodat 0,80 m uitsteekt. Hang gewichten aan het vrije uiteinde en meet de doorbuiging. Meet b en h van de lat op drie plaatsen.

a Voorspel met δ = FL³/(3EI) en E = 11 GPa de doorbuiging voor 0,2 en 0,5 kg. Meet daarna voor vijf massa's.

✓ Voor een lat van 12 × 45 mm: $I = 6480\,\text{mm}^4$, $\delta/F = 800^3/(3 \cdot 11\,000 \cdot 6480) = 2{,}39\,\text{mm/N}$: bij 0,2 kg 4,7 mm, bij 0,5 kg 11,7 mm.

b Bepaal E uit de helling. Vergelijk met de proef van het handboek (lat op twee steunen).

✓ $E = L^3/(3 \cdot \text{helling} \cdot I)$. Verwacht een waarde tussen 9 en 12 GPa; de balk op twee steunen gaf ±10,5 GPa.

c Waarom geeft een uitkraging vaak een te kleine E? Hoe verbeter je de opstelling?

✓ Een klem houdt de lat nooit helemaal vast: ze draait een beetje, en die hoek wordt aan het uiteinde vermenigvuldigd met L. De lat lijkt dan slapper (kleinere E). Beter: een lange, stijve klem met twee klemmen achter elkaar, of de verplaatsing ook vlak bij de klem meten en aftrekken.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Voorspelling	Formule correct met I = bh³/12 en L tot het aangrijpingspunt; eenheden.
Meting	Vijf punten, nul gecontroleerd na ontlasten, lineair gebied.
Verwerking	E uit de helling, niet uit één punt; vergelijking met de balk op twee steunen.
Kritiek	Inklemming niet perfect (de lat draait een beetje in de klem), eigen gewicht, afleesfout, h³.

12.9 Een geprinte sensorhouder

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De sensorhouder SH-1 van de meetkas (hoofdstuk 32 van F) is in PETG geprint: een arm van 6 mm breed en 5 mm hoog draagt een ring op 50 mm van de koker. De sensor zelf weegt bijna niets, maar bij het water geven stoot iemand er met 20 N tegen, aan de ring, loodrecht op de arm. Rekenwaarde voor geprint PETG: 40 MPa langs de lijnen, 20 MPa tussen de lagen.

a Bereken het moment aan de voet van de arm en de spanning als de stoot (a) in de richting van de 5 mm, (b) in de richting van de 6 mm werkt.

✓ $M = 20 \cdot 50 = 1000\,\text{N mm}$. (a) $W = 6 \cdot 5^2/6 = 25\,\text{mm}^3$: $\sigma = 40\,\text{MPa}$. (b) $W = 5 \cdot 6^2/6 = 30\,\text{mm}^3$: $\sigma = 33\,\text{MPa}$.

b De arm is liggend geprint, zodat de lagen evenwijdig aan de arm lopen. Welke sterkte geldt dan? Is de arm sterk genoeg met een veiligheidsfactor 2?

✓ Liggend geprint lopen de lijnen langs de arm: de buigspanning werkt langs de lijnen, dus 40 MPa. Met n = 2 mag de spanning hoogstens 20 MPa zijn: de arm is twee keer te zwak. (Staand geprint zou buiging de lagen uit elkaar trekken: dan geldt 20 MPa en breekt hij bij de eerste stoot.)

c Hoe hoog moet de arm zijn (breedte 6 mm) voor een spanning van hoogstens 20 MPa? Welke andere oplossingen zijn er?

✓ $W = bh^2/6 \geq 1000/20 = 50\,\text{mm}^3$, dus $h \geq \sqrt{6 \cdot 50/6} = 7{,}07\,\text{mm}$: kies 7,5 mm. Of: de steunwig groter maken (kortere arm), een ribbe onder de arm, of de ring zo plaatsen dat een stoot hem opzij duwt in plaats van de arm te buigen.

12.10 Een trekproef verwerken

Toepassen · 7 · Analyseren · 30 min

Een proefstaaf aluminium (Ø 10,0 mm, meetlengte 50,0 mm) wordt uitgetrokken. De extensometer geeft (voorbeeldmeting; de laatste kolom is het moment van de breuk):

F (kN)	3,14	6,28	9,42	12,57	13,74	14,53	15,32	16,10	16,89	17,67	18,06	15,71
ΔL (mm)	0,029	0,057	0,086	0,119	0,147	0,193	0,301	0,551	1,126	2,405	3,527	5,000

a Reken om naar spanning en rek en teken het spanning-rekdiagram.

✓ $A_0 = 78{,}54\,\text{mm}^2$; $\sigma = F/A_0$ en $\varepsilon = \Delta L/50$. De eerste punten: 40 MPa bij 0,057 %, 120 MPa bij 0,171 %.

b Bepaal E uit het rechte begin, Rp0,2 met de verschoven rechte, Rm en de rek bij breuk.

✓ $E = 40/(0{,}0571/100) \approx 70\,\text{GPa}$ (uit de eerste punten). $R_{p0,2}$: de rechte $\sigma = E(\varepsilon - 0{,}2\,\%)$ snijdt de kromme bij ±190 MPa. $R_m = 230\,\text{MPa}$ (de grootste kracht, 18,06 kN). Rek bij breuk: ±10 % (het elastische deel, 0,3 %, veert bij de breuk terug).

c Voldoet het materiaal aan de minimumeisen voor 6063-T6 (Rp0,2 ≥ 170 MPa, Rm ≥ 215 MPa)?

✓ Ja: 190 ≥ 170 en 230 ≥ 215 MPa. Het certificaat van een leverancier vermeldt zulke meetwaarden per lot.

12.11 Waarom het kasframe sleufgaten heeft

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Een aluminium koker van het kasframe (20 × 20 × 1,5 mm, 1,20 m, A = 111 mm², I = 6373 mm⁴) wordt tussen twee stijve steunen vastgezet bij −5 °C. In de zomer wordt hij 45 °C. Uitzettingscoëfficiënt 23·10⁻⁶ per K (hoofdstuk 6 van F).

a Hoeveel zou de koker vrij langer worden? Welke spanning ontstaat als hij niet mag uitzetten?

✓ $\Delta L = \alpha L \Delta T = 23 \cdot 10^{-6} \cdot 1200 \cdot 50 = 1{,}38\,\text{mm}$ (hoofdstuk 6 van F: 1,4 mm). Belet: $\sigma = E\alpha\Delta T = 70\,000 \cdot 23 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 80{,}5\,\text{MPa}$, onafhankelijk van de lengte!

b Welke drukkracht is dat? Vergelijk met de kniklast (scharnierend, 1,20 m). Wat gebeurt er?

✓ $F = \sigma A = 8936\,\text{N}$, tegenover $F_k = \pi^2 EI/L^2 = 3058\,\text{N}$: de koker knikt al bij een derde van de opwarming. Daarom zit het frame in het midden vast en hebben de uiteinden sleufgaten: dan kan het uitzetten zonder kracht.

12.12 Habitat: flens en fundering van de windturbinemast

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

De mast (buis 244,5 × 5,0 mm, 12,0 m) staat met een voetflens op 8 ankerbouten M20 klasse 8.8 op een steekcirkel van Ø 340 mm, gelijk verdeeld (de eerste op 22,5° van de windrichting). Karakteristieke lasten aan de voet: $M = 30{,}3\,\text{kN m}$, $V = 3{,}55\,\text{kN}$, gewicht mast en gondel $4{,}95\,\text{kN}$. Bout M20: spanningsdoorsnede 245 mm², treksterkte 800 MPa; de Eurocode laat $0{,}9 \cdot 800 \cdot 245/1{,}25$ toe. Beton: 24 kN/m³.

a Toon dat voor n bouten op een cirkel de grootste boutkracht $F = M\,d_{max}/\sum d_i^2$ is (d: afstand tot de as door het midden, loodrecht op de wind). Bereken ze met $M_{Ed} = 1{,}5\,M$ en vergelijk met het toegelaten.

✓ Onderstel dat de flens draait om de as door het midden: de rek (en kracht) in bout i is evenredig met d_i: $F_i = c\,d_i$. Momentenevenwicht: $M = \sum F_i d_i = c \sum d_i^2$, dus $F_{max} = M d_{max}/\sum d_i^2$. Met 8 bouten is $\sum d_i^2 = 4R^2$ en $d_{max} = R \sin 67{,}5°$: $F = 45{,}5 \cdot 0{,}1571/0{,}1156 = 61{,}8\,\text{kN}$, tegenover $0{,}9 \cdot 800 \cdot 245/1{,}25 = 141\,\text{kN}$: 44 % benut.

b Een betonblok van 2,0 × 2,0 × 1,0 m of 2,5 × 2,5 × 1,0 m: bereken voor beide de kantelveiligheid om een onderrand en de excentriciteit e = M/N van de kracht op de grond (moment aan de onderkant van het blok).

Moment aan de onderkant: $30{,}3 + 3{,}55 \cdot 1{,}0 = 33{,}9\,\text{kN m}$. Blok 2,0 m: $N = 101\,\text{kN}$, kantelveiligheid $N \cdot B/2/M = 3{,}0$, $e = 0{,}336\,\text{m}$ (groter dan $B/6 = 0{,}33\,\text{m}$: een rand komt los). Blok 2,5 m: $N = 155\,\text{kN}$, veiligheid 5,7, $e = 0{,}219\,\text{m} < 0{,}42\,\text{m}$.

c Welk blok kies je? Bereken de grootste gronddruk N/A · (1 + 6e/B).

Het blok van 2,5 m: de hele grond blijft gedrukt. Grootste gronddruk $155/6{,}25 \cdot (1 + 6 \cdot 0{,}219/2{,}5) = 37{,}8\,\text{kPa}$: klein tegenover wat een gewone bodem draagt (±100 kPa en meer). Het blok is dus niet nodig voor de gronddruk, wel tegen kantelen en om de mast stijf in te klemmen (een fundering die kantelt, verlaagt f_1).

d Waarom worden ankerbouten van een windturbinemast voorgespannen? Denk aan hoofdstuk 11.

De buigende last wisselt honderden miljoenen keren (1P, 3P, windstoten). Een voorgespannen bout houdt de flens altijd tegen het beton gedrukt: de wisselende kracht verandert dan vooral de druk tussen flens en beton en nauwelijks de kracht in de bout. Zonder voorspanning zou de bout de hele wisseling zien, en vermoeiing zou hem na enkele jaren breken; bovendien draait hij los.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Bouten	Formule afgeleid (lineaire verdeling, momentenevenwicht); boutkracht berekend en getoetst.
Fundering	Moment aan de onderkant met V · 1,0 m; kantelveiligheid en excentriciteit voor beide blokken.
Keuze	Blok met e binnen B/6 (geen opwippende rand) gekozen; gronddruk berekend.
Inzicht	Voorspanning tegen vermoeiing en losdraaien door de wisselende belasting (1P, 3P) uitgelegd.

12.13 Een persoon wandelt over de vloerbalk

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Gebruik de functie balk() uit balk.py van het handboek (reservoir midden op 1,00 m).

a Laat de persoon (785 N) in stappen van 5 cm van 0,20 m tot 2,20 m wandelen en bewaar telkens het grootste moment en de grootste doorbuiging.

Bijvoorbeeld:

```
resultaten = []
for xp in np.arange(0.2, 2.21, 0.05):
    RA, RB, V, M, w = balk(eigen + reservoir, [(80 * 9.81, xp)])
    resultaten.append((M.max(), w.max(), xp))
print(max(resultaten))                          # grootste moment
print(max(resultaten, key=lambda r: r[1]))     # grootste doorbuiging
```

b Waar is het moment het grootst, en waar de doorbuiging? Waarom liggen die plaatsen niet op dezelfde plek?

Het grootste moment (842 N·m) krijg je met de persoon op 1,10 m, de grootste doorbuiging (3,41 mm) met de persoon op 1,20 m. Het moment piekt waar de persoon het reservoir 'bijstaat' (samen het grootste moment in één doorsnede); de doorbuiging is een integraal over de hele balk en is het grootst als de persoon dicht bij het midden staat.

12.14 Ontwerp: de lichtste stijve balk

●●● Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 45 min

Je zoekt een balk met een gegeven lengte en een gegeven buigstijfheid EI, zo licht mogelijk. Neem aan dat de doorsnede een vaste vorm heeft (bv. een vierkante koker met wand = 5 % van de zijde) en alleen groter of kleiner geschaald wordt.

a Toon dat voor een geschaalde vorm $I = cA^2$ geldt, en dat de massa bij gegeven EI evenredig is met $\rho/\sqrt{E}$.

✓ Schaal je alle maten met een factor s, dan is $A \propto s^2$ en $I \propto s^4$, dus $I = cA^2$. Gegeven $EI = EcA^2$: $A = \sqrt{EI/(cE)} \propto 1/\sqrt{E}$, en de massa $\rho A L \propto \rho/\sqrt{E}$. Hoe groter $\sqrt{E}/\rho$, hoe lichter.

b Bereken de 'materiaalindex' $\sqrt{E}/\rho$ voor staal, aluminium, vuren en koolstofvezelcomposiet. Welk materiaal geeft de lichtste stijve balk?

✓ staal: 1,85; aluminium: 3,10; vuren: 7,90; koolstofvezelcomposiet (langs de vezel): 6,25 (in $\sqrt{\text{GPa}}$ per 1000 kg/m³). Hout en koolstofvezel geven de lichtste stijve balk; staal is per kilogram het slechtst.

c Waarom zie je dan toch zoveel stalen balken? Noem drie andere eisen.

✓ Een houten balk met dezelfde stijfheid is veel dikker (ruimte, hoogte van de vloer); staal is sterker per volume, goedkoop, makkelijk te verbinden (lassen, bouten), niet brandbaar, recycleerbaar en voorspelbaar. Koolstofvezel is duur en moeilijk te verbinden. De keuze is een afweging van meerdere eisen (hoofdstuk 28: Ashby-diagrammen).

d Waarom geldt voor een trekstaaf (gegeven EA) een andere index, E/ρ?

✓ Een trekstaaf rekt $FL/(EA)$: voor gegeven EA is $A \propto 1/E$, dus massa $\propto \rho/E$. Daar is de vorm onbelangrijk, en wint koolstofvezel ruim; staal en aluminium zijn dan gelijkwaardig (E/ρ bijna gelijk).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	I = cA² voor een geschaalde vorm; massa ∝ ρA ∝ ρ/√E.
Tabel	Indices correct; hout en koolstofvezel winnen, staal verliest.
Afweging	Afmetingen (hout wordt dik), sterkte, prijs, verbindingen, brandveiligheid, duurzaamheid.
Trekstaaf	EA lineair in A: massa ∝ ρ/E.

12.15 Knik met een kromme staaf

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 40 min

Geen staaf is perfect recht. De steigerbuis van de weermast (Ø 48,3 × 3,2 mm, 6,0 m, $F_\text{k} = 6670\,\text{N}$) heeft een beginkromming met pijl $e_0 = L/300 = 20\,\text{mm}$ in het midden.

a Een drukkracht N vergroot de pijl: $e = e_0/(1 - N/F_\text{k})$. Leg uit waarom (tip: het moment $N\,e$ buigt de staaf verder).

✓ De kromme staaf onder N krijgt een moment $N(e_0 + w)$, dat ze verder buigt. Met een sinusvorm is de extra uitbuiging per stap een factor N/F_k van de vorige: een meetkundige reeks $e_0(1 + N/F_\text{k} + (N/F_\text{k})^2 + \dots) = e_0/(1 - N/F_\text{k})$. Bij $N \to F_\text{k}$ groeit de pijl zonder grens.

b Bereken de grootste spanning $\sigma = N/A + Ne/W$ bij de werkelijke drukkracht (1313 N). $A = 453\,\text{mm}^2$, $W = 4797\,\text{mm}^3$.

✓ $N/F_\text{k} = 0{,}197$; $e = 20/(1 - 0{,}197) = 24{,}9\,\text{mm}$; $\sigma = 1313/453 + 1313 \cdot 24{,}9/4797 = 9{,}7\,\text{MPa}$: ver onder 235.

c Bij welke kracht bereikt die spanning de vloeigrens (235 MPa)? Vergelijk met Euler en met de knikkromme van het handboek.

Numeriek (of met de formule van Perry): de vloeigrens wordt bereikt bij $N \approx 5930\,\mathrm{N}$, iets onder Euler (6670 N) en dicht bij knikkromme c (5938 N). De knikkrommen van de Eurocode zijn precies zo afgeleid: een staaf met een beginkromming en restspanningen die vloeit in de verste vezel.

12.16 Een tapse mast

Uitdagen · 9 · Programmeren · 45 min

De spanning in de windturbinemast is onderaan het grootst en bovenaan bijna nul (handboek). Een tapse buis, onder breed en boven smal, zou materiaal besparen. Wanddikte 5 mm, lasten als in het handboek (1,5 kN op de kop, q_p c_f = 700 N/m² op de mast, factor 1,5).

a Schrijf een programma dat voor een buis met een lineair veranderende diameter het moment, de spanning, de doorbuiging van de kop en de massa berekent (w'' = M/(EI(z)), twee keer integreren).

Bijvoorbeeld:

```
import math
import numpy as np
L, E, t = 12.0, 210e9, 0.005
z = np.linspace(0, L, 1201)
w_wind, F_kop, m_top = 1000 * 0.7, 1500.0, 150.0


def integreer(y):
    return np.concatenate([[0.0], np.cumsum((y[1:] + y[:-1]) / 2 * np.diff(z))])


def mast(D_voet, D_kop):
    D = D_voet + (D_kop - D_voet) * z / L                  # tapse buis: diameter lineair
    I = np.pi / 64 * (D**4 - (D - 2 * t)**4)
    A = np.pi / 4 * (D**2 - (D - 2 * t)**2)
    M = F_kop * (L - z) + np.array([np.trapezoid(w_wind * D[i:] * (z[i:] - z[i]), z[i:]) for i in
range(len(z))])
    w = integreer(integreer(M / (E * I)))                   # w'' = M/(EI), w(0) = w'(0) = 0
    sigma = 1.5 * M / (I / (D / 2))
    w1 = integreer(integreer((L - z) / (E * I)))           # 1 N op de kop: vorm en stijfheid k =
1/w1(L)
    m_eff = m_top + np.trapezoid(7850 * A * (w1 / w1[-1])**2, z)
    f1 = math.sqrt(1 / w1[-1] / m_eff) / (2 * math.pi)
    return 7850 * np.trapezoid(A, z), sigma.max() / 1e6, w[-1] * 1000, f1

for Dv, Dk in ((0.2445, 0.2445), (0.30, 0.19), (0.28, 0.14)):
    m, s, w, f1 = mast(Dv, Dk)
    print(f"voet {1000 * Dv:3.0f} mm, kop {1000 * Dk:3.0f} mm: {m:3.0f} kg, sigma {s:3.0f} MPa, kop
{w:3.0f} mm, f1 {f1:.2f} Hz")
```

Echte uitvoer:

```
voet 244 mm, kop 244 mm: 354 kg, sigma 206 MPa, kop 231 mm, f1 1.03 Hz
voet 300 mm, kop 190 mm: 355 kg, sigma 131 MPa, kop 163 mm, f1 1.24 Hz
voet 280 mm, kop 140 mm: 303 kg, sigma 141 MPa, kop 221 mm, f1 1.07 Hz
```

b Vergelijk de rechte buis 244,5 mm met een tapse buis van 300 naar 190 mm en van 280 naar 140 mm, ook op de eigenfrequentie (Rayleigh met de vorm onder een kopkracht).

> Met dezelfde massa (300 naar 190 mm) daalt de grootste spanning met een derde en wijkt de kop een derde minder uit: het staal zit onderaan, waar het moment het grootst is. Maar die mast is te stijf: f_1 = 1,24 Hz, boven de grens van 1,21 Hz uit hoofdstuk 11. De slankere tapse buis (280 naar 140 mm) is 14 % lichter dan de rechte, sterker (141 MPa), wijkt iets minder uit en blijft met 1,08 Hz onder 1P.

c Welke eisen moet je nog opnieuw controleren voor de tapse mast? Denk aan hoofdstuk 11.

> Plooien: onderaan is D/t = 56 voor 280 × 5 mm (meer dan 50): het onderste stuk krijgt 6 mm wand of een versterking. De eigenfrequentie (net gedaan). Verder de flens (groter), vermoeiing van de langsnaad, de productie (tapse masten worden uit plaat gerold en in de lengte gelast, vaak in stukken die in elkaar schuiven) en het transport.

12.17 Onderzoek: spaghetti knikken

Uitdagen · 8 · Onderzoeken · 50 min

Zet een staaf droge spaghetti rechtop op een keukenweegschaal en druk er langzaam van boven op tot ze uitbuigt. De grootste waarde op de weegschaal is de kniklast. Voorbeeldmeting (Ø 1,8 mm): lengte (mm) 100, 150, 200, 250 → kniklast (N) 1,51, 0,71, 0,37, 0,23.

a Welk verband verwacht je tussen kniklast en lengte? Zet log F uit tegen log L en bepaal de helling.

> Euler: $F \propto 1/L^2$, dus in een log-log-grafiek een rechte met helling −2. De meting geeft −2,06.

b Welke opleggingen heb je (onderaan op de weegschaal, bovenaan je vinger)? Bereken E van droge spaghetti.

> Beide uiteinden kunnen draaien maar niet opzij: $L_k = L$. $I = \pi \cdot 1{,}8^4/64 = 0{,}515\,\text{mm}^4$; $E = FL^2/(\pi^2 I)$, gemiddeld 2959 MPa (±3,0 GPa), een typische orde voor droge pasta.

c Waarom breekt spaghetti bijna altijd in drie of meer stukken, en niet in twee?

> Als de staaf op één plaats breekt, springen de twee helften plots terug. Die terugslag loopt als een buiggolf door elke helft en verhoogt de kromming plaatselijk: vaak boven de breukgrens, zodat een tweede breuk ontstaat. (Dat werd in 2005 met hogesnelheidsfilms aangetoond.)

d Ontwerp een eigen meting: welke lengtes, hoeveel herhalingen, hoe hou je de uiteinden scharnierend?

> Bijvoorbeeld: lengtes 80, 120, 160, 200 en 240 mm, telkens vijf staafjes; uiteinden in een kleine deuk in een stukje hout (scharnier); langzaam drukken; de hoogste waarde op de weegschaal noteren; gemiddelde en spreiding per lengte; log-log-grafiek met een rechte door de gemiddelden.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Verband	F ∝ 1/L² verwacht; helling in de log-log-grafiek ±−2.
Berekening	Kniklengte L (beide scharnierend benaderd); E uit F L²/(π² I) met I = πd^4/64.
Uitleg	Na de eerste breuk trillen de twee helften met een grote kromming (een golf van buiging): een tweede breuk.
Opzet	Minstens vier lengtes, drie herhalingen, uiteinden in een klein putje, langzaam belasten, de hoogste waarde noteren.

E EXPERT · DEEL E2 · MECHANICA EN CONSTRUCTIES

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 13

Vakwerken en constructieanalyse

Driehoek na driehoek: de kracht in elke staaf, met de hand, als matrix en als eindige elementen

Uitgewerkte oplossingen bij de 16 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 6× toepassen · 4× uitdagen · ± 550 min

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren · D Ontwerpen en maken



Acht spanten, ongeveer om de 0,60 m, dragen het dak van de woonmodule. Elke staaf is een lat van 45 mm dik: genoeg, omdat ze alleen trek of druk krijgt.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

13.1 Tellen

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Beoordeel elk vakwerk met m + r = 2k en met je gezond verstand.

a (a) Een driehoek op twee scharnieren. (b) Een vierkant met één diagonaal, op een scharnier en een rol. (c) Hetzelfde, maar de rol staat op een helling, zodat de lijn van haar reactie precies door het scharnier gaat.

(a) m + r = 3 + 4 = 7 > 6: één keer statisch onbepaald (uitwendig); de horizontale reacties hangen af van de stijfheid. (b) 5 + 3 = 8 = 2 · 4: statisch bepaald. (c) Telt ook 8, maar alle drie de reacties gaan door één punt (het scharnier): het vakwerk kan een klein beetje om het scharnier draaien. Een kritische vorm.

b (d) De Pratt-brug van het handboek zonder de verticaal U3L3. (e) Het Fink-spant met een extra knoop H midden in de onderrand en een verticaal van de nok naar H. (f) Het Fink-spant op twee scharnieren.

(d) m = 20, r = 3, k = 12: 23 < 24, een mechanisme. De bovenknoop U3 heeft dan alleen U2U3 en U3U4, die op één lijn liggen: hij kan op en neer bewegen. Een nulstaaf is dus niet overbodig. (e) Een knoop meer en twee staven meer (de verticaal, en de onderrand FG wordt FH + HG): m = 13, k = 8, r = 3, dus 16 = 16: bepaald. Zonder last in H is de verticaal een nulstaaf (twee staven op één lijn en een derde). (f) 11 + 4 = 15 > 14: één keer onbepaald. In de praktijk is dat bijna het model met een rol, omdat de onderrand de horizontale kracht zelf opneemt.

13.2 Een muurkraan

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

In de technische ruimte hangt een kleine muurkraan om de filters van de waterzuivering te wisselen: een horizontale arm van 1,20 m, scharnierend aan de muur, en een schuine schoor van het uiteinde naar een punt 0,90 m lager aan de muur. Aan het uiteinde hangt 2,0 kN.

a Teken de knoop aan het uiteinde vrij en bereken de krachten in arm en schoor. Welke is trek, welke druk?

Schoor van het uiteinde naar de muur: $\sin\theta = 0{,}9/1{,}5 = 0{,}6$. Verticaal: $S_{\text{schoor}} \cdot 0{,}6 = 2{,}0$ (de schoor duwt omhoog), dus $S_{\text{schoor}} = -3{,}33\,\text{kN}$ (druk). Horizontaal: de arm trekt het uiteinde naar de muur met $S_{\text{arm}} = 2{,}67\,\text{kN}$ (trek).

b Wat gebeurt er met de krachten als de schoor lager aan de muur komt (1,50 m)? En hoger (0,30 m)?

Lager bevestigd (1,50 m onder de arm) wordt de schoor steiler: $S_{\text{arm}} = 2{,}0 \cdot 1{,}2/1{,}5 = 1{,}6\,\text{kN}$, schoor $2{,}0 \cdot \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}5^2}/1{,}5 = 2{,}56\,\text{kN}$. Op 0,30 m onder de arm wordt ze bijna horizontaal: arm $8{,}0\,\text{kN}$, schoor $2{,}0 \cdot \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}3^2}/0{,}3 = 8{,}25\,\text{kN}$. Hoe platter de driehoek, hoe groter de krachten.

13.3 Nulstaven zoeken

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Gebruik de twee regels van het handboek.

a Welke staven van de Pratt-brug van het handboek zijn nulstaven als er alleen een last in L2 hangt? Werk van de rechterkant naar het midden.

De regels geven meteen twee nulstaven: in de onbelaste knoop L5 liggen L4L5 en L5L6 op één lijn, dus U5L5 = 0; in de onbelaste knoop U3 liggen U2U3 en U3U4 op één lijn, dus U3L3 = 0. Knoop na knoop verder (of met vakwerk.py) vind je voor een last in L2 als nulstaven: U1L1, U3L3, U5L5. In L1 hangt dan niets meer aan U1L1, en die is ook nul.

b Waarom mag je die staven toch niet weglaten? Geef twee redenen.

(1) Bij een andere belasting (een last in L1, L3 of L5) dragen ze wel. (2) Ze houden andere staven vast: zonder U3L3 kan U3 op en neer bewegen (een mechanisme), en de bovenrand U2U4 zou een twee keer zo grote kniklengte krijgen.

13.4 Eén staaf met een snede

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

De Howe-brug van het handboek (zelfde maten en lasten als de Pratt, maar de diagonalen stijgen naar het midden).

a Snij door het tweede vak (tussen x = 2 en 4 m). Welke drie staven snij je?

Bovenrand U1U2, diagonaal L1U2 en onderrand L1L2.

b Bereken de kracht in de diagonaal en in de bovenrand van dat vak. Vergelijk met de Pratt.

Dwarskracht in vak 2: $25 - 10 = 15\,\text{kN}$. De diagonaal L1U2 stijgt naar het midden; om de dwarskracht naar de linkersteun te brengen, duwt ze: $S = -15/0{,}6 = -25{,}0\,\text{kN}$ (druk; Pratt: +25 kN trek). Bovenrand: momenten om L1 (waar diagonaal en onderrand samenkomen): $M = 25 \cdot 2 = 50\,\text{kN m}$, dus $S = -50/1{,}5 = -33{,}3\,\text{kN}$. In de Pratt nam je momenten om L2: −53,3 kN. De randen van beide bruggen dragen hetzelfde moment, alleen op een iets andere plaats.

13.5 Trek of druk?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Voorspel zonder te rekenen, en verklaar met een van de redeneringen van het handboek.

a (a) de bovenrand van een balkon dat als vakwerk uit een gevel steekt; (b) de onderrand van het Fink-spant als er een zware windzuiging op het dak werkt; (c) de kabel van een tuibrug.

(a) Trek: een uitkraging buigt omgekeerd, boven trek en onder druk. (b) Druk: zuiging tilt het dak op, alsof de zwaartekracht omkeert; dan wisselen alle tekens (opdracht 13.9). (c) Trek: een kabel kan niets anders.

b (d) Een ontwerper wil de onderrand van het spant vervangen door een staalkabel. Is dat verstandig? (e) En de bovenrand?

(d) Niet zonder meer: bij windzuiging komt de onderrand op druk, en een kabel kan dat niet; hij zou slap hangen en het spant zou kunnen openklappen. Alleen met een eigengewicht dat altijd groter is dan de zuiging, of met extra verbanden. (e) Nee: de bovenrand is bijna altijd op druk en moet buigstijf zijn.

13.6 Van staafkracht naar profiel

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

De onderrand van de Pratt-brug draagt in het midden 53,3 kN trek; de bovenrand 60 kN druk over een vaklengte van 2,0 m (rekenwaarden). Staal S235.

a Welke doorsnede heeft de onderrand minstens nodig?

$A \geq 53\,300/235 = 227\,\text{mm}^2$: bijvoorbeeld een strip van 60 × 5 mm (300 mm²) of twee kleine hoekprofielen.

b Een koker 60 × 60 × 4 mm (met scherpe hoeken gerekend) als bovenrand: is hij veilig tegen knik (Lk = 2,0 m, knikkromme c)? En een volle vierkante staaf met dezelfde oppervlakte?

Koker: $A = 60^2 - 52^2 = 896\,\text{mm}^2$, $I = (60^4 - 52^4)/12 = 47{,}1\,\text{cm}^4$. Euler: $F_k = 244\,\text{kN}$; $Af_y = 211\,\text{kN}$; $\bar{\lambda} = 0{,}93$, knikkromme c: draagvermogen $123\,\text{kN}$, ruim boven 60 kN. Volle staaf van $\sqrt{896} = 29{,}9\,\text{mm}$: $I = 29{,}9^4/12 = 6{,}69\,\text{cm}^4$, $F_k = 35\,\text{kN}$: minder dan 60 kN, ze knikt al volgens Euler. Dezelfde hoeveelheid staal, als koker 7,0 keer stijver.

Toepassen

Toepassen — meerdere stappen, in een context

13.7 De paneelsteun met de hand

Toepassen · 7 · Rekenen · 30 min

De steun van het zonnepaneel uit hoofdstuk 5: knopen A (0; 0), B (−0,50; 0), C (0; 0,20), D (−0,50; 1,066) m; staven AC, CD, BD, AB, BC; scharnier in A, rol in B. Bij storm werkt in C en in D elk (214,3; 1,1) N (wind en gewicht samen).

a Met welke knoop begin je? Waarom?

Knoop D: er komen maar twee staven samen (CD en BD), en de last is bekend. Zonder reacties te kennen, kan je daar beginnen.

b Bereken knoop na knoop alle staafkrachten (zonder eerst de reacties).

D: BD is verticaal, CD heeft richting van C naar D $(-0{,}500;\ 0{,}866)$. $\sum F_x$ in D: de kracht van CD op D is $-S_{\mathrm{CD}}\hat{e}_{\mathrm{CD}}$; $-S_{\mathrm{CD}} \cdot (-0{,}500) + 214{,}3 = 0$ geeft $S_{\mathrm{CD}} = -428{,}7\,\mathrm{N}$. $\sum F_y$: $-S_{\mathrm{BD}} - S_{\mathrm{CD}} \cdot 0{,}866 + (1{,}1) = 0$ geeft $S_{\mathrm{BD}} = 372{,}4\,\mathrm{N}$. Dan C (drie staven, twee onbekend: AC en BC): $S_{\mathrm{BC}} = 461{,}7$, $S_{\mathrm{AC}} = -541{,}6\,\mathrm{N}$. Tot slot B of A: $S_{\mathrm{AB}} = -428{,}7\,\mathrm{N}$.

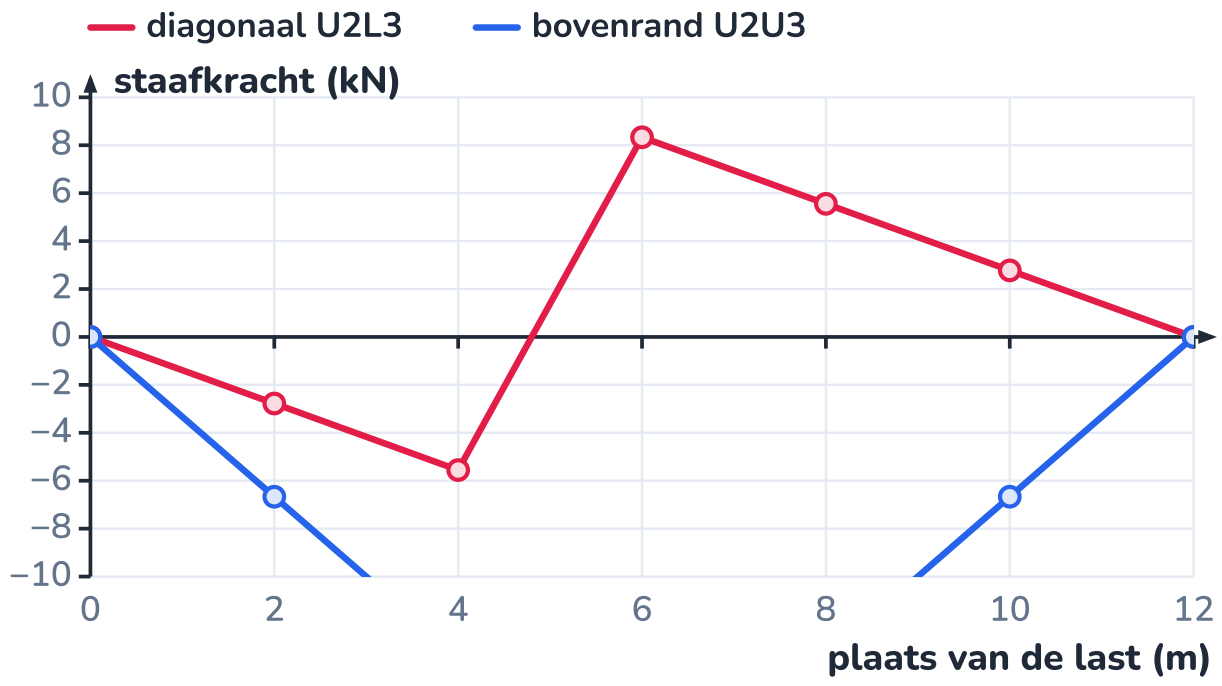
c Bereken de reacties en vergelijk alles met de uitvoer van hoofdstuk 5.

Reacties: $A_x = -429$, $A_y = 542$, $B_y = -544\,\mathrm{N}$, zoals in hoofdstuk 5 (daar: −429, 542 en −544 N): de achterste voet moet omlaag gehouden worden.

13.8 Een invloedslijn

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Gebruik de functie vakwerk() uit vakwerk.py met de Pratt-brug van het handboek (knopen, staven en steunen zoals in de figuur).



Invloedslijnen voor een last die over de onderknopen rijdt (de uitkomst van het programma).

a Laat één last van 10 kN van L1 naar L5 rijden en druk telkens de kracht in diagonaal U2L3 en in bovenrand U2U3 af.

Bijvoorbeeld:

```
for x_last in range(1, 6):                    # een last van 10 kN rijdt over de knopen L1 ... L5
    krachten, reacties = vakwerk(knopen, staven, steunen, {f"L{x_last}": (0, -10.0)})
    print(f"last in L{x_last}: diagonaal U2L3 {krachten[staven.index(('U2', 'L3'))]:6.2f} kN, "
          f"bovenrand U2U3 {krachten[staven.index(('U2', 'U3'))]:6.2f} kN")
```

Echte uitvoer:

```
last in L1: diagonaal U2L3  -2.78 kN, bovenrand U2U3  -6.67 kN
last in L2: diagonaal U2L3  -5.56 kN, bovenrand U2U3 -13.33 kN
last in L3: diagonaal U2L3   8.33 kN, bovenrand U2U3 -20.00 kN
last in L4: diagonaal U2L3   5.56 kN, bovenrand U2U3 -13.33 kN
last in L5: diagonaal U2L3   2.78 kN, bovenrand U2U3  -6.67 kN
```

b Teken de invloedslijnen. Wanneer is de diagonaal op trek, wanneer op druk? Waar moet een vrachtwagen staan voor de grootste kracht in U2U3?

De diagonaal U2L3 is op trek als de last rechts van het derde vak staat (L3 tot L5) en op druk als hij links staat (L1, L2): de dwarskracht in dat vak wisselt van teken. De bovenrand is altijd op druk, het meest met de last in het midden (L3): daar is het moment het grootst.

c Waarom is dat belangrijk voor een diagonaal die als slanke trekstaaf ontworpen is?

Een slanke trekstaaf (een strip, een stang) kan geen druk dragen: ze zou knikken zodra een zware last aan de verkeerde kant staat. Daarom krijgen de middelste vakken van spoorbruggen vaak gekruiste diagonalen of diagonalen die ook druk aankunnen.

13.9 Wind en asymmetrische sneeuw op het spant

Toepassen · 7 · Analyseren · 30 min

Een storm geeft zuiging op beide dakvlakken. Rekenwaarde (vereenvoudigd, als verticale last): $0{,}80\,\mathrm{kN/m^2}$ dakvlak omhoog. In deze combinatie telt het eigengewicht met factor 1,0 (het is gunstig) en de wind met 1,5; zonder sneeuw.

a Bereken de netto lijnlast op de bovenrand (kN per m horizontaal) en de knooplasten.

Zuiging: $0{,}80 \cdot 1{,}155 \cdot 0{,}60 = 0{,}554\,\mathrm{kN/m}$ omhoog; eigengewicht $0{,}416$ omlaag: netto $1{,}0 \cdot 0{,}416 - 1{,}5 \cdot 0{,}554 = -0{,}416\,\mathrm{kN/m}$ (min: omhoog). Knopen D, C, E: $1{,}5 \cdot -0{,}416 = -0{,}624\,\mathrm{kN}$; F en G blijven $2 \cdot 0{,}18 = 0{,}36\,\mathrm{kN}$ omlaag.

b Bereken de staafkrachten met vakwerk.py. Welke staven wisselen van teken tegenover het sneeuwgeval?

Krachten (kN): AD +1,15; DC +0,84; CE +0,84; EB +1,15; AF −1,00; FG −0,66; GB −1,00; DF +0,54; FC −0,12; CG −0,12; GE +0,54. Bovenrand wordt trek, onderrand druk, de korte diagonalen trek en de lange licht druk: alle tekens wisselen, want de netto last is omhoog gericht (de zuiging wint het van het eigengewicht).

c Wat betekent dat voor de onderrand (knik!) en voor de opleggingen?

De onderrand is maar 45 mm breed en wordt nu gedrukt over vakken van 2,0 m: zonder zijdelingse steun zou ze uit het vlak knikken. Het plafond (vastgeschroefd) of een langsregel houdt ze vast. De opleggingen moeten het spant naar beneden houden (0,71 kN omhoog per oplegging): verankeren met stalen hoeken of stormankers. Daarom is 'het dak blijft liggen door zijn gewicht' een gevaarlijke aanname.

13.10 Labo: een brug uit ijsstokjes

Toepassen · 7 · Labo · 100 min

Bouw in groep een vakwerkbrug van 50 cm overspanning uit hoogstens 60 ijsstokjes en houtlijm. Ze wordt in het midden belast met een emmer die je langzaam met zand vult, tot ze bezwijkt.

a Ontwerp de brug (Pratt, Howe of Warren) en bereken met vakwerk.py de staafkracht per newton last in elke staaf.

Voor een Warren met 4 vakken van 12,5 cm en 10 cm hoog: de randkracht in het midden is ongeveer M/h = (F/2 · 25 cm)/10 cm = 1,25 F; de schuine staven (F/2)/sin θ ≈ 0,6 F (per newton last).

b Meet vooraf: hoeveel trekkracht houdt één stokje (lijmnaad) en hoeveel drukkracht voor het knikt? Voorspel welke staaf eerst bezwijkt en bij welke last.

Typisch houdt een lijmnaad met een kleine overlapping enkele tientallen newton op trek, een stokje van 12 cm knikt bij enkele tientallen newton ($\pi^2 EI/L^2$ met E ±10 GPa, 2 × 10 mm doorsnede). De druk in de bovenrand beslist meestal: dubbele stokjes (een grotere I) of een kortere vaklengte helpen het meest.

c Test, noteer de bezwijklast en welke staaf of verbinding bezweek. Vergelijk met de voorspelling en verklaar de verschillen.

> ✓ Meestal bezwijkt een verbinding of knikt de bovenrand. Bruggen die hoger zijn, bezwijken later (M/h kleiner). Verschillen: knopen zijn stijf en excentrisch (momenten), stokjes zijn niet recht, de last grijpt niet precies in een knoop aan.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Ontwerp	Statisch bepaald vakwerk, schets met maten, krachten per N last berekend.
Voorspelling	Sterkte van trek, druk (knik) en verbinding apart gemeten; zwakste schakel voorspeld.
Uitvoering	Nette knopen, rechte staven, gelijkmatige belasting, veilig testen (bril, geen voeten onder de emmer).
Reflectie	Verschil met de voorspelling verklaard (lijmnaden, knopen die geen scharnier zijn, scheve staven, lasten buiten de knopen).

13.11 Habitat: zonnepanelen op het zuidvlak

Toepassen · 7 · Habitat · 50 min

Het zuidvlak van het dak (in het model het rechtervlak, knopen C, E, B) kan zonnepanelen dragen. Met montagerails wegen ze 0,15 kN/m² dakvlak (rekenwaarde). Het team wil weten of de spanten dat zonder aanpassing kunnen.

a Bereken de extra lijnlast op het rechtervlak (rekenwaarde met 1,35) en de nieuwe knooplasten.

> ✓ $0{,}15 \cdot 1{,}155 \cdot 0{,}60 = 0{,}1039\,\mathrm{kN/m}$, rekenwaarde $0{,}1403\,\mathrm{kN/m}$. Rechtervlak nu $1{,}061\,\mathrm{kN/m}$: E krijgt $1{,}59\,\mathrm{kN}$, C $1{,}49\,\mathrm{kN}$, B een extra deel direct in de oplegging.

b Bereken de staafkrachten met vakwerk.py (sneeuw symmetrisch) en de nieuwe benutting van de bovenrand EB (druk en buiging).

> ✓ Krachten (kN): AD −5,33; DC −4,64; CE −4,74; EB −5,54; AF +4,61; FG +3,14; GB +4,80; DF −1,20; FC +1,76; CG +1,94; GE −1,38. De bovenrand EB draagt nu −5,54 kN (was −5,12). Buiging: $M = 0{,}299\,\mathrm{kN\,m}$; benutting $(1{,}30/14{,}5)^2 + 4{,}41/16{,}6 = 0{,}27$: nog ruim onder 1.

c Welke andere vragen moet het team nog stellen voor de panelen op het dak mogen? Denk aan wind, sneeuw en bevestiging.

> ✓ Wind: zuiging tilt de panelen op en trekt aan de bevestigingen (de haken moeten in de spanten, niet in de panlatten). Sneeuw kan van de gladde panelen afglijden en zich onderaan ophopen; de dakgoot en de rand krijgen meer. Gaten door het onderdak moeten waterdicht. En de panlatten tussen de spanten moeten de haken kunnen dragen.

d Schrijf een advies van 4 à 6 regels voor het dossier.

> ✓ Bijvoorbeeld: 'De spanten dragen zonnepanelen van 0,15 kN/m² op het zuidvlak zonder aanpassing: de bovenrand EB gaat van 5,12 naar 5,54 kN druk en blijft ruim onder zijn draagvermogen. Voorwaarden: de dakhaken worden in de spanten geschroefd, de bevestiging wordt op windzuiging nagerekend (hoofdstuk 24 kiest de panelen) en de sneeuwophoping aan de goot wordt nagekeken.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Lasten	Extra last per m horizontaal met 1/cos 30° en 1,35; knooplasten correct verdeeld.
Berekening	Staafkrachten en de benutting van de bovenrand met druk en buiging.
Kritische vragen	Windzuiging op de panelen (optillen), sneeuw die van de panelen glijdt of zich ophoopt, bevestiging in de spanten, niet in de panlatten.
Advies	Duidelijk besluit met getallen en de voorwaarden.

13.12 Een staaf tussen twee muren

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een staaf bestaat uit een stuk staal (100 mm², 600 mm, E = 210 GPa) en een stuk aluminium (100 mm², 400 mm, E = 70 GPa), na elkaar tussen twee vaste muren. Op de verbinding werkt een kracht van 5,0 kN langs de staaf.

a Waarom kan je de reacties niet met evenwicht alleen vinden?

Eén evenwichtsvergelijking (langs de staaf) en twee onbekende reacties: statisch onbepaald. Hoe de kracht zich verdeelt, hangt af van hoe stijf elk stuk is.

b Stel het model op met twee elementen en drie knopen (twee vast). Bereken de verplaatsing van de verbinding en de twee reacties.

$k_1 = 210\,000 \cdot 100/600 = 35\,000\,\mathrm{N/mm}$, $k_2 = 70\,000 \cdot 100/400 = 17\,500\,\mathrm{N/mm}$. Assembleren: in de middelste knoop $(k_1 + k_2)u = F$; de buitenknopen zitten vast. $u = 5000/52\,500 = 0{,}0952\,\mathrm{mm}$. Reacties: $k_1 u = 3333\,\mathrm{N}$ (het staal wordt uitgerekt) en $k_2 u = 1667\,\mathrm{N}$ (het aluminium samengedrukt).

c Welke muur krijgt het meest? Leg uit met de stijfheden.

De muur aan de kant van het staal: het stuk staal is 2,0 keer stijver (hoger E, al is het langer). De stijfste weg trekt de meeste kracht: dat is de kern van elke statisch onbepaalde constructie.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

13.13 Een tussenwand met speling

Uitdagen · 9 · Programmeren · 45 min

Onder knoop F staat een tussenwand. De bovenkant van de wand komt tot een speling s onder de onderrand. Zolang F minder zakt dan s, draagt de wand niets; daarna wel. Gebruik de functie los() uit fem_vakwerk.py.

a Hoeveel zakt F bij de volle rekenlast zonder wand? Waarom is dat de maatstaf voor de speling?

Bij de rekenlast zakt F 1,22 mm (karakteristiek 0,88 mm). Is de speling groter dan de zakking bij de ongunstigste last, dan raakt het spant de wand nooit en blijft het een statisch bepaald vakwerk.

b Schrijf een programma dat in twee stappen rekent: eerst de last opvoeren tot F de wand raakt, daarna de rest van de last met de wand als steun. Bereken de kracht op de wand en in FC voor een speling van 0; 0,5; 1,0 en 1,5 mm.

Bijvoorbeeld:

```
# de tussenwand staat met speling onder F: pas als F meer zakt dan de speling, draagt de wand mee
for speling_mm in (0.0, 0.5, 1.0, 1.5):
    # stap 1: zonder wand, de last opvoeren tot F de wand raakt (lineair: fractie t van de volle last)
    u1, s1, R1 = los(steunen, lasten_vol)
    zak_F = -1000 * u1[2 * idx["F"] + 1]
    t = min(1.0, speling_mm / zak_F)
    # stap 2: de rest van de last met de wand als steun
    u2, s2, R2 = los(steunen + [2 * idx["F"] + 1], {k: (fx * (1 - t), fy * (1 - t)) for k, (fx, fy) in
lasten_vol.items()})
    s = t * s1 + s2
    print(f"speling {speling_mm:.1f} mm: wand draagt {R2[2 * idx['F'] + 1]:5.2f} kN, "
          f"FC {s[staven.index(('F', 'C'))]:5.2f} kN, DC {s[staven.index(('D', 'C'))]:5.2f} kN")
```

Echte uitvoer:

```
speling 0.0 mm: wand draagt  3.74 kN, FC -2.56 kN, DC  0.56 kN
speling 0.5 mm: wand draagt  2.21 kN, FC -0.79 kN, DC -1.48 kN
speling 1.0 mm: wand draagt  0.67 kN, FC  0.98 kN, DC -3.53 kN
speling 1.5 mm: wand draagt  0.00 kN, FC  1.76 kN, DC -4.43 kN
```

c Welke speling adviseer je, rekening houdend met kruip van het hout, slip in de nagelplaten en het zetten van de wand?

Het model rekent zonder slip en kruip; in werkelijkheid zakt een spant na jaren makkelijk enkele millimeters (kruip ×1,6, slip van de nagelplaten, krimp). Een speling van ongeveer 10 mm, met een beweeglijke hoek die de wand zijdelings vasthoudt maar verticaal laat schuiven, is een veilige keuze. Een speling van 1 mm werkt op papier en faalt in de praktijk.

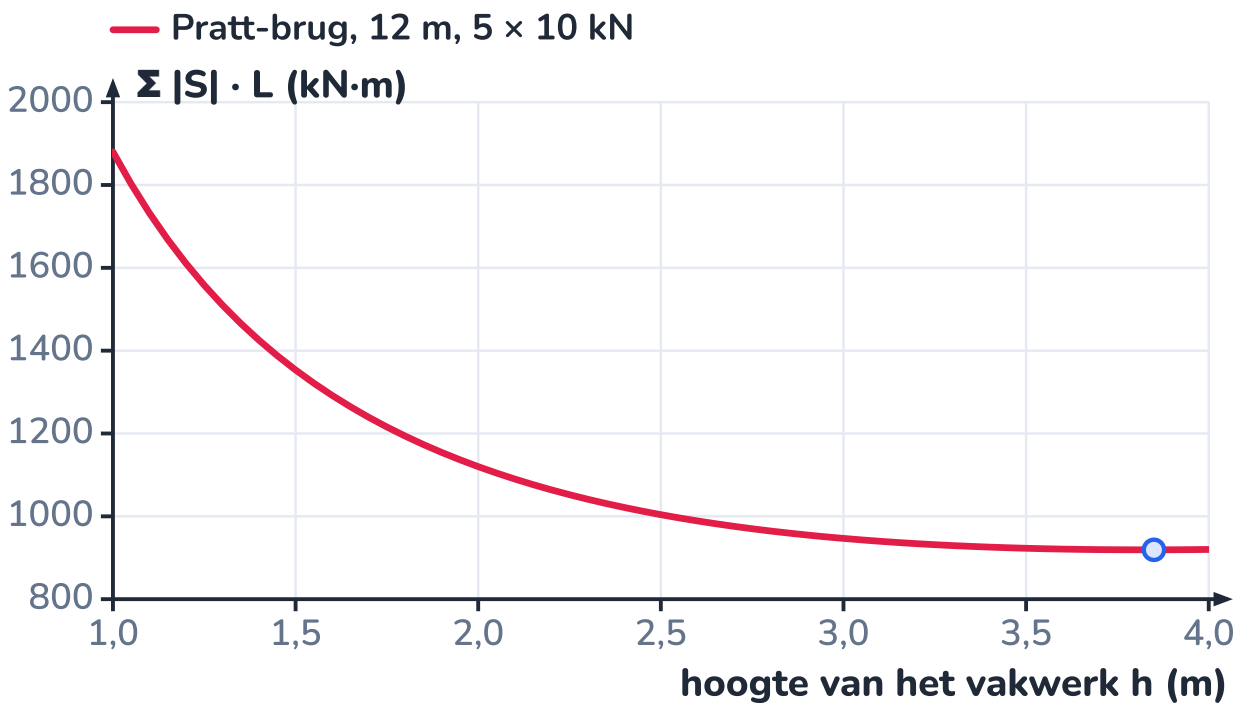
ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Twee lineaire stappen correct gekoppeld (contact op het ogenblik dat F de speling heeft doorlopen).
Programma	Resultaten voor vier spelingen; teken van FC gevolgd.
Interpretatie	Speling groter dan de totale doorbuiging op lange termijn (kruip ×1,6, slip, zetting).
Advies	Concreet getal (bv. 10 à 15 mm) met een beweeglijke bevestiging van de wand aan het spant.

13.14 Ontwerp: de beste hoogte voor een vakwerkbrug

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 45 min

Hoe hoger een Pratt-brug, hoe kleiner de randkrachten (M/h), maar hoe langer de verticalen en diagonalen. Als maat voor het staal neem je Σ |S| · L over alle staven (evenredig met het volume als elke staaf dezelfde toelaatbare spanning heeft). Brug: 12 m, 6 vakken, 10 kN in elke onderknoop.



Σ |S| · L tegenover de hoogte, berekend met vakwerk.py voor 61 hoogtes.

a Leg uit waarom de kromme een minimum heeft.

De randen dragen M/h: hun bijdrage daalt als 1/h. De verticalen en diagonalen worden langer en de diagonalen komen steiler (hun kracht daalt, hun lengte stijgt): hun bijdrage stijgt ongeveer lineair met h. Een dalende plus een stijgende term geeft een minimum (hoofdstuk 2).

b Lees de beste hoogte af. Welke verhouding h/L is dat?

Het minimum ligt bij $h \approx 3{,}85\,\mathrm{m}$, dus $h/L \approx 1/3{,}1$. Het is vlak: op 3,0 m kost de brug maar 3 % meer, op 1,5 m (L/8) wel 47 %.

c Waarom bouwt men in werkelijkheid vaak lager (h/L ≈ 1/8 à 1/10)? Noem drie redenen.

Lange drukstaven knikken en vragen dus meer materiaal dan |S| · L doet vermoeden; een hoge brug vangt meer wind; hoge diagonalen bij een laag vak geven lastige knopen; en bij een brug met de rijweg bovenop telt de bouwhoogte onder de weg. Doorbuiging en stijfheid pleiten dan weer voor hoog.

d Hoe zou het optimum veranderen als drukstaven ook op knik gecontroleerd worden?

Voor drukstaven is de benodigde doorsnede groter naarmate ze langer zijn (knik): dat straft de langere vullingsstaven en de bovenrand niet evenveel. Het optimum verschuift meestal naar een iets lagere brug met kortere drukstaven.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Uitleg	Randen ∝ 1/h, vullingsstaven ∝ lengte; hun som heeft een minimum.
Aflezing	h en h/L correct.
Werkelijkheid	Knik van lange staven, hoogte onder de rijbaan, wind, esthetiek, doorbuiging, transport.
Knik	Lange drukstaven vragen meer materiaal: het optimum schuift naar lager.

13.15 Kritische vormen en een bijna platte driehoek

Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Twee staven van 1,0 m lang (horizontale projectie) hangen tussen twee scharnieren aan de muren en komen samen in een knoop in het midden, een hoogte h onder de lijn tussen de scharnieren (een 'hangmat'). In de knoop hangt 2,0 kN.

a Bereken de staafkracht voor h = 0,5; 0,2; 0,1; 0,05 en 0,01 m.

S = F/(2 sin θ) met tan θ = h/1,0: h = 0,50 m: 2,2 kN; h = 0,20 m: 5,1 kN; h = 0,10 m: 10,0 kN; h = 0,05 m: 20,0 kN; h = 0,01 m: 100,0 kN.

b Wat gebeurt er bij h = 0? Hoe ziet de matrix A van dat vakwerk eruit, en wat is haar determinant?

Bij $h = 0$ liggen beide staven horizontaal: geen enkele staafkracht heeft een verticale component, en de verticale evenwichtsvergelijking van de knoop luidt $0 = F$. De rij van A voor die richting bevat alleen nullen: $\det A = 0$, een kritische vorm.

c Waarom geeft een programma bij een bijna kritische vorm wel een antwoord, maar een gevaarlijk antwoord? Denk aan de conditie van een matrix (hoofdstuk 5).

Bij een bijna kritische vorm is de matrix slecht geconditioneerd: een kleine fout in de geometrie of de last (een millimeter doorzakken, een afgeronde hoek) geeft een grote fout in de krachten, en de krachten zelf zijn enorm. In werkelijkheid rekt de staaf dan, zakt de knoop en vindt het evenwicht een hoek met eindige krachten: dat is een kabel. Een programma dat alleen evenwicht rekent in de onvervormde vorm, mist dat.

13.16 Onderzoek: het menselijke model van de Forth Bridge

Uitdagen · 8 · Onderzoeken · 60 min

Bouw het model van Baker na (figuur van het verhaal): twee leerlingen op een stoel, armen gestrekt naar een bezemsteel die schuin van de stoelpoot naar hun hand loopt; aan elke steel hangt een touw naar een plank in het midden, waarop een zak van 30 kg ligt. Afmetingen van één kant: hand 0,80 m voor de schouder, 0,60 m boven het punt waar de steel de stoel raakt. Een bagageweger in het touw tussen hand en schouder meet de armkracht.

a Teken de knoop 'hand' vrij en voorspel de kracht in de arm en in de steel.

Halve last $F = 30 \cdot 9{,}81/2 = 147\,\mathrm{N}$. In de hand: steel (druk) schuin omhoog met richting $(0{,}80;\ 0{,}60)$ tegenover de voet, arm (trek) horizontaal naar de schouder. Verticaal: $S_{\text{steel}} \cdot 0{,}6 = F$, dus $S_{\text{steel}} = 245\,\mathrm{N}$ druk; horizontaal: $S_{\text{arm}} = S_{\text{steel}} \cdot 0{,}8 = 196\,\mathrm{N}$ trek.

b Meet de armkracht en vergelijk. Wat voel je in je armen, je rug en de stoel?

De bagageweger geeft ongeveer die 196 N (20 kgf) als de arm horizontaal is. Je voelt de trek in je armen en schouders, en een druk van de steel in de stoel; je rug moet het moment van de arm opvangen, en de stoel wordt voorover geduwd.

c Waarom zitten er in Bakers model gewichten aan de buitenkant? Wat gebeurt er zonder?

De twee helften duwen elk een moment voorover om hun stoel (de last hangt voor de stoel). Een tegengewicht aan de buitenkant (het anker) geeft een tegengesteld moment, zodat de stoel niet kantelt en niet op zijn voorpoten alleen staat. Bij de echte brug zijn het de ankerarmen met ballast aan de landzijde.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Knoop 'hand' met drie krachten: last (halve zak), arm (trek, horizontaal), steel (druk, schuin).
Meting	Veilig opgezet (lage hoogte, iemand die de plank opvangt), armkracht gemeten en vergeleken.
Verklaring	Afwijkingen verklaard: de arm is niet precies horizontaal, de steel steunt niet in een scharnier, de mensen leunen.
Ankers	Momentenevenwicht om de stoel: zonder tegengewicht kantelen de mensen voorover.

E EXPERT · DEEL E3 · THERMODYNAMICA EN STROMING

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 14

Gassen en de gaswetten

Wat de lucht in het station doet: van botsende moleculen tot een ventilatie die klopt

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 6× toepassen · 5× uitdagen · ± 550 min

E Energie · M Materie en chemie · B Leven en systemen



Een klein kastje aan de wand meet wat je niet ziet: CO_2, zuurstof, luchtvochtigheid en luchtdruk. Het brein van het station beslist ermee hoeveel verse lucht er binnenkomt.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

14.1 Druk, temperatuur en hoeveelheid omrekenen

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Reken om en toon je stappen. Gebruik R = 8,314 J/(mol·K) en 1013 hPa voor de luchtdruk.

a Een bandenmeter toont 2,5 bar. Wat is de absolute druk in bar en in kPa?

✓ Overdruk + luchtdruk: $2{,}5 + 1{,}013 = 3{,}5\,\text{bar} = 351\,\text{kPa}$.

b Een fles van 10 L bevat zuurstof bij 150 bar (absoluut) en 15 °C. Hoeveel mol en hoeveel kg is dat (ideaal gas)?

✓ $n = pV/(RT) = 150 \cdot 10^5 \cdot 0{,}010/(8{,}314 \cdot 288{,}15) = 62{,}6\,\text{mol}$, $m = 62{,}6 \cdot 0{,}032 = 2{,}00\,\text{kg}$ (echt ongeveer 10 % meer: $Z \approx 0{,}91$ bij 150 bar).

c Hoeveel moleculen zitten er in 1,0 cm³ lucht bij 20 °C en 1013 hPa?

✓ $N = pV/(kT) = 101\,300 \cdot 10^{-6}/(1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 293{,}15) = 2{,}50 \cdot 10^{19}$.

d Een weerballon bevat 5,0 m³ helium bij 1013 hPa en 15 °C. Hoe groot is hij op 10 km hoogte (265 hPa, −50 °C)?

✓ $V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} = 5{,}0 \cdot \frac{1013}{265} \cdot \frac{223{,}15}{288{,}15} = 14{,}8\,\text{m}^3$: bijna drie keer zo groot. Daarom vult men een weerballon maar gedeeltelijk.

14.2 De ideale gaswet in het station

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

De kweekruimte is 2,40 × 2,00 × 2,40 m (hoofdstuk 14 van I). Lucht: M = 28,97 g/mol.

a Bereken de massa lucht in de kweekruimte bij 20 °C en 1013 hPa.

✓ $V = 11{,}52\,\text{m}^3$; $\rho = pM/(RT) = 1{,}204\,\text{kg/m}^3$; $m = 13{,}9\,\text{kg}$.

b Buitenlucht van −8 °C komt binnen en warmt op tot 20 °C bij constante druk. Met welke factor neemt haar volume toe?

✓ $V_2/V_1 = T_2/T_1 = 293{,}15/265{,}15 = 1{,}106$: 10,6 % groter.

c Hoeveel kg lucht per uur blaast een ventilatie van 100 m³/h (gemeten bij 20 °C) binnen? Hoeveel is dat per dag?

✓ $100 \cdot 1{,}204 = 120\,\text{kg/h}$, 2890 kg per dag: meer dan twee ton lucht per dag door de woonmodule.

d Waarom mag je bij het omrekenen van een temperatuurverschil °C en K door elkaar gebruiken, maar bij p/T niet?

✓ Een verschil van 1 K is een verschil van 1 °C (de schalen zijn alleen verschoven). Een verhouding hangt af van het nulpunt: 20 °C / 10 °C = 2, maar 293 K / 283 K = 1,035.

14.3 Hoe snel zijn moleculen?

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Gebruik $v_{\text{rms}} = \sqrt{3RT/M}$ en $v_{\text{p}} = \sqrt{2RT/M}$.

a Bereken v_rms bij 20 °C voor H_2 (2,016 g/mol), He (4,003), H_2O (18,02), N_2 en CO_2.

✓ H_2 1904, He 1352, H_2O 637, N_2 511, CO_2 408 m/s.

b Bij welke temperatuur heeft stikstof dezelfde v_rms als waterstof bij 20 °C?

✓ $v_{\text{rms}}^2 \sim T/M$: $T = 293{,}15 \cdot 28{,}01/2{,}016 = 4074\,\text{K}$ (ongeveer 3800 °C).

c Een ballon met helium loopt sneller leeg dan een met lucht, door dezelfde piepkleine gaatjes. Leg uit met de kinetische gastheorie en schat de verhouding van de lektempo's.

✓ Door een gaatje dat veel kleiner is dan de vrije weglengte ontsnappen moleculen afzonderlijk (effusie), met een tempo evenredig met hun gemiddelde snelheid, dus met $1/\sqrt{M}$ (wet van Graham). Helium tegenover lucht: $\sqrt{28{,}97/4{,}003} = 2{,}69$: ongeveer 2,7 keer zo snel.

14.4 Partiële druk en ppm

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Luchtdruk 1013 hPa, 20 °C, tenzij anders vermeld.

a Bereken de partiële druk van CO_2 bij 420, 1000 en 5000 ppm, in Pa.

✓ $p = x\,p_0$: 42,5, 101,3 en 506 Pa.

b Reken 5000 ppm CO_2 om naar mg/m³.

✓ $c = x\,pM/(RT) = 0{,}005 \cdot 101\,300 \cdot 0{,}044\,01/(8{,}314 \cdot 293{,}15) = 0{,}00915\ \mathrm{kg/m^3} = 9145\ \mathrm{mg/m^3}$ (ongeveer 9 g per m³).

c Hoe groot is de partiële druk van zuurstof op 2000 m (795 hPa)? Welk percentage op zeeniveau geeft dezelfde partiële druk?

✓ $0{,}2095 \cdot 795 = 167\ \mathrm{hPa}$; op zeeniveau: $167/1013 = 16{,}4\,\%$.

d Een sensor meldt 19,8 % O_2 bij een luchtdruk van 985 hPa; hij is geijkt bij 1013 hPa en meet de partiële druk. Wat is het echte percentage?

✓ De cel meet de partiële druk en rekent om met 1013 hPa: $p_{O_2} = 0{,}198 \cdot 1013 = 200{,}6\ \mathrm{hPa}$. Echt percentage: $200{,}6/985 = 20{,}36\,\%$: de lucht is in orde, de lage druk bedroog de sensor.

14.5 Luchtvochtigheid en dauwpunt

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Gebruik de formule van Magnus: $p_s = 611{,}2\,\mathrm{e}^{17{,}62\,t/(243{,}12+t)}$ Pa.

a Bereken p_s en de verzadigde absolute vochtigheid bij 0, 10, 20 en 30 °C.

✓ 0 °C: 611 Pa, 4,85 g/m³; 10 °C: 1226 Pa, 9,38 g/m³; 20 °C: 2333 Pa, 17,24 g/m³; 30 °C: 4234 Pa, 30,26 g/m³. Ruwweg een verdubbeling per 10 °C.

b Bereken het dauwpunt van lucht van 24 °C en 65 %.

✓ $\gamma = \ln 0{,}65 + 17{,}62 \cdot 24/267{,}12 = 1{,}1523$; $t_d = 243{,}12\,\gamma/(17{,}62 - \gamma) = 17{,}0$ °C.

c Een SHT31 staat naast een warme spanningsregelaar en meet 23,0 °C en 45 %, terwijl de lucht 21,0 °C is. Wat is de echte RV? Wat is het dauwpunt volgens de sensor en in werkelijkheid?

✓ De waterdampdruk is overal dezelfde: $p_w = 0{,}45 \cdot p_s(23) = 1261\ \mathrm{Pa}$. Echte RV: $1261/p_s(21) = 50{,}8\,\%$. Het dauwpunt hangt alleen van p_w af: 10,4 °C voor beide. De temperatuurfout gaat dus niet over op het dauwpunt, wel op de RV.

14.6 Waar of niet?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Zeg of de uitspraak klopt en verbeter ze als ze niet klopt. Eén zin uitleg per uitspraak.

a In een fles van 200 bar bewegen de moleculen sneller dan in de kamer.

✓ Niet waar: de snelheid hangt alleen van T en M af. Er zijn meer moleculen per liter, die vaker botsen.

b Bij dezelfde temperatuur hebben een CO_2- en een H_2-molecule gemiddeld dezelfde kinetische energie.

✓ Waar: $\frac{3}{2}kT$ voor elk gas. H_2 is daardoor veel sneller ($v \sim 1/\sqrt{M}$).

c In een afgesloten ruimte met mensen wordt zuurstofgebrek het eerst gevaarlijk.

✓ Niet waar: de CO_2 bereikt 5000 ppm veel eerder dan de O_2 19,5 % (in de woonmodule 6 h tegenover 17 h).

d Lucht met 100 % RV bij 5 °C bevat meer waterdamp dan lucht met 50 % bij 20 °C.

✓ Niet waar: 5 °C verzadigd is 6,8 g/m³, 20 °C bij 50 % is 8,6 g/m³. Koude lucht bevat weinig water, ook als ze verzadigd is.

e De manometer op een CO_2-fles toont hoeveel CO_2 er nog in zit.

✓ Niet waar: zolang er vloeistof in zit, toont hij de dampspanning (57 bar bij 20 °C). Weeg de fles.

Toepassen

Toepassen — meerdere stappen, in een context

14.7 Labo: de wet van Boyle met een spuit

Toepassen · 7 · Labo · 50 min

Meet zoals in de proef van het handboek (spuit van 60 mL, gesloten bij 40 mL, absolute druksensor). Wacht bij elke stand tot de druk stabiel is. Een voorbeeldmeting om mee te rekenen als je niet kan meten:

V op de spuit (mL)	60	55	50	45	40	35	30	25	20
p (hPa)	693	753	821	906	1014	1146	1321	1556	1894
$p \cdot V$ (hPa·L)	41,6	41,4	41,0	40,8	40,6	40,1	39,6	38,9	37,9
$p \cdot (V + V_\mathrm{d})$ (hPa·L)	43,7	43,7	43,6	43,6	43,7	43,6	43,7	43,7	43,7

a Maak een tabel van V, p, 1/p en p·V met je eigen metingen (of de voorbeeldmeting).

✓ Voorbeeld: p·V daalt van 41,6 naar 37,9 hPa·L; 1/p stijgt lineair.

b Bepaal met kleinste kwadraten de rechte 1/p = aV + b. Bereken de dode ruimte V_d = b/a en C = 1/a.

✓ Met de voorbeeldmeting: $a = 2{,}290 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{hPa^{-1}\,mL^{-1}}$, $b = 7{,}067 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{hPa^{-1}}$; $V_\mathrm{d} = 3{,}09\,\mathrm{mL}$, $C = 43{,}67\,\mathrm{hPa \cdot L}$.

c Hoeveel mol lucht zat er in spuit, slangetje en sensor? Hoe lang is het slangetje als het een binnendiameter van 3 mm heeft en de sensor 0,5 mL bevat?

✓ $n = C/(RT) = 43\,672 \cdot 100 \cdot 10^{-6}/(8{,}314 \cdot 293{,}15) = 1{,}79\,\mathrm{mmol}$. Slangetje: $3{,}1 - 0{,}5 = 2{,}6\,\mathrm{mL}$ in een doorsnede van $\pi \cdot 0{,}15^2 = 0{,}0707\,\mathrm{cm^2}$: $37\,\mathrm{cm}$ lang.

d Wat gebeurt er met je meting als je snel duwt en meteen afleest? Hoe zou de grafiek er dan uitzien?

✓ Snel samendrukken is bijna adiabatisch: de lucht warmt op en de druk is hoger dan bij kamertemperatuur (hoofdstuk 15). De punten bij kleine V liggen dan te hoog in p, dus te laag in 1/p; de rechte kantelt en je vindt een verkeerde dode ruimte. Wacht je, dan koelt de lucht af en zakt de druk langzaam naar de isotherm.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Minstens acht standen, heen en terug, stabiel afgelezen, luchtdruk van de dag genoteerd.
Verwerking	1/p tegen V, rechte met kleinste kwadraten, V_d en C met eenheden.
Interpretatie	Dode ruimte herkend als systematische fout; n en de lengte van het slangetje berekend.
Kritiek	Opwarmen bij snel duwen (niet isotherm), lekken bij hoge druk, onzekerheid van de schaal.

14.8 Labo: het dauwpunt met een glas ijswater

Toepassen · 7 · Labo · 45 min

Voer de proef van het handboek uit. Meet eerst de lucht (temperatuur en RV), bepaal dan drie keer het dauwpunt met de beker (verschijnen en verdwijnen van de waas).

a Noteer je metingen.

✓ Bijvoorbeeld 9,7; 9,5; 9,8 °C (voorbeeld uit het handboek).

b Bereken het dauwpunt uit de temperatuur en de RV van de lucht met Magnus, met een onzekerheid (de hygrometer: ±3 % RV).

✓ 21,5 °C, 48 ± 3 %: $t_\mathrm{d} = 10{,}0$ °C (bereik 9,1 tot 10,9 °C).

c Vergelijk. Ligt het verschil binnen de onzekerheid? Welke systematische fouten kan de beker hebben?

✓ Het gemiddelde, 9,7 °C, ligt binnen het bereik, iets onder de berekende 10,0 °C. Systematisch: de buitenkant van de beker is warmer dan het water (het dauwpunt lijkt te laag), je ziet de waas pas als er al een laagje ligt (te laag), je adem of je handen maken de lucht rond de beker vochtiger (te hoog).

d Bereken omgekeerd de RV uit je gemeten dauwpunt. Welke methode is volgens jou nauwkeuriger?

✓ $\mathrm{RV} = p_\mathrm{s}(9{,}7)/p_\mathrm{s}(21{,}5) = 47{,}0\,\%$. De dauwpuntmethode meet rechtstreeks de waterdamp en is met goede apparatuur (een spiegelhygrometer) de referentie; met een blik en het oog is ze ongeveer even goed als een eenvoudige hygrometer.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Drie pogingen, verschijnen en verdwijnen, langzaam afgekoeld en geroerd.
Berekening	Magnus correct, onzekerheid via de extreme waarden (48 ± 3 %).
Vergelijking	Verschil besproken tegenover de onzekerheid; wand van de beker, zichtbaarheid, adem.
Omgekeerd	RV uit het dauwpunt: ps(td)/ps(t), met de gevoeligheid besproken.

14.9 Werken in de kweekruimte met de deur dicht

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een bewoner oogst sla in de kweekruimte (11,5 m³) met de deur dicht. Bij licht werk ademt hij 1,5 keer het gemiddelde uit (1,0 kg CO_2 per dag). De ventilatie van de kweekruimte (11 m³/h, hoofdstuk 14 van I) draait. De planten nemen 1,5 g CO_2 per uur op; de lucht begint op 800 ppm (verrijkt). Buitenlucht: 420 ppm.

a Bereken de CO_2-productie van de bewoner in m³/h en de netto bron met de planten erbij.

✓ $1{,}5 \cdot 1{,}0/24 = 0{,}0625\,\mathrm{kg/h} = 0{,}0342\,\mathrm{m^3/h}$. Planten: $1{,}5\,\mathrm{g/h} = 0{,}00082\,\mathrm{m^3/h}$. Netto $G = 0{,}0333\,\mathrm{m^3/h}$.

b Stel de balans op. Bereken het evenwicht, de tijdconstante en het tijdstip waarop 1000 ppm overschreden wordt.

✓ $V\,\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = G - Q(c - c_\mathrm{b})$; evenwicht $c_\infty = 420 + G/Q = 3451$ ppm; $\tau = V/Q = 1{,}05$ h. $c(t) = c_\infty + (800 - c_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: 1000 ppm na $t = \tau \ln \frac{c_\infty - 800}{c_\infty - 1000} = 0{,}08$ h, ongeveer 5 minuten. Het evenwicht ligt boven de waarschuwing, maar ruim onder het alarm.

c De ventilatie valt uit. Na hoeveel minuten passeert de CO_2 5000 ppm?

✓ Zonder ventilatie stijgt de CO_2 lineair met $G/V = 2899\,\mathrm{ppm/h}$: van 800 naar 5000 ppm in $4200/2899 = 1{,}45$ h, ongeveer 87 minuten.

d Wat moet de regeling doen als iemand de kweekruimte binnengaat?

Bij een geopende deur (deurcontact) of een knop 'ik ben binnen': de CO_2-dosering stoppen en de ventilatie op het maximum. Werkt de ventilatie niet, dan de deur open laten. Bij 5000 ppm alarm, ook als de dosering al uit staat (een lek aan de leiding).

14.10 Een zuurstoffles als reserve: ideaal en echt

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Voor noodgevallen wil het station een fles medische zuurstof van 10 L waterinhoud bij 200 bar (absoluut) en 20 °C. Volgens het model van Peng en Robinson is Z = 0,918 voor zuurstof bij 200 bar en 20 °C. Een zieke bewoner krijgt 2 L/min (gemeten bij 1013 hPa en 20 °C) via een neusbril.

a Hoeveel mol en hoeveel liter (bij 1013 hPa en 20 °C) zuurstof bevat de fles volgens de ideale gaswet, en volgens het echte gas?

Ideaal: $n = pV/(RT) = 200 \cdot 10^5 \cdot 0{,}010/(8{,}314 \cdot 293{,}15) = 82{,}1\,\text{mol}$, $1974\,\text{L}$. Echt: $n = pV/(ZRT) = 89{,}4\,\text{mol}$, $2149\,\text{L}$: 9 % meer.

b Hoe lang gaat de fles mee bij 2 L/min? Hoe weet je bij deze fles wel hoeveel er nog in zit?

$2149/2 = 1075\,\text{min}$, ongeveer 18 uur. Zuurstof is bij 20 °C ver boven haar kritische temperatuur: ze blijft gas, en de druk daalt evenredig met de inhoud (bijna, Z verandert een beetje). De manometer is hier wel een inhoudsmeter.

c Hoeveel zou de zuurstof het percentage in de woonmodule verhogen als de hele fles vrijkwam? Is dat gevaarlijk?

$2{,}15\,\text{m}^3$ in $62{,}4\,\text{m}^3$: de molfractie O_2 wordt $(0{,}2095 \cdot 62{,}4 + 2{,}15)/(62{,}4 + 2{,}15) = 23{,}6\,\%$. Meer zuurstof maakt alles brandbaarder (textiel, vet); boven ongeveer 23,5 % spreken veiligheidsregels van een verhoogd brandgevaar. Zuurstofflessen en olie of vet horen nooit samen.

14.11 Code: hoeveel moleculen zijn sneller dan ...?

Toepassen · 7 · Programmeren · 30 min

Het deel van de moleculen met een snelheid boven v_0 is de integraal van de verdeling van Maxwell en Boltzmann van v_0 tot oneindig. Zo'n staart bepaalt hoeveel water verdampt, hoe snel een reactie gaat (hoofdstuk 25) en of een planeet haar gassen houdt.

a Schrijf een functie f_mb(v, T, M) en een functie die het deel boven v_0 berekent met de trapeziumregel (hoofdstuk 3). Controleer dat de hele integraal 1 is.

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np
R = 8.314

def f_mb(v, T, M):
    a = M / (2 * R * T)
    return 4 * np.pi * (a / np.pi)**1.5 * v**2 * np.exp(-a * v**2)

def deel_boven(v0, T, M, vmax=6000.0, n=20000):
    v = np.linspace(v0, vmax, n + 1)
    return np.trapezoid(f_mb(v, T, M), v)

print(deel_boven(0.0, 293.15, 0.028014))   # 1.0000
```

b Bereken het deel van de stikstofmoleculen boven 1000 m/s bij −8, 20 en 60 °C. Wat valt op?

Boven 1000 m/s: −8 °C 0,53 %, 20 °C 0,93 %, 60 °C 1,76 %. Een paar tientallen graden verschuift de staart sterk: van −8 naar 60 °C wordt de fractie 3,3 keer zo groot, terwijl de absolute temperatuur maar 26 % stijgt. Daarom verdampt water in de zomer zoveel sneller.

c Controleer je antwoord bij 20 °C met een Monte-Carlo-simulatie (zoals doos.py).

doos.py geeft 0,96 % tegenover 0,93 % uit de integraal. De toevalsfout op een fractie p uit n moleculen is $\sqrt{p(1-p)/n} \approx 0{,}03$ procentpunt: het verschil is toeval.

14.12 Habitat: de luchtbewaking van het station vastleggen

Toepassen · 7 · Habitat · 60 min

Het team moet de luchtbewaking in het stationsdossier vastleggen. Vertrek van het ontleedblad, de voorbeelden over de woonmodule en de simulatie lucht.py. Buitenlucht: 420 ppm. Twee bewoners; soms een derde persoon op bezoek (onderhoud).

a Bereken het ventilatiedebiet dat nodig is voor < 1000 ppm met twee en met drie personen (zelfde productie per persoon). Kiest het team 100 m³/h goed?

$Q_{\min} = G/(580 \cdot 10^{-6})$: twee personen $79\,\mathrm{m^3/h}$, drie $118\,\mathrm{m^3/h}$. 100 m³/h volstaat voor twee met marge; met drie is de stand van 150 m³/h nodig (evenwicht $420 + 455 = 875\,\mathrm{ppm}$). De vraagsturing doet dat vanzelf.

b Maak een tabel: grootheid, sensor, plaats, meetritme, waarschuwing, alarm, actie van het brein.

Bijvoorbeeld: CO_2 (MH-Z19B in S1 en S2, om de 2 s, waarschuwing 1000 ppm op het minuutgemiddelde, alarm 5000 ppm, actie: 150 m³/h, bij alarm buitendeur open en melding); O_2 (cel in S1 met BME280-correctie, om de 2 s, waarschuwing 20,0 %, alarm 19,5 %, actie: melding, ventilatie maximum, oorzaak zoeken); T/RV (SHT31 in S1, per minuut, melding < 25 % of > 70 %, geen alarm, actie: ventilatiestand, advies); CO_2 in de kweekruimte (laag, om de 2 s, dosering stop boven 1500 ppm, alarm 5000 ppm); fles (weegcel, per uur, melding onder 0,4 kg).

c Beschrijf twee storingen die de bewaking moet herkennen (een sensor die vastloopt, een sensor die afdrijft) en hoe het brein ze opmerkt.

Vastlopen: een NDIR-sensor die telkens exact dezelfde waarde geeft, terwijl de bewoners actief zijn: het brein vergelijkt S1 en S2 en de verandering in de tijd (een echte CO_2 ruist altijd). Afdrijven: de O_2-cel verliest gevoeligheid; jaarlijks ijken in buitenlucht (20,95 %), en een CO_2-sensor controleren door hem buiten (420 ppm) te zetten. Een tweede sensor of een plausibiliteitscontrole (CO_2 en O_2 moeten samen veranderen, RQ ≈ 0,87) vangt veel op.

d Pas lucht.py aan voor drie personen overdag en rapporteer de hoogste CO_2. Volstaat de stand van 150 m³/h?

In activiteit() de dagwaarde 1,14 vermenigvuldigen met 1,5 (ook voor waterdamp en zuurstof, want die gebruiken dezelfde factor). Uitvoer:

```
CO2 847 tot 939 ppm, O2 hoogstens 0.060 procentpunt onder buiten
RV 28 tot 30 %, gemiddeld debiet 124 m³/h
minuten boven 1000 ppm: 0
```

De hoogste CO_2 is 939 ppm; 0 minuten boven 1000 ppm; de ventilatie staat 16,1 uur op 150 m³/h. Het volstaat, maar zonder veel marge: een regel 'bezoek = ventilatie op maximum' of een vierde stand geeft ruimte.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Debiet	Qmin = G/(580 ppm) voor twee en drie personen (79 en 118 m³/h); besluit met marge en de 150 m³/h-stand.
Tabel	Alle grootheden (CO_2, O_2 + druk, T/RV, CO_2 bij de fles), zinvolle plaats en grenzen uit het hoofdstuk.
Storingen	Vastlopen (dezelfde waarde te lang, vergelijken met S2), afdrijven (buitenlucht 420 ppm, 20,95 %), redundantie.
Simulatie	Correct aangepast, resultaat gerapporteerd en geïnterpreteerd.

●●● Uitdagen Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

14.13 Afleiding: de barometrische hoogteformule

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Een dun laagje lucht met dikte dh en oppervlakte A is in evenwicht: de druk onder duwt harder dan de druk boven, het verschil draagt het gewicht van het laagje.

a Toon dat $\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = -\rho g$ en met de ideale gaswet $\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = -\dfrac{Mg}{RT}\,p$.

✓ Kracht op het laagje: $p(h)A - p(h+\mathrm{d}h)A = \rho g A\,\mathrm{d}h$, dus $\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = -\rho g$. Met $\rho = pM/(RT)$: $\mathrm{d}p/\mathrm{d}h = -\dfrac{Mg}{RT}p$.

b Los op voor een constante temperatuur (scheiden van veranderlijken, hoofdstuk 4). Bereken de schaalhoogte $H = RT/(Mg)$ bij 15 °C.

✓ $\mathrm{d}p/p = -\mathrm{d}h/H$ geeft $p = p_0\,\mathrm{e}^{-h/H}$ met $H = \dfrac{8{,}314 \cdot 288{,}15}{0{,}028\,97 \cdot 9{,}81} = 8432\,\mathrm{m}$.

c Op welke hoogte is de partiële druk van zuurstof gelijk aan die van 19,5 % op zeeniveau? Vergelijk met de standaardatmosfeer (601 m).

✓ $\mathrm{e}^{-h/H} = 19{,}5/20{,}95$ geeft $h = H\ln(20{,}95/19{,}5) = 605\,\mathrm{m}$. De standaardatmosfeer (temperatuur daalt 6,5 °C per km) geeft 601 m: bijna hetzelfde, want over 600 m verandert de temperatuur weinig.

d Het station moet later ook werken op een afgelegen plek, bv. op 2500 m. Wat moet er dan aan de luchtbewaking veranderen?

✓ Op 2500 m is de luchtdruk ongeveer 747 hPa: de O_2-cel meet altijd een lage partiële druk. Het alarm moet op het *percentage* (met drukcorrectie) staan, niet op de partiële druk, anders gaat het voortdurend af. Voor de bewoners telt wel de partiële druk (acclimatiseren). Ook de CO_2-sensor (NDIR) telt moleculen per volume en heeft een drukcorrectie nodig, en de ventilatie verplaatst minder massa per m³.

14.14 Onderzoek: Van der Waals en de kritische toestand van CO_2

●●● Uitdagen · 9 · Analyseren · 50 min

Voor CO_2 is $a = 0{,}3640\,\mathrm{Pa\,m^6/mol^2}$ en $b = 4{,}267 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3/mol}$. Schrijf de vergelijking van Van der Waals per mol: $p = \dfrac{RT}{v-b} - \dfrac{a}{v^2}$ met $v = V/n$.

a In het kritisch punt heeft de isotherm een buigpunt met horizontale raaklijn: $\partial p/\partial v = 0$ en $\partial^2 p/\partial v^2 = 0$. Leid $v_c = 3b$, $T_c = 8a/(27Rb)$ en $p_c = a/(27b^2)$ af.

✓ $\partial p/\partial v = -\dfrac{RT}{(v-b)^2} + \dfrac{2a}{v^3} = 0$ en $\partial^2 p/\partial v^2 = \dfrac{2RT}{(v-b)^3} - \dfrac{6a}{v^4} = 0$. Deel de tweede door de eerste (na herschikken: $RT = 2a(v-b)^2/v^3 = 3a(v-b)^3/v^4$): $2v = 3(v-b)$, dus $v_c = 3b$. Invullen: $RT_c = 2a(2b)^2/(27b^3) = 8a/(27b)$, en $p_c = \dfrac{RT_c}{2b} - \dfrac{a}{9b^2} = \dfrac{4a}{27b^2} - \dfrac{3a}{27b^2} = \dfrac{a}{27b^2}$.

b Bereken T_c en p_c voor CO_2 en vergelijk met 31,0 °C en 73,8 bar.

✓ $T_c = 8 \cdot 0{,}3640/(27 \cdot 8{,}314 \cdot 4{,}267 \cdot 10^{-5}) = 304{,}0\,\mathrm{K}$ (30,8 °C); $p_c = 0{,}3640/(27 \cdot (4{,}267 \cdot 10^{-5})^2) = 74{,}0\,\mathrm{bar}$. Klopt, maar niet toevallig: a en b zijn net uit het kritisch punt berekend. De echte test is elders (vraag 4).

c Teken (in Python) de isothermen voor 0, 20, 31 en 50 °C tussen v = 0,06 en 0,6 L/mol. Wat is er vreemd aan de isotherm van 20 °C?

✓ Een lus over v = np.linspace(6e-5, 6e-4, 500) met p = R*T/(v - b) - a/v**2 voor elke T. De isotherm van 20 °C heeft een stuk waar p stijgt als v stijgt: onfysisch (het gas zou instabiel zijn). In werkelijkheid ligt daar het tweefasengebied: een horizontale lijn op de dampspanning, zo gekozen dat de oppervlakken boven en onder even groot zijn (Maxwell-constructie).

d Bereken met Van der Waals de druk van 2,0 kg CO_2 in 3,0 L bij 20 °C. Waarom klopt die niet met de 57 bar op de fles?

✓ $v = 3{,}0 \cdot 10^{-3}/45{,}45 = 6{,}60 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3/mol}$, dicht bij b: $p = 209\,\mathrm{bar}$. De formule geeft één homogene toestand; echt splitst het CO_2 in vloeistof en damp, en dan staat er de dampspanning (57 bar). Van der Waals is kwalitatief sterk (hij voorspelt het vloeibaar worden) maar kwantitatief zwak bij vloeistofdichtheden.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	Beide voorwaarden correct uitgewerkt en opgelost naar vc, Tc, pc.
Getallen	Tc ≈ 304 K, pc ≈ 74 bar, vergeleken.
Isothermen	Grafiek correct; lus onder Tc herkend als onfysisch gebied (Maxwell-constructie).
Fles	Druk berekend; uitgelegd dat in het tweefasengebied de dampspanning geldt.

14.15 De zuurstofcel en het weer

Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

De zuurstofcel van S1 geeft een spanning evenredig met de partiële druk van O_2: in buitenlucht bij 1013 hPa 12,0 mV. De BME280 meet de luchtdruk. In een stormnacht zakt de luchtdruk van 1015 naar 965 hPa. Het alarm staat op 19,5 %.

a Welk percentage toont de cel zonder correctie om 965 hPa, als de lucht in orde is?

✓ $20{,}95 \cdot 965/1013 = 19{,}96\,\%$.

b Bij welke luchtdruk zou een ongecorrigeerde cel vals alarm geven?

✓ $20{,}95\,p/1013 = 19{,}5$ geeft $p = 943\,\mathrm{hPa}$: een uitzonderlijk diepe depressie, maar samen met een kleine afdrijving of een ijking op een hogedrukdag kan het.

c Schrijf de formule die het brein moet gebruiken om het echte percentage uit de spanning en de druk te halen.

✓ $x_{O_2} = 20{,}95\,\% \cdot \dfrac{U}{U_{\mathrm{ijk}}} \cdot \dfrac{p_{\mathrm{ijk}}}{p}$, met U_{ijk} en p_{ijk} de spanning en de druk bij de laatste ijking in buitenlucht.

d De cel verliest per jaar ongeveer 2 % van haar gevoeligheid. Hoe groot is de fout na 18 maanden zonder ijken? Stel een ijkprocedure voor.

> Na 18 maanden ongeveer 3 % minder signaal: $20{,}95 \cdot 0{,}97 = 20{,}32\,\%$ in gezonde lucht, al dicht bij de waarschuwing. IJken: elke drie maanden de sensor 10 minuten buitenlucht laten meten (20,95 %), U_{ijk} en p_{ijk} opslaan; de cel vervangen als het signaal onder 80 % van de nieuwwaarde zakt, of na twee jaar.

14.16 Ontwerp: ventilatie tegenover vocht in de winter

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 50 min

Op koude dagen droogt de ventilatie de woonmodule uit (RV ±23 % bij −8 °C). Het team overweegt: (A) minder ventileren, (B) een bevochtiger van 300 W die water verdampt, (C) een WTW met enthalpiewisselaar die 50 % van het verschil in waterdampdruk tussen afgevoerde en toegevoerde lucht terugwint, (D) niets doen.

a Bereken de RV binnen bij −8 °C voor A (79 m³/h, de CO_2-grens) en C (100 m³/h).

> A: $\Delta p_{\text{w}} = 285\,\text{Pa}$ bij 79 m³/h, RV $= (302 + 285)/2333 = 25\,\%$. C: de terugwinning geeft 50 % van het verschil terug: in evenwicht $\Delta p = 225/(1 - 0{,}5) = 451\,\text{Pa}$, RV $= 32\,\%$.

b Hoeveel water per dag moet B verdampen om 40 % te halen bij 100 m³/h? Hoeveel energie kost dat (2450 kJ/kg)?

> 40 % is $933\,\text{Pa}$; er is $528\,\text{Pa}$, dus $406\,\text{Pa}$ extra. Per uur: $\Delta p\,Q/(RT) \cdot M_{\text{w}} = 300\,\text{g/h}$, of 7,2 kg per dag; energie $4{,}9\,\text{kWh}$ per dag (204 W gemiddeld).

c Welke risico's heeft elke optie (CO_2, condens, legionella, energie, onderhoud)?

> A: nauwelijks vochtiger (de lucht blijft droog) en de CO_2 zit op de grens. B: kost energie (de verdampingswarmte komt uit de verwarming), stilstaand water kan legionella en kalk geven, te veel bevochtigen geeft condens op koude plekken. C: duurder toestel, maar geen extra energie; de wisselaar moet af en toe gereinigd worden. D: droge ogen en slijmvliezen, statische elektriciteit, maar geen gevaar.

d Kies en schrijf een advies van vijf regels voor het dossier.

> Bijvoorbeeld: 'De WTW-unit krijgt een enthalpiewisselaar (vochtterugwinning ±50 %): bij −8 °C stijgt de RV van ±23 naar ±32 %. Geen bevochtiger (energie, legionella). De ventilatie blijft CO_2-gestuurd (70/100/150 m³/h); het brein toont de RV en het dauwpunt en meldt onder 25 %. Een tijdelijke droogte in koude weken aanvaarden we.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Berekening A en C	Dampbalans met en zonder terugwinning correct; RV bij −8 °C.
Bevochtiger	Benodigde waterdamp en energie correct; vergelijking met het energiebudget.
Risico's	CO_2 bij A, legionella en kalk bij B, condens op koude plekken, energie.
Advies	Onderbouwd, met getallen, en met wat het brein moet bewaken.

14.17 Debat: CO_2-bemesting in een bewoond station

Uitdagen · 8 · Argumenteren · 45 min

Stelling: 'Het station moet stoppen met CO_2 uit een fles te doseren en in de plaats de uitgeademde lucht van de woonmodule door de kweekruimte leiden.' Gebruik de getallen uit dit hoofdstuk en uit hoofdstuk 14 van I: de bewoners maken 2 kg CO_2 per dag, de planten nemen 24 g per dag op, de afgevoerde lucht van de woonmodule bevat 600 à 900 ppm.

a Verzamel drie argumenten voor en drie tegen, elk met een getal.

Voor: de bewoners maken 80 keer meer CO_2 dan de planten nodig hebben; geen flessen (geen lek van 1,1 m³ CO_2, geen bevoorrading); de warmte van de afgevoerde lucht komt de kweekruimte ook ten goede. Tegen: de lucht bevat ook waterdamp en geuren (en eventueel ziektekiemen) en de kweekruimte is al vochtig; 's nachts (planten zonder licht) is er het meeste CO_2; afgevoerde lucht van 850 ppm kan de kweekruimte nooit boven 850 ppm brengen; de WTW verliest dan zijn warmteterugwinning op die lucht.

b Bereken welk debiet afgevoerde lucht van 850 ppm de kweekruimte (11,5 m³, planten 1,5 g/h) op 800 ppm houdt.

Balans in evenwicht: $Q\,(850-800)\cdot 10^{-6} = G_{\text{planten}}$, met $G = 1{,}5\,\text{g/h} = 0{,}00082\,\text{m}^3/\text{h}$: $Q = 16\,\text{m}^3/\text{h}$: een zesde van het debiet van de woonmodule. Omdat het verschil in concentratie klein is, is er toch veel lucht nodig voor weinig CO_2.

c Neem een standpunt in en verdedig het in vijf zinnen.

Bijvoorbeeld: 'Een combinatie: overdag ±20 m³/h afgevoerde lucht van de woonmodule door de kweekruimte (vraag b), en de fles alleen als die lucht onder 850 ppm zakt of als de teler hoger wil dan 800 ppm. Zo daalt het flessenverbruik sterk, en blijft de dosering regelbaar. De waterdamp en de hygiëne (hoofdstuk 35 van I) blijven het zwakke punt, dus een filter en een vochtregeling horen erbij.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Argumenten	Voor en tegen, onderbouwd met getallen (hoeveelheden, tijdstippen, veiligheid).
Berekening	Balans correct: debiet uit G_planten / (c_in − c).
Standpunt	Helder, weegt veiligheid, planten en energie af, erkent een tegenargument.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 15

De hoofdwetten van de thermodynamica

Energie verdwijnt nooit, maar ze verliest wel aan waarde: wat dat betekent voor motoren, centrales en het station

Uitgewerkte oplossingen bij de 18 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 7× toepassen · 5× uitdagen · ± 580 min

E Energie · W Wiskundig modelleren



Wat uit een koeltoren opstijgt, is geen rook maar waterdamp: de warmte die een centrale moet lozen omdat de tweede hoofdwet het zo wil.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

15.1 Tekens in de eerste hoofdwet

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Gebruik $\Delta U = Q - W$ met $Q > 0$ als warmte naar het systeem gaat en $W > 0$ als het systeem arbeid levert. Vul in (J).

a Een gas krijgt 500 J warmte en zet uit, waarbij het 200 J arbeid levert.

✓ $Q = +500$, $W = +200$: $\Delta U = +300\,\text{J}$.

b Een fietspomp perst lucht samen met 80 J arbeid; de lucht geeft 30 J warmte af aan de pomp.

✓ $W = -80$ (arbeid op het gas), $Q = -30$: $\Delta U = -30 - (-80) = +50\,\text{J}$: de lucht warmt op.

c Een gas zet adiabatisch uit en levert 150 J arbeid.

✓ $Q = 0$, $W = +150$: $\Delta U = -150\,\text{J}$: het gas koelt af.

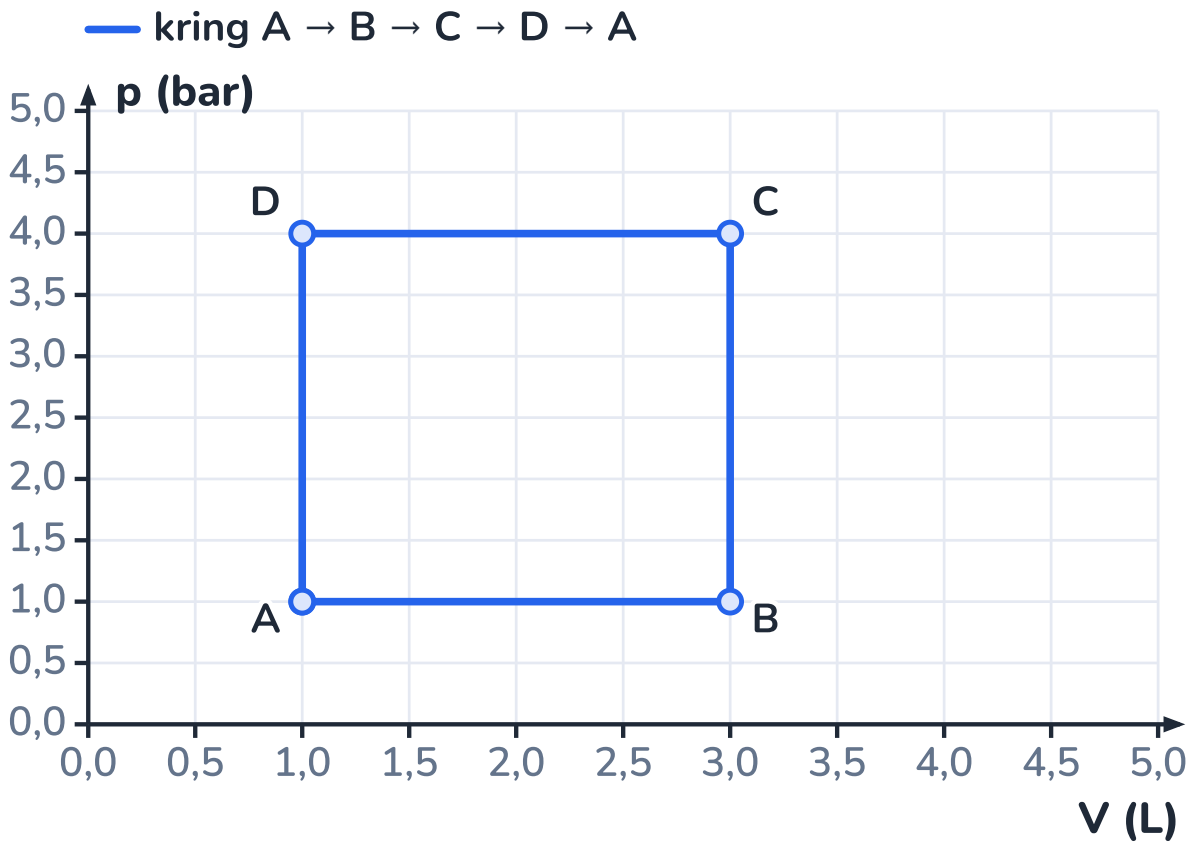
d Een kringproces neemt 1200 J warmte op en geeft 900 J af. Hoeveel arbeid levert het, en wat is ΔU over één ronde?

✓ Over een ronde $\Delta U = 0$, dus $W = Q_{\text{netto}} = 1200 - 900 = 300\,\text{J}$ (rendement 25 %).

15.2 Arbeid uit een pV-diagram

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Een gas doorloopt de rechthoekige kring in de figuur (1 bar = 10^5 Pa, 1 L = 10^{-3} m³).



Een gas doorloopt de kring A → B → C → D → A.

a Bereken de arbeid door het gas op elk van de vier stukken.

✓ A → B: isobaar bij 1 bar, $W = 1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = +200\,\text{J}$; B → C: isochoor, 0; C → D: isobaar bij 4 bar, $W = 4 \cdot 10^5 \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) = -800\,\text{J}$; D → A: isochoor, 0.

b Hoeveel netto arbeid per ronde? Loopt de kring als motor of als warmtepomp?

✓ Netto $200 - 800 = -600\,\text{J}$: de omgeving levert 600 J aan het gas. De kring loopt tegen de klok in (uitzetten bij lage druk, samenpersen bij hoge): een warmtepomp of koelmachine. Andersom doorlopen is het een motor die 600 J levert, de oppervlakte $2\,\text{L} \cdot 3\,\text{bar}$.

c Als het een ideaal gas is: in welk hoekpunt is de temperatuur het hoogst, en hoeveel keer hoger dan in A?

✓ $T \sim pV$: in C ($4 \cdot 3 = 12$ tegenover $1 \cdot 1 = 1$ in A): 12 keer zo hoog.

15.3 De vier processen voor één mol lucht

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Eén mol lucht ($c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma = 1{,}4$) start bij 300 K. Bereken Q, W en ΔU (J).

a Isochoor opwarmen tot 400 K.

✓ $Q = 2079$, $W = 0$, $\Delta U = 2079\,\text{J}$.

b Isobaar opwarmen tot 400 K.

✓ $Q = 2910$, $W = 831$, $\Delta U = 2079\,\text{J}$.

c Isotherm uitzetten tot het dubbele volume.

✓ $Q = 1729$, $W = 1729$, $\Delta U = 0\,\text{J}$.

d Adiabatisch uitzetten tot het dubbele volume. Wat is de eindtemperatuur?

✓ $T_2 = 300 \cdot 2^{-0{,}4} = 227{,}4\,\text{K}$; $Q = 0$, $W = nc_v(T_1 - T_2) = 1510\,\text{J}$, $\Delta U = -1510\,\text{J}$.

15.4 Rendementen

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Bereken het Carnot-rendement (temperaturen in kelvin!) en vergelijk met het echte rendement als dat gegeven is.

a Een kerncentrale: stoom van 285 °C, koelwater van 25 °C; echt 33 %.

✓ $1 - 298{,}15/558{,}15 = 46{,}6\,\%$: echt 71 % van Carnot.

b Een thermo-elektrische generator op een houtkachel: 250 °C tegenover 30 °C; echt ±4 %.

✓ $1 - 303{,}15/523{,}15 = 42{,}1\,\%$: de generator haalt maar een tiende daarvan (halfgeleiders zijn slechte motoren).

c Een motor die de warmte van de oceaan (25 °C aan het oppervlak, 5 °C op 1000 m diep) gebruikt (OTEC).

✓ $1 - 278{,}15/298{,}15 = 6{,}7\,\%$: heel weinig. Een OTEC-centrale moet enorme hoeveelheden water verpompen voor een beetje arbeid; de pompen zelf eten een groot deel op.

d Waarom verhoogt het rendement meer als je de koude kant 10 K kouder maakt dan als je de hete kant 10 K warmer maakt?

✓ $\eta = 1 - T_\text{c}/T_\text{h}$: $\partial\eta/\partial T_\text{c} = -1/T_\text{h}$ en $\partial\eta/\partial T_\text{h} = T_\text{c}/T_\text{h}^2$. Omdat $T_\text{c} < T_\text{h}$ is $1/T_\text{h} > T_\text{c}/T_\text{h}^2$: een graad aan de koude kant is meer waard. Daarom zijn koeltorens en koud koelwater belangrijk.

15.5 Entropie berekenen

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Gebruik $\Delta S = Q/T$ (constante T), $\Delta S = mc\ln(T_2/T_1)$ en $\Delta S = nR\ln(V_2/V_1)$.

a 0,5 kg water van 20 °C wordt opgewarmd tot 100 °C. Bereken ΔS van het water.

✓ $0{,}5 \cdot 4186 \cdot \ln(373{,}15/293{,}15) = 505\,\text{J/K}$.

b Daarna verdampt het bij 100 °C (2257 kJ/kg). Bereken ΔS.

✓ $0{,}5 \cdot 2\,257\,000/373{,}15 = 3024\,\text{J/K}$: verdampen wint veel meer entropie dan opwarmen.

c 2 mol gas zet isotherm uit van 10 L tot 50 L. Bereken ΔS van het gas. Als het gebeurt door een klep te openen naar een lege ruimte (vrije expansie, Q = 0), wat is dan ΔS van het gas en van de omgeving?

> ✓ $\Delta S = 2 \cdot 8{,}314 \cdot \ln 5 = 26{,}8\,\mathrm{J/K}$. Bij vrije expansie is de eindtoestand dezelfde, dus ook $\Delta S_{\text{gas}} = +26{,}8\,\mathrm{J/K}$ (toestandsgrootheid), maar de omgeving verandert niet ($Q = 0$): de totale entropie stijgt met 26,8 J/K. Bij het omkeerbare isotherme proces verliest de omgeving evenveel als het gas wint: totaal 0.

15.6 Kan dit?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Zeg telkens of het kan volgens de hoofdwetten, en waarom (een zin).

a Een schip vaart op de warmte van het zeewater: het pompt water binnen, haalt er warmte uit en loost het ijskoud.

> ✓ Nee: arbeid uit één warmtebron zonder een koudere bron is een perpetuum mobile van de tweede soort (Kelvin-Planck).

b In een warme kamer zet je de deur van de koelkast open om de kamer te koelen.

> ✓ Nee: de koelkast pompt de warmte uit haar binnenkant naar het rooster achteraan, in dezelfde kamer, en voegt de warmte van haar motor toe. De kamer wordt warmer.

c Een verkoper belooft een warmtepomp die bij 0 °C buiten 20 kW warmte levert voor 1 kW stroom, met water van 35 °C.

> ✓ Nee: het maximum is $T_{\text{h}}/(T_{\text{h}} - T_{\text{c}}) = 308/35 = 8{,}8$ (hoofdstuk 16); 20 kan niet, zelfs een perfecte machine haalt maar 8,8 kW.

d Een zonnepaneel zet 22 % van het licht om in elektriciteit, meer dan een 'Carnot-rendement' zou toelaten met een omgeving van 20 °C en een paneel van 50 °C.

> ✓ Het kan: een zonnepaneel is geen warmtemotor. Het zet het licht rechtstreeks om (elk foton maakt een elektron-gatpaar), niet via warmte van het paneel. De bovengrens volgt uit de 'temperatuur' van het zonlicht (±5800 K) en de fysica van de halfgeleider (de grens van Shockley en Queisser, ±33 % voor één laag silicium).

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

15.7 Labo: arbeid wordt warmte met loodhagel

Toepassen · 7 · Labo · 50 min

Voer de proef met de loodhagel uit het handboek uit (of met koperhagel, c = 385 J/(kg·K)). Werk in een team: één persoon keert, één telt, één meet.

a Noteer de temperatuur na 0, 25, 50, 75 en 100 keer omkeren, en de valhoogte.

> ✓ Voorbeeld: 0: 20,4 °C, 25: 22,0 °C, 50: 23,4 °C, 75: 24,8 °C, 100: 26,1 °C; ideaal 7,2 K per 100 keer.

b Zet ΔT uit tegen het aantal en bepaal de helling. Vergelijk met gh/c.

> ✓ Helling ±0,057 K per omkering tegenover $gh/c = 9{,}81 \cdot 0{,}95/129 = 0{,}072$ K.

c Welk deel van de arbeid wordt warmte van de hagel? Noem drie oorzaken van het verschil en hoe je ze kleiner maakt.

> ✓ Ongeveer 79 %. Oorzaken: warmte naar de buis en de lucht (een dunwandige, isolerende buis gebruiken), afkoelen tijdens het meten (sensor in de buis laten), de hagel valt niet altijd over de volle hoogte (snel en recht omkeren), een deel van de energie gaat in geluid en in de buis bij de klap.

d Waarom hangt de temperatuurstijging niet af van de massa hagel? Waarom geeft koper een kleinere stijging?

✓ Arbeid $Nmgh$ en warmte $mc\Delta T$ zijn allebei evenredig met m: $\Delta T = Ngh/c$. Koper heeft een drie keer grotere c: drie keer minder stijging.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Vijf punten, valhoogte gecorrigeerd voor de dikte van de laag, beginwaarde na evenwicht.
Verwerking	Grafiek met rechte, helling vergeleken met gh/c.
Interpretatie	Verhouding berekend; verliezen naar buis en lucht, afkoelen tijdens meten, onvolledige val.
Veiligheid	Lood in een gesloten zakje, handschoenen, handen wassen.

15.8 Een dieselmotor samenpersen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een cilinder van een dieselmotor bevat 0,50 L lucht van 1,0 bar en 20 °C. De compressieverhouding is 18. Neem aan dat het samenpersen adiabatisch is (γ = 1,4).

a Bereken de druk en de temperatuur aan het eind van het samenpersen.

✓ $p_2 = 18^{1{,}4} = 57\,\text{bar}$; $T_2 = 293{,}15 \cdot 18^{0{,}4} = 932\,\text{K}$ (658 °C).

b Bereken de arbeid die de zuiger op de lucht verricht.

✓ $W_{\text{op}} = \dfrac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} = \dfrac{57{,}2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5/18 \cdot 10^{-3} - 50}{0{,}4} = 272\,\text{J}.$

c De motor draait met 2000 tpm en heeft 4 cilinders; een cilinder perst één keer samen per twee omwentelingen. Welk vermogen gaat naar het samenpersen alleen? Waar komt die energie terug?

✓ Per seconde: $4 \cdot 2000/60/2 = 66{,}7$ keer samenpersen: $18{,}1\,\text{kW}$. Die energie komt bijna volledig terug bij het uitzetten (de adiabaat van de arbeidsslag); alleen de warmte die tijdens het samenpersen naar de wand lekt, is verloren.

15.9 Een Stirling-motor met cijfers

Toepassen · 7 · Rekenen · 30 min

Een Stirling-motor bevat 0,050 mol helium (c_v = 3/2 R) tussen 900 K en 300 K; het volume verdubbelt op de hete isotherm. De kring: isotherm uitzetten bij 900 K, isochoor afkoelen tot 300 K, isotherm samenpersen bij 300 K, isochoor opwarmen tot 900 K.

a Bereken de netto arbeid per cyclus.

✓ $W = nR(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c})\ln 2 = 0{,}05 \cdot 8{,}314 \cdot 600 \cdot 0{,}693 = 173\,\mathrm{J}$.

b Bereken het rendement zonder regenerator (alle warmte bij het isochore opwarmen komt uit de bron).

✓ $Q_\mathrm{in} = nRT_\mathrm{h}\ln 2 + nc_v(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}) = 259 + 374 = 633\,\mathrm{J}$ (met $c_v = \frac{3}{2}R$ voor helium); $\eta = 27{,}3\,\%$.

c Bereken het rendement met een perfecte regenerator en vergelijk met Carnot.

✓ Met regenerator: $\eta = W/(nRT_\mathrm{h}\ln 2) = 1 - 300/900 = 66{,}7\,\%$: Carnot.

d Waarom gebruikt men helium (of waterstof) in plaats van lucht?

✓ Helium en waterstof zijn licht en hun moleculen snel: ze geleiden warmte veel beter en stromen gemakkelijk door de regenerator, zodat de motor sneller kan draaien. Helium is bovendien inert en eenatomig (hoge γ).

15.10 Code: arbeid uit een gemeten indicatordiagram

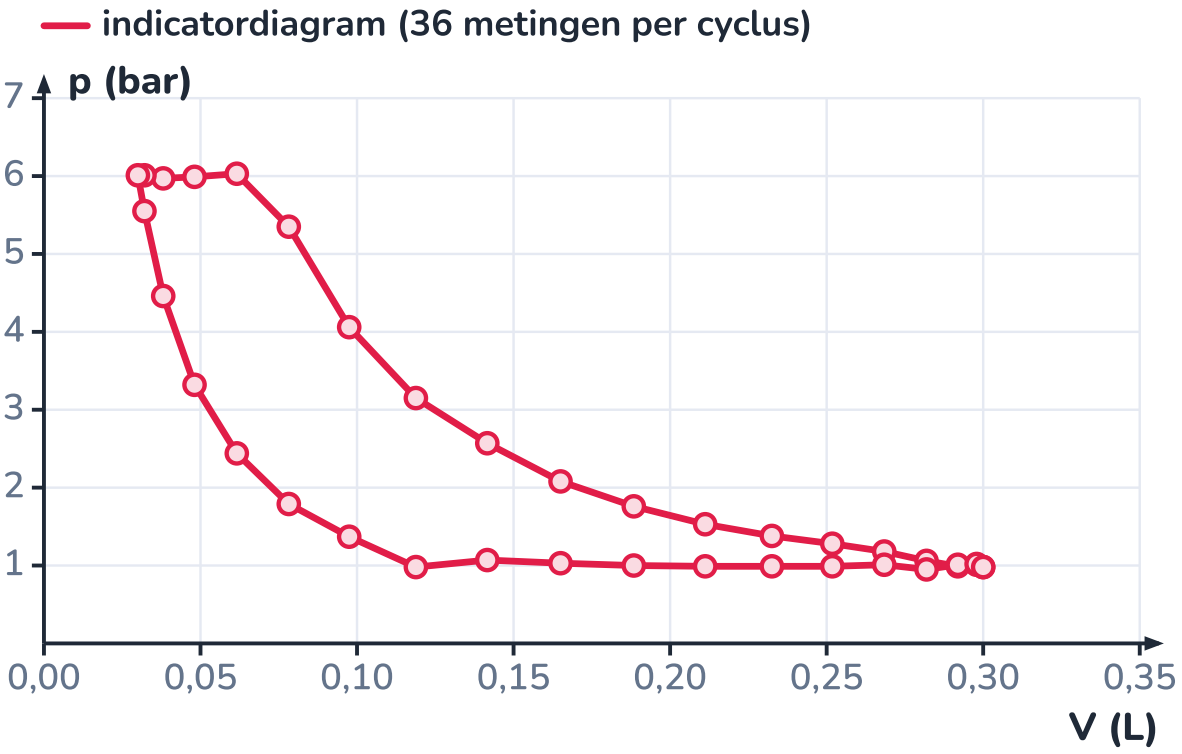
Toepassen · 7 · Programmeren · 35 min

Een drukopnemer en een hoeksensor op een kleine luchtcompressor leveren 36 punten (V, p) per omwenteling (het bestand indicator.csv bij het codeblad 'Een kringproces numeriek integreren' in het handboek, kolommen V_L;p_bar). De compressor draait met 1450 tpm. De metingen:

V (L)	0,300	0,298	0,292	0,282	0,268	0,252	0,233	0,211	0,188	0,165	0,142	0,119
p (bar)	0,98	1,01	0,99	1,06	1,18	1,28	1,38	1,53	1,76	2,08	2,57	3,15

V (L)	0,098	0,078	0,062	0,048	0,038	0,032	0,030	0,032	0,038	0,048	0,062	0,078
p (bar)	4,06	5,35	6,03	5,99	5,97	6,01	6,01	5,55	4,46	3,32	2,44	1,79

V (L)	0,098	0,119	0,142	0,165	0,188	0,211	0,233	0,252	0,268	0,282	0,292	0,298
p (bar)	1,37	0,98	1,07	1,03	1,00	0,99	0,99	0,99	1,01	0,95	1,01	1,02



Gemeten druk en volume in een kleine compressor, 36 punten per omwenteling.

a Lees het bestand in en bereken de netto arbeid per cyclus met de trapeziumregel. Let op: sluit de kring.

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np

meting = np.loadtxt("indicator.csv", delimiter=";", skiprows=1)     # kolommen: V (L), p (bar)
V = np.append(meting[:, 0], meting[0, 0]) * 1e-3    # sluit de kring: terug naar het eerste punt
p = np.append(meting[:, 1], meting[0, 1]) * 1e5
W = np.trapezoid(p, V)                              # ∮ p dV (trapeziumregel)
print(f"netto arbeid door het gas per cyclus: {W:.1f} J")
print(f"bij 1450 tpm: {abs(W) * 1450 / 60:.0f} W")
```

Uitvoer (met de meting van de figuur):

```
netto arbeid door het gas per cyclus: -37.1 J
bij 1450 tpm: 897 W
```

b Is de arbeid positief of negatief, en wat betekent dat? Hoeveel mechanisch vermogen vraagt de compressor aan het gas?

Negatief: de kring loopt tegen de klok in (samenpersen bij hoge druk, aanzuigen bij lage), het gas krijgt netto arbeid: 37,1 J per cyclus, of 897 W aan het gas (de motor levert meer, door wrijving en verliezen).

c Waarom geeft een meting met maar 36 punten per cyclus een fout, en in welke richting? Hoe controleer je dat?

De trapeziumregel vervangt de kromme tussen twee punten door een rechte. In de hoeken (kleppen die openen) verandert de druk snel: daar mist de meting details. Controle: dezelfde meting met de helft van de punten (om de twee) verwerken; verandert het resultaat nauwelijks, dan volstaan 36 punten (hoofdstuk 3: fout ~ h^2).

15.11 Een centrale en haar koelwater

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een STEG-centrale (gas- en stoomturbine) levert 400 MW elektrisch met een rendement van 58 %. De stoomturbine loost haar warmte via een condensor aan rivierwater. Een warmtekrachtkoppeling zou de stoom laten condenseren bij 90 °C voor een warmtenet; dan daalt de elektriciteit tot 360 MW.

a Hoeveel warmte gaat naar de condensor (neem aan dat 10 % van de brandstofenergie met de rookgassen weggaat)?

Brandstof $400/0{,}58 = 690\,\text{MW}$; rookgassen $69\,\text{MW}$; condensor $690 - 400 - 69 = 221\,\text{MW}$.

b Hoeveel rivierwater per seconde als het 7 °C mag opwarmen?

$\dot{m} = 221 \cdot 10^6/(4186 \cdot 7) = 7532\,\text{kg/s}$, ongeveer 7,5 m³/s.

c Met warmtekrachtkoppeling: hoeveel warmte kan het warmtenet krijgen (zelfde rookgasverlies), en welk deel van de brandstof wordt dan nuttig gebruikt?

Warmte naar het net: $690 \cdot 0{,}9 - 360 = 261\,\text{MW}$. Nuttig: $(360 + 261)/690 = 90\,\%$. Voor 40 MW minder elektriciteit komt er 261 MW nuttige warmte bij: ruim 6 keer meer, omdat warmte van 90 °C 'weinig arbeid waard' is.

15.12 Habitat: de jaarbalans en het Sankey-diagram

Toepassen · 7 · Habitat · 70 min

Gebruik jaar.py uit het handboek en de tabel met de jaarstromen. Het team wil weten wat drie keuzes veranderen: (1) 2,0 kWp extra zonnepanelen, (2) een windturbine op een plek met gemiddeld 5,0 m/s in plaats van 4,0 m/s (de windenergie wordt dan 1,89 keer zo groot, volgens de vermogenscurve), (3) de verwarming zuiniger maken: een warmtepomp met een seizoensgemiddelde COP van 4 (hoofdstuk 16).

a Pas jaar.py aan voor elke keuze afzonderlijk en noteer het tekort (net) en het overschot per jaar.

Met dezelfde maandwaarden: basis: net 175 kWh, overschot 3014 kWh, tekort in jan, dec; +2 kWp: net 12 kWh, overschot 4846 kWh, tekort in dec; wind 5 m/s: net 0 kWh, overschot 4881 kWh, tekort in geen maand; warmtepomp: net 0 kWh, overschot 3586 kWh, tekort in geen maand.

b Teken met sankey() of met de hand het Sankey-diagram van de elektriciteitsketen voor de beste variant.

Bijvoorbeeld de warmtepomp: sankey(E_in = zon + wind + net, verliezen = [overschot, omzetverlies], nuttig = verbruik + verwarming/4). De overschotband wordt nog breder, de verwarmingsband smaller.

c Waarom helpt extra zon zo weinig tegen het tekort in december? Reken het na met de maandwaarden.

In december levert 1 kWp maar $1{,}25 \cdot 31 = 38{,}8\,\text{kWh}$, in juni $3{,}54 \cdot 30 = 106{,}2\,\text{kWh}$. 2 kWp extra geeft in december 78 kWh, terwijl het tekort daar 90 kWh is: je hebt veel panelen nodig voor een kleine winst, en in de zomer groeit het overschot enorm.

d Schrijf een advies van vijf regels voor het dossier.

Bijvoorbeeld: 'Het knelpunt is december-januari, niet het jaartotaal. De warmtepomp (hoofdstuk 16) haalt het tekort weg met het minste materiaal; extra panelen helpen weinig in de winter en vergroten het zomeroverschot; een betere windplek helpt in de winter het meest, maar hangt af van het terrein. Advies: warmtepomp, en de wind op het proefterrein een jaar meten met de weermast voor we de turbine definitief plaatsen.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Varianten correct ingevoerd (kWp, windfactor, warmte/4), resultaten per maand gecontroleerd.
Tabel	Net, overschot en tekortmaanden voor alle varianten.
Sankey	Banden evenredig, labels met kWh, in = uit.
Advies	Winter als knelpunt herkend; combinatie van maatregelen onderbouwd met getallen.

15.13 Waarom stoken we? Emden nagerekend

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

In het handboek bleef de inwendige energie van de lucht in de woonmodule gelijk bij het opwarmen van 15 naar 20 °C. Reken dat precies na (ideaal gas, U = n c_v T, V = 62,4 m³, p = 1013 hPa).

a Bereken n en U van de lucht in de module bij 15 °C en bij 20 °C.

✓ $n_{15} = pV/(RT) = 2639\,\text{mol}$, $n_{20} = 2594\,\text{mol}$. $U = nc_vT = \frac{5}{2}pV = 15{,}81\,\text{MJ}$ in beide gevallen: nT blijft gelijk.

b Hoeveel mol lucht is naar buiten gegaan, en hoeveel inwendige energie namen die moleculen mee?

✓ $\Delta n = 45{,}0\,\text{mol}$ naar buiten, met gemiddeld ongeveer c_vT per mol: $272\,\text{kJ}$ (bij ±17,5 °C).

c Waar is de warmte van de verwarming dan wel gebleven? Maak een energiebalans.

✓ De warmte ($nc_p\Delta T \approx 377\,\text{kJ}$ voor de lucht alleen) verdween met de uitgeduwde lucht (haar inwendige energie én de arbeid $p\Delta V$ die ze deed om buiten plaats te maken) en ging, vooral, naar de wanden en de meubels, die de rest van de 540 kJ/K vormen. Wat we kopen is een hogere temperatuur, niet meer energie in de lucht.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

15.14 Afleiding: de adiabaat en de relatie van Mayer

Uitdagen · 8 · Analyseren · 30 min

Vertrek van de eerste hoofdwet $\mathrm{d}U = \delta Q - p\,\mathrm{d}V$ en $U = nc_vT$ voor een ideaal gas.

a Leid $c_p = c_v + R$ af door een isobaar proces te bekijken.

✓ Isobaar: $\delta Q = nc_p\,\mathrm{d}T$ en $p\,\mathrm{d}V = nR\,\mathrm{d}T$ (uit $pV = nRT$ met p constant). Eerste hoofdwet: $nc_v\,\mathrm{d}T = nc_p\,\mathrm{d}T - nR\,\mathrm{d}T$, dus $c_p = c_v + R$.

b Leid pV^γ = constant af voor een adiabatisch proces. Werk eerst in T en V, zet dan om.

✓ $\delta Q = 0$: $nc_v\,\mathrm{d}T = -\frac{nRT}{V}\mathrm{d}V$, dus $\frac{c_v}{R}\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{\mathrm{d}V}{V}$. Integreren: $\frac{c_v}{R}\ln T + \ln V = c$, of $TV^{R/c_v} = TV^{\gamma-1}$ = constant (want $R/c_v = (c_p - c_v)/c_v = \gamma - 1$). Met $T = pV/(nR)$: $pV \cdot V^{\gamma-1} = pV^\gamma$ = constant.

c Toon dat de arbeid bij een adiabatisch proces $W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$ is, (a) uit de eerste hoofdwet en (b) door $\int p\,\mathrm{d}V$ uit te rekenen.

✓ (a) $Q = 0$: $W = -\Delta U = nc_v(T_1 - T_2) = \frac{c_v}{R}(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$. (b) $p = p_1V_1^\gamma V^{-\gamma}$: $\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p_1V_1^\gamma\,\frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{1-\gamma}$: hetzelfde.

d De geluidssnelheid in een gas is $\sqrt{\gamma p/\rho}$ (geluid is zo snel dat de drukgolf adiabatisch is). Bereken ze in lucht bij 20 °C, en met $\gamma = 1$ (Newton dacht isotherm). Welke klopt met 343 m/s?

✓ $\rho = pM/(RT)$, dus $\sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/M}$: $\gamma = 1{,}4$ geeft $343\,\mathrm{m/s}$, $\gamma = 1$ geeft $290\,\mathrm{m/s}$. De adiabatische klopt; Newton zat er in 1687 15 % naast, Laplace verbeterde het in 1816.

15.15 Het rendement bij maximaal vermogen

Uitdagen · 9 · Analyseren · 45 min

Een Carnot-motor levert geen vermogen: de warmte moet zonder temperatuurverschil stromen. Een echte motor krijgt warmte van een bron bij T_h via een warmtewisselaar: $\dot{Q}_\mathrm{h} = K\,(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{hw})$, en geeft af aan T_c: $\dot{Q}_\mathrm{c} = K\,(T_\mathrm{cw} - T_\mathrm{c})$ (dezelfde geleiding K). Tussen T_hw en T_cw werkt hij omkeerbaar, met rendement $\eta = 1 - T_\mathrm{cw}/T_\mathrm{hw}$.

a Toon dat $T_\mathrm{hw} = \dfrac{T_\mathrm{h}(1-\eta) + T_\mathrm{c}}{2(1-\eta)}$ en schrijf het vermogen $P = \eta\,\dot{Q}_\mathrm{h}$ als functie van η.

✓ Omkeerbaar binnenin: $\dot{Q}_\mathrm{c} = (1-\eta)\dot{Q}_\mathrm{h}$ en $T_\mathrm{cw} = (1-\eta)T_\mathrm{hw}$. Dus $K\big((1-\eta)T_\mathrm{hw} - T_\mathrm{c}\big) = (1-\eta)K(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{hw})$, wat geeft $2(1-\eta)T_\mathrm{hw} = T_\mathrm{h}(1-\eta) + T_\mathrm{c}$. Dan $P = \eta K(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{hw}) = \dfrac{\eta K}{2}\left(T_\mathrm{h} - \dfrac{T_\mathrm{c}}{1-\eta}\right)$.

b Toon (stel $u = 1 - \eta$ en leid af) dat P maximaal is bij $\eta = 1 - \sqrt{T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}}$.

✓ Met $u = 1-\eta$: $P = \frac{K}{2}(1-u)(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}/u)$. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} = \frac{K}{2}\left(-T_\mathrm{h} + \dfrac{T_\mathrm{c}}{u} + \dfrac{(1-u)T_\mathrm{c}}{u^2}\right) = \frac{K}{2}\left(-T_\mathrm{h} + \dfrac{T_\mathrm{c}}{u^2}\right) = 0$: $u = \sqrt{T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}}$, dus $\eta = 1 - \sqrt{T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}}$.

c Controleer numeriek met Python voor 600 K en 300 K, K = 100 W/K.

✓ Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np

Th, Tc, K = 600.0, 300.0, 100.0                # K, K, W/K (dezelfde geleiding aan beide kanten)
eta = np.linspace(0.001, 1 - Tc / Th - 0.001, 20000)
Thw = (Th * (1 - eta) + Tc) / (2 * (1 - eta))   # temperatuur waarbij de machine de warmte opneemt
P = eta * K * (Th - Thw)                        # vermogen = rendement x warmtestroom
i = np.argmax(P)
print(f"max vermogen {P[i]:.1f} W bij rendement {eta[i]:.4f}")
print(f"1 - sqrt(Tc/Th) = {1 - np.sqrt(Tc / Th):.4f}, Carnot = {1 - Tc / Th:.4f}")
```

Uitvoer:

```
max vermogen 2573.6 W bij rendement 0.2929
1 - sqrt(Tc/Th) = 0.2929, Carnot = 0.5000
```

d Waarom bouwen ingenieurs toch centrales die iets beter doen dan dit rendement?

✓ Brandstof kost geld en CO_2: wie meer investeert in grotere warmtewisselaars (hogere K) en betere materialen (hogere Th), schuift richting Carnot en verbruikt minder brandstof per kWh. Het optimum is een economisch compromis; CA is het rendement als warmtewisselaars 'duur' zijn en brandstof 'gratis'.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Afleiding	Stationaire balans correct (Q̇c = (1 − η) Q̇h), Thw opgelost, P(η) opgeschreven.
Optimum	Afgeleide naar u correct, u = √(Tc/Th).
Code	Numeriek maximum gevonden en vergeleken.
Interpretatie	Afweging kosten van de warmtewisselaar tegenover brandstof; η tussen CA en Carnot.

15.16 Onderzoek: entropie en toeval

Uitdagen · 8 · Programmeren · 40 min

Het model van Paul en Tatjana Ehrenfest (1907): N moleculen in twee helften van een doos. Elke stap kies je één willekeurige molecule en zet je ze in de andere helft. In het begin zitten ze allemaal links.

a Simuleer 2000 stappen voor N = 100 en rapporteer hoe het aantal links verloopt.

Bijvoorbeeld:

```
import numpy as np

rng = np.random.default_rng(16)
N = 100                                  # moleculen, allemaal links bij de start
links = N
reeks = [links]
for stap in range(2000):                 # telkens één willekeurige molecule van helft wisselen
    if rng.random() < links / N:
        links -= 1
    else:
        links += 1
    reeks.append(links)
reeks = np.array(reeks)
print(f"na 50 stappen links: {reeks[50]}, na 200: {reeks[200]}, na 2000: {reeks[-1]}")
print(f"gemiddeld over stap 500-2000: {reeks[500:].mean():.1f}, standaardafwijking
{reeks[500:].std():.1f}")
print(f"keren dat alles terug links zat na stap 0: {(reeks[1:] == N).sum()}")
```

Uitvoer:

```
na 50 stappen links: 70, na 200: 38, na 2000: 50
gemiddeld over stap 500-2000: 51.4, standaardafwijking 5.5
keren dat alles terug links zat na stap 0: 0
```

b Wat is het gemiddelde en de spreiding na het inschommelen? Vergelijk met N/2 en √N/2.

Het aantal links schommelt rond 50 met een standaardafwijking van ongeveer √N/2 = 5, zoals een binomiale verdeling met p = ½ (hoofdstuk 6).

c Het model is omkeerbaar: elke stap kan ongedaan gemaakt worden. Waarom keert het systeem toch (bijna) nooit terug naar 'alles links'? Wat zegt dat over de tweede hoofdwet?

Van de $2^{100} \approx 10^{30}$ schikkingen is er maar één met alles links; het systeem dwaalt willekeurig rond, en bijna alle schikkingen liggen rond 50. Terugkeren kan in principe, maar zou gemiddeld 2^{100} stappen duren. De tweede hoofdwet is geen verbod, maar een overweldigende waarschijnlijkheid, die voor een mol gas absoluut wordt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Correcte stap: kans links/N dat een linkse molecule gekozen wordt.
Resultaat	Nadering tot 50, schommelingen ±5 herkend.
Interpretatie	Onomkeerbaarheid als statistiek: 2^N schikkingen, 'alles links' is er één.

15.17 Debat: elektrisch verwarmen is 100 % efficiënt

Uitdagen · 8 · Argumenteren · 40 min

Stelling van een bewoner: 'Onze noodverwarming zet 100 % van de stroom om in warmte. Beter kan niet, dus een warmtepomp is overbodig.' Gebruik de eerste en de tweede hoofdwet, en de jaarbalans van het station.

a Wat klopt er aan de stelling (eerste hoofdwet)?

Energie gaat niet verloren: een weerstand zet alle elektrische energie om in warmte in de kamer.

b Wat klopt er niet (tweede hoofdwet)? Bereken hoeveel warmte een ideale warmtepomp met 1 kWh stroom kan leveren bij 0 °C buiten en 35 °C water.

Maar elektriciteit is arbeid: je kan ermee warmte uit de buitenlucht naar binnen pompen. Ideaal: $Q_\mathrm{h}/W = T_\mathrm{h}/(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}) = 308{,}15/35 = 8{,}8$: bijna 9 kWh warmte per kWh stroom. Elektrisch verwarmen gooit dat voordeel weg: van de tweede hoofdwet uit bekeken heeft het een rendement van ongeveer 11 %.

c Neem een standpunt in voor het station, met twee getallen uit de jaarbalans.

Bijvoorbeeld: 'Voor het station telt het in de winter: de verwarming vraagt 897 kWh per jaar, bijna allemaal van november tot februari, en in december en januari is er 175 kWh tekort. Een warmtepomp met een COP van 3 à 4 haalt dat tekort weg. Het nadeel (kosten, geluid, ontdooien) is klein tegenover het voordeel, en de noodverwarming blijft als reserve.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Eerste hoofdwet	Alle elektrische energie wordt warmte: 'rendement' 100 %.
Tweede hoofdwet	Elektriciteit is hoogwaardig; COP van Carnot berekend (±8,8); verspilling van exergie.
Standpunt	Getallen: verwarming en net-tekort in de winter; afweging kosten en complexiteit.

15.18 Ontwerp: de restwarmte van het station benutten

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 50 min

Het station verliest warmte op plaatsen waar ze misschien nuttig kan zijn: het douchewater (2 bewoners × 40 L per dag, van 38 °C naar de afvoer), de ventilatielucht (al met WTW), de omvormer en de batterijen (±500 kWh per jaar), de koelkast (haar condensor). Een douchewater-warmtewisselaar (een koperen buis rond de afvoer) haalt ±50 % van het temperatuurverschil tussen afvoerwater en koud leidingwater (10 °C) terug.

a Hoeveel warmte (kWh per jaar) gaat met het douchewater verloren, en hoeveel kan de warmtewisselaar terugwinnen?

Per dag $80\,\mathrm{kg} \cdot 4186 \cdot (38 - 10) = 9{,}38\,\mathrm{MJ} = 2{,}60\,\mathrm{kWh}$; per jaar 951 kWh. Terug: ±475 kWh per jaar (en het warme water moet minder opgewarmd worden).

b Waarom is de warmte van de omvormer in de winter nuttig en in de zomer lastig? Stel een oplossing voor.

In de winter vervangt ze verwarming (ze staat binnen de schil). In de zomer moet ze extra weggeventileerd worden. Oplossing: de technische ruimte met een zomerklep rechtstreeks naar buiten ventileren (thermostaat), in de winter naar de woonruimte.

c Maak een ontwerpschets van één maatregel, met de plaats in het station en wat het brein moet meten.

Bijvoorbeeld: een verticale douchewater-warmtewisselaar onder de douche, het koude water voor de douchemengkraan stroomt erdoorheen; het brein meet de temperatuur voor en na (twee NTC's) en telt de teruggewonnen energie.

d Welke maatregel levert per euro het meeste op? Schat en beargumenteer.

De douchewater-warmtewisselaar (±475 kWh per jaar, eenvoudig, geen bewegende delen, enkele honderden euro) wint het meest per euro; de omvormerwarmte beter gebruiken kost bijna niets (een klep). Een warmtepomp op de afvoer is complexer en duurder.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Berekening	Douchewater: m c ΔT per dag en per jaar; 50 % terug.
Omvormer	Winst in de winter, last in de zomer; oplossing (ventilatie of plaats) onderbouwd.
Ontwerp	Schets met plaats, stromen en metingen.
Afweging	Kosten, eenvoud, onderhoud en opbrengst vergeleken.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 16

Warmtepompen en koelen

Warmte bergop pompen: hoe een koelkast en een warmtepomp werken, en wat ze het station besparen

Uitgewerkte oplossingen bij de 17 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 7× toepassen · 4× uitdagen · ± 555 min

E Energie · M Materie en chemie · D Ontwerpen en maken



Een buitenunit haalt warmte uit lucht van −5 °C en brengt ze op 35 °C in het verwarmingswater van het station.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen — één stap, direct toepassen

16.1 COP en energiebalans

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Gebruik Q_h = Q_c + W, COP_h = Q_h/W en COP_c = Q_c/W.

a Een warmtepomp levert 12 kWh warmte met 3,0 kWh stroom. Bereken COP_h en de warmte uit de buitenlucht.

✓ $\mathrm{COP_h} = 12/3 = 4{,}0$; uit de lucht $12 - 3 = 9\,\mathrm{kWh}$.

b Een koelkast haalt 1,2 kWh per dag uit haar binnenkant met een COP_c van 1,5. Hoeveel stroom verbruikt ze, en hoeveel warmte geeft ze af aan de keuken?

✓ $W = 1{,}2/1{,}5 = 0{,}80\,\mathrm{kWh}$ per dag; naar de keuken $1{,}2 + 0{,}8 = 2{,}0\,\mathrm{kWh}$: een koelkast verwarmt de keuken.

c Toon dat COP_h = COP_c + 1 voor dezelfde machine.

✓ $\mathrm{COP_h} = \dfrac{Q_c + W}{W} = \dfrac{Q_c}{W} + 1 = \mathrm{COP_c} + 1.$

16.2 De grens van Carnot

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Bereken de grens van Carnot (temperaturen in kelvin) en een realistische COP als de helft daarvan.

a Buitenlucht 7 °C, vloerverwarming 35 °C (verwarmen).

✓ $308{,}15/28 = 11{,}0$; realistisch ±5,5.

b Buitenlucht −10 °C, radiatoren 60 °C (verwarmen).

✓ $333{,}15/70 = 4{,}76$; realistisch ±2,4: bijna de helft van het eerste geval.

c Diepvries: binnen −18 °C, keuken 22 °C (koelen).

✓ $\mathrm{COP_c} \leq 255{,}15/40 = 6{,}4$; realistisch ±3,2.

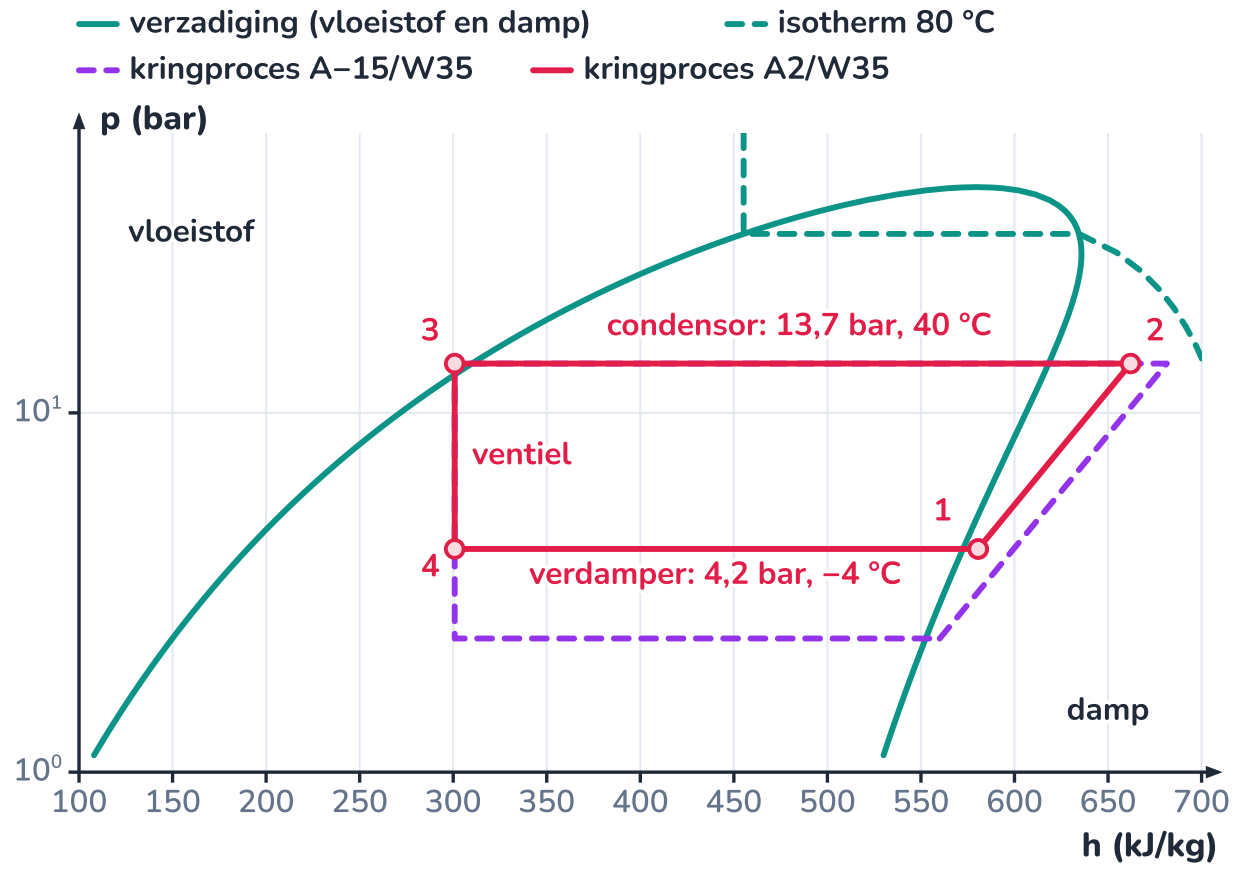
d Een airco koelt een kamer van 26 °C met buitenlucht van 35 °C.

✓ $299{,}15/9 = 33$: een klein temperatuurverschil geeft een hoge grens; echte airco's halen 3 à 5 (de warmtewisselaars hebben meer temperatuurverschil nodig).

16.3 Het kringproces lezen

Oefenen · 6 · Tekenen · 20 min

Gebruik het drukenthalpiediagram met het kringproces A2/W35 (volle lijn).



Het kringproces A2/W35 in het drukenthalpiediagram van propaan.

a Welk onderdeel hoort bij elk stuk: 1 → 2, 2 → 3, 3 → 4, 4 → 1?

✓ 1 → 2 compressor, 2 → 3 condensor, 3 → 4 expansieventiel, 4 → 1 verdamper.

b Lees de twee drukken en de enthalpieën h_1, h_2 en h_3 af (ongeveer), en bereken de COP.

✓ $p_e \approx 4{,}2\,\text{bar}$, $p_c \approx 13{,}7\,\text{bar}$; $h_1 \approx 581$, $h_2 \approx 662$, $h_3 \approx 301\,\text{kJ/kg}$. COP $\approx (h_2 - h_3)/(h_2 - h_1) = 4{,}4$.

c Waarom is 3 → 4 een verticale lijn?

✓ In het ventiel gaat er geen warmte of arbeid in of uit: de enthalpie blijft gelijk, alleen de druk valt.

d Teken in het diagram hoe het kringproces verandert als het water 55 °C moet worden (de verdamper blijft gelijk).

✓ Condenseren bij ±60 °C: de bovenste lijn schuift naar 21 bar, de compressorlijn wordt langer (meer arbeid), en punt 3 schuift naar rechts (de vloeistof is warmer): minder warmte per kg. COP ±2,9.

16.4 Koudemiddelen vergelijken

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Gebruik de tabel met koudemiddelen uit het handboek.

a Een kleine airco met R410A lekt 1,0 kg. Met hoeveel kg CO_2 komt dat overeen? En met R290?

✓ $1{,}0 \cdot 2088 = 2088\,\text{kg}$ CO_2-equivalent, zoveel als ±16 000 km met een benzinewagen (±126 g CO_2 per km, hoofdstuk 14 van I). Met R290: 3 kg.

b Waarom is CO_2 (R744) moeilijk als koudemiddel voor een warmtepomp die 35 °C water maakt? Denk aan het kritisch punt.

De kritische temperatuur van CO_2 is 31 °C: boven die temperatuur condenseert het niet. Een CO_2-warmtepomp geeft haar warmte af als superkritisch gas dat geleidelijk afkoelt (transkritische kring), bij 80 à 120 bar. Dat werkt goed om heel warm water te maken (de gaskoeler kan het water sterk opwarmen), minder goed voor lauw water.

c Waarom staat de koelkring met propaan buiten, en wat zijn de regels rond de buitenunit?

Propaan is zeer brandbaar (A3) en zwaarder dan lucht. Een monobloc houdt het buiten, zodat een lek niet in het station komt. Rond de unit: een veiligheidszone zonder vonken, kelderopeningen, putten of afvoerroosters waarin het gas zich kan verzamelen; werk aan de kring alleen door een erkende technicus.

16.5 Graaddagen en jaarverbruik

Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Een gewone woning verliest 180 W/K. Neem de normale graaddagen van Synergrid (basis 16,5 °C, Ukkel): 2187 per jaar. De warmtepomp haalt een SCOP van 3,8, een gasketel een rendement van 95 %.

a Schat de warmtevraag per jaar met de graaddagenmethode.

$Q = H \cdot 24\,\mathrm{h} \cdot DD = 180 \cdot 24 \cdot 2187 = 9448\,\mathrm{kWh}$.

b Hoeveel kWh stroom verbruikt de warmtepomp? Hoeveel kWh aardgas de ketel?

Warmtepomp $9448/3{,}8 = 2486\,\mathrm{kWh}$; gasketel $9448/0{,}95 = 9945\,\mathrm{kWh}$ aardgas.

c Aardgas (0,20 kg CO_2 per kWh) tegenover stroom (rekenwaarde 0,15 kg CO_2 per kWh): hoeveel CO_2 per jaar voor elk?

Gas: $9945 \cdot 0{,}20 = 1989\,\mathrm{kg}$; warmtepomp: $2486 \cdot 0{,}15 = 373\,\mathrm{kg}$ CO_2 per jaar: 81 % minder.

d Waarom geeft de graaddagenmethode voor het station veel te veel (hoofdstuk 15)?

De basis 16,5 °C veronderstelt dat de interne winst het huis maar tot 16,5 °C brengt. Het station heeft 533 W winst op 50 W/K: het verwarmt pas onder 9,3 °C.

16.6 Waar of niet?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Zeg of de uitspraak klopt en verbeter ze als ze niet klopt.

a Een warmtepomp werkt niet meer onder 0 °C, want dan zit er geen warmte meer in de lucht.

Niet waar: lucht van −10 °C (263 K) bevat nog veel inwendige energie. Zolang het koudemiddel kouder verdampt (bv. bij −16 °C), stroomt er warmte in. Wel daalt de COP.

b In de verdamper wordt het koudemiddel warmer dan de buitenlucht.

Niet waar: het koudemiddel moet kouder zijn dan de lucht, anders stroomt de warmte niet naar het koudemiddel. Het verdampt bij ongeveer 6 K onder de luchttemperatuur.

c Het expansieventiel koelt het koudemiddel door er warmte uit te halen.

Niet waar: in het ventiel gaat er geen warmte in of uit. De druk valt, een deel verdampt, en de verdampingswarmte daarvoor komt uit het koudemiddel zelf: dat koelt af.

d Hoe groter de warmtepomp, hoe beter.

Niet waar: een te grote warmtepomp pendelt bij zacht weer (aan en uit), dat verlaagt de COP en verkort de levensduur. Kies het vermogen voor de ontwerptemperatuur, met een buffervat.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

16.7 Labo: de COP van een koelkast meten

Toepassen · 7 · Labo · 60 min

Voer de proef van het handboek uit met een kleine koelkast en een energiemeter. Meet ook de temperatuur van het rooster achteraan (condensor) en, als het kan, van de verdamper binnenin.

a Noteer je metingen.

Voorbeeld: leeg 4 h 0,10 kWh; met 6 L water 4 h 0,16 kWh, water 21 → 7 °C.

b Bereken de warmte uit het water, het extra verbruik en de COP_c. Hoeveel warmte gaf de koelkast af aan het lokaal?

$Q_c = 6 \cdot 4186 \cdot 14 = 352\,\text{kJ}$; extra $0{,}06\,\text{kWh} = 216\,\text{kJ}$; $\text{COP}_c = 1{,}63$. Naar het lokaal: $352 + 216 = 568\,\text{kJ}$ (bovenop wat ze leeg al afgaf).

c Bereken de grens van Carnot met de temperaturen van verdamper en condensor. Welk deel haalt de koelkast?

Met −17 °C en 40 °C: $256{,}15/57 = 4{,}5$; de koelkast haalt ±36 %.

d Noem drie fouten in de meting en hoe ze de COP beïnvloeden.

(1) De glazen of plastic flessen en de binnenwanden koelen mee af: de echte warmte is groter, de COP hoger. (2) De koelkast was aan het eind nog niet klaar met afkoelen (niet stationair): het extra verbruik loopt nog door. (3) Een energiemeter van het stopcontact meet kleine energieën onnauwkeurig (±0,01 kWh = 17 % van 0,06 kWh). Ook de deur even openen of een warmere keuken tijdens de tweede meting verstoren.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Referentiemeting leeg en meting met water, zelfde duur; temperaturen begin en eind.
Berekening	Q = m c ΔT, extra verbruik, COP_c, warmte naar het lokaal (Q + W).
Carnot	Temperaturen in kelvin, verhouding echt/Carnot.
Kritiek	Flessen en lucht koelen mee af, deur, niet-stationaire toestand, onzekerheid energiemeter.

16.8 Een kringproces bij vorst doorrekenen

Toepassen · 7 · Rekenen · 30 min

De warmtepomp werkt bij −7 °C buiten (A−7/W35): het koudemiddel verdampt bij −13 °C en condenseert bij 40 °C. Het model geeft: $p_e = 3{,}12\,\text{bar}$, $p_c = 13{,}72\,\text{bar}$, $h_1 = 569{,}8$, $h_2 = 671{,}6$, $h_3 = h_4 = 300{,}8\,\text{kJ/kg}$; dichtheid van de damp aan de zuigkant $6{,}73\,\text{kg/m}^3$.

a Bereken q_c, w, q_h en de COP van het kringproces. Vergelijk met A2/W35 (COP 4,43).

$q_c = 269{,}0$, $w = 101{,}9$, $q_h = 370{,}8\,\text{kJ/kg}$; COP $= 3{,}64$, tegenover 4,43: de compressor moet meer werk doen per kg.

b Hoeveel koudemiddel (g/s) en welk compressorvermogen zijn nodig voor 2,5 kW warmte?

$\dot{m} = 2500/370\,848 = 6{,}74\,\text{g/s}$; $P = \dot{m}\,w = 687\,\text{W}$.

c Hoeveel liter damp per seconde moet de compressor aanzuigen? Vergelijk met A2/W35 voor dezelfde 2,5 kW. Wat betekent dat voor het maximale vermogen?

✓ $\dot{V} = \dot{m}/\rho_1 = 1{,}00\,\mathrm{L/s}$; bij A2/W35: $0{,}78\,\mathrm{L/s}$. Bij vorst moet de compressor 29 % meer volume verplaatsen voor dezelfde warmte: met een vast slagvolume daalt het maximale vermogen.

16.9 Code: een seizoens-COP met de binmethode

Toepassen · 7 · Programmeren · 35 min

Vereenvoudigd rekenjaar in vijf klassen (bins) voor het station, met de COP van WP-1 met de stooklijn:

buitentemperatuur (°C)	−6	−2	2	6	10
uren per jaar	180	520	900	1100	900
COP (model)	3,45	3,77	4,19	5,46	6,91

Warmtevraag per uur: Q = max(0; 50 · (20 − T) − 533) W.

a Schrijf een programma dat per bin de warmte en de elektriciteit berekent en daarna de SCOP (zonder hulpenergie).

✓ Bijvoorbeeld:

```
bins = [(-6, 180, 3.45), (-2, 520, 3.77), (2, 900, 4.19), (6, 1100, 5.46), (10, 900, 6.91)]
Q = E = 0.0
for T, uren, cop in bins:
    q = max(0.0, 50 * (20 - T) - 533)     # W
    Q += q * uren / 1000                   # kWh
    E += q / cop * uren / 1000
print(f"warmte {Q:.0f} kWh, stroom {E:.0f} kWh, SCOP {Q / E:.2f}")
```

Resultaat: warmte 946 kWh, stroom 230 kWh, SCOP 4,11.

b Welke bin levert de meeste warmte? Waarom niet de koudste?

✓ Warmte per bin: −6 °C: 138 kWh; −2 °C: 295 kWh; 2 °C: 330 kWh; 6 °C: 183 kWh; 10 °C: 0 kWh. De bins rond 2 °C wegen het zwaarst: veel uren met een flinke vraag. De koudste bin heeft de grootste vraag per uur, maar weinig uren.

c Tel 20 W circulatiepomp bij voor alle uren met warmtevraag. Hoeveel daalt de SCOP?

✓ Hulpenergie: $20\,\mathrm{W} \cdot 2700\,\mathrm{h} = 54\,\mathrm{kWh}$ (bij 10 °C is er geen vraag). SCOP $= 946/(230 + 54) = 3{,}33$.

16.10 Bodem of lucht?

Toepassen · 7 · Analyseren · 30 min

Het team twijfelt tussen WP-1 (lucht) en een pekel-waterwarmtepomp met een horizontale collector op 1,5 m. Neem aan dat de pekel 3 K kouder is dan de grond. Grond: gemiddeld 11,5 °C, amplitude 8,0 K aan het oppervlak, d = 2,83 m, koudst half januari aan het oppervlak.

a Bereken de grondtemperatuur op 1,5 m begin februari (dag 35) en half maart (dag 75).

✓ $T = \bar{T} - A_0 e^{-z/d}\cos(\omega(t - 20) - z/d)$: dag 35: $7{,}0\,^\circ\mathrm{C}$; dag 75: $7{,}2\,^\circ\mathrm{C}$ (het minimum valt rond dag 51).

b Bereken met het model de COP bij water van 35 °C op die momenten, en vergelijk met lucht van 3 °C (een gewone februaridag).

✓ Pekel $4{,}0$ en $4{,}2\,^\circ\mathrm{C}$: COP $4{,}28$ en $4{,}31$ (zonder ontdooien). Lucht van 3 °C: $3{,}84$ (met ontdooien).

c De warmtevraag van het station is maar 897 kWh per jaar. Loont een bodemcollector? Weeg af met twee argumenten.

Het verschil in COP is op een gewone winterdag klein, en de jaarlijkse stroom is al laag (±285 kWh): de besparing is hooguit enkele tientallen kWh per jaar. Daartegenover staan graafwerk voor ±50 à 70 m² collector en een grond die niet meer vrij bruikbaar is (moestuin!). Voor het station niet de moeite; voor een groot gebouw of op een koude afgelegen plek wel.

16.11 Past het op de omvormer?

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een bewoner wil in de winter ook een elektrische kookplaat van 1,5 kW (cos φ = 1) gebruiken terwijl de warmtepomp op vol vermogen draait (1,16 kW, cos φ 0,98), samen met de koelkast (0,15 kW, 0,70) en de rest (0,30 kW, 0,95). De drukpomp (0,75 kW, 0,81) kan elk moment aanslaan. Omvormer 4,0 kVA.

a Bereken P, Q en S zonder en met de drukpomp.

Zonder drukpomp: P = 3,11 kW, Q = 0,49 kvar, S = 3,15 kVA. Met drukpomp: P = 3,86 kW, Q = 1,03 kvar, S = 4,00 kVA.

b Hoeveel stroom trekt de omvormer bij 46 V uit de batterij in het zwaarste geval?

$I = P/(\eta U) = 3863/(0{,}93 \cdot 46) = 90\ \text{A}$.

c Stel een regel voor die het brein toepast.

Met de drukpomp zit de omvormer precies op de grens van 4,0 kVA: geen marge. Regel: als de kookplaat aan staat, beperkt het brein de warmtepomp tot 60 Hz (het buffervat en de trage vloer overbruggen dat) en schakelt de noodverwarming niet in; de drukpomp krijgt voorrang.

16.12 Habitat: kies een warmtepomp voor het station

Toepassen · 7 · Habitat · 80 min

Het team moet de keuze van de warmtepomp vastleggen in het dossier. Gebruik seizoen.py, de COP- en vermogenslijnen en de jaarbalans van hoofdstuk 15. Randvoorwaarden: warmteverlies 50 W/K, ontwerp −8 °C, koudegolf −15 °C, noodverwarming 2 kW als reserve, omvormer 4,0 kVA, buitenunit op dempers type E, zo min mogelijk stroom in december en januari.

a Welk vermogen moet de warmtepomp minstens hebben bij −15 °C (zonder winst), en welk vermogen heeft WP-1 daar? Is het bivalentiepunt voldoende laag?

Minstens $50 \cdot 35 = 1750\ \text{W}$ bij −15 °C; WP-1 levert daar $2486\ \text{W}$ (90 Hz, stooklijn). Het bivalentiepunt ligt lager dan −15 °C: de noodverwarming is alleen reserve.

b Pas seizoen.py aan voor een aanvoer van 45 °C bij −8 °C (radiatoren in plaats van vloerverwarming) en rapporteer de SCOP en het jaarverbruik.

In stooklijn() 20 + 15 · (20 − Tb)/28 vervangen door 20 + 25 · (20 − Tb)/28 (45 °C bij −8 °C) en de bovengrens op 50 °C. Resultaat met hetzelfde model: SCOP ±2,79, ±321 kWh per jaar (tegenover 3,15 en 285 kWh): lauwe afgifte loont.

c Stel een fiche op voor het dossier: type, koudemiddel, vermogen, COP-lijn, stooklijn, buffervat, jaarverbruik, piekvermogen, plaats, dempers, regels voor de noodverwarming.

Bijvoorbeeld: 'Warmtepomp WP-1: lucht-water monobloc, R290 (±0,5 à 1 kg), 4 kW-klasse: 5,3 kW bij A7/W35 (90 Hz), 2,5 kW bij A−15; COP 4,6 (A7/W35), 3,7 (A2/W35), 3,3 (A−7/W35), 2,9 (A−15/W35). Stooklijn 35 °C bij −8 °C, 25 °C vanaf 9 °C; vloerverwarming woonmodule, ventiloconvector module; buffervat 100 L. Jaarverbruik ±285 kWh (SCOP 3,1); piek 476 W bij −8 °C, 696 W bij −15 °C; hoogstens ±1163 W bij zacht weer. Buitenunit 60 kg op 4 dempers type E, flexibele aansluitingen, aan de gevel weg van de slaapruimte, veiligheidszone voor propaan. Noodverwarming 2 kW alleen bij storing, nooit samen met warmtepomp vol en drukpomp.'

d Wat moet het brein meten om te weten of de warmtepomp goed werkt? Noem minstens vier grootheden en een alarm.

> Aanvoer- en retourtemperatuur (NTC's) en het waterdebiet (of vaste pompstand) geven de geleverde warmte; een kWh-meter op de voeding het elektrische vermogen; samen de COP live. Verder: buitentemperatuur en RV (voorspellen van ijsvorming), aantal starts per uur (pendelen), ontdooibeurten. Alarm: aanvoer onder 20 °C terwijl er warmte gevraagd wordt, of een COP die dagenlang 30 % onder het model ligt (verstopte verdamper, koudemiddellek).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Vermogen	Ontwerpvermogen 1750 W bij −15 °C vergeleken met de capaciteit (2486 W); bivalentiepunt onder −15 °C.
Simulatie	Stooklijn correct aangepast; lagere SCOP en hoger verbruik gerapporteerd en verklaard.
Fiche	Volledig, met getallen uit het hoofdstuk en een onderbouwde plaats.
Bewaking	Aanvoer- en retourtemperatuur, elektrisch vermogen, geleverde warmte (COP live), buitentemperatuur, ontdooibeurten; alarm bij te lage COP of te lage aanvoer.

16.13 IJs op de verdamper en het dauwpunt

●●○ Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

De lamellen van de verdamper zijn ongeveer 4 K kouder dan de lucht. Gebruik de formule van Magnus (hoofdstuk 14) voor het dauwpunt boven water. Drie winterdagen: (a) 4 °C en 90 % RV, (b) 0 °C en 85 %, (c) −10 °C en 80 %.

a Bereken voor elke dag het dauwpunt van de lucht en de temperatuur van de lamellen. Condenseert er water, en bevriest het?

> (a) dauwpunt 2,5 °C, lamellen 0 °C: condens, net geen ijs (rijp aan de koudste plekken); (b) dauwpunt −2,2 °C, lamellen −4 °C: rijp; (c) dauwpunt −12,8 °C, lamellen −14 °C: rijp, maar weinig.

b Bereken hoeveel waterdamp (g/m³) de lucht hoogstens verliest als ze afkoelt tot de lamellentemperatuur, voor de drie dagen. Welke dag geeft het meeste ijs?

> In de lucht tegenover verzadigd bij de lamellentemperatuur: (a) $5{,}72 - 4{,}85 = 0{,}87\,\mathrm{g/m^3}$; (b) $4{,}12 - 3{,}66 = 0{,}46\,\mathrm{g/m^3}$; (c) $1{,}89 - 1{,}74 = 0{,}15\,\mathrm{g/m^3}$. Dag (a) zet het meeste water af, maar het blijft grotendeels vloeibaar; bij (b) bevriest alles wat neerslaat: de meeste rijp. Dag (c) zet bijna niets af.

c Waarom is de 'knik' in de COP-lijn rond 0 à 5 °C en niet bij de koudste temperaturen?

> Koude lucht bevat weinig waterdamp: bij −10 °C valt er per m³ maar weinig af te zetten. Rond 0 à 5 °C is de lucht vochtig én liggen de lamellen onder 0 °C: de meeste rijp, en dus het meeste ontdooien.

●●● Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

16.14 Afleiding: de COP van Carnot uit de entropie

●●● Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

Een warmtepomp neemt per cyclus Q_c op bij T_c, krijgt arbeid W en geeft Q_h af bij T_h. Zelf keert ze terug naar dezelfde toestand.

a Schrijf de entropiebalans van de omgeving en leid $\mathrm{COP}_\mathrm{h} \le T_\mathrm{h}/(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c})$ af.

> De koude bron verliest $Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c}$, de warme kant wint $Q_\mathrm{h}/T_\mathrm{h}$; de machine zelf verandert niet. Tweede hoofdwet: $\dfrac{Q_\mathrm{h}}{T_\mathrm{h}} - \dfrac{Q_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} \ge 0$, met $Q_\mathrm{c} = Q_\mathrm{h} - W$: $\dfrac{Q_\mathrm{h}}{T_\mathrm{h}} \ge \dfrac{Q_\mathrm{h} - W}{T_\mathrm{c}}$, dus $W \ge Q_\mathrm{h}\left(1 - \dfrac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}}\right)$ en $\dfrac{Q_\mathrm{h}}{W} \le \dfrac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}}$.

b Toon dat de minimale arbeid om warmte Q_h te leveren gelijk is aan $Q_\mathrm{h}\,(1 - T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h})$. Wat is de betekenis van die factor (hoofdstuk 15, exergie)?

> Dat is dezelfde ongelijkheid: $W_\mathrm{min} = Q_\mathrm{h}(1 - T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h})$. De factor $1 - T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}$ is het Carnot-rendement: de exergie van warmte bij T_h in een omgeving van T_c. Een warmtepomp levert precies de 'waarde' van de warmte als arbeid, niet haar hoeveelheid.

c Bereken de minimale arbeid om het station bij −8 °C een uur te verwarmen (1400 W, binnen 20 °C). Vergelijk met WP-1.

> $W_\mathrm{min} = 1{,}4\,\mathrm{kWh} \cdot (1 - 265{,}15/293{,}15) = 134\,\mathrm{Wh}$ (COP 10,5). WP-1 met water van 35 °C vraagt $1400/3{,}28 = 426\,\mathrm{Wh}$: 3,2 keer meer, omdat het water 15 K warmer is dan de kamer en het koudemiddel kouder dan de lucht, plus alle verliezen.

16.15 Onderzoek: waar gaat de COP verloren?

Uitdagen · 9 · Programmeren · 50 min

Gebruik kringproces.py. Vertrek van A2/W35 zoals in het handboek (verdampen bij −4 °C, condenseren bij 40 °C, η_is = 0,70) en onderzoek telkens één verandering.

a Bereken de COP van het kringproces met η_is = 0,70; 0,80 en 1,00 (een ideale compressor).

> COP (kringproces): η_is = 0,70: 4,43, η_is = 0,80: 4,92, η_is = 1,00: 5,90.

b Maak de warmtewisselaars beter: verdampen bij −2 °C en condenseren bij 38 °C (elk 2 K dichter bij lucht en water). Hoeveel wint dat?

> Verdampen bij −2 en condenseren bij 38 °C: COP 4,90 tegenover 4,43: +10 %.

c Vergelijk alles met Carnot tussen lucht en water (2 en 35 °C). Maak een 'verliesboom': welk deel van het verschil gaat naar de warmtewisselaars, de compressor en het smoren?

> Carnot lucht → water: 9,34. Carnot tussen −4 en 40 °C: 7,12 (het verlies door de temperatuurverschillen van de wisselaars). Ideale kring (η_is = 1) tussen −4 en 40 °C: 5,90 (het verschil met 7,12 is het smoren in het ventiel en de oververhitting van de damp). Met η_is = 0,70: 4,43 (de compressor). Het grootste verlies zit hier in de wisselaars en de compressor.

d Waarop zou jij als ontwerper eerst inzetten, en waarom?

> Bijvoorbeeld: eerst de afgifte (lagere aanvoertemperatuur: gratis, als de vloerverwarming groot genoeg is), dan grotere wisselaars (eenmalige kost, geen slijtage), dan een betere compressor (duur, beperkt door de techniek). Het smoorverlies kan een ejector of een expander deels terugwinnen, maar dat loont pas bij grote installaties.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	cyclus() correct aangeroepen met de verschillende parameters.
Resultaten	COP-waarden juist en in een tabel.
Verliesboom	Ideale kring (η_is = 1) tussen −4 en 40 °C tegenover Carnot tussen dezelfde temperaturen: het smoorverlies; daarna de compressor; daarna de temperatuurverschillen.
Afweging	Kosten en grootte van de wisselaars tegenover de compressor, met getallen.

16.16 Ontwerp: het station koelen in de zomer

Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 50 min

Hoofdstuk 15 toonde dat het station in de zomer ±1600 kWh interne winst moet kwijtraken; op een hete dag (30 °C) wordt het binnen te warm. WP-1 kan met haar 4-wegklep omkeren en de vloerverwarming koel water geven (18 °C, niet kouder: anders condensatie op de vloer). Op zo'n dag is de warmtevraag negatief: het station wint 50 W/K × 6 K plus 533 W interne winst plus ±400 W zon door de ramen (schatting).

a Hoeveel koelvermogen is nodig om het station op 24 °C te houden bij 30 °C buiten?

✓ $50 \cdot 6 + 533 + 400 = 1233\ \mathrm{W}$.

b Schat de COP van koelen met Carnot (verdampen 5 K onder het water, condenseren 8 K boven de lucht) en de helft daarvan. Hoeveel stroom per uur?

✓ Verdampen bij 13 °C, condenseren bij 38 °C: $\mathrm{COP_c} \leq 286{,}15/25 = 11{,}4$; realistisch ±5,7. Stroom: $1233/5{,}7 = 215\ \mathrm{W}$, per uur ±215 Wh.

c Waarom mag het koelwater niet onder het dauwpunt van de binnenlucht zakken? Welk dauwpunt heeft lucht van 24 °C en 60 %?

✓ Een vloer onder het dauwpunt wordt nat (glad, schimmel). Dauwpunt bij 24 °C en 60 %: $15{,}8\ ^\circ\mathrm{C}$; de aanvoer van 18 °C ligt daar ruim boven. Bewaking: het brein berekent het dauwpunt uit de SHT31 en houdt de aanvoer minstens 2 K hoger.

d Stel twee maatregelen voor die de koelvraag kleiner maken voor je koelt, en een regel voor het brein.

✓ Zonwering (buitenzonwering of overstek boven de ramen: ±400 W minder), 's nachts ventileren met koele buitenlucht (de WTW-bypass), lampen en toestellen overdag beperken. Regel: eerst zonwering en nachtventilatie; koelen alleen als het binnen boven 25 °C gaat en de aanvoer boven dauwpunt + 2 K blijft.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Koelvermogen	Transmissie + interne winst + zon correct opgeteld.
COP	Carnot met de koudemiddeltemperaturen, realistische COP, stroom per uur.
Condens	Dauwpunt berekend (Magnus), aanvoer minstens 1-2 K erboven; RV-sensor als bewaking.
Maatregelen	Zonwering, nachtventilatie (koele nachtlucht), minder interne winst; regel met dauwpunt.

16.17 Debat: een warmtepomp voor een afgelegen station

●●● Uitdagen · 8 · Argumenteren · 40 min

Het station moet later ook op een afgelegen, kouder plek werken (f01), zonder net en met bevoorrading om de 30 dagen. Stelling: 'Daar is een warmtepomp te riskant: als ze uitvalt, bevriest het station. Gewoon elektrisch verwarmen met extra zonnepanelen is robuuster.'

a Verzamel drie argumenten voor en drie tegen, met getallen uit dit hoofdstuk en hoofdstuk 15.

✓ Voor de warmtepomp: een derde van de stroom; kleinere piek (696 W in plaats van 1750 W bij −15 °C); minder panelen en batterij nodig. Tegen: bewegende delen, een koelkring die alleen een specialist kan herstellen, ontdooien in vochtig weer, geluid; bij extreme kou daalt de COP. Voor elektrisch: eenvoudig, onderdelen in de doos, geen koudemiddel. Tegen: in de donkerste maand driemaal meer stroom, dus veel meer panelen of batterij.

b Bereken hoeveel extra zonnepanelen (kWp, aan 60°) elektrisch verwarmen in december zou vragen tegenover de warmtepomp, met de warmtevraag van december uit het rekenjaar en 1,25 Wh per Wp per dag.

✓ December vraagt 196 kWh warmte (rekenjaar Ukkel), 6,32 kWh per dag. Elektrisch: 6,32 kWh per dag, met de warmtepomp (COP ±3) ±2,11. Verschil ±4,21 kWh per dag = 4211 Wh per dag, dus $4211/1{,}25 = 3369\ \mathrm{Wp}$: zo'n 3,4 kWp extra panelen (en op een koudere plek meer).

c Neem een standpunt in, met een plan voor als de warmtepomp uitvalt.

✓ Bijvoorbeeld: 'Wel een warmtepomp, maar met een reserveplan: de noodverwarming van 2 kW blijft en wordt automatisch ingeschakeld als de aanvoer onder 20 °C zakt; het buffervat en de goede isolatie (tijdconstante 3 uur, hoofdstuk 39) geven tijd; reservedelen voor ventilator, pomp en sensoren liggen in het station; het brein meldt een dalende COP vroeg. Een koudemiddellek herstellen wacht tot de bevoorrading, want de noodverwarming kan het station alleen warm houden.'

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Argumenten	Voor en tegen, met getallen: stroom, piek, onderhoud, reservedelen, koudemiddel.
Berekening	Decemberwarmte, stroom met en zonder warmtepomp, panelen uit 1,25 Wh/Wp/dag.
Standpunt	Helder, met een reserveplan (noodverwarming, buffer, onderdelen, bewaking).

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 17

Warmteoverdracht kwantitatief

Van wandlagen tot een digitale tweeling met twee tijdschalen

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 380 min

E Energie · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Dezelfde installatie heeft een snel reagerende luchttemperatuur en veel trager water en bouwmateriaal.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

17.1 Eenheden en tekens

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een wand verliest energie aan koudere buitenlucht.

a Onderscheid q, Q en Q met een tijdstip erboven (warmtestroom). Geef eenheden.

✓ q is flux in W/m²; Q is overgedragen energie in J; $\dot{Q}$ is vermogen in W. Een oppervlakte is nodig om van flux naar totaal vermogen te gaan.

b T neemt van binnen naar buiten af. Verklaar het minteken in Fourier.

✓ De gradiënt dT/dx is negatief. Vermenigvuldigen met −λ maakt de warmtestroom in de positieve buitenrichting positief; warmte gaat van warm naar koud.

17.2 Dikte en oppervlakte

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een plaat heeft d = 0,10 m, λ = 0,040 W/(m·K), A = 8,0 m² en ΔT = 20 K.

a Bereken R en vermogen.

✓ R = 0,10/(0,040·8) = 0,3125 K/W. $\dot{Q}$ = 20/0,3125 = 64 W.

b Bepaal het vermogen als de dikte verdubbelt en de oppervlakte halveert.

✓ R stijgt met factor 2/(1/2) = 4 tot 1,25 K/W. Vermogen wordt 16 W, een kwart. Het temperatuurverschil is gelijk gebleven.

17.3 Convectie of straling

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een klein oppervlak A = 0,50 m² op 40 °C ziet grote omgeving en lucht op 20 °C, ε = 0,90, hconv = 5,0 W/(m²K).

a Bereken beide vermogens met absolute temperaturen.

✓ Convectie: 5,0·0,50·20 = 50 W. Straling: $0{,}90\cdot\sigma\cdot0{,}50(313{,}15^4-293{,}15^4)$ = 56,93 W. Totale afgifte is de som.

b Leg uit waarom $40^4 - 20^4$ fout is.

✓ Een Celsiusnulpunt is willekeurig; straling hangt af van absolute thermische energie. De vierde macht maakt het optellen van 273,15 essentieel.

17.4 Tijdconstante uit capaciteit

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een kast heeft C = 120 kJ/K, H = 10 W/K; buiten 5 °C, start 25 °C, verwarming uit.

a Bereken τ en T na één τ.

✓ τ = 120000/10 = 12000 s = 3,333 h. T(τ) = 5 + 20/e = 12,36 °C.

b Bereken de tijd tot 10 °C.

✓ 10−5 = 20 exp(−t/τ). t = τ ln 4 = 16636 s = 4,621 h. Afkoelen tot exact 5 °C vergt in het ideale model oneindig veel tijd.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

17.5 Parallelle bruggen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een wand van 30 m² heeft 85 % met U = 0,20 en 15 % met U = 0,70 W/(m²K). Binnen 20 °C, buiten −8 °C.

a Bereken Ueff en verlies; vergelijk met de wand zonder brug.

✓ Ueff = 0,85·0,20 + 0,15·0,70 = 0,275 W/(m²K); verlies 0,275·30·28 = 231 W. Zonder brug 168 W; 37,5 % meer.

b Toon waarom een oppervlaktegewogen gemiddelde van R' geen correcte U geeft.

✓ Gemiddeld R' = 0,85·5 + 0,15·(1/0,70) = 4,464 m²K/W; omkeren geeft U = 0,224, te laag. De twee paden zien hetzelfde ΔT en hun warmtestromen moeten optellen.

17.6 Ventilatiebudget

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een ruimte ventileert 80 m³/h; ρ = 1,2 kg/m³ en cp = 1005 J/(kgK), ΔT = 25 K. De warmtewisselaar haalt 80 %.

a Bereken verlies met en zonder terugwinning.

✓ V̇ = 80/3600 m³/s. H = 26,8 W/K, dus zonder terugwinning 670 W. Met 80 % wordt H = 5,36 W/K en verlies 134 W.

b Bereken energiebesparing over 12 uur en benoem een weggelaten term.

✓ Besparing 536 W·12 h = 6,432 kWh warmte. Ventilatorenergie, latente warmte en veranderingen in rendement zijn weggelaten; elektrische besparing hangt ook van de verwarmings-COP af.

17.7 Twee balansen, één totale energie

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Module: Ca = 80000 J/K, Cb = 1100000 J/K, H = 20,2 W/K, G = 30 W/K. Ta = 18 °C, Tbuf = 24 °C, Tb = 4 °C, P = 500 W.

a Bereken beide afgeleiden in K/h.

✓ Lucht: 500−20,2·14−30(18−24) = 397,2 W. dTa/dt = 397,2/80000·3600 = 17,874 K/h. Buffer: 30(18−24) = −180 W; dTbuf/dt = −180/1100000·3600 = −0,5891 K/h.

b Controleer de totale energiestroom en verklaar het teken van de bufferafgeleide.

✓ 397,2−180 = 217,2 W = 500−282,8. De buffer koelt af omdat ze warmte aan de lucht levert. Grote luchtstijgsnelheid geldt alleen op dit tijdstip; verlies en koppeling veranderen meteen.

17.8 Parameterproef doorrekenen

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een rekenproef geeft met 300 W een rustverschil van 15 K. Na uitschakelen halveert het verschil elke 2 h.

a Vind H, τ en C.

✓ H = 300/15 = 20 W/K. Halveringstijd = τ ln 2, dus τ = 2/ln2 = 2,885 h = 10387 s. C = Hτ = 207,75 kJ/K.

b De buitenlucht warmt tijdens de proef op. Leg de mogelijke fout uit en verbeter de proef.

✓ Een constante Tb aannemen terwijl buiten opwarmt maakt de koelcurve minder steil en kan een te grote τ geven. Meet Tb(t), neem die in de balans op en fit de volledige respons; voer daarna een andere proef uit als validatie.

17.9 Euler heeft een stabiliteitsgrens

●●● Uitdagen · 9 · </> Programmeren · 25 min

Gebruik de twee-knoopcode uit het handboek; de modes staan in de echte uitvoer.

a Leid de Eulerfactor 1+sΔt af en bepaal een theoretische bovengrens voor Δt.

✓ Voor ż = sz geldt znieuw = zoud + Δt·s·zoud = (1+sΔt)zoud. Voor reële negatieve s moet −1 < 1+sΔt < 1, dus Δt < −2/s. De snelste mode geeft 3105 s.

b Vergelijk 5, 10, 60 en 600 s voor een 24 h-proef. Noteer verschil tegen 5 s en controleer ook de eerste tien minuten.

✓ Maak basis = simuleer(dt=5), roep de functie aan met elke stap en interpoleer basis[:,1] op de nieuwe tijdstippen met np.interp. Rapporteer max(abs(T−Tref)), niet alleen laatste waarde. 10 s verschilt op het eind 0,000132 K; 600 s kan stabiel zijn maar de snelle start verkeerd benaderen.

c Leg uit waarom een nauwkeurige eindwaarde nog geen nauwkeurige respons bewijst.

✓ Het evenwicht volgt uit een algebraïsche balans en kan met grote stappen toch goed uitkomen. Tijdtotdrempel, pieken en regelgedrag hangen van de tussenliggende waarden af.

17.10 Een model dat niet te identificeren is

●●● Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Je meet alleen Ta in rust, met onbekende zonnewinst; Tbuf wordt niet gelogd.

a Beschrijf minstens drie parametercombinaties of storingen die dezelfde luchttemperatuur kunnen geven.

✓ Een groter H en grotere warmtewinst kunnen hetzelfde rustpunt geven; Ca en Cb hebben op een rustpunt geen effect; in rust is Ta=Tbuf zodat G uit de balans verdwijnt. Eén constante temperatuur bevat dus onvoldoende informatie.

b Ontwerp een proefreeks die H, Ca, G en Cb beter onderscheidt; leg meetduur en extra sensoren uit.

✓ Meet buiten, lucht en buffer, log netto convectorvermogen en zon. Geef gekende pulsen gedurende een snelle periode en lange verwarmings-/koelperiodes voor de trage mode. Gebruik meerdere beginsituaties met Ta≠Tbuf. Een nacht vermindert onbekende zon; een toetsnacht blijft buiten de fit.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Systeemgrens, knopen, eenheden en energiebalansen correct.
Bewijs	Rekenwaarden, stapgroottecontrole en onafhankelijke meetreeks expliciet.
Ontwerp	Capaciteit en vermogen onderscheiden; veiligheid en grenzen benoemd.

17.11 Habitat: ontwerp de thermische tweeling

●●● Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

Het stationreferentiemodel blijft 50 W/K en 540 kJ/K. De klimaatmodule krijgt het twee-knoopmodel; verwarming maximaal 800 W. Setpoint 20 °C; ontwerp buiten −8 °C. Neem geen zon of interne winst als gegarandeerd.

a Bereken rustvraag van module en station en reserve van de moduleconvector.

Module 20,2·28 = 565,6 W; reserve 234,4 W. Station 50·28 = 1400 W. Woonmodule afgerond (50−20,2)·28 = 834,4 W. De 2 kW-noodverwarming heeft 600 W stationreserve.

b Teken knopen, verliespaden en warmtebronnen zonder de module tweemaal mee te rekenen.

Teken modulelucht, modulebuffer met G = 30 W/K, buitenpad H = 20,2 W/K; woonmodule heeft eigen buitenpad 29,8 W/K. Verdeel totale verwarmingswarmte over de twee ruimtes. Een alleenstaande 50 W/K-referentieknoop is een alternatief model, geen extra fysische ruimte.

c Beschrijf invoer, uitvoer, meetperiode, validatie en veilige terugval bij een ongeldige voorspelling.

Log in UTC+1: T buiten, Ta, Tbuf en gemeten warmtevermogen met duidelijke eenheden. Modelstap 10 s, meetlog bijvoorbeeld 60 s; toets eerst sensorvertraging. Beoordeel afwijkingen op onafhankelijke nachten. Bij grote residuen gebruik je de lokale thermostaat en veiligheidslimieten, alarm, geen extra vermogen buiten hardwaregrenzen.

d Bepaal hoeveel bufferenergie 5 K afkoeling vrijmaakt en waarom dit geen onbeperkte reserve is.

1,10 MJ/K·5 K = 5,50 MJ = 1,528 kWh. Bij 565,6 W is dat theoretisch 2,70 h, maar het vermogen uit de buffer daalt wanneer het temperatuurverschil kleiner wordt. De lucht moet bovendien in een comfortband blijven.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Systeemgrens, knopen, eenheden en energiebalansen correct.
Bewijs	Rekenwaarden, stapgroottecontrole en onafhankelijke meetreeks expliciet.
Ontwerp	Capaciteit en vermogen onderscheiden; veiligheid en grenzen benoemd.

17.12 Een isolatieclaim beoordelen

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 25 min

Een leverancier schrijft: 'De waterbuffer halveert het jaarlijkse warmteverlies en de reflectiefolie vervangt 160 mm isolatie.'

Beoordeel beide claims met balans, stralingspad en tijdschalen. Geef aan welke meting nodig is.

Een buffer verschuift energie in de tijd; zonder lagere verliezen of nuttig opgevangen overschot verlaagt ze de jaarlijkse warmtevraag niet. Ze kan een warmtepomp rustiger laten werken, wat een afzonderlijk rendementseffect is. Folie kan straling over een spleet verminderen maar geleiding, convectie en koudebruggen blijven bestaan. Vergelijk een volledige wandopbouw met gelijke binnen-/buitenvoorwaarden en meet U; vergelijk jaarbalansen en hulpenergie voor de buffer. Beide absolute claims missen noodzakelijke randvoorwaarden.

E EXPERT · DEEL E3 · THERMODYNAMICA EN STROMING

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 18

Stroming van vloeistoffen en gassen

Van continuïteit tot een leidingnet met een werkelijk werkpunt

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 425 min

E Energie · K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Een goed totaaldebiet moet ook in vier bruikbare gootstromen terechtkomen.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

18.1 Debiet omzetten

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

In 40 s vang je 3,0 L op uit een slang D = 12 mm.

Bereken Q in L/min en m³/s en de gemiddelde snelheid.

Q = 0,075 L/s = 4,50 L/min = $7{,}50 \cdot 10^{-5}$ m³/s. A = π·0,012²/4 = $1{,}131 \cdot 10^{-4}$ m². v = Q/A = 0,663 m/s.

18.2 Twee diameters

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Stationair water stroomt zonder aftakking uit een 20 mm-buis in een 10 mm-buis.

Bepaal de snelheidsverhouding en het effect op de druk bij horizontale verliesloze stroming.

De doorsnede wordt een kwart, snelheid verviervoudigt. Bernoulli geeft lagere statische druk in de smalle buis doordat kinetische energie per volume stijgt. Het totale energiehoofd blijft gelijk.

18.3 Regime bepalen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Water $\nu = 10^{-6}$ m²/s, D = 5 mm; vergelijk v = 0,10 en 1,0 m/s.

Bereken Re en selecteer een passend verliesmodel.

Re = 500 en 5000. Eerst laminair: f = 64/500 = 0,128. Tweede doorgaans turbulent; voor gladde buis Blasius f = $0{,}3164 \cdot 5000^{-1/4}$ = 0,0376. Controleer buistype en ingang.

18.4 Drukhoogte en vermogen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een pomp voegt H = 20,0 m toe bij Q = 8,0 L/min. Water $\rho = 1000$ kg/m³.

Bereken druk en hydraulisch vermogen.

$\Delta p = \rho g H = 196200$ Pa = 1,962 bar. Q = 8/60000 m³/s; $P = \rho g Q H = 26{,}16$ W. Elektrisch vermogen is hoger als $\eta < 1$.

Toepassen Toepassen

meerdere stappen, in een context

18.5 Darcyverlies in een slang

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

L = 6,0 m, D = 10 mm, Q = 3,0 L/min; glad, water $\nu = 10^{-6}$ m²/s, totaal K = 4.

a Bereken v, Re, f en hL.

v = 0,6366 m/s, Re = 6366. Blasius f = 0,03542. $h_L = (f \cdot 600 + 4) \cdot v^2/(2g) = 0{,}522$ m.

b Voeg 2 m geometrische hoogte toe en bereken PH.

H = 2+hL. $P = \rho g Q H = 1{,}237$ W. De pompcurve moet dit H bij 3 L/min kunnen leveren.

18.6 Poiseuille en Darcy zijn consistent

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Ontwikkelde laminaire stroming heeft Darcyfactor f = 64/Re.

a Leid met $Re = \rho v D/\mu$ en $Q = v\pi D^2/4$ af dat $Q = \pi D^4 \Delta p/(128 \mu L)$.

$\Delta p = (64\mu/(\rho v D))(L/D)(\rho v^2/2) = 32\mu L v/D^2$. Vul $v = 4Q/(\pi D^2)$ in: $\Delta p = 128\mu L Q/(\pi D^4)$. Omkeren geeft de gevraagde vorm. Met D=2R komt $\pi R^4/(8\mu L)$ terug.

b Verklaar waarom dit niet het NFT-hoofdaanvoermodel is.

De NFT-aanvoer heeft Re≈6366, doorgaans turbulent. Haar profiel en wrijvingsfactor verschillen; 64/Re onderschat het verlies.

18.7 Een hoger werkpunt zoeken

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Gebruik leidingnet.py met 16 mm-aanvoer. Verhoog de statische hoogte naar 2,0 m.

a Bereken het werkpunt en het gootdebiet met bissectie.

q,h = werkpunt(z=2.0) geeft Q = 3,234 L/min en H = 2,030 m. Elke gelijke goot krijgt 0,809 L/min.

b Waarom garandeert een maximale pomphoogte 3 m geen 4,8 L/min?

3 m is de nuldebietgrens van de curve. Bij meer Q daalt H, terwijl leidingverlies stijgt. Alleen het snijpunt levert een mogelijke combinatie.

18.8 Opvangmeting met onzekerheid

Toepassen · 7 · Labo · 45 min

Volume 4,00 ± 0,05 L, tijd 50,0 ± 0,5 s. Dit zijn onafhankelijke standaardonzekerheden.

a Bereken Q en relatieve standaardonzekerheid.

Q = 4,80 L/min. urel = sqrt((0,05/4)²+(0,5/50)²) = 0,0160. uQ = 0,0768 L/min: 4,80 ± 0,08 L/min als standaardonzekerheid.

b Ontwerp herhalingen die toevallige fout verlagen en systematische fout zichtbaar houden.

Vijf langere metingen bij gelijk niveau en U; geijkte maatbak of massa/dichtheid; elektronische klok. Middelen verkleint spreiding maar verwijdert geen schaalfout of een veranderend tankniveau.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Hydraulica	Continuïteit, drukhoogte en Darcyverlies met juiste eenheden en factor.
Werkpunt	Pomp- en systeemcurve samen gebruikt; schone en ongunstige toestand getoetst.
Verificatie	Debietproef, druk/niveau, onzekerheid en onderhoudsgrens concreet.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

18.9 Filter als storingssignaal

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Schone 16 mm-aanvoer heeft K = 2; vuilscenario K = 20. Pomp B blijft gelijk.

a Bereken beide werkpunten en procentuele debietdaling.

Schoon Q = 4,798, vuil Q = 4,416 L/min. Daling 8,0 %. De takstromen zijn bij gelijke verdeling elk een kwart.

b Ontwerp detectie die vervuiling, laag niveau en lage voedingsspanning onderscheidt.

> Log Q, tankniveau, U, I en filterdrukval. Hogere filterdrukval bij lager Q wijst op meer filterweerstand; lager niveau verlaagt aanzuigmarge; lagere U wijzigt de pompcurve. Vergelijk herhaalde gelijkwaardige meetvensters; alarm en inspectie, niet blind duty-cycle opvoeren.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Hydraulica	Continuïteit, drukhoogte en Darcyverlies met juiste eenheden en factor.
Werkpunt	Pomp- en systeemcurve samen gebruikt; schone en ongunstige toestand getoetst.
Verificatie	Debietproef, druk/niveau, onzekerheid en onderhoudsgrens concreet.

18.10 Parallelle verdeling reconstrueren

Uitdagen · 9 · Analyseren · 25 min

Vier takken hebben kwadratische coëfficiënten k, 2k, 3k, 4k. Gemeten totaal 4,8 L/min.

a Bereken elke takstroom.

> Verhouding 1 : 1/√2 : 1/√3 : 1/2; som 2,78446. Takstromen: 1,724, 1,219, 0,995, 0,862 L/min.

b Beschrijf inregelen en effect op totaal Q.

> Verhoog lage takweerstanden tot gelijke effectieve waarde of verlaag hoge weerstand met ruimere/kortere slang. Knijpen vergroot systeemweerstand en verlaagt doorgaans het pomptotaal. Bereken het nieuwe werkpunt en meet elke tak opnieuw.

18.11 Habitat: aanvoer met meetbaar onderhoud

Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

Behoud vier NFT-goten met doel 1,2 L/min, het 60 L-reservoir en 12 V-pomp B. Aanvoer 16 mm, 2,5 m, hoogte 1,5 m. Drinkwatertank 500 L blijft apart.

a Teken aanvoer, verdeelstuk, retour, filter, vlotter en meetplaatsen; benoem de systeemgrens.

> 60 L → ondergedompelde pomp met droogloopvlotter → geschikte filter → 16 mm-aanvoer → vier gelijke inregelbare takken → open NFT → vrije ruim bemeten retour. Meet hoofd-Q, elke uitloop, tankniveau, drukval en U/I; geen sanitaire koppeling.

b Toets schoon en ongunstig werkpunt; geef een onderhoudscriterium met meetonzekerheid.

> Schoon Q = 4,798 L/min bij 1,561 m, ongeveer 1,2 per goot. K = 20 geeft 1,104 L/min per goot. Reinig bij herhaald tekort ten opzichte van een vooraf biologisch gevalideerde minimumgrens plus onzekerheidsmarge. Bijvoorbeeld 1,10 L/min is een ontwerpvoorstel, geen al vastgelegde biologische limiet.

c Bereken pompverbruik bij 10 min per uur en geef maatregelen voor veiligheid en beschikbaarheid.

> 24·10/60 = 4 h/dag. 12 W·4 h = 48 Wh/dag. Vlotter onderbreekt ook zonder Pi, zekering en droge verbindingen; bereikbaar filter en reservepomp; voldoende retour en overloop tegen lekkage.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Hydraulica	Continuïteit, drukhoogte en Darcyverlies met juiste eenheden en factor.
Werkpunt	Pomp- en systeemcurve samen gebruikt; schone en ongunstige toestand getoetst.
Verificatie	Debietproef, druk/niveau, onzekerheid en onderhoudsgrens concreet.

18.12 Toerentalregeling beoordelen

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 50 min

Bij geometrisch gelijk gedrag van een centrifugaalpomp gelden ongeveer $Q \propto n$, $H \propto n^2$, $P \propto n^3$.

a Leid de vermogensverhouding bij 80 % toerental af.

Q∝n, Δp∝ρv²∝n². PH=QΔp∝n³; bij 0,8 n is verhouding 0,8³ = 0,512. Gelijk rendement en overeenkomstige bedrijfspunten zijn aannames.

b Waarom wordt Q bij vaste hoogte 1,5 m niet automatisch 80 %?

De systeemcurve heeft een vast hoogte-intercept. Een lagere pompcurve snijdt haar op een andere plaats, niet eenvoudig een geschaalde Q. Komt maximale H onder 1,5 m, dan is Q nul. Bereken het nieuwe snijpunt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Hydraulica	Continuïteit, drukhoogte en Darcyverlies met juiste eenheden en factor.
Werkpunt	Pomp- en systeemcurve samen gebruikt; schone en ongunstige toestand getoetst.
Verificatie	Debietproef, druk/niveau, onzekerheid en onderhoudsgrens concreet.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 19

Elektrische en magnetische velden, inductie

Van Coulomb tot Faraday: velden die kracht zetten, energie opslaan en stroom opwekken

Uitgewerkte oplossingen bij de 19 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

7× oefenen · 8× toepassen · 4× uitdagen · ± 567 min

Elektriciteit en elektronica · Krachten, beweging en constructies · Wiskundig modelleren



Magneten die langs koperen spoelen draaien: zo maakt de windturbine van het station stroom.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen

één stap, direct toepassen

19.1 Twee ladingen op een lijn

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een lading van +3,0 nC staat in $x = 0$, een lading van −1,0 nC in $x = 4{,}0\,\text{cm}$.

a Hoe groot is de kracht tussen de twee ladingen? Trekken ze elkaar aan of stoten ze af?

$F = k\dfrac{|q_1 q_2|}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9 \cdot \dfrac{3 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{0{,}04^2} = 16{,}9\,\mu\text{N}$; tegengestelde tekens: ze trekken elkaar aan.

b Bereken het veld (grootte en richting) in $x = -2{,}0\,\text{cm}$.

In $x = -2\,\text{cm}$: $E_1 = k \cdot 3 \cdot 10^{-9}/0{,}02^2 = 67\,425\,\text{V/m}$ naar links (weg van de positieve lading); $E_2 = k \cdot 10^{-9}/0{,}06^2 = 2497\,\text{V/m}$ naar rechts (naar de negatieve lading). Samen $64\,928\,\text{V/m}$ naar links.

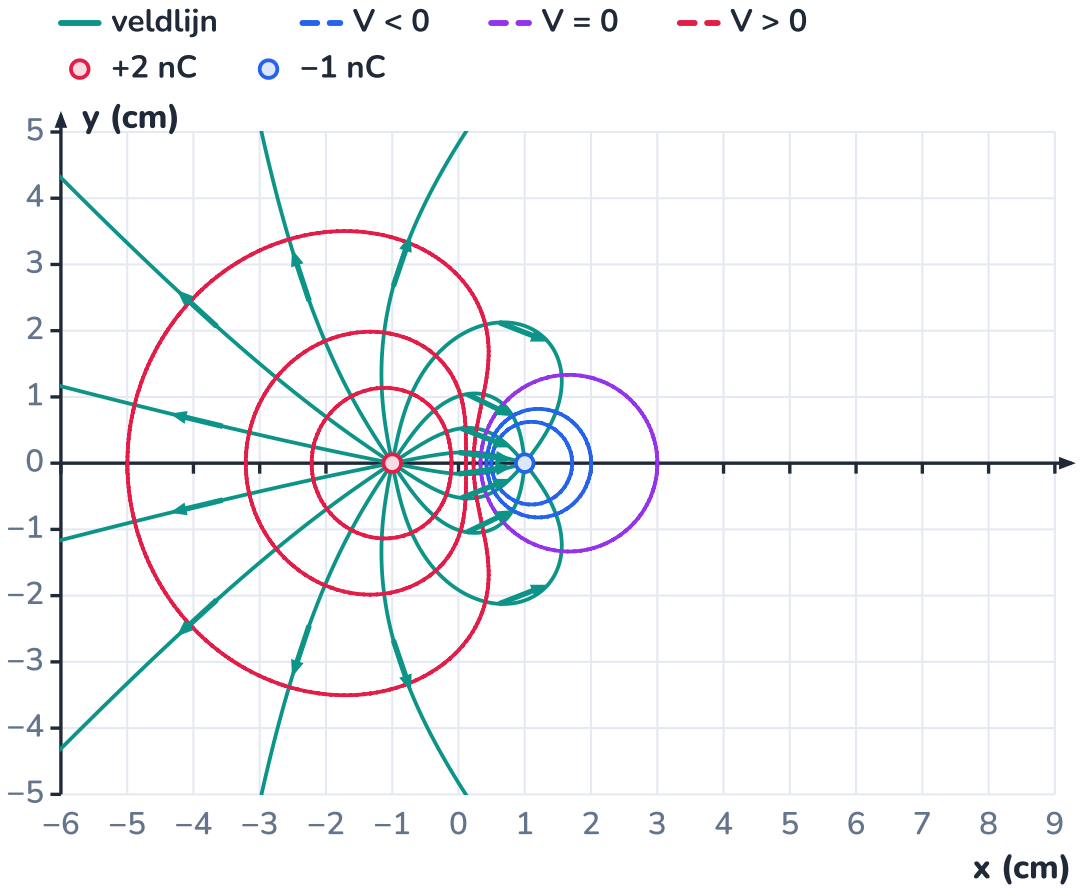
c In welk punt van de x-as is het veld nul? Leg uit waarom het daar ligt en niet tussen de ladingen.

Tussen de ladingen wijzen beide velden naar rechts: geen nul. Links van 0 overheerst altijd de grote, dichtere lading. Rechts van 4 cm wijzen ze tegen elkaar in, en de kleine lading ligt dichter: $\frac{3}{x^2} = \frac{1}{(x-4)^2} \Rightarrow \sqrt{3}(x-4) = x \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 9{,}46\,\text{cm}$.

19.2 Veldlijnen en equipotentiaallijnen lezen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

De figuur toont veldlijnen en equipotentiaallijnen van twee ladingen.



+2 nC in (−1, 0) cm en −1 nC in (1, 0) cm, berekend zoals in het handboek. Stippellijnen: −600, −300, 0, 300, 600 en 1200 V.

a Hoe zie je aan de veldlijnen dat de linkerlading groter is? Hoeveel lijnen eindigen op de rechterlading, en waarom precies zoveel?

Uit de linkerlading vertrekken zestien lijnen, en de helft daarvan eindigt op de rechterlading: 8. Het aantal lijnen is evenredig met de lading: −1 nC 'vangt' de helft van de lijnen van +2 nC; de andere helft gaat naar oneindig (in de figuur: naar de rand).

b Waar ligt ongeveer het punt waar het veld nul is? Hoe zie je dat in de figuur, en controleer met een berekening.

Rechts van de negatieve lading op de as, waar de lijnen uit elkaar wijken (sommige buigen terug naar −1 nC, andere gaan naar rechts weg): rond $x \approx 6\,\text{cm}$. Berekening: $\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow x = (\sqrt{2}+1)^2 = 5{,}83\,\text{cm}$.

c Waarom snijden veldlijnen en equipotentiaallijnen elkaar loodrecht? Hoeveel arbeid kost het om een lading langs de lijn van 0 V te verplaatsen?

Langs een equipotentiaallijn verandert V niet, dus de arbeid $q\Delta V$ is nul; dat kan alleen als de kracht loodrecht op de verplaatsing staat, dus het veld loodrecht op de equipotentiaallijn. Langs de lijn van 0 V: geen arbeid.

d De lijn van 0 V is een cirkel rond de negatieve lading. Toon aan dat alle punten met V = 0 voldoen aan $r_1 = 2\,r_2$ (r_1 en r_2: afstand tot de linker- en de rechterlading).

✓ $V = \dfrac{k \cdot 2q}{r_1} - \dfrac{kq}{r_2} = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{r_1} = \dfrac{1}{r_2} \Rightarrow r_1 = 2r_2$: een cirkel van Apollonius (de verzameling punten waarvan de afstanden tot twee vaste punten een vaste verhouding hebben).

19.3 De vlakke condensator

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Twee metalen platen van 10 cm × 10 cm staan 1,0 mm uit elkaar in lucht, aan 100 V.

a Bereken de capaciteit, de lading op elke plaat, het veld tussen de platen en de opgeslagen energie.

✓ $C = \varepsilon_0 A/d = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}01/0{,}001 = 88{,}5\,\text{pF}$; $Q = CU = 8{,}85\,\text{nC}$; $E = U/d = 100\,\text{kV/m}$; $W = \frac{1}{2}CU^2 = 0{,}44\,\mu\text{J}$.

b Je schuift er een plaat polypropyleen van 1,0 mm tussen, terwijl de bron aangesloten blijft. Wat verandert er aan C, Q, E en W?

✓ C wordt 2,2 keer groter: $195\,\text{pF}$. De bron houdt $U = 100\,\text{V}$, dus $E = U/d$ blijft 100 kV/m, Q en W worden ook 2,2 keer groter (de bron levert extra lading).

c Tot welke spanning mag je de condensator in lucht laden?

✓ Doorslag lucht ±3 kV/mm: $U_{\max} \approx 3\,\text{kV}$ (in de praktijk minder door de randen).

19.4 Het veld van een kabel en een spoel

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{T m/A}$; aardmagnetisch veld ±50 µT.

a Een losse geleider van de 48 V-kabel voert 90 A. Hoe groot is het veld op 2,0 cm en op 1,0 m? Vergelijk met het aardveld.

✓ $B = \mu_0 I/(2\pi a)$: op 2 cm $900\,\mu\text{T}$ (18 keer het aardveld), op 1,0 m $18\,\mu\text{T}$ (ongeveer een derde ervan).

b Een spoel van 500 windingen, 25 cm lang, voert 0,40 A. Hoe groot is het veld in het midden (lange spoel)?

✓ $B = \mu_0 NI/l = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}40/0{,}25 = 1{,}005\,\text{mT}$.

c Welke stroom geeft in dezelfde spoel 10 mT?

✓ $I = Bl/(\mu_0 N) = 0{,}010 \cdot 0{,}25/(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500) = 3{,}98\,\text{A}$.

19.5 De Lorentzkracht als vectorproduct

Oefenen · 7 · Rekenen · 20 min

Gebruik $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ en $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ in componenten (hoofdstuk 5).

a Een elektron beweegt met $\vec{v} = (2{,}0 \cdot 10^6;\ 0;\ 0)\,\text{m/s}$ in $\vec{B} = (0;\ 0;\ 0{,}010)\,\text{T}$. Bereken de kracht als vector en de straal van de cirkelbaan.

✓ $\vec{v} \times \vec{B} = (0 \cdot 0{,}01 - 0;\ 0 - 2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}01;\ 0) = (0;\ -2 \cdot 10^4;\ 0)$. Met $q = -e$: $\vec{F} = (0;\ 3{,}20 \cdot 10^{-15};\ 0)\,\text{N}$, langs $+y$. $r = m_e v/(eB) = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^6/(1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}01) = 1{,}14\,\text{mm}$.

b Een draadstuk $\vec{L} = (0;\ 0{,}10;\ 0)\,\text{m}$ met $I = 5{,}0\,\text{A}$ ligt in $\vec{B} = (0{,}20;\ 0;\ 0{,}10)\,\text{T}$. Bereken $\vec{F}$ en controleer dat ze loodrecht op $\vec{L}$ en op $\vec{B}$ staat.

✓ $\vec{L} \times \vec{B} = (0{,}1 \cdot 0{,}1 - 0;\ 0 - 0;\ 0 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) = (0{,}01;\ 0;\ -0{,}02)$, maal 5: $\vec{F} = (0{,}05;\ 0;\ -0{,}10)\,\text{N}$, $|\vec{F}| = 0{,}112\,\text{N}$. $\vec{F} \cdot \vec{L} = 0$ en $\vec{F} \cdot \vec{B} = 0{,}05 \cdot 0{,}2 - 0{,}10 \cdot 0{,}1 = 0$. Klopt.

19.6 Flux en inductiespanning

●○○ Oefenen · 7 · Rekenen · 15 min

Een spoel van 200 windingen met een oppervlakte van 12 cm² staat loodrecht op een veld van 0,40 T.

a Hoe groot is de flux door één winding, en NΦ?

✓ $\Phi = BA = 0{,}40 \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}$; $N\Phi = 0{,}096\,\text{Wb}$.

b Het veld valt gelijkmatig weg in 20 ms. Hoe groot is de gemiddelde emk?

✓ $|e| = N\Delta\Phi/\Delta t = 0{,}096/0{,}020 = 4{,}8\,\text{V}$.

c Het veld blijft, maar je draait de spoel in 10 ms een kwartslag tot ze evenwijdig met het veld staat. Gemiddelde emk?

✓ De flux gaat ook van $0{,}096\,\text{Wb}$ naar 0 ($\cos 90° = 0$), nu in 10 ms: $9{,}6\,\text{V}$.

d Een staaf van 0,50 m beweegt met 2,0 m/s loodrecht door hetzelfde veld. Welke emk staat over de staaf?

✓ $e = BLv = 0{,}40 \cdot 0{,}50 \cdot 2{,}0 = 0{,}40\,\text{V}$.

19.7 De ideale transformator

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 12 min

Een transformator maakt 12 V uit 230 V; de primaire heeft 1100 windingen.

a Hoeveel windingen heeft de secundaire (ideaal)?

✓ $N_2 = 1100 \cdot 12/230 = 57{,}4$, dus 57 windingen.

b Aan de secundaire hangt een weerstand die 60 W opneemt. Bereken de secundaire en de primaire stroom.

✓ $I_2 = 60/12 = 5{,}0\,\text{A}$; $I_1 = I_2\,N_2/N_1 = 60/230 = 0{,}261\,\text{A}$.

c Welke weerstand 'ziet' het net aan de primaire kant? Controleer met P = U²/R.

✓ $R_2 = 12/5 = 2{,}4\,\Omega$; $R_1 = (230/12)^2 \cdot 2{,}4 = 882\,\Omega$. Controle: $230^2/882 = 60\,\text{W}$.

●●○ Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

19.8 Veldlijnen van twee ongelijke ladingen

●●○ Toepassen · 7 · </> Programmeren · 35 min

Pas veldlijnen.py van het handboek aan voor +2,0 nC in (−1 cm; 0) en −1,0 nC in (1 cm; 0).

a Start zestien veldlijnen op 1 mm van de positieve lading (niet precies op de as) en tel hoeveel er op de negatieve lading eindigen. Voorspel de uitkomst eerst.

Voorspelling: de helft (8), omdat −1 nC de helft van de flux van +2 nC opvangt. Programma en echte uitvoer:

```
# veldlijnen2.py - +2 nC en -1 nC: hoeveel veldlijnen bereiken de negatieve lading, en waar is het
veld nul?
import numpy as np

K = 8.99e9
ladingen = [(+2e-9, np.array([-0.01, 0.0])), (-1e-9, np.array([0.01, 0.0]))]


def veld(p):
    E = np.zeros(2)
    for q, a in ladingen:
        r = p - a
        E += K * q * r / np.linalg.norm(r) ** 3
    return E


def veldlijn(start, h=0.0002, n_max=6000):
    def richting(p):
        E = veld(p)
        return E / np.linalg.norm(E)
    p = np.array(start, float)
    lijn = [p]
    for _ in range(n_max):
        k1 = richting(p)
        k2 = richting(p + h / 2 * k1)
        k3 = richting(p + h / 2 * k2)
        k4 = richting(p + h * k3)
        p = p + h / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
        lijn.append(p)
        if np.linalg.norm(p - ladingen[1][1]) < 0.001:
            return np.array(lijn), True
        if np.linalg.norm(p) > 0.30:              # 30 cm ver: deze lijn gaat naar oneindig
            return np.array(lijn), False
    return np.array(lijn), False


hoeken = np.radians(11.25 + np.arange(0, 360, 22.5))    # niet precies op de as beginnen
lijnen = [veldlijn(ladingen[0][1] + 0.001 * np.array([np.cos(a), np.sin(a)])) for a in hoeken]
aan = sum(1 for _, op in lijnen if op)
print(f"{aan} van de {len(lijnen)} lijnen eindigen op -1 nC")

a, b = 0.011, 0.20                  # nulpunt op de x-as rechts van -1 nC: bisectie op E_x
for _ in range(50):
    m = (a + b) / 2
    if veld(np.array([a, 0.0]))[0] * veld(np.array([m, 0.0]))[0] <= 0:
        b = m
    else:
        a = m
print(f"E = 0 in x = {100 * m:.3f} cm (theorie {(1 + np.sqrt(2)) ** 2:.3f} cm)")
```

```
8 van de 16 lijnen eindigen op -1 nC
E = 0 in x = 5.828 cm (theorie 5.828 cm)
```

b Zoek het punt op de x-as waar het veld nul is met bisectie op E_x, en vergelijk met de theorie.

✓ De bisectie staat in hetzelfde programma: het nulpunt ligt op 5,83 cm, zoals de theorie $(1+\sqrt{2})^2 \cdot 1\,\text{cm}$.

c Waarom mag je geen veldlijn starten die precies door dat nulpunt gaat?

✓ In het nulpunt heeft E geen richting: E/|E| deelt door nul. De veldlijn uit de richting 90° loopt precies naar dat punt en splitst daar: een scheidingslijn tussen de lijnen die op −1 nC eindigen en die die weggaan. Daarom start het programma op 11,25° + k · 22,5°.

19.9 Waarom een supercondensator geen hoge spanning verdraagt

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een datasheet van een supercondensator vermeldt: 10 F, 2,7 V, inwendige weerstand 25 mΩ, 3,4 g. Neem voor de dubbellaag d ≈ 0,5 nm en εr ≈ 8, en actieve kool met ±1500 m²/g.

a Hoeveel koolstof zou er minstens in zitten (twee elektroden in serie)?

✓ Twee elektroden in serie: elk 20 F. Per m² $0{,}142\,\text{F}$, dus $20/0{,}142 = 141\,\text{m}^2$ per elektrode, $94\,\text{mg}$ kool in theorie; met de praktische 100 F/g per elektrode 0,2 g elk, 0,4 g samen: zo'n 12 % van de massa.

b Bereken de energie, de energiedichtheid in Wh/kg en de stroom bij kortsluiting. Vergelijk met een LiFePO4-cel (±110 Wh/kg).

✓ $W = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2{,}7^2 = 36{,}5\,\text{J} = 10{,}1\,\text{mWh}$; per kg $10{,}1/3{,}4 = 3{,}0\,\text{Wh/kg}$, ruim dertig keer minder dan LiFePO4. Kortsluitstroom $2{,}7/0{,}025 = 108\,\text{A}$: dat is zijn sterkte, vermogen in plaats van energie.

c Een ontwerper wil 48 V bufferen met deze cellen. Hoeveel in serie, en welke capaciteit heeft het geheel? Welk probleem ontstaat als de cellen niet precies gelijk zijn?

✓ $48/2{,}7 = 17{,}8$, dus 18 cellen in serie: $10/18 = 0{,}56\,\text{F}$ bij 48,6 V. Cellen met een iets kleinere capaciteit of meer lekstroom krijgen een groter deel van de spanning en gaan boven 2,7 V: ze verouderen of falen. Elke cel krijgt daarom een balanceerschakeling (een parallelweerstand of een actieve schakeling).

19.10 De Hall-sensor

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

De ACS712-05B geeft 2,5 V bij 0 A en 185 mV per ampère, tot ±5 A; hij hangt aan een ADC van 10 bit op 5 V.

a Welke spanning geeft hij bij −3,0 A en bij +5,0 A? Welke ruwe ADC-waarden horen daarbij?

✓ $-3\,\text{A}$: $2{,}5 - 0{,}555 = 1{,}945\,\text{V}$, ruw $1{,}945/5 \cdot 1024 = 398$. $+5\,\text{A}$: $2{,}5 + 0{,}925 = 3{,}425\,\text{V}$, ruw 701.

b Hoe groot is de stroomstap per ADC-stap? Waarom kies je voor een pomp van 1 A deze versie en niet de 20 A-versie van het handboek?

✓ $4{,}88\,\text{mV}/185\,\text{mV/A} = 26\,\text{mA}$ per stap (bij de 20 A-versie 49 mA). Een pomp van 1 A gebruikt bij de 20 A-versie maar 20 stappen van het bereik; de 5 A-versie is bijna twee keer fijner.

c Met ruis van ±2 ADC-stappen: hoeveel metingen moet je middelen om de stroom op 10 mA nauwkeurig te kennen (hoofdstuk 6)?

✓ Ruis ±2 stappen ≈ 52 mA; middelen over N metingen deelt door $\sqrt{N}$: $52/\sqrt{N} \le 10 \Rightarrow N \ge 27$. Neem 32 metingen (en zorg dat de ruis echt toevallig is: bij PWM middel je over hele periodes, zoals A4 in de module).

19.11 Kortsluiting in de batterijkabels

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

De plus- en minkabel van de 48 V-batterij liggen naast elkaar, hartafstand 12 mm. Bij een kortsluiting vlak bij de batterij kan een LiFePO4-batterij enkele kA leveren; neem als rekenwaarde 5,0 kA.

a Leid de kracht per meter tussen twee evenwijdige stroomdraden af (veld van de ene, Lorentzkracht op de andere).

De ene draad maakt op afstand d een veld $B = \mu_0 I_1/(2\pi d)$, loodrecht op de tweede draad. Op een stuk L daarvan: $F = I_2 L B$, dus $F/L = \mu_0 I_1 I_2/(2\pi d)$.

b Bereken ze bij 90 A en bij 5,0 kA. Trekken de kabels elkaar aan of stoten ze af?

90 A: $F/L = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 90^2/0{,}012 = 0{,}135\,\mathrm{N/m}$, niets. 5,0 kA: $417\,\mathrm{N/m}$, op 2 m ruim 833 N. Tegengestelde stromen stoten af.

c Wat betekent dat voor de bevestiging van de kabels, en voor de plaats van de hoofdzekering?

De kabels worden bij een kortsluiting met honderden newton uit elkaar geslagen: bevestig ze om de paar decimeter met stevige klemmen, zodat ze niet losrukken of tegen scherpe randen slaan. De stroom moet zo snel mogelijk stoppen: de hoofdzekering hoort zo dicht mogelijk bij de pluspool, zodat de lange kabel beschermd is (zoals F6 van de meetkas, maar met een zekering die kA's kan onderbreken).

19.12 Inductie met een magneet en een spoel

Toepassen · 8 · Labo · 60 min

Voer de proef van het handboek uit (spoel van ±300 windingen, neodymiummagneet, oscilloscoop of meetinterface met minstens 5000 metingen per seconde) en toets het model.

valhoogte (cm)	eerste piek (V)	tweede piek (V)	tijd tussen de pieken (ms)	oppervlakte eerste puls (mV·s)	oppervlakte tweede puls (mV·s)
5					
10					
20					

a Laat de magneet van 5, 10 en 20 cm vallen en vul de tabel aan. Bereken de oppervlakten met de trapeziumregel.

Voorbeeld met het model van het handboek (een echte meting wijkt enkele tientallen procent af, vooral in de pieken):

H (CM)	PIEK 1 (V)	PIEK 2 (V)	ΔT (MS)	OPP. 1 (MV·S)	OPP. 2 (MV·S)
5	−0,78	0,88	12,1	−11,5	11,7
10	−1,15	1,22	8,6	−11,7	11,8
20	−1,64	1,69	6,1	−11,8	11,8

b Toon met je metingen dat de piek ongeveer evenredig is met de snelheid √(2gh). Hoe goed klopt dat?

$\sqrt{2gh}$ is 0,99, 1,40 en 1,98 m/s: verhoudingen 1 : 1,41 : 2. De pieken schalen ongeveer zo (0,88, 1,22 en 1,69 V); de tweede piek groeit iets sneller omdat de magneet in de spoel nog versnelt.

c Toon aan dat de oppervlakte van elke puls niet van de valhoogte afhangt. Wat is de betekenis ervan?

De oppervlakte is $\int e\,\mathrm{d}t = -N\Delta\Phi = N\Phi_{\max}$ (11,8 mV·s in het model), onafhankelijk van de snelheid: sneller vallen geeft een hogere maar kortere puls. (Bij 5 cm is de eerste oppervlakte iets kleiner: de magneet vertrekt al zo dicht bij de spoel dat de flux bij de start niet nul is.) Het is de maximale flux die de magneet door de spoel stuurt, dus een maat voor de magneet zelf: zo meet men magneten met een 'fluxmeter'.

d Wat verandert er als je de spoel kortsluit met 10 Ω? Verklaar met de wet van Lenz en een energiebalans.

Nu loopt er stroom in de spoel; die werkt de verandering van de flux tegen (Lenz): een afstotende kracht bij het naderen, een aantrekkende bij het verlaten. De magneet valt trager door de spoel, de pulsen worden lager en breder. De bewegingsenergie die hij minder krijgt, wordt warmte in de 10 Ω en in de spoel.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Pulsen correct gemeten en getriggerd; tabel volledig met eenheden; oppervlakte met de trapeziumregel.
Model	Piek evenredig met √h getoetst (grafiek of verhouding); oppervlakte = NΦmax herkend als invariant.
Verklaring	Lenz en energiebalans correct: de stroom remt de magneet, de verloren bewegingsenergie wordt warmte.
Kritiek	Afwijkingen verklaard (magneet geen punt, buiswrijving, bemonsteringsfrequentie, trigger).

19.13 Het relais uitschakelen

Toepassen · 8 · Analyseren · 25 min

Een relaisspoel van 12 V heeft als rekenwaarden $R = 160\,\Omega$ en $L = 0{,}40\,\mathrm{H}$; het relais valt af onder 20 % van de nominale stroom. Een MOSFET (tot 55 V) schakelt het.

a Bereken de stroom, de tijdconstante en de energie in de spoel.

$I = 12/160 = 75\,\mathrm{mA}$; $\tau = L/R = 2{,}5\,\mathrm{ms}$; $W = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}075^2 = 1{,}12\,\mathrm{mJ}$.

b Welke spanning zou er zonder vrijloopdiode ontstaan als de MOSFET de stroom in 1 µs lineair onderbreekt? Wat gebeurt er echt?

$u = L\,\Delta i/\Delta t = 0{,}40 \cdot 0{,}075/10^{-6} = 30\,\mathrm{kV}$. In werkelijkheid stijgt de spanning tot de MOSFET doorslaat (avalanche) en de energie opneemt, of tot er een vonk overspringt: op den duur gaat de transistor stuk.

c Hoe lang duurt het afvallen met een vrijloopdiode (0,7 V), en met een diode en een zener van 24 V in serie? Welke spanning ziet de MOSFET dan?

Met $t = \tau \ln \dfrac{I_0 + U_k/R}{0{,}2 I_0 + U_k/R}$: diode ($U_k = 0{,}7\,\mathrm{V}$): $3{,}53\,\mathrm{ms}$; diode + zener ($U_k = 24{,}7\,\mathrm{V}$): $0{,}76\,\mathrm{ms}$. De MOSFET ziet dan $12 + 24{,}7 = 36{,}7\,\mathrm{V}$, onder de 55 V.

19.14 De valbuis

Toepassen · 8 · Analyseren · 30 min

Een neodymiummagneet van 20 g valt door drie rechtopstaande buizen van 1,00 m met dezelfde afmetingen. Na enkele centimeter valt hij met een constante snelheid (behalve in pvc).

buis (1,00 m, zelfde maten)	valtijden (s)
pvc	0,46 · 0,45 · 0,46
aluminium (legering, σ = 3,2 · 10^7 S/m)	4,3 · 4,2 · 4,4
koper (σ = 5,96 · 10^7 S/m)	8,1 · 7,9 · 8,0

a Bereken de eindsnelheid in koper en in aluminium. Waarom is de valtijd in pvc ongeveer die van een vrije val?

$v_{\mathrm{Cu}} = 1{,}00/8{,}0 = 0{,}125\,\mathrm{m/s}$, $v_{\mathrm{Al}} = 1{,}00/4{,}3 = 0{,}233\,\mathrm{m/s}$ (de korte aanloop verwaarloosd). Vrije val over 1 m: $\sqrt{2/9{,}81} = 0{,}45\,\mathrm{s}$: pvc geleidt niet, er lopen geen wervelstromen.

b Waarom valt de magneet in metaal met een constante snelheid? Stel een krachtenevenwicht op, als de remkracht evenredig is met v.

De bewegende magneet wekt wervelstromen op in de buiswand, en die remmen (Lenz) met een kracht $F = kv$. De magneet versnelt tot $kv = mg$: dan is de netto kracht nul en de snelheid constant, $v_t = mg/k$ (zoals een parachute in hoofdstuk 9, maar met F evenredig met v).

c Vergelijk de verhouding van de eindsnelheden met die van de geleidbaarheden. Welk verband stel je voor?

$v_{\text{Al}}/v_{\text{Cu}} = 1{,}86$ en $\sigma_{\text{Cu}}/\sigma_{\text{Al}} = 5{,}96/3{,}2 = 1{,}86$: de eindsnelheid is omgekeerd evenredig met de geleidbaarheid. Dat klopt: bij dezelfde snelheid geeft een dubbel zo goede geleider dubbel zoveel wervelstroom, dus dubbel zoveel remkracht ($k \propto \sigma$).

d Hoeveel vermogen wordt in de koperen buis omgezet, en in wat? Wat verwacht je als de buis in de lengte een smalle spleet heeft?

$P = mgv = 0{,}020 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}125 = 24{,}5\,\text{mW}$: de zwaarte-energie wordt warmte in de buis (niet merkbaar). Met een lengtespleet kunnen de wervelstromen niet meer rondlopen in de omtrek: de remming valt grotendeels weg en de magneet valt veel sneller.

19.15 Habitat: de generator van de windturbine

Toepassen · 8 · Habitat · 50 min

Het handboek koos voor de windturbine (80 tot 300 tpm, 3,0 kW) een generator met 8 poolparen en een emk van 0,55 V lijnspanning per tpm. Een leverancier biedt twee andere uitvoeringen aan: A met 6 poolparen en 0,55 V/tpm, B met 8 poolparen en 0,25 V/tpm ('48 V-uitvoering'). De batterij werkt tussen 44 en 56 V.

a Bereken voor het handboek, A en B het frequentiebereik.

Handboek ($p = 8$): 10,7 tot 40 Hz. A ($p = 6$): 8,0 tot 30 Hz. B ($p = 8$): dezelfde 10,7 tot 40 Hz; de emk-constante verandert niets aan de frequentie.

b Bereken voor B de gelijkspanning na de brug (1,35 U) bij 80 en 300 tpm, en de gelijkstroom en fasestroom bij 3,0 kW.

B: $U_{\text{dc}} = 1{,}35 \cdot 0{,}25 \cdot n$: $27{,}0\,\text{V}$ bij 80 tpm en $101{,}3\,\text{V}$ bij 300 tpm. Bij 3,0 kW: $I_{\text{dc}} = 3000/101{,}3 = 29{,}6\,\text{A}$, per fase $24{,}2\,\text{A}$ (2,2 keer het handboek).

c Onder welk toerental kan een neerwaartse omzetter met uitvoering B de batterij niet meer laden? Wat is daarvoor nodig?

De neerwaartse omzetter moet boven 56 V ingangsspanning krijgen: $1{,}35 \cdot 0{,}25 \cdot n = 56 \Rightarrow n = 166\,\text{tpm}$. Daaronder, in zwakke wind, laadt hij niet (tot 56 V) of alleen een lege batterij. Oplossing: een opwaarts-neerwaartse omzetter (buck-boost, hoofdstuk 24), duurder en iets minder efficiënt.

d Welke uitvoering raad je aan? Weeg af: veiligheid, stroom in de kabel van ±30 m (mast en afstand tot de module), omzetter, rimpel.

B blijft onder 120 V gelijk (zeer lage spanning, veiliger bij onderhoud aan de mast), maar geeft 2,2 keer meer stroom: 4,8 keer meer kabelverlies bij dezelfde doorsnede (hoofdstuk 20: ±1,6 % met 4 mm² bij het handboek), en vraagt een buck-boost. A heeft een lagere frequentie en dus meer rimpel (6f: 48 tot 180 Hz), en per omwenteling minder spoelen. Een verdedigbare keuze: het handboek (dunne kabel, eenvoudige omzetter, veiligheid met gewone 230 V-maatregelen); wie veel zelf aan de mast werkt, kan B verkiezen en de dikkere kabel betalen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Frequentie	f = pn/60 correct voor de drie uitvoeringen.
Spanning en stroom	Udc = 1,35 · 0,25 · n, Idc = P/Udc en de fasestroom √(2/3) · Idc correct.
Omzetter	Grens van de neerwaartse omzetter gevonden (Udc = 56 V) en opwaarts-neerwaarts als oplossing genoemd.
Afweging	Keuze onderbouwd met getallen: 120 V-grens, stroom en kabelverlies, complexiteit van de omzetter.

●●● Uitdagen Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

19.16 Ontwerp: een veiligheidstransformator

●●● Uitdagen · 8 · Ontwerpen · 50 min

Ontwerp een transformator 230 V naar 2 × 12 V (twee gelijke secundaire spoelen), 50 VA samen, op een EI-kern met een middenbeen van 8 cm² en een wikkelvenster van 4,0 cm². Eisen: $\hat{B} \le 1{,}2$ T, stroomdichtheid 3 A/mm², ongeveer 8 % extra secundaire windingen voor de spanningsval onder last, vulfactor van het venster hoogstens 0,40.

a Bereken de windingen van de primaire en van elke secundaire.

✓ $N_1 = 230/(4{,}44 \cdot 50 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2) = 1079$; per secundaire $1079 \cdot 12/230 \cdot 1{,}08 = 60{,}8$, dus 61 windingen.

b Kies de draaddoorsneden en controleer of alles in het venster past.

✓ $I_1 = 50/230 = 0{,}217$ A: $0{,}072\,\text{mm}^2$ (Ø 0,30 mm). Elke secundaire 25 VA: $I = 2{,}08$ A, $0{,}69\,\text{mm}^2$ (Ø 0,95 mm). Koper: $1079 \cdot 0{,}072 + 2 \cdot 61 \cdot 0{,}69 = 163\,\text{mm}^2$, tegenover $0{,}40 \cdot 400 = 160\,\text{mm}^2$: net te veel, en de isolatie tussen de lagen komt er nog bij. Kies een iets grotere kern, of een stroomdichtheid van 3,2 A/mm² (dan $\approx 152\,\text{mm}^2$; de draad wordt iets warmer).

c Waarom mag je de twee secundaire spoelen in serie (24 V) of parallel (12 V, dubbele stroom) zetten, en waar moet je daarbij op letten?

✓ Serie: het eind van de ene aan het begin van de andere (anders heffen de spanningen elkaar op: 0 V). Parallel: begin aan begin en eind aan eind; de spanningen moeten gelijk zijn (zelfde aantal windingen), anders loopt er een kringstroom tussen de twee spoelen.

d Welke veiligheidsmaatregelen horen bij een veiligheidstransformator?

✓ Primaire en secundaire gescheiden door dubbele of versterkte isolatie (vaak twee kamers op de spoelvorm), een thermische zekering of een zekering aan de primaire kant, en een behuizing die niet onder spanning kan komen. De norm voor veiligheidstransformatoren is EN 61558-2-6.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Windingen	N_1 uit 4,44 f N A $\hat{B}$, N_2 met de verhouding en 8 % extra.
Draad en venster	Doorsneden uit de stroomdichtheid; kopersom tegenover 0,40 · venster gecontroleerd.
Schakelen	Serie en parallel correct, met de wikkelzin (begin en eind) als voorwaarde.
Veiligheid	Dubbele isolatie, thermische beveiliging of zekering, geaarde of dubbel geïsoleerde behuizing.

19.17 Helmholtzspoelen: een homogeen veld

●●● Uitdagen · 9 · Analyseren · 45 min

Om een magnetometer te ijken heb je een homogeen veld nodig. Twee gelijke ronde spoelen (straal R, N windingen, stroom I in dezelfde zin) staan op dezelfde as, op afstand d van elkaar.

a Leid met Biot-Savart het veld af op de as van één winding, op afstand z van haar middelpunt: $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$.

Elk stukje $\mathrm{d}l$ van de winding staat loodrecht op de verbindingslijn naar het punt, met lengte $r = \sqrt{R^2+z^2}$: $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}l}{4\pi r^2}$. De componenten loodrecht op de as heffen elkaar rondom op; langs de as blijft $\mathrm{d}B \cdot R/r$. Rondom: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot \frac{R}{r} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$.

b Toon aan dat de tweede afgeleide van het totale veld in het midden nul is als $d = R$ (de eerste is nul door de symmetrie).

Met $g(z) = (R^2+z^2)^{-3/2}$ is $g''(z) = 3(4z^2 - R^2)(R^2+z^2)^{-7/2}$. Het totaal $g(z-d/2) + g(z+d/2)$ heeft in $z=0$ tweede afgeleide $2g''(d/2)$, en die is nul als $4(d/2)^2 = R^2$, dus $d = R$.

c Bereken het veld in het midden voor $d = R$ en toon dat $B = (4/5)^{3/2}\mu_0 N I/R$. Hoe groot is het voor $N = 100$, $I = 1{,}0\,\mathrm{A}$, $R = 10\,\mathrm{cm}$?

In het midden: $2 \cdot \frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2+R^2/4)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I}{R}\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}$, met $(4/5)^{3/2} = 0{,}7155$. Met de getallen: $0{,}899\,\mathrm{mT}$.

d Controleer met Python hoe homogeen het veld is op R/4 en R/2 van het midden, voor d = 0,5R, R en 1,5R.

Programma en echte uitvoer:

```
# helmholtz.py - hoe homogeen is het veld tussen twee spoelen op afstand d = R?
import numpy as np

mu0, N, I, R = 4e-7 * np.pi, 100, 1.0, 0.10


def B_lus(z, z0):
    """Veld op de as van een spoel van N windingen (straal R) in z0, in het punt z."""
    return mu0 * N * I * R**2 / (2 * (R**2 + (z - z0)**2) ** 1.5)


for d in (0.5 * R, R, 1.5 * R):
    z = np.array([0.0, 0.25 * R, 0.5 * R])
    B = B_lus(z, -d / 2) + B_lus(z, d / 2)
    afw = 100 * (B / B[0] - 1)
    print(f"d = {d / R:.1f} R: B(0) = {1000 * B[0]:.3f} mT, afwijking op R/4 {afw[1]:+.2f} %, op R/2
{afw[2]:+.2f} %")
```

```
d = 0.5 R: B(0) = 1.147 mT, afwijking op R/4 -6.06 %, op R/2 -21.96 %
d = 1.0 R: B(0) = 0.899 mT, afwijking op R/4 -0.42 %, op R/2 -5.42 %
d = 1.5 R: B(0) = 0.643 mT, afwijking op R/4 +4.40 %, op R/2 +12.97 %
```

Bij $d = R$ wijkt het veld op $R/4$ maar 0,42 % af: het is in een bol van een halve straal nagenoeg homogeen. Dichter bij elkaar ontstaat een bult, verder uit elkaar een dal.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Biot-Savart	Symmetrie gebruikt: alleen de axiale component blijft, dl ⊥ r, factor R/r.
Afleiding	Tweede afgeleide correct en d = R als voorwaarde gevonden.
Getal	(4/5)^(3/2) en het veld in mT correct.
Controle	Programma werkt; conclusie over het homogene gebied getrokken.

19.18 Ontwerp: rem en dumpbelasting van de windturbine

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 60 min

Neem de generator van het handboek (8 poolparen, fase-emk 95,3 V effectief bij 300 tpm, dus 0,379 V·s per rad/s elektrisch). Per fase, als rekenwaarden: zelfinductie 8,0 mH en weerstand 0,50 Ω. Bij een kortsluitrem verbind je de drie fasen met elkaar; de stroom wordt dan alleen beperkt door die spoelen.

a Toon aan dat de kortsluitstroom per fase $I = \dfrac{k\omega_e}{\sqrt{R^2 + (\omega_e L)^2}}$ is en het remkoppel $M = \dfrac{3I^2R}{\omega_m}$ (met $\omega_e = p\,\omega_m$).

Per fase: emk $E = k\omega_e$ (effectief) over de impedantie $R + j\omega_e L$ (hoofdstuk 7), dus $|I| = k\omega_e/\sqrt{R^2 + \omega_e^2 L^2}$. Mechanisch vermogen = warmte in de drie weerstanden: $M\omega_m = 3I^2R$. (De zelfinductie neemt geen gemiddeld vermogen op.)

b Bereken stroom en remkoppel bij 75, 150 en 300 tpm. Bij welk toerental is het koppel maximaal?

Met k = 0,379 V·s: 75 tpm: $I = 33{,}6\ \text{A}$, $M = 216\ \text{N m}$; 150 tpm: $42{,}4\ \text{A}$, $172\ \text{N m}$; 300 tpm: $46{,}0\ \text{A}$, $101\ \text{N m}$. Het maximum ligt waar $\omega_e L = R$: $f = R/(2\pi L) = 9{,}95\ \text{Hz}$, $n = 75\ \text{tpm}$, met $M_{\max} = 3k^2p/(2L) = 216\ \text{N m}$.

c Het aerodynamische koppel is bij 300 tpm ongeveer 106 N·m, en groter bij meer wind. Wat besluit je over de kortsluitrem?

Bij hoge snelheid zet de zelfinductie de stroom vast (±47 A) en daalt het koppel als 1/ω: bij 300 tpm is het maar ±101 N·m, minder dan wat de wind bij sterke wind duwt. Een weggelopen rotor stopt de kortsluitrem niet; hij houdt wel een trage rotor stil. Dus: eerst het toerental laten zakken (dumpbelasting, uit de wind draaien), pas onder ±150 tpm kortsluiten, en de rotor dan vergrendelen.

d Ontwerp de dumpbelasting aan de gelijkspanningskant: weerstand voor 3,0 kW bij de gelijkspanning van 300 tpm, vermogen, en een nuttige bestemming voor de warmte. Stel een volgorde op: wat gebeurt er bij overtoeren, bij een volle batterij en bij storm?

$R = U_{\text{dc}}^2/P = 223^2/3000 = 16{,}6\ \Omega$, vermogensweerstand van minstens 3 kW (liefst 4 kW) met PWM-sturing door de omzetter. Nuttig: een verwarmingselement in het buffervat of de boiler van het station. Volgorde: batterij vol → omzetter stuurt het overschot naar de dump (regelt zo het toerental); boven 330 tpm → dump volledig aan en alarm; storm boven ±15 m/s → de turbine draait uit de wind (hoofdstuk 11); onder 150 tpm → kortsluitrem en mechanische vergrendeling voor onderhoud.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Model	Stroom uit emk en impedantie per fase, koppel uit het vermogen in de weerstanden.
Getallen	Tabel correct; maximum bij ωeL = R (±75 tpm) gevonden.
Inzicht	Begrijpt dat de kortsluitrem bij hoge snelheid zwakker wordt en een weggelopen rotor niet stopt.
Ontwerp	Dumpweerstand correct gedimensioneerd, warmte nuttig gebruikt, volgorde van de maatregelen logisch en veilig.

19.19 Debat: veilige laagspanning of dunne kabels?

Uitdagen · 8 · Argumenteren · 40 min

De generator van het handboek geeft tot 223 V gelijk (bij overtoeren meer): geen zeer lage spanning. Uitvoering B van opdracht 19.15 blijft onder 120 V maar vraagt dikkere kabels en een complexere omzetter. Het station wordt onderhouden door twee bewoners zonder elektricien in de buurt.

a Verdedig één standpunt: (a) het hele gelijkstroomdeel van het station blijft zeer lage spanning (onder 120 V), ook als het meer koper en een duurdere omzetter kost; (b) hogere spanning is aanvaardbaar met de juiste maatregelen. Gebruik minstens drie getallen uit dit hoofdstuk en hoofdstuk 20.

(a) Lagere spanning kan het schokrisico beperken. De richtwaarde 120 V geldt voor rimpelvrije gelijkspanning onder specifieke droge omstandigheden; zij garandeert geen veilige aanraking of onderhoudswerk. Vocht, geleidende omgeving, foutenergie en bescherming blijven bepalend (HSE: elektrische testveiligheid). Onderhoud aan de mast vraagt een geïsoleerde, gecontroleerd spanningsloze installatie en een vergrendelde rotor. Ook B blijft niet bij elk toerental onder 120 V: 0,25 V/tpm geeft bij 400 tpm 141 V piek. Prijs: 2,2 keer meer stroom, 4,8 keer meer kabelverlies bij dezelfde doorsnede, een buck-boost. (b) Het handboek blijft met 11,0 A per fase en ±1,6 % kabelverlies met 4 mm² zuinig; de spanning is lager dan die van het gewone 230 V-net (325 V piek). Isolatie, behuizing, scheiding en passende foutbescherming moeten voor dit generator-/DC-systeem afzonderlijk worden ontworpen en beproefd; een gewone netdifferentieelschakelaar bewijst die bescherming niet.

b Welke maatregelen maken een installatie boven 120 V veilig genoeg? Welke daarvan hangen af van de bewoners, en welke niet?

Technisch: dubbel geïsoleerde kabel in een beschermbuis, afgesloten behuizingen, een werkschakelaar die alle polen onderbreekt en vergrendeld kan worden, isolatiebewaking, onderdelen voor minstens 400 V, dumpbelasting tegen overtoeren. Organisatorisch: alleen spanningsloos werken, rotor vergrendeld (een draaiende generator is nooit spanningsloos!), procedure en opleiding. Technische maatregelen werken ook als iemand een fout maakt; organisatorische niet: dat pleit voor zoveel mogelijk techniek.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Argumenten	Minstens drie correcte getallen (spanning, stroom, kabelverlies, 120 V-grens, overtoeren).
Tegenargument	Het sterkste argument van de andere kant eerlijk weergegeven.
Maatregelen	Technische en organisatorische maatregelen onderscheiden; beseft dat techniek betrouwbaarder is dan gedrag.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 20

Wisselstroom

Impedantie, resonantie en vermogen: rekenen aan het net en aan de omvormer van het station

Uitgewerkte oplossingen bij de 18 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

6× oefenen · 8× toepassen · 4× uitdagen · ± 580 min

L Elektriciteit en elektronica · W Wiskundig modelleren · E Energie



Drie fasen, vijftig keer per seconde omgekeerd: zo reist energie door Europa.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

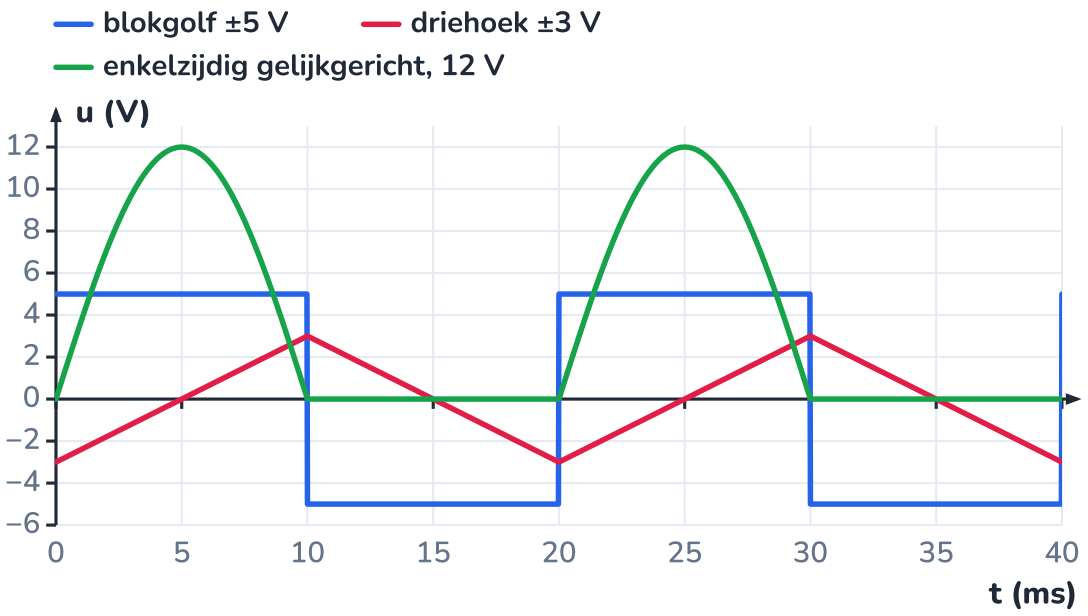
●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

20.1 Effectieve waarden

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 20 min

Bereken de effectieve waarden met de definitie (een integraal over één periode), niet met een tabel.



Drie periodieke spanningen met een periode van 20 ms.

a Een sinus met amplitude 12 V en de blokgolf van ±5 V uit de figuur.

✓ Sinus: $12/\sqrt{2} = 8{,}49\,\text{V}$. Blokgolf: $u^2 = 25$ altijd, dus $U_{\text{eff}} = 5{,}0\,\text{V}$.

b De driehoek van ±3 V. Tip: bereken het gemiddelde van u² over een kwart periode, waar u = 3 · 4t/T.

✓ Over een kwart periode loopt u lineair van 0 tot 3 V: $\overline{u^2} = \frac{1}{T/4}\int_0^{T/4}\left(3\cdot\frac{4t}{T}\right)^2 \mathrm{d}t = 9\cdot\frac{1}{3} = 3$, en door de symmetrie geldt dat voor de hele periode: $U_{\text{eff}} = \sqrt{3} = 1{,}73\,\text{V} = 3/\sqrt{3}$.

c De enkelzijdig gelijkgerichte sinus van 12 V (de ene halve periode sinus, de andere nul).

✓ De helft van de tijd $\overline{u^2} = 12^2/2$, de andere helft 0: gemiddeld $12^2/4$, dus $U_{\text{eff}} = 12/2 = 6{,}0\,\text{V}$.

d De noodverwarming neemt 2,0 kW bij 230 V. Hoe groot is de effectieve stroom en de piekstroom?

✓ $I = 2000/230 = 8{,}70\,\text{A}$; piek $8{,}70\cdot\sqrt{2} = 12{,}3\,\text{A}$.

20.2 Reactanties en een RL-kring

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een spoel van 0,10 H en een condensator van 10 µF.

a Bereken de reactantie van beide bij 50 Hz en bij 1 kHz.

✓ 50 Hz: $X_L = 2\pi\cdot 50\cdot 0{,}1 = 31{,}4\,\Omega$, $|X_C| = 1/(2\pi\cdot 50\cdot 10^{-5}) = 318{,}3\,\Omega$. 1 kHz: $X_L = 628\,\Omega$, $|X_C| = 15{,}9\,\Omega$.

b De spoel heeft 40 Ω draadweerstand en hangt aan 230 V, 50 Hz. Bereken Z (poolvorm), de stroom en de faseverschuiving.

✓ $Z = 40 + j31{,}4 = 50{,}9\angle 38{,}1^\circ\,\Omega$; $I = 230/50{,}9 = 4{,}52\,\text{A}$, die 38,1° naijlt op de spanning.

20.3 Het fasordiagram van een RC-kring

Oefenen · 7 · Tekenen · 25 min

Een weerstand van 1,0 kΩ en een condensator van 1,0 µF staan in serie aan 10 V effectief.

a Bij welke frequentie is $|Z_C| = R$? Bereken voor die frequentie I, U_R en U_C (grootte en hoek, met U als referentie).

✓ $f = 1/(2\pi RC) = 159\,\text{Hz}$. $Z = 1000 - 1000j = 1414\angle -45°\,\Omega$; $I = 10/1414 = 7{,}07\,\text{mA}\angle 45°$ (voorijlend); $U_R = 7{,}07\,\text{V}\angle 45°$, $U_C = 7{,}07\,\text{V}\angle -45°$.

b Teken het fasordiagram op schaal (1 V = 1 cm): U, U_R, U_C en de richting van I. Controleer dat $U_R + U_C = U$.

✓ Twee wijzers van 7,07 cm onder $+45°$ en $-45°$; kop aan staart eindigen ze op $(10;\ 0)$: $7{,}07\cos 45° \cdot 2 = 10$. U_R ligt langs I, U_C staat er 90° achter.

c Herhaal de berekening bij de dubbele frequentie. Wat verandert er aan de verdeling van de spanning?

✓ Bij 318 Hz: $|Z_C| = 500\,\Omega$, $Z = 1118\angle -26{,}6°$; $I = 8{,}94\,\text{mA}$; $U_R = 8{,}94\,\text{V}$, $U_C = 4{,}47\,\text{V}$. Bij hogere frequentie neemt de condensator een kleiner deel van de spanning: dit is een hoogdoorlaatfilter met de uitgang over R (hoofdstuk 21).

20.4 Actief, reactief en schijnbaar vermogen

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een toestel neemt 2,5 A bij 230 V; de stroom ijlt 30° na op de spanning.

a Bereken S, P, Q en de arbeidsfactor. Schrijf het complexe vermogen als P + jQ.

✓ $S = 230 \cdot 2{,}5 = 575\,\text{VA}$; $P = 575\cos 30° = 498\,\text{W}$; $Q = 575\sin 30° = 288\,\text{var}$; $\lambda = 0{,}866$. $S = 498 + 288j\,\text{VA}$.

b Het toestel draait 6 uur per dag. Hoeveel kWh telt een kWh-meter, die actieve energie meet?

✓ $0{,}498\,\text{kW} \cdot 6\,\text{h} = 2{,}99\,\text{kWh}$ per dag; het reactieve deel telt niet mee.

c Is het toestel inductief of capacitief? Welk toestel zou het kunnen zijn?

✓ Naijlende stroom: inductief. Een motor (pomp, ventilator, compressor) of een toestel met een transformator.

20.5 Drie verwarmingselementen

Oefenen · 7 · Rekenen · 20 min

Drie verwarmingselementen van 2,0 kW / 230 V worden op een driefasig net aangesloten.

a Ster op 3N × 400 V: welke spanning krijgt elk element, welke stroom loopt in elke fase en in de nulgeleider?

✓ Elk element op 230 V: 2,0 kW, $I = 8{,}70\,\text{A}$ in elke fase; in de nul loopt de som van drie gelijke wijzers onder 120°: nul.

b Eén element valt uit. Hoe groot wordt de stroom in de nulgeleider? Teken de wijzers.

✓ Twee stromen van 8,70 A onder 120°: hun som heeft dezelfde grootte, 8,70 A (een gelijkzijdige driehoek). De nul voert dan evenveel als een fase.

c Een installateur schakelt de elementen per vergissing in driehoek op 3N × 400 V. Wat gebeurt er?

✓ Elk element krijgt 400 V: $P = 400^2/26{,}45 = 6{,}05\,\text{kW}$, drie keer te veel. Het element brandt door.

d Op een Belgisch net van 3 × 230 V zet je ze in driehoek. Bereken de lijnstroom.

✓ Elk element tussen twee fasen van 230 V: correct, 8,70 A per element; de lijnstroom is $\sqrt{3} \cdot 8{,}70 = 15{,}1\,\text{A}$.

20.6 Misvattingen over wisselstroom

Oefenen · 6 · Begrijpen · 15 min

Juist of fout? Verbeter wat fout is, met een kort argument of een getal.

a (a) De effectieve waarde van een wisselspanning is haar gemiddelde waarde.

Fout. Het gemiddelde van een sinus is nul; de effectieve waarde is de wortel uit het gemiddelde kwadraat, √2 kleiner dan de piek.

b (b) In een serie-RLC-kring kan de spanning over de condensator nooit groter zijn dan de bronspanning.

Fout. Bij resonantie is ze Q keer de bronspanning: 3,7 keer in de proef, 9,7 keer in opdracht 20.7.

c (c) Reactief vermogen kost niets, dus je hoeft er geen rekening mee te houden.

Fout. Het kost geen energie in het toestel, maar de stroom ervoor belast kabels, omvormers en generatoren (die op VA gedimensioneerd worden) en veroorzaakt verlies I^2R.

d (d) Een condensator neemt aan 230 V, 50 Hz geen stroom, want er gaat geen lading door de isolator.

Fout. De condensator laadt en ontlaadt honderd keer per seconde; in de draden loopt dus een wisselstroom $U\omega C$: 0,72 A voor 10 µF.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

20.7 Serie-RLC: resonantie en bandbreedte

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een spoel van 47 mH en een condensator van 22 nF staan in serie met 150 Ω (alle weerstand samen), aan 5,0 V effectief.

a Bereken f_0, $\sqrt{L/C}$, Q en de bandbreedte.

$f_0 = 1/(2\pi\sqrt{47\cdot10^{-3}\cdot22\cdot10^{-9}}) = 4949\,\text{Hz}$; $\sqrt{L/C} = 1462\,\Omega$; $Q = 9{,}74$; $\Delta f = 508\,\text{Hz}$.

b Bereken de stroom en de spanningen over R, L en C bij resonantie. Welke condensator kies je qua spanning?

$I = 5/150 = 33{,}3\,\text{mA}$; $U_R = 5{,}0\,\text{V}$; $U_L = U_C = 0{,}0333\cdot1462 = 48{,}7\,\text{V}$ effectief, of 69 V piek: een condensator van minstens 100 V.

c Toon aan dat de halfvermogenpunten liggen waar $\omega L - 1/(\omega C) = \pm R$, en dat hun afstand R/L is (in rad/s).

Halfvermogen: $|I|^2 = \tfrac{1}{2}|I_0|^2$, dus $|Z|^2 = 2R^2$, dus $X^2 = R^2$: $\omega L - 1/(\omega C) = \pm R$. Vermenigvuldig met ω/L: $\omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$. Positieve wortels $\omega = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$; hun verschil is R/L. Gedeeld door 2π: $\Delta f = \frac{R}{2\pi L} = f_0/Q$.

20.8 Een RLC-kring doormeten

Toepassen · 8 · Labo · 90 min

Voer de proef van het handboek uit met je eigen onderdelen. Meet vooraf L, C en de weerstand van de spoel, en de uitgangsweerstand van je functiegenerator (meestal 50 Ω).

a Meet de stroomamplitude (via de 10 Ω) bij minstens 15 frequenties en zet ze in een tabel.

Voorbeeld met het model van het handboek (een echte meting ligt rond het maximum enkele tot tientallen procenten lager):

F (HZ)	I (MA, AMPLITUDE)	FASE VAN I TEGENOVER DE GENERATOR
1000	1,3	+87°
3000	5,7	+76°
4402	16,6	+45°
5033	23,5	0°
5755	16,6	−45°
7000	8,7	−68°
20 000	1,7	−86°

b Teken de resonantiekromme met een logaritmische frequentieas en teken het model erdoor. Bepaal f_0 en de bandbreedte uit je meting.

Model: $f_0 = 5033\,\text{Hz}$, $\Delta f = 1353\,\text{Hz}$. Uit een meting meestal f_0 binnen enkele procenten (toleranties van L en C) en een iets grotere Δf.

c Meet U_C bij resonantie en bereken Q op twee manieren (U_C/U_g en $f_0/\Delta f$). Verklaar de verschillen met het model.

Model: $U_C/U_g = 3{,}72$ en $f_0/\Delta f = 3{,}72$ (gelijk). Meting: vaak een lagere Q uit U_C/U_g als je U_g zonder last instelt: de generatorspanning zakt over zijn 50 Ω. Bij kHz is de weerstand van een spoel met kern groter dan bij gelijkstroom (verliezen in de kern, skineffect): de gemeten Q ligt lager dan met de gelijkstroomweerstand berekend.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Meting	Genoeg punten, dichter bij het maximum; amplitude en fase correct afgelezen; eenheden.
Grafiek	Logaritmische as, model en meting in één figuur, f_0 en Δf correct bepaald.
Q op twee manieren	U_C/U_g en $f_0/\Delta f$ berekend en vergeleken, met de generatorweerstand in R.
Kritiek	Afwijkingen verklaard: verliezen van de spoel bij kHz, toleranties, belasting door de scoop, generatorspanning die zakt.

20.9 De bandbreedte numeriek

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Neem de kring van opdracht 20.7 (47 mH, 22 nF, 150 Ω) en een bron van 5,0 V.

a Schrijf een programma dat f_0, de bandbreedte en U_C numeriek bepaalt, zonder de formules voor Q te gebruiken.

Bijvoorbeeld (met de echte uitvoer):

```
# band.py - de serie-RLC van opdracht 20.7 aan een generator met 50 ohm
import numpy as np

L, C = 47e-3, 22e-9
for R in (150.0, 150.0 + 50.0):              # zonder en met de uitgangsweerstand van de generator
    f = np.linspace(3000, 7000, 400001)
    w = 2 * np.pi * f
    I = 5.0 / np.abs(R + 1j * w * L + 1 / (1j * w * C))
    k = np.argmax(I)
    band = f[I >= I[k] / np.sqrt(2)]
    Q = np.sqrt(L / C) / R
    print(f"R = {R:5.0f} ohm: f0 = {f[k]:.0f} Hz, bandbreedte {band[-1] - band[0]:.1f} Hz, "
          f"f0/Q = {f[k] / Q:.1f} Hz, U_C = {I[k] / (w[k] * C):.1f} V")
```

```
R =   150 ohm: f0 = 4949 Hz, bandbreedte 507.9 Hz, f0/Q = 507.9 Hz, U_C = 48.7 V
R =   200 ohm: f0 = 4949 Hz, bandbreedte 677.2 Hz, f0/Q = 677.3 Hz, U_C = 36.5 V
```

b Herhaal met de 50 Ω van een functiegenerator erbij. Wat verandert er, en wat niet?

f_0 blijft gelijk (alleen L en C bepalen hem). De bandbreedte groeit met R (van 508 naar 677 Hz) en de spanning over C zakt in dezelfde verhouding: Q daalt van 9,7 naar 7,3.

20.10 De koelkast compenseren?

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

De koelkast van het station neemt 150 W met cos φ = 0,70 (hoofdstuk 7), 230 V, 50 Hz.

a Bereken S, Q en de stroom.

$S = 150/0{,}70 = 214\,\text{VA}$; $Q = 214 \cdot \sin(45{,}6°) = 153\,\text{var}$; $I = 214/230 = 0{,}93\,\text{A}$.

b Welke condensator brengt de arbeidsfactor naar 0,95? Hoeveel daalt de stroom?

Na compensatie blijft $150\tan(\arccos 0{,}95) = 49\,\text{var}$; weg moet $104\,\text{var}$: $C = 6{,}24\,\mu\text{F}$. Stroom $150/(0{,}95 \cdot 230) = 0{,}69\,\text{A}$: 26 % minder.

c Levert het energie op? Voor wie wel iets? Is het de moeite?

Geen energie: de koelkast neemt nog altijd 150 W. Alleen de kabel naar de koelkast en de omvormer dragen 0,24 A minder, ongeveer 0,03 kVA van 4,0 kVA. Niet de moeite, en een extra onderdeel dat kan falen.

20.11 Een gemodificeerde sinus ontleden

Toepassen · 8 · Analyseren · 30 min

Een goedkope omvormer geeft een gemodificeerde sinus van ±325 V die in elke halve periode 5 ms aan staat (zoals in het handboek).

a Bereken de effectieve waarde, de piekfactor (piek/effectief) en wat een gemiddelde-meter aanwijst.

$U_{\text{eff}} = 325\sqrt{0{,}5} = 230\,\text{V}$; piekfactor $325/230 = 1{,}41$ (toevallig gelijk aan die van een sinus); gemiddelde-meter $1{,}111 \cdot 162{,}6 = 181\,\text{V}$.

b Leid de amplitude van de grondgolf af: $b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin x\,\mathrm{d}x$. Hoeveel effectieve spanning zit in de grondgolf, en hoeveel in de rest?

> ✓ $u = +325$ tussen $45°$ en $135°$: $b_1 = \frac{2\cdot 325}{\pi}[-\cos x]_{45°}^{135°} = \frac{2\cdot 325}{\pi}\cdot\sqrt{2} = 293\,\mathrm{V}$, effectief $207\,\mathrm{V}$. De rest: $\sqrt{230^2 - 207^2} = 100\,\mathrm{V}$, vooral 150 Hz (69 V) en 250 Hz (41 V).

c Een koelkastcompressor is ontworpen voor een zuivere sinus van 230 V. Wat verwacht je als hij op deze omvormer draait?

> ✓ De grondgolf is maar 207 V: de motor krijgt 10 % te weinig nuttige spanning, trekt meer stroom en ontwikkelt minder koppel. De harmonischen geven extra stroom en verliezen in de wikkelingen (warmte) en gebrom. De compressor draait, maar warmer en met een kortere levensduur; een aanloop bij een lege batterij kan mislukken.

20.12 Habitat: de omvormer bij andere belastingen

Toepassen · 8 · Habitat · 50 min

Het brein moet voor elke toestand weten of de omvormer (4,0 kVA continu, 8 kVA gedurende 5 s, 93 %) en de batterij het aankunnen. Het filter van de omvormer levert altijd 166 var capacitief (0,72 A). Gebruik de toestellen van hoofdstuk 7 en de aanloop van het handboek (zes keer de stroom, cos φ = 0,5).

a Nacht: alleen koelkast en rest. Bereken P, Q, S en de arbeidsfactor van de belasting, en daarna met de filtercondensator erbij (wat de brug ziet).

> ✓ Nacht: $P = 450\,\mathrm{W}$, $Q = 252\,\mathrm{var}$, $S = 516\,\mathrm{VA}$, arbeidsfactor $0{,}873$ ($2{,}24\,\mathrm{A}$). Met het filter: $Q = 252 - 166 = 85\,\mathrm{var}$, $S = 458\,\mathrm{VA}$, arbeidsfactor $0{,}982$: de filtercondensator compenseert de kleine motoren grotendeels.

b Bereken de batterijstroom 's nachts bij 48 V. De omvormer verbruikt zonder last 25 W (rekenwaarde): hoeveel procent van de nachtstroom is dat?

> ✓ $450/0{,}93/48 = 10{,}1\,\mathrm{A}$, plus $25/48 = 0{,}52\,\mathrm{A}$ nullast: samen 10,6 A, waarvan de nullast 5 %. Over een nacht van 12 h: 0,3 kWh alleen voor de omvormer zelf.

c Winteravond, batterij op 44 V: de verwarming, de koelkast en de rest draaien, en de pomp slaat aan. Bereken S, P en de batterijstroom. Mag het?

> ✓ Zoals het handboek: $S = 7{,}28\,\mathrm{kVA}$ (onder 8 kVA), $P = 5{,}23\,\mathrm{kW}$, batterij $128\,\mathrm{A}$ bij 44 V. Het mag, zolang de aanloop korter is dan 5 s en de batterij (BMS) en de zekering die stroom even toelaten.

d Stel een regel voor het energiebeheer voor die de omvormer en de batterij beschermt, met getallen.

> ✓ Bijvoorbeeld: (1) schakel een groot toestel alleen in als de voorspelde S na inschakelen onder 4,0 kVA blijft; (2) laat de pomp niet aanslaan als de verwarming aan staat en de batterij onder 46 V zit: eerst de verwarming 10 s uit (tijdproportionele sturing, hoofdstuk 39, kan dat zonder merkbaar verschil); (3) alarm als de batterijstroom langer dan 5 s boven 110 A blijft.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Fasoren en vermogen	P, Q en S correct met S = U I*; de filtercondensator juist als −166 var meegeteld.
Batterijstroom	Alleen P (en de nullast) uit de batterij; I = P/(ηU) bij de juiste spanning.
Aanloop	Aanloop als fasor opgeteld, grens van 8 kVA en de batterijstroom getoetst.
Regel	Een concrete, meetbare regel (drempels in VA of A, tijden) die volgt uit de berekening.

20.13 De kabel van de windturbine

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

De windturbine levert 3,0 kW bij 165 V lijnspanning en 11,0 A per fase; de kabel is 30 m lang.

a Bereken het verlies en de spanningsval per geleider met 2,5 mm² en met 6 mm².

✓ 2,5 mm²: $R = 0{,}0172 \cdot 30/2{,}5 = 0{,}206\,\Omega$, verlies $3 \cdot 11^2 \cdot 0{,}206 = 75\,\text{W}$ (2,5 %), spanningsval $11 \cdot 0{,}206 = 2{,}27\,\text{V}$ per geleider. 6 mm²: $31\,\text{W}$ (1,0 %).

b De ontwerpregel van het station is hoogstens 3 % verlies. Welke doorsnede kies je?

✓ 2,5 mm² haalt de regel net; 4 mm² (1,6 %, het handboek) laat marge voor een langere kabel, de hogere weerstand van warm koper en een zwaardere turbine later. Kies 4 mm².

20.14 Het uitgangsfilter onder de loep

Toepassen · 8 · Analyseren · 30 min

Het LC-filter van de omvormer (1,0 mH met 0,05 Ω, 10 µF) uit het handboek.

a Bereken de kwaliteitsfactor van de kring zonder last en met 16 Ω last (bij resonantie ligt de last parallel met C).

✓ Zonder last: $Q = \sqrt{L/C}/R = 10/0{,}05 = 200$. Met 16 Ω parallel: voor een parallelle demping is $Q \approx R_{\text{last}}/\sqrt{L/C} = 16/10 = 1{,}6$ (de figuur van het handboek: piek 1,59).

b Een toestel neemt een stroom met een component bij 1550 Hz (een harmonische, hoofdstuk 21). Waarom is dat gevaarlijk bij een lichte belasting?

✓ 1550 Hz ligt vlak bij f_0 = 1592 Hz. Zonder veel last is de kring bijna ongedempt: een kleine stroom met die frequentie zet een grote spanning over de condensator, de uitgangsspanning vervormt en de onderdelen worden zwaar belast. Een dempweerstand (opdracht 20.16) of een regeling die de resonantie actief dempt (hoofdstuk 24) is nodig.

c Hoeveel spanning valt er bij 17,4 A (4,0 kVA) over de spoel? Welk percentage van 230 V is dat?

✓ $X_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 0{,}314\,\Omega$; $17{,}4 \cdot 0{,}314 = 5{,}5\,\text{V}$, 2,4 % van 230 V (90° voor op de stroom: de regeling past de brugspanning aan).

Uitdagen

Uitdagen — transfer, open problemen, leerlijnen combineren

20.15 Vermogen in één en in drie fasen

Uitdagen · 8 · Analyseren · 35 min

Een eenfasige belasting krijgt $u = \sqrt{2}\,U\cos\omega t$ en neemt $i = \sqrt{2}\,I\cos(\omega t - \varphi)$.

a Leid af: $p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t - \varphi)$.

✓ $p = 2UI\cos\omega t\cos(\omega t - \varphi) = UI[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]$ (productformule).

b Drie gelijke belastingen op drie fasen (fasen 0, $-120°$, $+120°$). Toon aan dat de som van de drie momentane vermogens constant $3UI\cos\varphi$ is.

✓ De drie schommelende termen zijn $UI\cos(2\omega t - \varphi - 2k \cdot 120°)$ voor $k = 0, 1, 2$: drie wijzers van dezelfde lengte op 0, $-240°$ en $-480° = -120°$, dus 120° uit elkaar. Hun som is nul (hoofdstuk 7). Blijft $3UI\cos\varphi$.

c Een eenfasige omvormer van 4,0 kVA heeft een tussenkring op 400 V die hoogstens 5 % van top tot top mag schommelen. Welke capaciteit, en welke energie zit erin?

✓ $\Delta U = 20\,\text{V}$: $C = S/(\omega U \Delta U) = 4000/(314{,}2 \cdot 400 \cdot 20) = 1{,}59\,\text{mF}$. Energie $\frac{1}{2}CU^2 = 127\,\text{J}$, waarvan maar $S/\omega = 12{,}7\,\text{J}$ per halve periode heen en weer gaat.

20.16 Ontwerp: het uitgangsfilter van de omvormer

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 60 min

Ontwerp het LC-filter van de omvormer (4,0 kVA, 230 V, brug op 20 kHz). Eisen: (1) bij 20 kHz minstens 40 dB demping; (2) de condensatorstroom zonder last hoogstens 5 % van de nominale stroom; (3) de spanningsval over de spoel bij nominale stroom hoogstens 3 %; (4) geen resonantiepiek hoger dan een factor 10 zonder last. Gebruik een dempingstak: een weerstand in serie met een extra condensator, parallel aan de filtercondensator.

a Vertaal de eisen 1 tot 3 in grenzen voor L, C en f_0.

(1) $|H| \approx (f_0/f)^2 \le 0{,}01$ bij 20 kHz: $f_0 \le 2\,\text{kHz}$. (2) $I_{\text{nom}} = 17{,}4\,\text{A}$, 5 % = 0,87 A: $U\omega C_{\text{totaal}} \le 0{,}87$, dus $C_{\text{totaal}} \le 12{,}0\,\mu\text{F}$. (3) $17{,}4 \cdot \omega L \le 6{,}9\,\text{V}$: $L \le 1{,}26\,\text{mH}$.

b Kies waarden (standaardreeks) voor L, C, de dempcondensator en de dempweerstand, en verantwoord.

Bijvoorbeeld $L = 1{,}0\,\text{mH}$, $C = 6{,}8\,\mu\text{F}$, dempingstak $4{,}7\,\mu\text{F}$ in serie met $12\,\Omega$ (ongeveer $\sqrt{L/C}$). Samen 11,5 µF: $f_0 \approx 1{,}5\,\text{kHz}$, nullaststroom $0{,}83\,\text{A}$.

c Controleer alle eisen met een Python-programma (|H| over 100 Hz tot 100 kHz, zonder last). Hoeveel vermogen verliest de dempweerstand bij 50 Hz?

Met dezelfde aanpak als het handboek (impedanties parallel, spanningsdeler met de spoel): piek $|H| = 5{,}3$ bij $1520\,\text{Hz}$ (was 200), bij 20 kHz $|H| = 0{,}0092$ (–40,7 dB, net genoeg: de weerstand in de dempingstak laat bij hoge frequentie iets meer door), nullast 0,83 A. Verlies in de dempweerstand bij 50 Hz: $(U\omega C_d)^2 R_d = 1{,}4\,\text{W}$. Een grotere R_d dempt de piek beter (18 Ω: piek 4,2, 2,1 W verlies) en laat bij 20 kHz iets meer door; een kleinere omgekeerd (8 Ω: piek 7,2, 0,9 W). Hoofdstuk 24 dempt de resonantie liever met de regeling zelf (actieve demping), zonder verlies.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Eisen	Correct vertaald: C ≤ 12 µF, L ≤ 1,26 mH, f_0 ≤ 2 kHz.
Keuze	Waarden uit de standaardreeks, met de dempingstak binnen de stroomeis; R ongeveer √(L/C).
Controle	Programma rekent de impedanties correct; piek, demping bij 20 kHz en nullaststroom getoetst.
Afweging	Verlies in de dempweerstand en de trade-off tussen demping en filterwerking besproken.

20.17 Debat: gelijkstroom of wisselstroom voor het station?

Uitdagen · 8 · Argumenteren · 40 min

Het station heeft een 48 V-batterij, zonnepanelen (gelijkstroom), een windturbine (wisselstroom van wisselende frequentie) en toestellen voor 230 V~. Sommige ontwerpers pleiten voor een 'gelijkstroomhuis': alle toestellen op 48 V of 380 V gelijk, geen omvormer. Anderen houden vast aan 230 V~.

a Verdedig één standpunt met minstens drie argumenten uit dit hoofdstuk en hoofdstuk 19 (getallen!).

Gelijkstroom: geen omvormerverlies van 7 % en geen nullastverbruik (25 W, 0,3 kWh per nacht), geen reactief vermogen en geen 100 Hz-schommeling, batterij en zonnepanelen zijn al gelijkstroom. Wisselstroom: alle gewone toestellen (pomp, koelkast) bestaan voor 230 V~ en zijn goedkoop en herstelbaar; een wisselspanning is makkelijk te onderbreken (een boog dooft bij elke nuldoorgang, bij gelijkstroom niet: schakelaars en zekeringen voor DC zijn duurder); de koppeling met het openbare net op het proefterrein; 48 V geeft grote stromen voor 2 kW verwarming (42 A).

b Wat zou Edison vandaag over het station zeggen, en wat Tesla?

Edison zou tevreden zijn: zijn gelijkstroom is terug, dankzij de omzetters die hij miste; 48 V is veilig (zijn argument). Tesla zou wijzen op de driefasige generator van de windturbine, de motoren, en het net van het proefterrein. Het station is precies het compromis dat vermogenselektronica mogelijk maakte.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Argumenten	Minstens drie correcte, gekwantificeerde argumenten (omvormerverlies, kabelverlies, veiligheid, beschikbaarheid van toestellen, reactief vermogen, 100 Hz-rimpel).
Tegenargument	Het sterkste argument van de andere kant eerlijk weergegeven.
Historisch	Verbinding met de stroomoorlog: wat toen doorslaggevend was, en wat vermogenselektronica veranderd heeft.

20.18 Onderzoek: de arbeidsfactor van een laptoplader

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Een laptoplader zonder PFC (arbeidsfactorcorrectie) richt de netspanning gelijk op een condensator. Hij neemt alleen stroom als de netspanning boven de condensatorspanning komt: korte pulsen rond elke top. Model: pulsen in de vorm cos², 2,5 ms breed, in fase met de toppen; 70 W opgenomen.

a Bereken met Python de piekstroom, de effectieve stroom, P, S en de arbeidsfactor.

Programma en echte uitvoer:

```
# lader.py - arbeidsfactor van een laptoplader: stroom alleen rond de top van de spanning
import numpy as np

f, U_piek = 50.0, 325.3
t = np.linspace(0, 1 / f, 200000, endpoint=False)
u = U_piek * np.sin(2 * np.pi * f * t)
tau = 0.0025                                  # elke stroompuls duurt 2,5 ms
i = np.zeros_like(t)
for t_top, teken in ((0.005, 1), (0.015, -1)):
    m = np.abs(t - t_top) < tau / 2
    i[m] = teken * np.cos(np.pi * (t[m] - t_top) / tau) ** 2
i *= 70.0 / np.mean(u * i)                    # schalen tot 70 W opgenomen vermogen

P = np.mean(u * i)
U_eff, I_eff = np.sqrt(np.mean(u ** 2)), np.sqrt(np.mean(i ** 2))
print(f"piekstroom {i.max():.2f} A, I_eff = {I_eff:.3f} A, P = {P:.1f} W, S = {U_eff * I_eff:.1f} VA")
print(f"arbeidsfactor P/S = {P / (U_eff * I_eff):.3f}")
for k in (1, 3, 5, 7):                        # harmonischen: fasor bij k x 50 Hz (hoofdstuk 7)
    X = 2 * np.mean(i * np.exp(-2j * np.pi * k * f * t))
    print(f"{50 * k:4.0f} Hz: {abs(X) / np.sqrt(2):.3f} A effectief")
```

```
piekstroom 1.74 A, I_eff = 0.532 A, P = 70.0 W, S = 122.5 VA
arbeidsfactor P/S = 0.572
  50 Hz: 0.304 A effectief
 150 Hz: 0.281 A effectief
 250 Hz: 0.237 A effectief
 350 Hz: 0.183 A effectief
```

b De stroompulsen liggen precies in fase met de spanning. Waarom is de arbeidsfactor toch geen 1? Wat is de verschuivingsfactor (cos φ van de grondgolf)?

De arbeidsfactor is $P/(U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}) = 0{,}572$ omdat de stroom geen sinus is: een groot deel van I_{eff} zit in harmonischen die bij een zuivere sinusspanning geen gemiddeld vermogen dragen. De grondgolf ligt wel in fase: verschuivingsfactor 1,000. De hele arbeidsfactor komt van de vervorming.

c Bereken de harmonischen van de stroom (3, 5, 7). Waarom kan een condensator deze arbeidsfactor niet verbeteren, en wat doet een lader met PFC anders?

De 150, 250 en 350 Hz zijn bijna even groot als de grondgolf (zie de uitvoer). Een condensator verschuift alleen de fase van 50 Hz; hij maakt de pulsen niet breder, en bij de harmonischen trekt hij zelfs extra stroom. Een lader met PFC heeft na de gelijkrichter een opwaartse omzetter die de ingangsstroom een sinus laat volgen (hoofdstuk 24): arbeidsfactor boven 0,95. In Europa gelden voor toestellen boven 75 W grenzen voor de harmonische stromen (EN 61000-3-2); in de praktijk betekent dat PFC. Deze lader van 70 W valt er net onder.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Programma	Correcte berekening van P als gemiddelde van u · i en van de effectieve waarden.
Begrip	Onderscheid tussen verschuiving (cos φ) en vervorming correct uitgelegd.
Harmonischen	Fasor per harmonische berekend; uitgelegd dat alleen de grondgolf vermogen draagt.
Oplossing	PFC beschreven als een omzetter die een sinusvormige stroom afdwingt.

E EXPERT · DEEL E4 · ELEKTROTECHNIEK EN ELEKTRONICA

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 21

Filters en signaalverwerking

Ruis beperken terwijl betekenis en reactietijd behouden blijven

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 405 min

L Elektriciteit en elektronica · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Een filterontwerp wordt met zowel amplitude als reactietijd gecontroleerd.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

21.1 Een kantelpunt berekenen

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Laagdoorlaat R = 10 kΩ en C = 1 µF.

Bereken τ, fc en overdracht bij 1, 15,9 en 159 Hz.

τ = 0,010 s, fc = 15,915 Hz. |H| bij genoemde frequenties ≈ 0,9980; 0,70745; 0,09960. Fase wordt steeds negatiever; een kantelpunt is geen harde blokkering.

21.2 Decibel omkeren

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een filter heeft −12 dB amplitudeniveau.

Bereken de amplitudeverhouding en bij gelijke impedanties de vermogensverhouding.

Amplitude = 10^(−12/20) = 0,25119. Vermogen = 10^(−12/10) = 0,06310. −12 dB is dus geen 12 % en geen negatieve spanning.

21.3 Laag- of hoogdoorlaat

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Je wil (a) langzame temperatuur meten met snelle ruis; (b) een kleine trilling zien bovenop een DC-offset.

Kies filtersoort voor beide situaties en benoem een verlies van nuttige informatie.

(a) Laagdoorlaat: snelle echte temperatuurverandering kan ook worden vertraagd. (b) Hoogdoorlaat: DC en heel langzame trillingen verdwijnen. Zonder kennis van frequentiegebied kan je niet bewijzen dat alleen storing verwijderd wordt.

21.4 Aliasing herkennen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Sinus f = 73 Hz, sampletempo 100 Hz.

Bereken aliasfrequentie. Wat verandert bij fs = 200 Hz?

Bij 100 Hz: |73−100| = 27 Hz. Bij 200 Hz ligt 73 binnen 0–100 Hz en is zonder andere componenten geen vouw nodig. Een analoog filter blijft nodig voor frequenties boven de nieuwe Nyquistband.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

21.5 Twee RC-trappen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Twee onbelaste en met buffers gescheiden identieke laagdoorlaten hebben fc = 20 Hz.

a. Bereken totale amplitude en fase bij 20 en 200 Hz.

Bij 20 Hz elk 1/√2 en −45°: totaal 0,50, −6,02 dB, −90°. Bij 200 Hz elk 1/√101: totaal 1/101 = 0,009901, −40,09 dB, fase −168,58°.

b. Waarom mogen twee passieve trappen zonder buffer niet zomaar worden vermenigvuldigd?

De tweede trap belast de eerste en verandert haar effectieve impedantie. Vermenigvuldigen van onbelaste transferfuncties vraagt scheiding/buffering of verwaarloosbare belasting.

21.6 Groot venster, grote vertraging

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

NTC witte ruis σ = 0,10 K; N = 28 onafhankelijke metingen op 1 Hz zoals de onzekerheidsanalyse van e06.

a. Bereken de ruis na middelen en de online groepsvertraging.

σ = 0,10/√28 = 0,01890 K; groepsvertraging (28−1)/2 = 13,5 s. Op 1 Hz vraagt een volledig nieuw venster 28 monsters.

b Waarom wordt de totale standaardonzekerheid niet 0,019 K?

IJking en andere systematische bijdragen blijven. e06 geeft na middelen totale u≈0,07 K, groter dan het ruisdeel; het filter verbetert precisie maar corrigeert geen offset.

21.7 Een exponentieel filter uitvoeren

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Vorige y = 20,0 °C; nieuwe x = 21,0 °C; Δt = 2 s, τ = 8 s.

a Bereken α en nieuwe y; schrijf een functie die dt als argument krijgt.

α = 1−exp(−2/8) = 0,221199. ynew = 20 + α·1 = 20,221199 °C. Functie: def filter_stap(x,y,dt,tau): return y + (1-math.exp(-dt/tau))*(x-y).

b Verklaar de fout bij een vast α wanneer het loggerinterval verdubbelt.

Bij vast α is de afvlakking per monster constant, niet per seconde. Verdubbeling van dt verdubbelt dan de fysieke tijdconstante; bereken α uit werkelijke dt.

21.8 Een spectrum met bekende componenten

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Maak x = sin(2π·10t) + 0,5sin(2π·40t), fs = 200 Hz, N = 200, t = arange(N)/fs.

a Bereken rfft en rfftfreq, en normaliseer amplitudes met 2/N. Geef frequentieafstand en pieken.

z = np.fft.rfft(x); f = np.fft.rfftfreq(N,1/fs); a = 2*abs(z)/N. Δf=fs/N=1 Hz, pieken 10 Hz met amplitude 1 en 40 Hz met 0,5. DC/Nyquist zouden eigen factor nodig hebben.

b Herhaal met N = 180 en verklaar het verschil.

Δf = 200/180 = 1,111... Hz; het venster bevat 9 perioden op 10 Hz en 36 op 40 Hz, nog precies geheel. Deze twee frequenties lekken dus niet! Kies bijvoorbeeld N = 175: 8,75 en 35 perioden, waarbij vooral 10 Hz lekt. Het doel is de vensterinhoud berekenen voordat je 'lekkage' concludeert.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

21.9 Een onherstelbaar opnameprobleem

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Een logger neemt eenmaal per seconde een 490,196 Hz-storing op. Je ziet een golf van ongeveer vijf seconden.

a Bewijs algebraïsch dat een digitaal laagdoorlaatfilter niet kan vaststellen of de bron 0,196 of 490,196 Hz was.

Op k seconden: sin(2π·490,196k) = sin(2π·0,196k+2π·490k) = sin(2π·0,196k). Elke bewerking van dezelfde samples levert dezelfde uitkomst; de bron is niet identificeerbaar uit deze reeks alleen.

b Ontwerp een diagnoseproef met gewijzigde samplefrequentie en/of ingangfilter.

Meet sneller met bekende tijdstippen en een passend analoog filter, of wijzig fs en vergelijk vouwfrequentie. Zet PWM tijdelijk op bekende andere frequentie/duty in een veilige proef. Een echte langzame grootheid verandert niet volgens de aliasformule. Log ook voedingsspanning en PWM-fase.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Signaalpad	Analoog filter vóór ADC, samplefrequentie en digitale decimatie duidelijk.
Afweging	Ruisvermindering en vertraagde detectie beide kwantitatief getoetst.
Veiligheid	Ruwe grenscontrole en sensorvaliditeit behouden; geen alarmverlies door middelen.

21.10 Ontwerp op een storingsbudget

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 50 min

Nuttig signaal tot 1 Hz; sinusruis 100 mV bij 500 Hz mag na analoog filter maximaal 1 mV zijn. Eén RC; sampletempo 2000 Hz.

a Bepaal maximale fc en beoordeel verlies op 1 Hz.

|H(500)|≤0,01 geeft 1+(500/fc)²≥10000, dus fc≤500/√9999≈5,00025 Hz. Bij fc=5 Hz geeft 1 Hz |H|=0,98058, −0,170 dB en −11,31°. τ≈31,83 ms.

b Waarom bewijst dit geen bescherming tegen alle PWM-harmonischen?

De eis noemt één sinus. Een PWM-blok heeft harmonischen boven fs/2, die kunnen vouwen; brede ruis en ADC-belasting tellen ook. Een eerste-ordefilter heeft een beperkte helling; bepaal een volledig stopbandbudget en verhoog orde of sampletempo indien nodig.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Signaalpad	Analoog filter vóór ADC, samplefrequentie en digitale decimatie duidelijk.
Afweging	Ruisvermindering en vertraagde detectie beide kwantitatief getoetst.
Veiligheid	Ruwe grenscontrole en sensorvaliditeit behouden; geen alarmverlies door middelen.

21.11 Habitat: filteren zonder blind alarm

Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

NTC σruis≈0,10 K, thermische sensorτ=60 s. A3 heeft 64 Hz-voorfilter; CO_2-waarschuwing op minuutgemiddelde, 5000 ppm-alarm op geldige losse metingen.

a Teken per sensor de analoge acquisitie, digitale bewerking en alarmtak.

NTC/conditionering → ADC met passend analoog anti-aliaspad → validiteit → ruwe grenscontrole plus 5 s-filter → regeling en log. A3 behoudt zijn aparte deler/RC en heeft een eigen sample-/decimatieplan. CO_2 geldigheid splitst naar minuutwaarschuwing en losse 5000 ppm-grens.

b Toets NTC-voorstel Δt=1 s en τfilter=5 s op ruis en stapvertraging.

α = 0,181269; σuit≈0,03157 K. Filter-95%-tijd alleen≈14,98 s. Met sensorτ=60 s is totale staprespons een cascade; simuleer beide vóór de eis wordt afgetekend.

c Beschrijf ontbrekende samples, ADC-verzadiging en een alarmtest met een korte hoge CO_2-puls.

Lege/ongeldige samples tellen niet als nieuwe informatie. Bereik/railcontrole detecteert verzadiging, tijdstempel detecteert oud bericht. Alarm op korte geldige hoge puls blijft mogelijk via ruwe tak; filtertak mag de veiligheidsgrens niet verbergen. Plaats een afzonderlijke hardware-/sensorbewaking waar de risicoanalyse dat verlangt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Signaalpad	Analoog filter vóór ADC, samplefrequentie en digitale decimatie duidelijk.
Afweging	Ruisvermindering en vertraagde detectie beide kwantitatief getoetst.
Veiligheid	Ruwe grenscontrole en sensorvaliditeit behouden; geen alarmverlies door middelen.

21.12 Een mooie lijn kritisch beoordelen

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 25 min

Een collega toont alleen een glad temperatuurverloop en zegt dat dit nauwkeuriger is dan alle ruwe waarden.

Geef een onderbouwde beoordeling met precisie, bias, vertraging en traceerbaarheid.

Middelen kan onafhankelijke ruis verminderen, maar ijkbias blijft en veranderingen vertragen. Zonder ruwe data, instellingen, tijdstippen en sensorvaliditeit kan je geen nauwkeurigheidsclaim toetsen. Bewaar beide reeksen en vergelijk tegen referentie en bekende stappen. Een gladde lijn kan aliasing of een defect verbergen; precisie is geen juistheid.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 22

Operationele versterkers

Millivolt betrouwbaar omzetten naar een weegwaarde

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 380 min

L Elektriciteit en elektronica · O Onderzoeken en meten



De bakmassa, mechanische montage en elektronica horen allemaal bij de kalibratie.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen — Oefenen

één stap, direct toepassen

22.1 Een ideale ingang

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een opamp is lineair, met negatieve terugkoppeling, u+ = 1,5 V.

Geef u– en de ideale ingangsstromen. Leg uit waarom dit geen echte kortsluiting is.

u–≈1,5 V en i+=i–=0. De terugkoppeling past de uitgang aan tot het verschil klein is; er loopt geen stroom tussen ingangen. Zonder lineair bedrijf is de gelijkespanningsregel ongeldig.

22.2 Inverterende gain

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Ri = 12 kΩ, Rf = 60 kΩ; u+ op massa, ui = –0,30 V; voeding ±9 V.

Bereken gain, uo en ingangsstroom.

Gain −5. uo = (−5)(−0,30) = +1,50 V. Ingangsknoop≈0 V, stroom ui/Ri = −25 µA in de gekozen richting van bron naar knoop; werkelijk stroomt 25 µA van knoop naar bron.

22.3 Niet-inverterend kiezen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Ui = 0,20 V moet naar 1,00 V; Rg = 10 kΩ.

Bereken Rf en verklaar het verschil met een spanningsvolger.

Gain 5, dus Rf=(5−1)Rg=40 kΩ. Een volger heeft gain 1 en zou 0,20 V leveren; hij verbetert belastbaarheid/impedantie, niet spanningsschaal.

22.4 Comparator en ruis

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een sensor ruist ±20 mV rond 2,50 V; comparator heeft één drempel.

Verklaar chatter en stel een gemotiveerde hysteresisband voor.

Ruis laat het teken van ui−Uref telkens wisselen. Een band van bijvoorbeeld 2,45–2,55 V is 100 mV en groter dan de 40 mV piek-piekruis. De exacte band moet ook gewenste detectienauwkeurigheid en werkelijke ruispieken respecteren.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

22.5 Exacte kwartbrug

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

R1 = 350,7 Ω, R2 = R3 = R4 = 350 Ω; Uex = 5 V; Ud = UR−UL.

a. Bereken exact Ud en vergelijk met Uexδ/4.

UL = 5·350/700,7 = 2,4975025 V; UR = 2,5 V; Ud = 2,4975 mV. δ=0,7/350=0,002, lineaire schatting 5·0,002/4=2,5 mV, circa 0,10 % hoger.

b. Wat gebeurt als alle vier R dezelfde factor krijgen?

Beide delerverhoudingen blijven gelijk; Ud blijft nul bij een aanvankelijk gebalanceerde brug. Common-mode temperatuurverandering is daarom deels onderdrukbaar.

22.6 Hysterese afleiden

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Ui op −; + via 100 kΩ naar 2,5 V en via 1 MΩ naar uitgang. UL=0, UH=5 V.

Leid beide drempels af uit knooppuntwet en geef de richting van elke schakelactie.

V+ = (2,5/100000+Uo/1000000)/(1/100000+1/1000000). Met Uo=5: V+=2,7273 V, overschrijden met stijgend ui maakt uitgang laag. Met Uo=0: V+=2,2727 V, onderschrijden met dalend ui maakt uitgang hoog. Band 0,4545 V.

22.7 Een meetbudget in kilogram

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

5 kg-weegcel, 2 mV/V, 5 V-excitatie, gain 401; ADC 10 bit/5 V. Offset voor tare 25 µV.

a Bereken brug- en uitgangsgevoeligheid, code-equivalent en offset-equivalent.

Brug 10 mV/5 kg=2 mV/kg; uitgang 0,802 V/kg. LSB = 5/1024 V. Eén code = 6,088 g. 25 µV/(2 mV/kg)=0,0125 kg=12,5 g.

b Waarom is code-equivalent niet hetzelfde als onzekerheid?

Quantisatie is slechts één bijdrage. Offset, drift, ruis, niet-lineariteit, mechanische hysterese/kruip en ijkgewichten dragen bij. Tare corrigeert één nulmoment, geen alle fouten.

22.8 Grote-signaalbandbreedte

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een sinusuitgang heeft piek 2,0 V bij 10 kHz; opamp SR = 0,10 V/µs.

Bereken vereiste slew rate en maximale frequentie zonder slewbegrenzing.

SRnodig = 2π·10000·2 = 125664 V/s = 0,12566 V/µs, groter dan 0,10. Maximale f = SR/(2πU) = 100000/(4π) = 7958 Hz. Kleine-signaalbandbreedte is een aanvullende, niet vervangende eis.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

22.9 Tare is niet calibreren

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Een weegschaal toont na tare 1,04 kg op een 1,00 kg-gewicht en 4,16 kg op 4,00 kg.

a Diagnosticeer offset of gain en bereken een correctie.

De fout is evenredig: factor 1,04. Nieuwe massa = oude aflezing/1,04. Tare veranderde alleen het nulpunt; slope blijft fout. Eén punt kan offset en gain niet scheiden.

b Ontwerp een ijking die hysterese en drift zichtbaar maakt.

Meet 0,1,2,3,4,5 kg stijgend en dalend, herhaal en log temperatuur/tijd. Fit slope en intercept, bekijk residuen en verschil stijgend/dalend; houd een onafhankelijke toetsmassa buiten de fit. Meet nul opnieuw na belasting om kruip/drift te zien.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Schakeling	Gelijkstromen, common-mode en terugkoppelrichting correct.
Meetketen	Gain, rails, ADC-bereik, ruis en kalibratie in één budget.
Bewijs	Referentiemassa's, tare, herhaalbaarheid en overbelastingsproef concreet.

22.10 Een versterker buiten haar bereik

Uitdagen · 9 · Analyseren · 25 min

Een brug heeft Ud = 8 mV maar beide ingangen liggen op 4,95 V bij 5 V-voeding. Je kent alleen de nominale gain.

a Leg uit waarom een plausibele uitgang geen betrouwbare meting bewijst.

Common-mode kan buiten toegestaan gebied of interne versterkeruitgangen raken rails. Het kleine Ud garandeert niets over absolute ingangen. Gainformule geldt alleen in lineair gebied.

b Noem datasheet-/proefcontroles en een veilig foutsignaal.

Controleer common-mode versus output/gain/voeding, interne marges, output swing bij belasting, inputbescherming en herstel na overload. Test met bekende spanningen over bereik. Raildetectie plus sensor-/brugcontinuïteit en plausibiliteit loggen ongeldige status; een op rail geclipte code is geen valide volle-schaalgewicht.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Schakeling	Gelijkstromen, common-mode en terugkoppelrichting correct.
Meetketen	Gain, rails, ADC-bereik, ruis en kalibratie in één budget.
Bewijs	Referentiemassa's, tare, herhaalbaarheid en overbelastingsproef concreet.

22.11 Habitat: een traceerbare oogstweegschaal

Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

Ontwerpvoorstel 5 kg/2 mV/V/350 Ω, 5 V-excitatie, G=401 en referentie0,50 V. Oogstbak heeft 0,35 kg tare; grootste netto oogst 3,0 kg.

a Controleer maximale bruto-output en brugvermogen.

Max bruto 3,35 kg: Uo=0,50+0,802·3,35=3,1867 V. Volle brugweerstand is (700||700)=350 Ω; excitatievermogen 25/350=0,07143 W; elk element gemiddeld≈17,86 mW. Controleer zelfverwarming.

b Werk nul-, gain-, ruis- en overbelastingstest uit en teken het signaalpad.

Weegcel→differentiële instrumentatie→RC→ADC→ijking→brutomassa→tare→netto. Nulherhaling, vijf referentiegewichten, onafhankelijke toetsmassa, stijg/daal, stabilisatie/kruip, sensorfout en railtest met elektrische simulatie. Mechanische stop voorkomt echte overschrijding; datasheetcommon-mode bij alle uitersten eerst toetsen.

c Schrijf een meetrecord met ruwe code, massa, tare, tijdzone en kwaliteitsvlag.

Voorbeeldrecord: tijdstip ISO8601 met +01:00, adc_code integer, bruto_kg, tare_kg=0,35, netto_kg, temperatuur_C, kalibratie_id, kwaliteit='geldig/rail/oud/brugfout'. Werkelijke acquisitiepin pas in gedeeld pinplan toekennen; geen bestaande A-pin stilzwijgend overnemen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Schakeling	Gelijkstromen, common-mode en terugkoppelrichting correct.
Meetketen	Gain, rails, ADC-bereik, ruis en kalibratie in één budget.
Bewijs	Referentiemassa's, tare, herhaalbaarheid en overbelastingsproef concreet.

22.12 Meer bits of betere mechanica

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 25 min

Een collega wil de 10 bit-ADC door 24 bit vervangen en belooft 0,001 g nauwkeurigheid op 5 kg.

Beoordeel de claim met minstens vier foutbronnen en een meetbare vervolgstap.

Meer nominale bits betekenen niet evenveel effectieve bits of meetnauwkeurigheid. Brugoffset/drift, zelfverwarming, kruip, hysterese, referentieruis, contactkracht en gewichtenbegrenzing blijven. 0,001 g op 5 kg vraagt 5 miljoen onderscheiden massa-eenheden zonder grotere andere fout. Meet herhaalspreiding en drift tegen referentie en maak een onzekerheidsbudget; kies ADC pas op bewezen benodigde en haalbare resolutie.

E EXPERT · DEEL E4 · ELEKTROTECHNIEK EN ELEKTRONICA

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 23

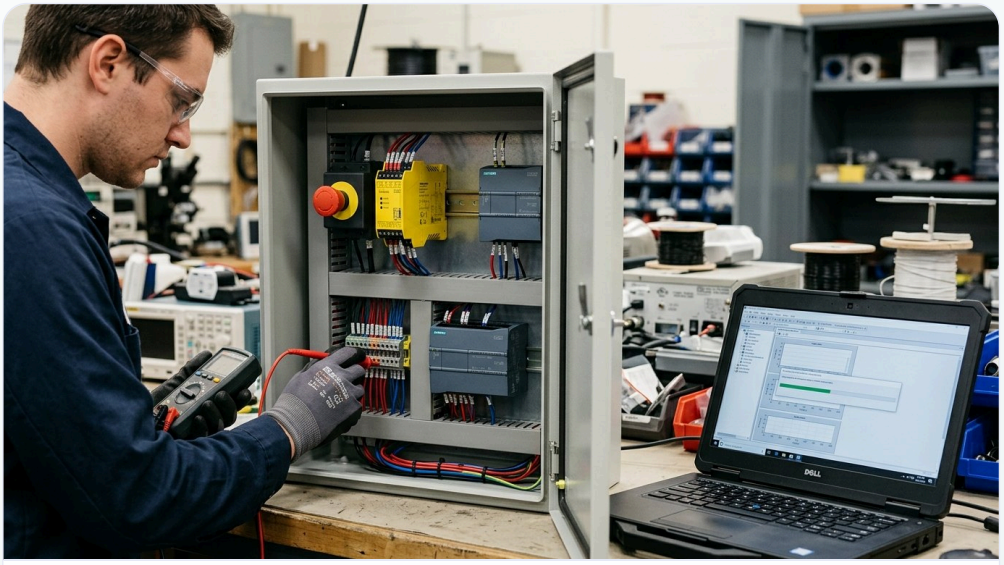
Digitale logica

Van waarheidstabel tot stopdominant geheugen

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 415 min

L Elektriciteit en elektronica · P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



Een fysieke stop blijft werken wanneer de centrale computer geen nieuwe instructies uitvoert.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

23.1 Poorten invullen

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Ingangen A=1,B=0.

Geef EN, OF, XOF, NEN en NOF en leg één resultaat uit.

EN0, OF1, XOF1, NEN1, NOF0. XOF is1 omdat beide ingangen verschillen; NEN is de ontkenning van EN.

23.2 De Morgan toetsen

●○○ Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

F=NIET(A OF B).

Maak de vier-rijentabel en schrijf een equivalent product.

Voor AB=00/01/10/11 is F=1/0/0/0. Dit is ¬A EN ¬B. Beide ingangen moeten nul zijn om hun OF te ontkennen tot1.

23.3 Een opteller uitvoeren

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

A=1,B=1,Cin=0.

Bereken S/Cout met poortformules en controleer rekenkundig.

A xor B=0; S=0 xor0=0. Cout=AB+(A xorB)Cin=1+0=1. S+2Cout=2=A+B+Cin.

23.4 Tellerfrequentie

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een vierbit-teller verhoogt elke stijgende klokflank op2 kHz.

Geef bit0/bit3-frequentie en tijd tot volledige cyclus.

Bit0=1000 Hz, bit3=125 Hz.16 klokperioden van0,5 ms geven8 ms voor een cyclus. De hoogste bit heeft periode8 ms.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

23.5 Karnaugh vereenvoudigen

Toepassen · 7 · Tekenen · 25 min

F=1 op mintermen ABC=001,011,101,111.

a. Maak een3-variabelen-Karnaughkaart in Gray-volgorde en vereenvoudig.

Alle1-cellen hebben C=1; groepeer de kolommen01/11 over beide A-rijen als rechthoek van4. F=C.

b. Toets alle rijen tegen de eindfunctie.

Voor elke rij bepaalt alleen C de waarde; de vier genoemde rijen hebben1, de overige vier0. Een gewone kolomvolgorde00/01/10/11 zou verkeerde buren tonen.

23.6 Een mux gebruiken

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Vier databits A/B/C/D worden met selectiebits S1S0 gekozen in die volgorde00/01/10/11.

Schrijf Y als som van producten en geef Y bij S1S0=10.

Y=¬S1¬S0A+¬S1S0B+S1¬S0C+S1S0D. Bij10 is alleen de derde term actief, dus Y=C. Iedere selectieminterm is exclusief bij geldige stabiele selectiebits.

23.7 D versus klok

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Stijgende klokflanken op1,3,5,7 ms. D is0 tot2,4 ms,1 tot6,4 ms, daarna0; Q start0.

Teken Q en verklaar waarom de verandering op2,4 ms niet onmiddellijk zichtbaar wordt.

Q blijft0 na1 ms, wordt1 bij3 ms, blijft1 bij5 ms en wordt0 bij7 ms. De flipflop is flankgevoelig: D tussen flanken verandert niet de vastgehouden Q. Dit veronderstelt ruime setup/hold.

23.8 Een poortbesparing toetsen

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Vergelijk F1=A+AB en F2=A.

a Schrijf een exhaustieve Python-test met product((0,1),repeat=2).

for a,b in product((0,1),repeat=2): assert bool(a or (a and b)) == bool(a). Alle vier gevallen zijn gelijk.

b Welke informatie ontbreken zulke tests over de fysieke kring?

Voedingsgrenzen, propagation, hazards, fouten, fan-out en analoge ruis ontbreken. De test bewijst de abstracte functie, niet de fysieke veiligheid.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

23.9 Een hazard analyseren

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

F=AB+¬AC met B=C=1; A wisselt. De directe en geïnverteerde paden hebben verschillende vertraging.

a Leg uit hoe een0-puls ontstaat en wat de consensus-term BC doet.

Ideaal blijft F=A+¬A=1. Bij een overgang kan AB al0 zijn terwijl ¬AC nog0 is door vertraging, dus kort0. Extra BC blijft1 en overbrugt dit bij deze tweelaagsopbouw; de stabiele functie verandert niet.

b Ontwerp een analyzerproef en leg uit welke conclusie niet volgt uit één foutloze proef.

Vaste B=C=1, wissel A met gekende generator, observeer beide paden en F op voldoende sampletempo. Varieer voeding/temperatuur en overgang. Geen glitch in één proef garandeert geen absence onder alle tolerantie-/timingcondities.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Logica	Waarheidstabel, toestandsgeheugen en stopprioriteit correct.
Hardwaregrens	Softwareverzoek kan de veiligheidsvrijgave niet overbruggen.
Verificatie	Opstart, draadbreuk, vastgehouden reset en onverwachte herstart expliciet getest.

23.10 De resetknop blijft ingedrukt

Uitdagen · 9 · Analyseren · 25 min

Het stopmodel gebruikt resetflank; een programmeur vervangt dat door resetniveau.

a Geef een scenario dat onbedoelde herstart toelaat.

> Reset wordt vastgehouden tijdens noodstop. Na herstel worden gezonde voorwaarden waar en aanvraag even0; niveaumodel wist slot zonder een nieuwe menselijke actie. Daarna kan een blijvend softwareverzoek starten. Dit schendt de afgesproken resetflankeis.

b Schrijf een flankdetector en beschrijf de opstartvoorwaarde.

> flank = reset and not vorige_reset; vorige_reset = reset. Init vorige_reset op de actuele ingang om een reeds vastgehouden knop bij opstart geen nieuwe flank te geven; slot start1. Ook aanvraag moet0 en voorwaarden gezond zijn.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Logica	Waarheidstabel, toestandsgeheugen en stopprioriteit correct.
Hardwaregrens	Softwareverzoek kan de veiligheidsvrijgave niet overbruggen.
Verificatie	Opstart, draadbreuk, vastgehouden reset en onverwachte herstart expliciet getest.

23.11 Habitat: softwarefaalproef

Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

Een gevaarlijke verwarmingstak moet stoppen wanneer de Pi hangt met aanvraag=1. Gebruik functionele vergrendeling, thermische grens en hardwarevrijgave.

a Maak een toestandtabel en geef een reeks met stop, loslaten, ongeldige reset, geldige reset en nieuw verzoek.

> Opstartslot1; gezonde resetflank met aanvraag0 wistslot. Nieuw verzoek activeert. Stop maakt slot1/uit0, loslaten houdt slot1. Reset met aanvraag1 is ongeldig. Verzoek eerst0, nieuwe resetflank, daarna nieuwverzoek. De code geeft precies deze reeks.

b Beschrijf fysieke scheiding en foutinjecties voor acceptatie.

> Pi-verzoek gaat door een apart fysiek vrijgavepad; veiligheidsmodule/energiecontacten kunnen onderbreken zonder software. Test vastverzoek, voedingsherstel, draadbreuk, kanaalverschil, vastreset, grensoverschrijding en contactfeedback volgens gekozen hardware. Observeer daadwerkelijke actuatorenergie, niet enkel een schermbit.

c Leg uit welke stationfuncties niet automatisch uitgeschakeld mogen worden door een algemene noodstop.

> Ventilatie en kritieke levensondersteuning kunnen bij energie-uit gevaarlijk worden. Leg per functie een veilige toestand en aparte energiegroep vast via risicoanalyse. Algemene logische0 is niet automatisch een veilige fysische toestand.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Logica	Waarheidstabel, toestandsgeheugen en stopprioriteit correct.
Hardwaregrens	Softwareverzoek kan de veiligheidsvrijgave niet overbruggen.
Verificatie	Opstart, draadbreuk, vastgehouden reset en onverwachte herstart expliciet getest.

23.12 Processor uit bouwstenen

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 60 min

Ontwerp een onderwijsprocessor met4-bit-registers R0/R1, ALU voor optellen en EN,2-bit-functiecode en resultaatregister.

a Teken datapad en besturing; beschrijf een klokvolgorde voor R0←R0+R1.

Registers leveren stabiele4-bitwaarden; muxes kiezen ALU-operatie; ALU-uitgang gaat naar R0-D; enable activeert de schrijfklok. Haal functiebits op, decodeer, laat combinatorisch resultaat settelen en schrijf op geldige flank. Registerhelderheid/enable voorkomt onbedoelde updates.

b Benoem carryoverflow en de timinggrens.

Vierbitresultaat is modulo16; carry wordt apart opgeslagen als vlag. Klokperiode moet registerclock-to-Q + langste ALU/muxdelay + setup plus marge bevatten. Niet alleen aantal poorten tellen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Logica	Waarheidstabel, toestandsgeheugen en stopprioriteit correct.
Hardwaregrens	Softwareverzoek kan de veiligheidsvrijgave niet overbruggen.
Verificatie	Opstart, draadbreuk, vastgehouden reset en onverwachte herstart expliciet getest.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 24

Vermogenselektronica en elektrische machines

Buck, boost, MPPT en motorbrug binnen hun grenzen

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 425 min

L Elektriciteit en elektronica · E Energie · R Regelen en robotica



Elk bron- en lastpad heeft eigen stroom-, spannings- en temperatuurgrenzen.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

24.1 Buckverhouding

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een ideale CCM-buck krijgt 24 V en moet 9 V leveren.

Bereken D en ideale ingangsstroom bij Io = 4 A.

D=9/24=0,375. Po=9·4=36 W; ideale Ii=36/24=1,50 A. Rendement kleiner dan 1 verhoogt Ii; uitgangsstroom is niet gelijk aan ingangsstroom.

24.2 Boostverhouding

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Ideale CCM-boost 12→48 V.

Bereken D en Ii bij Po=96 W en η=0,90.

D=1−12/48=0,75. Ii=96/(0,90·12)=8,889 A; Io=96/48=2 A. Dutyformule is ideaal; η wordt hier gebruikt voor stroombalans.

24.3 Maximum is geen Voc

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een paneel heeft openklemspanning 42 V en kortsluitstroom 10 A.

Waarom is 420 W geen bewezen maximumvermogen?

Voc treedt op bij I=0, Isc bij V=0. Hun product combineert twee verschillende werkpunten die niet tegelijk voorkomen. De I-V-curve moet een top van VI leveren; Vmp/Imp liggen doorgaans lager.

24.4 Rendement en verlies

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een omzetter neemt 500 W op en levert 470 W.

Bereken η, verlies en temperatuurstijging bij Rθ=1,2 K/W.

η=470/500=0,94=94 %. Verlies 30 W; ΔT=30·1,2=36 K. Dit geldt voor de bedoelde thermische grens en stationair bedrijf.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

24.5 Volt-seconden bewijzen

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Ideale CCM-buck: uLaan=Ui−Uo,uLuit=−Uo.

Leid Uo=DUi af en leg uit wat DCM verandert.

D(Ui−Uo)+(1−D)(−Uo)=DUi−Uo=0, dus Uo=DUi. In DCM komt een extra nulstroomfase; de gemiddelde balans over twee fasen is niet volledig en de verhouding hangt ook van belasting/L/fs af.

24.6 Rimpel en piekstroom

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Buck 48→12 V, Io=8 A, fs=50 kHz, L=100 µH, C=470 µF; ESR voorlopig 0.

Bereken D, ΔIL, minimum/piek en capacitieve rimpel.

D=0,25. ΔIL=(48−12)·0,25/(100 µH·50 kHz)=1,80 A. Imin = 7,10 A, Ipeak = 8,90 A: CCM. ΔUC≈1,80/(8·50000·470 µF)=9,574 mV. ESR en transiënten voegen rimpel toe.

24.7 Koude strings

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Vier panelen in serie; Voc bij 25 °C=42 V per paneel;αVoc=−0,0028/K; laagste celtemperatuur −15 °C; marge 3 %.

Bereken koude string-Voc inclusief marge en beoordeel een 200 V-limiet.

Viermaal 42=168 V. Temperatuurverschil −40 K geeft factor 1+0,112=1,112. Voc=186,816 V; met 3 %=192,42048 V. 200 V blijft slechts 7,58 V boven deze schatting; transiënten, toleranties en exacte datasheetmarges kunnen de keuze ongeschikt maken. Een grotere invoerklasse is een ontwerpvoorstel, geen automatische volledige bescherming.

24.8 BLDC-sectoren

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Motor 4 poolparen, 1500 tpm; zes sectoren per elektrische omwenteling.

a Bereken elektrische frequentie, sectorfrequentie en sectorduur.

fe=4·1500/60=100 Hz; sectorwissels 600/s, duur 1/600=1,667 ms.

b Waarom werkt sensorloze back-EMF-bepaling bij stilstand moeilijk?

Tegen-EMK is evenredig met snelheid en is bij stilstand nul; rotorpositie volgt er dan niet uit. Een startprocedure of positiesensor is nodig.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

24.9 P&O onder veranderende zon

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 60 min

Een bronspanningsstap verhoogt de eigen curvevermogen met 20 W, maar in hetzelfde interval daalt de bestraling zodat er 100 W minder gemeten wordt.

a Geef de P&O-conclusie en verklaar waarom die verkeerd kan zijn.

Gemeten ΔP=20−100=−80 W; P&O keert om hoewel de spanningstap bij dezelfde bestraling goed was. Vermogensverandering heeft meerdere oorzaken.

b Ontwerp een simulatie of test die statisch zoeken, schaduw en snelle zonvariatie apart beoordeelt.

Gebruik de getoonde curve met zon(t), bekend instantaan maximum en interne settling. Vergelijk volgverlies Σ(Pmax−P), oscillatie, staprespons en limietoverschrijding. Voeg daarna een curve met meerdere maxima toe; gebruik geen statische curveuitslag als bewijs van globale tracking bij schaduw.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Vermogen en spoelvolt-seconden consequent; CCM/grenzen benoemd.
Ontwerp	Koude Voc, stroom, rimpel, warmte en beveiliging gekwantificeerd.
Test	MPPT, verzadiging, bronvariatie en veilige energietoestanden afzonderlijk getoetst.

24.10 Warmteafvoer onder foutconditie

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 50 min

Moduleverlies 40 W, Ta = 40 °C, Rθjc = 0,50, Rθcs = 0,20, Rθsa = 0,80 K/W. Ventilatoruitval verdubbelt Rθsa.

a Bereken Tj normaal en na uitval; ontwerp een deratingregel.

Normaal Rθtotaal = 1,50 K/W, Tj = 100 °C. Na uitval Rθtotaal = 2,30 K/W, Tj = 132 °C. Voor ontwerplimiet 100 °C is Pverlies,max = 60/2,30 = 26,087 W. Kies derating op een gevalideerd verlies-/stroommodel; stel verlies niet lineair gelijk aan uitgangsvermogen als I^2R domineert.

b Welke onafhankelijke hardwaregrenzen zijn nodig?

Overtemperatuur-, stroom- en onderspanningsgrens en gatedriverinterlock; detecteer ventilatoruitval waar relevant. Hardware schakelt naar een risicogestuurde toestand; logging en alarmering vervangen de onderbreking niet.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Vermogen en spoelvolt-seconden consequent; CCM/grenzen benoemd.
Ontwerp	Koude Voc, stroom, rimpel, warmte en beveiliging gekwantificeerd.
Test	MPPT, verzadiging, bronvariatie en veilige energietoestanden afzonderlijk getoetst.

24.11 Habitat: de regelaars dimensioneren

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

Extra PV 4,20 kWp naar 44–56 V; bestaande 1,40 kWp/12 V blijft apart. Wind 59–223 V DC, 3 kW; η = 0,97. Omvormer 4,0 kVA continu en 8 kVA gedurende 5 s.

a Bereken maximale PV- en windlaadstromen bij 44 V en 3/4,2 kW; onderscheid gelijktijdige bronstroom van omvormerlaststroom.

PV: 0,97·4200/44=92,591 A; wind: 0,97·3000/44=66,136 A. Gelijktijdig 158,727 A bronstroom kan de batterijlaadlimiet overschrijden. De 100 A-eis voor continu omvormerbedrijf betreft een ontlaadpad en geeft geen toestemming voor maximaal laden; BMS- en batterijspecificatie moeten de gezamenlijke bron begrenzen.

b Maak een schema met bronregelaars, BMS, zekeringen, rem/dump, lastbeheer en hardwarestop.

Aparte PV- en wind-MPPT naar de 48 V-rail met passende bron- en railzekeringen en BMS. Windrem/dump blijft onafhankelijk beschikbaar bij volle batterij; voorkom een onbeheerst open windcircuit. De 12 V-module heeft haar eigen lader. De veiligheidsvrijgave onderbreekt gevaarlijke lasttakken volgens e23; essentiële ventilatie gaat niet blind uit.

c Werk volle batterij en de combinatie van 4,48 kVA uit; formuleer tests en benodigde componentgegevens.

Batterij vol: PV-vermogen beperken en windkoppel/rem/dump volgens turbinespecificatie. 4,48 kVA mag niet continu op een 4,0 kVA-omvormer; gebruik prioriteiten, minimumlooptijd en lastafschakeling. Test bronstap, koude Voc, railstroombegrenzing, BMS-weigering, overtemperatuur, communicatieverlies en aanloop. Verzamel Voc/Isc/temperatuurcoëfficiënt, gain- en stroomlimieten, thermische derating en remcurves vóór aanschaf.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Vermogen en spoelvolt-seconden consequent; CCM/grenzen benoemd.
Ontwerp	Koude Voc, stroom, rimpel, warmte en beveiliging gekwantificeerd.
Test	MPPT, verzadiging, bronvariatie en veilige energietoestanden afzonderlijk getoetst.

24.12 Hogere PWM-frequentie

Uitdagen · 9 · Analyseren · 25 min

Halfgeleider U = 48 V, I = 20 A, totale schakeltijd rise+fall = 100 ns; schakelfrequentie 20 kHz of 100 kHz.

Bereken overlapverlies en bespreek de winst en prijs van een hogere frequentie.

Psw ≈ 0,5·48·20·100 ns·fs. Bij 20 kHz is dat 0,96 W; bij 100 kHz 4,80 W, factor vijf. Een hogere fs kan L/C kleiner maken en akoestisch gedrag verbeteren, maar geeft meer schakel-, gate- en kernverlies, EMI en driverbelasting. Geleidingsverlies behoudt zijn eigen I_{rms}^2R-term; kies op een volledig budget.

E EXPERT · DEEL E5 · CHEMIE EN MATERIALEN

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 25

Thermochemie en reactiesnelheid

Reactiewarmte, activeringsbarrières en een compostvat in de winter

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 475 min

M Materie en chemie · E Energie · W Wiskundig modelleren



Een wintervat wordt pas warm wanneer biologische warmteproductie het verlies overtreft.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

25.1 Enthalpieteken en schaal

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

A→B heeft ΔH=−80 kJ per mol geschreven reactie.

Bereken ΔH voor 0,35 mol en voor de omgekeerde reactie met dezelfde hoeveelheid.

ΔH=0,35·(−80)=−28 kJ; de omgeving krijgt idealiter 28 kJ. Voor B→A is het teken omgekeerd: +28 kJ nodig. Verdubbelen van de vergelijking verandert de mol-reactiebasis.

25.2 Hess optellen

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

A→C: +40 kJ/mol; C→B: −95 kJ/mol.

Bepaal A→B en B→A; laat de tussenstof verdwijnen.

A→C plus C→B geeft A→B en +40−95=−55 kJ/mol. C valt weg. Omkeren levert B→A: +55 kJ/mol; begin- en eindtoestanden moeten gelijk blijven.

25.3 Bindingsbalans

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

$H_2+Cl_2 \rightarrow 2HCl$; Dwaarden 436, 243 en 431 kJ/mol.

Schat ΔH en leg het teken van beide sommen uit.

Breken vraagt 436+243=679; vormen geeft 2·431=862 vrij. ΔH≈679−862=−183 kJ/mol. De factor twee is nodig. Gasfasegemiddelden blijven een benadering.

25.4 Snelheid met coëfficiënten

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

2 A→B; [A] daalt van 0,100 naar 0,076 mol/L in 60 s, constant volume.

Bereken gemiddelde verdwijning van A, reactiesnelheid en toename van [B].

$-\Delta[A]/\Delta t=0{,}024/60=4{,}0\cdot10^{-4}$ mol/(L·s). r=½ daarvan=$2{,}0\cdot10^{-4}$. Δ[B]=0,012 mol/L; de productsnelheid is gelijk aan r.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

25.5 Een eerste-ordeconstante

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

c0=0,080 mol/L; na 300 s is c=0,050 mol/L.

Bereken k, halveringstijd en c na 600 s.

k=ln(0,080/0,050)/300=0,00156668 s^{-1}. $t_{½}$=ln2/k=442,431 s. c600=0,080·(0,050/0,080)²=0,03125 mol/L. Controle: twee gelijke tijdintervallen geven dezelfde relatieve afname.

25.6 Activeringsenergie uit twee temperaturen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

k1=0,0010 s^{-1} bij 293,15 K; k2=0,0020 s^{-1} bij 303,15 K.

Leid Ea af en controleer het teken.

ln2=−Ea/R(1/303,15−1/293,15). Het verschil tussen inverse temperaturen is negatief, dus Ea positief. Ea=R ln2/(1/293,15−1/303,15)=51,216 kJ/mol. Constante A/Ea is een aanname over dit gebied.

25.7 Reactieorde is gemeten

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Bij verdubbeling van A stijgt r met factor twee; bij verdubbeling van B blijft r gelijk.

Geef de snelheidswet en verklaar waarom de totale reactievergelijking de orde niet vastlegt.

2^m=2 geeft m=1; 2^n=1 geeft n=0. r=k[A]. De reactievergelijking telt atomen en netto stoichiometrie, maar niet de snelheidsbepalende route. Nulorde in B kan bijvoorbeeld voorkomen bij verzadiging; dat is een hypothese die extra metingen vraagt.

25.8 Katalyse en oppervlakte scheiden

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een verkleinde vaste stof reageert sneller; tegelijk is een enzym toegevoegd.

Ontwerp een proef die beide effecten apart meet.

Gebruik een 2×2-opzet: grof/fijn × enzym afwezig/aanwezig, met gelijke massa, temperatuur, concentratie, roeren en pH; minstens drie replicaten. Meet hetzelfde conversiecriterium. Controleer dat extra fijnheid de gas-/zuurstoftoevoer niet verandert. Een interactie kan betekenen dat de katalysatoroppervlakte of transport limiterend wordt.

Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

25.9 Fitten met een verkeerd eindplateau

Uitdagen · 9 · Programmeren · 60 min

Een sensor meet cgemeten=cwerkelijk+0,005 mol/L, maar je fit ln(cgemeten) lineair.

Simuleer de dataset, toon het residupatroon en verbeter het model.

Gebruik t=0…3000 s, c=0,100 exp(−0,0012t)+0,005. ln(c) vlakt laat af; één rechte lijn onderschat de late afname en geeft gestructureerde residuen. Fit c=b+c0 exp(−kt) rechtstreeks, bepaal b met blanco/late meting en toets parametercorrelatie. Bij een korte reeks zijn b en k moeilijk apart te identificeren; voeg late punten of onafhankelijke blanco toe.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Massa-, energie- en dimensiecontrole; rekenwaarden van gemeten eigenschappen onderscheiden.
Model	Arrheniusgebied, zuurstof, vocht, remming en parameteronzekerheid benoemd.
Bewijs	Replicaten, residuen en ruimtelijke temperatuurmetingen; geen hygiëneclaim op één modelcurve.

25.10 Compostwarmte als gekoppeld systeem

Uitdagen · 9 · Programmeren · 75 min

Gebruik het getoonde compostmodel, H=1 W/K en H=4 W/K.

a. Reproduceer de twee curven, halveer dt en controleer totale vrijgekomen energie.

Voer de code uit, vergelijk maxima/tijdstippen bij 60 en 30 s en bereken E=q(M0−M10). Controleer dat M nooit negatief is en dat elke warmtebron precies één afname dm vertegenwoordigt. De weergegeven echte uitvoer geeft referentiegetallen; bij strengere nauwkeurigheid verklein dt verder.

b. Verklaar waarom de hoogste temperatuur niet door alleen k20 wordt bepaald.

C bepaalt snelheid van opwarming; H en buiten bepalen verlies; M raakt op; Ea veroorzaakt positieve terugkoppeling; de hogetemperatuurremming begrenst biologische activiteit. Meer k20 alleen kan sneller brandstof uitputten. Meet C/H en biologisch bruikbare voorraad voordat je het model als voorspelling gebruikt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Massa-, energie- en dimensiecontrole; rekenwaarden van gemeten eigenschappen onderscheiden.
Model	Arrheniusgebied, zuurstof, vocht, remming en parameteronzekerheid benoemd.
Bewijs	Replicaten, residuen en ruimtelijke temperatuurmetingen; geen hygiëneclaim op één modelcurve.

25.11 Habitat: een winteronderzoek

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

120 L geïsoleerd vat buiten de kweekruimte; C/N 25–35. Kerntemperatuur blijft 6 °C bij 0 °C buiten.

a Maak een meetplan dat thermische en biologische oorzaken onderscheidt.

Meet temperatuur op kern én rand, vulling/massa, vocht en structuur; log buiten en tijd als UTC+1. Schat afkoeling uit een veilige niet-reactieve vergelijkingsvulling en leg ventilatiecondities vast. Verander één factor tegelijk met passende herhalingen; vergelijk beginwarmteproductie met verlies. C/N is een massaverhouding en beschikbaarheid telt mee.

b Geef de beslisgrenzen voor gebruik van de compost.

Een temperatuurmodel of één sensor bewijst geen volledige behandeling. Gebruik het bestaande hygiëneprotocol en beoordeel de gehele massa/tijd. Houd compost buiten de kweekruimte, gebruik haar uitsluitend volgens i35 in de meetkasbodem, nooit in NFT; bij onzekere behandeling geen gebruik. Dit onderzoek wijzigt het protocol niet.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Massa-, energie- en dimensiecontrole; rekenwaarden van gemeten eigenschappen onderscheiden.
Model	Arrheniusgebied, zuurstof, vocht, remming en parameteronzekerheid benoemd.
Bewijs	Replicaten, residuen en ruimtelijke temperatuurmetingen; geen hygiëneclaim op één modelcurve.

25.12 Thermochemie is geen productiesnelheid

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 50 min

Een reactorreactie geeft 150 kJ/mol vrij; de gewenste omzetstroom is 0,020 mol/s. De koeling voert 2,0 kW af.

Bereken warmteproductie en beoordeel stationair bedrijf; geef een veilig model voor start en stilzetten.

Productie=150000·0,020=3000 W. Koeling 2000 W geeft 1000 W netto; stationair op de bedoelde temperatuur kan niet. Bij C=200 kJ/K is de eerste stijging 0,005 K/s=0,30 K/min. Voeg temperatuurafhankelijke k, voorraad/invoer, menging en koellimiet toe; toets verlies van koeling en onafhankelijke limieten. Na stoppen van invoer kan aanwezige reactant blijven reageren, dus q verdwijnt niet meteen. Dit is een rekenontwerp, geen uitvoerbare gevaarlijke proef.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Balans	Massa-, energie- en dimensiecontrole; rekenwaarden van gemeten eigenschappen onderscheiden.
Model	Arrheniusgebied, zuurstof, vocht, remming en parameteronzekerheid benoemd.
Bewijs	Replicaten, residuen en ruimtelijke temperatuurmetingen; geen hygiëneclaim op één modelcurve.

E EXPERT · DEEL E5 · CHEMIE EN MATERIALEN

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 26

Chemisch evenwicht

Van Q en K naar buffers die een eindige verstoring opvangen

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 470 min

M Materie en chemie · B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren



Een buffer wordt eerst buiten de voedingsinstallatie op capaciteit en compatibiliteit getoetst.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen — één stap, direct toepassen

26.1 Dynamisch of stilstaand?

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

In een gesloten vat veranderen [A] en [B] niet meer bij A⇌B.

Wat kun je zeggen over heen- en terugreactie; betekent het dat alle A op is?

Bij chemisch evenwicht zijn de twee snelheden gelijk, doorgaans beide niet nul. Netto samenstelling verandert niet. A hoeft niet op te zijn. Een waargenomen constante samenstelling alleen kan ook kinetische stilstand zijn; aantonen van uitwisseling of respons op een verstoring ondersteunt dynamisch evenwicht.

26.2 Q en K vergelijken

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

A⇌B; K=4; [A]=0,20 en [B]=0,40 mol/L, ideaal.

Bereken Q en de richting van netto omzetting.

Q=[B]/[A]=2

26.3 Zuurconstantelogaritme

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Ka=2,0·10^{-6}; [H]=3,0·10^{-6} mol/L, ideaal bij 25 °C.

Bereken pKa en pH en leg hun verschillende rollen uit.

pKa=−log10(2,0·10^{-6})=5,6990. pH=−log10(3,0·10^{-6})=5,5229. pKa hoort bij het zuur en condities; pH bij deze oplossing. Eén zuur kan afhankelijk van concentratie/zout heel verschillende pH geven.

26.4 Een oplosbaarheidswortel

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

MX(s)⇌M^{+}+X^{-}; Ksp=4,0·10^{-12}, geen overige reacties/ionen.

Bereken s in zuiver water en het ionproduct bij [M]=[X]=10^{-5} mol/L.

s=√Ksp=2,0·10^{-6} mol/L. Qsp=10^{-10}>Ksp, dus thermodynamisch oververzadigd. Een eventuele vaste fase en kiemvormingskinetiek bepalen of onmiddellijk zichtbare neerslag ontstaat.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

26.5 Zwak zuur exact en benaderd

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

CT=0,010 mol/L; Ka=10^{-4}; waterbijdrage klein.

Bereken h met de kwadratische vergelijking en met √(KaCT); beoordeel de benadering.

Exact h=(−10^{-4}+√(10^{-8}+4·10^{-6}))/2=0,000951249 mol/L; pH=3,02171. Benadering h=0,001 geeft pH 3,000 en een 5,125 % hogere h. Omzetting is 9,512 % en niet meer klein tegenover CT; exact rekenen verdient de voorkeur.

26.6 Buffer na een basestap

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

pKa=5,00; HA=0,030 mol en A=0,010 mol in 1 L; voeg 0,005 mol OH^{-} toe, volume-effect verwaarloosbaar.

Bereken pH vóór en na; verklaar welke voorraad kleiner wordt.

Voor pH=5+log10(0,010/0,030)=4,52288. OH^{-} gebruikt HA: HA=0,025 mol en A=0,015. Na pH=5+log10(0,015/0,025)=4,77815; stijging 0,25527. De zuurvoorraad daalt en de basische vorm groeit. Vrij h/water is verwaarloosd tegenover de voorraden.

26.7 Gemeenschappelijk ion

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

AgCl-model Ksp=1,8·10^{-10}; oplossing heeft 0,010 mol/L Cl^{-}, geen complexen verondersteld.

Bereken vrij Ag^+ bij verzadiging en vergelijk met zuiver water; noem een modelbeperking.

[Ag]=Ksp/[Cl]=1,8·10^{-8} mol/L versus 1,34164·10^{-5} in zuiver water: factor 745,356 lager. Dit is vrije-ionenoplosbaarheid onder de aannames. In een werkelijke chlorideoplossing kunnen zilverchloridecomplexen en activiteit totale oplosbaarheid veranderen; gebruik hiervoor een uitgebreider model.

26.8 Temperatuur en snelheid

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Voorwaartse reactie is exotherm; hogere T versnelt beide richtingen.

Leg uit waarom sneller reageren niet noodzakelijk een hoger evenwichtsproductgehalte geeft.

De k-waarden bepalen de tijdschaal; K bepaalt de samenstelling. Voor exotherme heenreactie kan K bij hogere T dalen volgens Van 't Hoff, terwijl beide k-waarden groeien. Het systeem bereikt dan sneller een evenwicht met relatief minder product. Vermeld het temperatuurgebied en de ongeveer constante ΔH-aanname.

Uitdagen Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

26.9 Bufferberekening uitbreiden met verdunning

Uitdagen · 9 · Programmeren · 60 min

Gebruik het pKa = 6,10-model; voeg zuur/base als een eindig vloeistofvolume toe.

Pas CT en sterke-ionenbalans aan; controleer de nulvolumegrens en vergelijk met Henderson.

Bewaar eerst mol buffer=CT0V0 en netto sterke lading=csterk,0V0. Na toevoegen van Va met Ca zuur is V=V0+Va, CT=molbuffer/V en csterk=(csterk,0V0−CaVa)/V. Roep ph aan. Voor Va→0 reproduceer startpH; bij kleine doses en ruime dubbele voorraad benadert Henderson dit. Bij uitputting/sterke verdunning moet water mee. Geef de doseeroplossing een expliciet teken en eenheid; base werkt met +CbVb.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Chemie	Massabalans, lading en vrije soorten consistent; verdunning en activiteit aangegeven.
Ontwerp	Capaciteit, nutrientcompatibiliteit, neerslag en biologische effecten getoetst.
Bewijs	Geijkte metingen, blanco/replicaten en klein geïsoleerd testvolume vóór stationgebruik.

26.10 Twee concentraten kunnen een helder reservoir geven

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 65 min

Calcium- en fosfaatvoeding wordt 100× geconcentreerd opgeslagen.

Ontwerp meng- en controleproeven die lokale neerslag onderscheiden van een foute pH-meting.

Maak afzonderlijke kleine concentraten met bekende samenstelling; houd calcium en fosfaat/sulfaat gescheiden, verdun elk eerst in voldoende water volgens recept. Vergelijk juiste volgorde met een docentuitgevoerde microschaalcontrole, geen installatieproef. Meet temperatuur, geijkte pH, EC, troebelheid en beschikbare mineralen; analyseer vrije speciatie/complexen vóór een Kspclaim. Een tijdelijke lokale hoge ionsterkte kan neerslag kiemen ook als het eindmengsel op papier minder verzadigd lijkt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Chemie	Massabalans, lading en vrije soorten consistent; verdunning en activiteit aangegeven.
Ontwerp	Capaciteit, nutrientcompatibiliteit, neerslag en biologische effecten getoetst.
Bewijs	Geijkte metingen, blanco/replicaten en klein geïsoleerd testvolume vóór stationgebruik.

26.11 Habitat: buffer selecteren en begrenzen

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

pH-doel 5,8, grenzen 5,5/6,5; rekenkandidaat 2 mmol/L, pKa = 6,10; 56 L als schaalvoorbeeld.

a Bereken met de code de bufferbelasting naar beide grenzen en vergelijk met het i15-zuurvoorbeeld.

Gebruik de volledige ladingsbalans bij $h=10^{-5.5}$ en $10^{-6.5}$ en trek de begintegenionen af. De code-uitvoer geeft beide equivalenten per liter en voor 56 L. Het bestaande 90 mL × 0,50 mol/L is 45 mmol zuur; dat hoort bij een proeftitratie op bestaande voeding en mag niet rechtstreeks voor deze kandidaat worden gebruikt.

b Schrijf een selectie- en validatieplan zonder de voeding blind te wijzigen.

Kies eerst pKa/temperatuurgebied en maximale dagelijkse zuur-/basebelasting. Vergelijk bestaande voeding/blanco met een gescheiden kandidaatmonster; meet EC, capaciteit, neerslag, sensorrespons en biologische/plantcompatibiliteit. Pas na gevalideerde keuze kunnen molconcentratie, dosisgrens en mengtijd vastgelegd worden. Handmatige kleine titratiestappen met hercontrole blijven nodig; geen nieuwe automatische doseerregel uit deze oefening.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Chemie	Massabalans, lading en vrije soorten consistent; verdunning en activiteit aangegeven.
Ontwerp	Capaciteit, nutrientcompatibiliteit, neerslag en biologische effecten getoetst.
Bewijs	Geijkte metingen, blanco/replicaten en klein geïsoleerd testvolume vóór stationgebruik.

26.12 Een buffer kan een fout verbergen

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 55 min

Een pH-log blijft vlak maar EC daalt en sommige planten groeien minder.

Geef drie toetsbare hypothesen en een meetplan dat ze onderscheidt.

Hypothesen: nutriëntenopname/verarming ondanks buffer; neerslag/complexvorming verlaagt beschikbaar metaal; pH-sonde drift of fouling geeft een kunstmatig plateau. Meet geijkte pH in een onafhankelijk monster, EC/volume en geselecteerde mineralen; inspecteer helderheid/sediment en log doseringen. Gebruik herhalingen en vergelijk de kandidaat met een identieke nulproef. Een vlakke pH is geen bewijs van een gezond of volledig gevoed systeem.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Chemie	Massabalans, lading en vrije soorten consistent; verdunning en activiteit aangegeven.
Ontwerp	Capaciteit, nutrientcompatibiliteit, neerslag en biologische effecten getoetst.
Bewijs	Geijkte metingen, blanco/replicaten en klein geïsoleerd testvolume vóór stationgebruik.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 27

Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Van halfreacties naar een begrensd waterstofscenario

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 480 min

M Materie en chemie · E Energie · L Elektriciteit en elektronica



Een opslagkeuze vraagt energie, vermogen, systeemgrenzen en een gecontroleerd ontwerp.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

27.1 Halfreacties en tekens

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Zn^{2+}/Zn: −0,76 V; Cu^{2+}/Cu: +0,34 V, beide reductiepotentialen.

Schrijf de galvanische halfreacties, n en E°; wat gebeurt er bij verdubbeling van de vergelijking?

$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2\,e^-$ aan anode; $Cu^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Cu$ aan kathode. n=2, E°=0,34−(−0,76)=1,10 V. Verdubbelen geeft n=4 en dubbele ΔG, maar dezelfde E°; volt is energie per lading.

27.2 Lading en capaciteit

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

12,8 V/120 Ah-accu; 80 % bruikbare ontlaaddiepte.

Bereken coulomb, nominale en bruikbare kWh; geef de twee-paralleluitkomst.

120 Ah=432000 C. Nominaal 1,536 kWh, bruikbaar 1,2288 kWh vóór lastomzetting. Twee parallel: 12,8 V/240 Ah, 3,072/2,4576 kWh; geen verdubbeling van spanning.

27.3 Moleculen uit stroom

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Eén elektrolysecel 20 A gedurende 30 min, ηF=1.

Bereken mol en gram H_2.

Q=20·1800=36000 C; nH_2=Q/(2 F)=0,186557 mol; massa 0,376076 g met 2,01588 g/mol. O_2 is de helft van het H_2-molgetal; volumeconversie vraagt temperatuur/druk.

27.4 Opslagretour

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Eén kg H_2, LHV 120 MJ/kg, netto elektrisch rendement 45 %.

Bereken elektrische kWh en levertijd bij 300 W.

120/3,6=33,333 kWh chemisch. Elektrisch 15,000 kWh; bij 0,300 kW 50,0 h. De 45 % moet netto op de genoemde uitgang zijn; dubbel aftrekken van dezelfde hulpverliezen is fout.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

27.5 Nernst met Q

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Daniell E° = 1,10 V; 25 °C, n = 2, Q = 0,01.

Bereken E en vergelijk met Q 100.

E=1,10−(RT ln 10/2 F)log 10(0,01)=1,159159 V; bij Q = 100 1,040841 V. Klein Q betekent relatief veel reactant/voldoende Cu^{2+} en grotere drijving. Activiteiten en reversibele condities blijven aannames.

27.6 Serie, parallel en spanningseindpunt

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Denkbeeldige $LiFePO_4$-cellen 3,2 V/100 Ah; maximum 3,65 V als verstrekte celwaarde. Bestaande railrekenrange 44–56 V.

Bereken 16S-nominaal/maximum/energie en geef de compatibiliteitsvraag.

16S=51,2 V nominaal, 100 Ah, 5,12 kWh. De verstrekte maximumspanning wordt 58,4 V; dat ligt boven 56 V. Nominale '48 V'-compatibiliteit is dus onvoldoende. Controleer alle toestelgrenzen en het toegelaten werkelijke laadvenster; dit voorbeeld kiest geen bank of laadinstelling.

27.7 Faradisch versus energetisch rendement

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Elektrolyser ηF 98 %, celspanning 2,10 V; thermoneutrale referentie 1,481 V.

Geef de HHV-celenergieschatting en verklaar waarom 98 % geen 98 % energie is.

Bij dezelfde reactiehoeveelheid ηenergie, HHV≈ηF·Utn/Ucel=0,98·1,481/2,10≈69,11 %. De 98 % zegt dat bijna alle lading het bedoelde product vormt; hoge spanning kost extra energie per productmol. Voor een systeem moeten hulpapparaten erbij, en LHV geeft een andere ratio.

27.8 Stationdagbuffer als selectievoorstel

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Scenario 10 kWh AC-last per dag, twee dagen zonder productie; DOD 80 %, omvormer 93 %, nominale rekenrail 48 V.

Bereken minimale nominale kWh en Ah; noem ontbrekende dimensioneringsgegevens.

E=20/(0,80·0,93)=26,8817 kWh; Q≈26881,7/48=560,036 Ah. Dit is een energieondergrens/selectievoorstel, geen gekozen stationbank. Voeg koude-/verouderingsreserve, toegelaten laad-/ontlaadstroom, spanningseindpunten, piekstroom, rendementscurve en gewenste autonomie toe. De 12 V-moduleaccu's blijven apart.

Uitdagen Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

27.9 Uurprofiel versus jaargetal

Uitdagen · 9 · Programmeren · 75 min

Gebruik het synthetische 48 V-profiel en behoud 1000 kWh aangeboden zomerenergie.

a Halveer elektrolyservermogen en verdubbel minimumlast afzonderlijk; vergelijk H_2 en niet afgenomen energie.

Pas alleen pmax of pmin aan, voer de code opnieuw uit en controleer Ein+curtail=1000 kWh en tank≤12 kg. De limieten kunnen afname verkleinen ook bij dezelfde som; referentie-uitvoer staat bij het codeblad. Voeg bij verfijning startduur, partloadrendement, compressorbedrijf en lek-/standbyverlies toe.

b Maak een tegenvoorbeeld met dezelfde jaarenergie maar onvoldoende wintervermogen.

Concentreer de 175 kWh vraag bijvoorbeeld in 100 uur: 1,75 kW, boven 0,50 kW-brandstofcel. Dan wordt minstens 125 kWh in die uren onbediend zonder aparte batterij/vermogensinterface, ondanks genoeg H_2-energie. Jaarenergie bewijst geen beschikbaarheid op tijd.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Elektrochemie	Halfreacties, elektronen, tekenen, Faraday en thermodynamische grens correct.
Systeem	Vermogen/energie, rail, capaciteit, warmte, water en hulpverbruik onderscheiden.
Bewijs	Uurprofiel, systeem-/datasheetgrenzen en fysieke interface aangetoond; scenario zichtbaar.

27.10 Habitat: seizoensopslag doorrekenen

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

3013 kWh systeembalansoverschot en 175 kWh oud wintertekort. Scenario 55+3 kWh/kg, DC 96 %, netto cel 50 % LHV.

a Bereken benodigde H_2, zomerinvoer en beschikbare-fractieondergrens.

> H_2=175/(33,333·0,50)=10,5 kg. Zomerinvoer=10,5·58/0,96=634,375 kWh. Dat is 21,055 % van 3013, uitsluitend een noodzakelijke energietoets. Voeg reserve, seizoenverlies en gewijzigd e16/e49-verbruik toe.

b Schrijf de bewijsvoorwaarden voor een echte installatie.

> Toon afzonderlijk het 48 V-overschot per tijdstap; geen impliciete export van 1,40 kWp/12 V. Als export gewenst is: expliciete stroombegrensde interface met verliezen/reserveprioriteit. Verifieer elektrolyserstart/minimumlast, waterkwaliteit, opslagcapaciteit, druk-/gas-/ventilatiebeveiliging, netbrandstofcelvermogen en dagbuffer. Definieer stationbatterijcapaciteit als selectievoorstel totdat datasheet-/profieltoets afgerond is.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Elektrochemie	Halfreacties, elektronen, tekenen, Faraday en thermodynamische grens correct.
Systeem	Vermogen/energie, rail, capaciteit, warmte, water en hulpverbruik onderscheiden.
Bewijs	Uurprofiel, systeem-/datasheetgrenzen en fysieke interface aangetoond; scenario zichtbaar.

27.11 Energiedichtheid met eerlijke grens

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 55 min

Een leverancier noemt 33,3 kWh/kg H_2; een tweede 120 Wh/kg compleet batterijpack. Geen overige gegevens.

Welke vergelijking ontbreekt en hoe maak je een toetsbare tabel?

> H_2-waarde is chemische energie per kg gas; batterijwaarde is elektrische nominale packenergie. Vraag tank-/systeemmassa en volume, netto brandstofcelrendement/vermogen, compressor/elektrolyserenergie, DOD/omvormerrendement en tijdverlies. Reken beide naar bruikbare elektrische kWh per kg/liter compleet gekozen systeem op dezelfde uitgang. Voor warmtebuffer vermeld een ander doel. Een enkele dichtheid of efficiëntie kiest de opslagtechniek niet.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Elektrochemie	Halfreacties, elektronen, tekenen, Faraday en thermodynamische grens correct.
Systeem	Vermogen/energie, rail, capaciteit, warmte, water en hulpverbruik onderscheiden.
Bewijs	Uurprofiel, systeem-/datasheetgrenzen en fysieke interface aangetoond; scenario zichtbaar.

27.12 Een stroombalans zonder energiecreatie

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 60 min

Iemand vermenigvuldigt 55 kWh/kg elektrolyse met 50 % brandstofcelrendement en claimt 27,5 kWh/kg retour.

Herstel de balans, toon de ontbrekende energiebasis en geef een sluitende Sankey voor 1000 kWh railinvoer.

> Brandstofcelrendement geldt op de chemische LHV 33,333 kWh/kg, niet op ingevoerde 55. Retour=16,667 kWh/kg. Met 3 compressie en 96 % interface is rondgaand 0,96·16,667/58=27,5862 %. Voor 1000: interface 960/40 verlies; H_2-energie 551,724/408,276 omzetting-compressieverlies; uitgang 275,862/275,862 celverlies. Elke knoop sluit. Warmte teruggebruiken kan het gecombineerde nut verhogen maar is geen extra elektrische retour.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Elektrochemie	Halfreacties, elektronen, tekenen, Faraday en thermodynamische grens correct.
Systeem	Vermogen/energie, rail, capaciteit, warmte, water en hulpverbruik onderscheiden.
Bewijs	Uurprofiel, systeem-/datasheetgrenzen en fysieke interface aangetoond; scenario zichtbaar.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 28

Materiaalkunde

Van roosterfout en ketenbeweging naar een getoetste materiaalkeuze

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 470 min

M Materie en chemie · K Krachten, beweging en constructies · D Ontwerpen en maken



Een materiaalkeuze geldt voor een grade, proces, verbinding en gebruiksomgeving samen.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

28.1 Atomen per cel

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

BCC en FCC delen hoekatomen met naburige cellen.

Bereken N voor beide en leg uit waarom een vlakatoom half meetelt.

BCC: $8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$. FCC: $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$. Een vlak wordt door twee cellen gedeeld; een hoek door acht. Getekende centra zijn geen hele atomen die allemaal bij één cel horen.

28.2 Kristaldichtheid

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

FCC, $a = 0{,}400$ nm, molmassa 27,0 g/mol; $N_A = 6{,}02214076 \cdot 10^{23}$.

Bereken ρ en de invloed van 1 % grotere a bij gelijke massa.

ρ=4·0,027/(NA·(0,400·10^{-9})³)=2802,160 kg/m³. Bij a× 1,01 wordt ρ gedeeld door 1,01³, circa 2,94 % lager; kubieke geometrie maakt de gevoeligheid groter dan 1 %.

28.3 Roosterfout herkennen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Vacature, substitutie, interstitieel en dislocatie.

Beschrijf hun schaal en geef één mogelijke functionele invloed.

Vacature ontbreekt op een roosterplaats; substitutie vervangt een atoom; interstitieel zit ertussen: puntfouten die diffusie, sterkte of geleiding beïnvloeden. Dislocatie is een lijnfout die plastisch glijden mogelijk maakt en door obstakels gehinderd wordt. Niet alle fouten zijn ongewenst.

28.4 Glasovergang versus smelten

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een semi-kristallijn polymeer toont bij opwarmen twee verschillende veranderingen.

Verklaar Tg en Tm en waarom één waarde geen koude-impactrating geeft.

Tg betreft segmentmobiliteit van amorfe delen; Tm het smelten van kristallijne delen. Een thermoharder kan Tg hebben zonder gewone thermoplastische smelt. Impact hangt tevens van snelheid, kerf, vocht, additieven en microstructuur af; test de daadwerkelijke grade en conditie.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

28.5 Hall–Petch toepassen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

σ0=100 MPa,k=0,50 MPa√m; d=100/25 µm.

Bereken beide vloeigrenzen en de relatieve winst.

Bij 100 µm bijdrage 50 MPa, totaal 150. Bij 25 µm bijdrage 100, totaal 200 MPa. Winst 50/150=33,333 %. Dit is het verstrekte model, geen universeel legeringsgetal.

28.6 Composietrichting

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Vf=0,50,Ef=100 GPa,Em=2 GPa; ideale mengregels.

Bereken langs- en dwarsmodellen; wat betekent dit voor een boutverbinding?

Langs:0,5·100+0,5·2=51 GPa. Dwars:1/(0,5/100+0,5/2)=3,92157 GPa. Een bout belast lokaal meerdere richtingen, lagerdruk, interlaminaire schuif en delaminatie; de langswaarde alleen bewijst geen veilige verbinding.

28.7 Dotering en eenheden

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

$ND=10^{16}$ cm^{-3}, volledig geïoniseerd; $\mu=0{,}10$ $m^2/(V\cdot s)$, gaten verwaarloosd.

Zet ND om naar m^{-3} en bereken σ en soortelijke weerstand.

1 $m^3=10^6$ cm^3, dus $ND=10^{22}$ m^{-3}. $\sigma=q\,n\,\mu=160{,}2176634$ S/m; weerstand $1/\sigma=0{,}00624151$ Ω·m. De ionisatie/mobiliteitsaannames moeten bij temperatuur en dotering getoetst worden.

28.8 Uitzetting in een frame

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

1,20 m aluminium/staal, α23/12 µm/(m·K), ΔT 40 K.

Bereken relatieve uitzetting en ontwerp een kinematisch passend verbindingprincipe.

Verschil$=(23-12)\cdot10^{-6}\cdot1{,}20\cdot40=0{,}528$ mm. Kies bijvoorbeeld één referentiepunt en een geleide schuifrichting/slobgat die de hoofdlast nog draagt; voeg isolatie/drainage bij nat contact. Boutspanning/wrijving en daadwerkelijke belastingen moeten apart worden doorgerekend.

Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

28.9 Index uit de geometrie afleiden

Uitdagen · 9 · Analyseren · 55 min

Cantilever met vaste L/b, vrije h; δmax en σtoelaat beperken hoogte.

Leid minimum-massa-indexen af voor stijfheid en sterkte en verklaar waarom ze verschillen.

$\delta=4\,FL^3/(Ebh^3)$ geeft $h\propto E^{-1/3}$ en $m\propto\rho/E^{1/3}$: maximaliseer $E^{1/3}/\rho$. $\sigma=6\,FL/(bh^2)$ geeft $h\propto\sigma_{toelaat}^{-1/2}$ en $m\propto\rho/\sqrt{\sigma_{toelaat}}$: maximaliseer $\sqrt{\sigma_{toelaat}}/\rho$. Kies de grootste benodigde h; beide beperkingen gelden tegelijk. Bij vrije gelijkvormige b/h verandert de index, dus vermeld de geometrie.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Structuur	Eigenschap gekoppeld aan rooster, keten, fase, vezelrichting of gebrek.
Selectie	Functie, beperkingen, doel en vrije variabelen eerst; index afgeleid.
Validatie	Richting, temperatuur, UV/zout/vocht, verbinding en veroudering getoetst; lesdata geen certificaat.

28.10 Dataset met omgevingscorrectie

Uitdagen · 9 · Programmeren · 70 min

Gebruik selectie.py; de langs-houtwaarde van E blijkt bij natte toestand de helft.

Reproduceer rangorde, halve-E-test en controles; voeg daarna een $h\le50$ mm-constraint toe.

Voer de code uit, vergelijk $h\delta/h\sigma$ en kies max. Met halve E groeit stijfheidshoogte met $2^{1/3}$; sterktehoogte blijft in dit geïsoleerde model gelijk. Voeg een expliciete haalbaarheidsfilter $h\le0{,}050$ m toe en geef afgewezen kandidaten met reden, geen geforceerde score. In werkelijkheid kan vocht ook sterkte/dichtheid/kruip veranderen; verander die pas met onderbouwde gegevens.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Structuur	Eigenschap gekoppeld aan rooster, keten, fase, vezelrichting of gebrek.
Selectie	Functie, beperkingen, doel en vrije variabelen eerst; index afgeleid.
Validatie	Richting, temperatuur, UV/zout/vocht, verbinding en veroudering getoetst; lesdata geen certificaat.

28.11 Habitat: kou, zout en UV

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

Een buitenbeugel moet herhaalde windlast, zoutvocht en zonlicht doorstaan; geen grade is gekozen.

Maak eisen, screeningslijst en validatieplan voor drie kandidaatfamilies.

Leg belasting, vervorming, levensduur, bedrijfstemperatuur en inspectie vast. Vergelijk bijvoorbeeld gecoat aluminium, passende roestvaste staalgrade en gestabiliseerd composiet met echte productdata. Toets koude taaiheid, vermoeiing, corrosie/spleten, galvanische contacten, UV en verbinding. Maak proefstukken met echte gaten/coating/isolatie; combineer veroudering met mechanische hercontrole. Rekenmassa is alleen één doel, geen vrijgave. Bestaande PP/PC/multiplex-keuzes blijven afzonderlijke onderdelen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Structuur	Eigenschap gekoppeld aan rooster, keten, fase, vezelrichting of gebrek.
Selectie	Functie, beperkingen, doel en vrije variabelen eerst; index afgeleid.
Validatie	Richting, temperatuur, UV/zout/vocht, verbinding en veroudering getoetst; lesdata geen certificaat.

28.12 Een hardheidstest is geen breukbewijs

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 55 min

Na warmtebehandeling stijgt hardheid, maar een geperforeerde beugel scheurt bij koude impact.

Geef structuur-/proceshypothesen en passende vervolgmetingen.

Mogelijk hard martensiet met beperkte taaiheid, onvoldoende/ongeschikt ontlaten, restspanning, kerfconcentratie, las-/oppervlakdefect of verkeerde grade. Vraag proces-/temperatuur-/koelgegevens, metallografie, maat/kerf en geschikte taaiheids-/vermoeiingsproeven op de relevante temperatuur. Hardheid alleen bepaalt geen scheurweerstand. Laat een dragende beugel niet via een geïmproviseerde verwarmingsproef aanpassen; keuze en behandeling vragen beheerst proces.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Structuur	Eigenschap gekoppeld aan rooster, keten, fase, vezelrichting of gebrek.
Selectie	Functie, beperkingen, doel en vrije variabelen eerst; index afgeleid.
Validatie	Richting, temperatuur, UV/zout/vocht, verbinding en veroudering getoetst; lesdata geen certificaat.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 29

DNA, genen en eiwitten

Van gerichte DNA-keten naar eiwitfunctie en een toetsbare raskeuze

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 485 min

B Leven en systemen · M Materie en chemie



Een koudetolerant ras wordt beoordeeld op meetbare schade, herstel en opbrengst onder dezelfde omstandigheden.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen

één stap, direct toepassen

29.1 Antiparallel noteren

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

5'-AACGTTAG-3' is één DNA-streng.

Schrijf de gepaarde streng eronder en daarna haar 5'→3'-notatie.

Onder: 3'-TTGCAATC-5'. Omkeren naar 5'→3' geeft 5'-CTAACGTT-3'. Alleen complementeren zonder richtingomkering levert niet de gevraagde standaardnotatie.

29.2 RNA en polypeptide

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Matrijs 3'-TAC AAA CCG ATT-5', standaardcode, start bij eerste AUG.

Maak RNA en vertaal; tel codons en aminozuren.

RNA 5'-AUG UUU GGC UAA-3'. Met–Phe–Gly, dan stop. Vier codons, drie aminozuren; UAA telt niet als residu.

29.3 Replicatierichting

Oefenen · 6 · Tekenen · 25 min

Een replicatievork beweegt naar rechts.

Teken beide matrijsrichtingen en nieuwe leidende/achterblijvende strengen met 5'/3'.

Bovenmatrijs van links 3' naar rechts 5': leidende synthese rechtswaarts van 5' naar 3'. Ondermatrijs van links 5' naar rechts 3': nieuwe fragmenten linkswaarts, ieder van 5' rechts naar 3' links. Beide synthetiseren 5'→3'; primerverwerking en ligase verbinden fragmenten.

29.4 Een variant classificeren

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

RNAcodon GAA wordt GAG, GUA of UAA.

Geef voor elk aminozuur-/stopgevolg en één grens aan deze classificatie.

GAA en GAG geven Glu: synoniem. GUA geeft Val: missense. UAA geeft stop: nonsense als deze voortijdig is. Het etiket voorspelt niet zelfstandig activiteit, stabiliteit, splicing of plantprestatie.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

29.5 Semiconservatieve fracties

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Zwaar DNA groeit zes complete generaties met lichte nieuwe nucleotiden.

Bereken hybride/licht en vergelijk met conservatief kopiëren.

Semiconservatief: 2^(1−6)=1/32=3,125% hybride, 96,875% licht, geen zwaar duplex. Conservatief zou het oude zware duplex behouden naast nieuwe lichte duplexen, dus een zware band en geen hybride band in het ideale model. Bandlocatie en fractie zijn beide relevant.

29.6 Splicing en lengte

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Primair RNA: 80 nt UTR, 180 nt exoncode, 150 nt intron, 240 nt exoncode inclusief stop, 70 nt UTR.

Tel primaire/rijpe lengte en aminozuren; noem de aannames.

Primair 80+180+150+240+70=720 nt. Rijp na intronverwijdering 570 nt. Code 420 nt=140 codons inclusief één stop: 139 aminozuren. Dit veronderstelt correcte exonverbinding, één gekozen raam, geen extra code-introns en telt toegevoegde poly(A) niet mee.

29.7 Voorraad is geen snelheid

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

m'=s−0,4m, p'=3m−0,1p; s=2 eenheden/h.

Bereken stationaire voorraden en beide halfwaardetijden; wat gebeurt na s=0?

m*=2/0,4=5, p*=3·5/0,1=150. m-halfwaardetijd ln2/0,4=1,733 h; p-afbraakhalfwaardetijd ln2/0,1=6,931 h. Na bronuitschakeling daalt m, maar blijft p nog door m geproduceerd: p volgt niet meteen een vrij verval zolang m aanwezig is.

29.8 Foutkans en verwachting

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Lesmodel $p=2\cdot10^{-7}$ per nucleotide, $N=2\cdot10^{6}$ onafhankelijke nieuwe nucleotiden.

Bereken verwacht aantal fouten en P(minstens één); verklaar het verschil.

Verwachting Np=0,4 fouten. P(minstens één)=1−(1−p)^N≈1−e^−0,4=0,32968=32,968%. Een verwachting kleiner dan één betekent niet dat elke molecule nul fouten heeft. Onafhankelijkheid/uniformiteit zijn lesmodelaannames.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

29.9 Alle substituties controleren

Uitdagen · 9 · Programmeren · 65 min

Gebruik sequenties.py voor het minigen en zijn 45 coderende substituties.

Reproduceer telling, voeg een assert op de som toe en onderzoek waarom startverlies anders moet worden behandeld.

Er zijn 15 posities met telkens drie andere basen: 45. Controleer sum(telling.values())==45. De code classificeert gewijzigde AUG als een aminozuurverandering omdat het raam en startpunt verstrekt zijn; in een echte initiatievraag kan startverlies of gebruik van een ander startpunt spelen. Voeg daarom een apart startcodon/contextcriterium toe en rapporteer beide definities. Deze telling is geen geschatte natuurlijke schadekans.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

mechanisme	DNA/richting, expressie, structuur en omgeving zijn apart onderbouwd.
controle	Code, aannames en onafhankelijke controle worden beschreven.
conclusie	Een modeluitkomst wordt niet als bewijs voor een koudetolerant ras voorgesteld.

29.10 Experiment en expressiemodel

Uitdagen · 9 · Analyseren · 70 min

De modelprikkel eindigt na 10 h, maar eiwit piekt later.

Verklaar met de tekenvoorwaarden; controleer dt en ontwerp een meetreeks die mRNA en eiwit onderscheidt.

Bij t=10 h is de bron alweer laag, maar m is nog hoog. p stijgt zolang kt·m>kp·p; de p-piek ligt waar beide gelijk worden. Vergelijk dezelfde kwartierpunten bij dt=0,01/0,005 h en eventueel exacte constante-bronoplossingen. Meet vóór, dicht rond 2/10 h en tijdens naloop beide voorraden met onafhankelijke replicaten en passende normalisatie. Een vertraagde eiwitpiek op zichzelf bewijst geen CBF-mechanisme.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

mechanisme	DNA/richting, expressie, structuur en omgeving zijn apart onderbouwd.
controle	Code, aannames en onafhankelijke controle worden beschreven.
conclusie	Een modeluitkomst wordt niet als bewijs voor een koudetolerant ras voorgesteld.

29.11 Ras en acclimatie scheiden

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

Twee slarassen lijken na kou te verschillen; één was vooraf een week koel gehouden.

Ontwerp een ras×acclimatie-proef met opbrengst en herstel, inclusief beslisregel.

Gebruik vier groepen: elk ras met/zonder dezelfde acclimatie, willekeurige posities, meerdere onafhankelijke planten en gelijke licht-/voedingscondities. Log werkelijke blad-/luchttemperatuur. Leg vooraf uitkomstmomenten, schade, herstel en eetbare massa vast, plus een praktisch opbrengstcriterium voor de energiebalans. Houd een beschermde referentie. De proef kan ras/acclimatie en hun interactie onderscheiden; zij bewijst zonder moleculaire meting geen specifieke genoorzaak.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

mechanisme	DNA/richting, expressie, structuur en omgeving zijn apart onderbouwd.
controle	Code, aannames en onafhankelijke controle worden beschreven.
conclusie	Een modeluitkomst wordt niet als bewijs voor een koudetolerant ras voorgesteld.

29.12 Van letter naar functie

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 60 min

Een missensevariant ligt bij een vermeende actieve plek; een synonieme variant toont minder eiwit.

Formuleer twee mechanistische hypotheses en onafhankelijke testen die ze kunnen weerleggen.

Missense: mogelijk andere katalyse/stabiliteit; vergelijk activiteit bij gelijke hoeveelheid en gecontroleerde temperatuur/substraat. Synoniem: mogelijk RNA/splicing/stabiliteit of translatieverschil; meet transcriptvorm/hoeveelheid en eiwitproductie/afbraak. Gebruik geschikte referenties en scheid hoeveelheid van activiteit per eiwit. Voeg hele-plantprestatie toe voor toepassing. Locatie en etiket zijn hypotheses, geen functiebewijs.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

mechanisme	DNA/richting, expressie, structuur en omgeving zijn apart onderbouwd.
controle	Code, aannames en onafhankelijke controle worden beschreven.
conclusie	Een modeluitkomst wordt niet als bewijs voor een koudetolerant ras voorgesteld.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 30

Biotechnologie en genetische technieken

DNA verbinden, versterken en meten met een controleerbare betekenis

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 505 min

B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren



Een snel signaal wordt bruikbaar door monstergegevens, kalibratie en werkende controles.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

30.1 Een vectorlengte

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Vector 3600 bp; verwijder 200 bp en voeg 800 bp in.

Bereken eindlengte en wat een correcte som van knipfragmenten wel/niet bewijst.

3600−200+800=4200 bp. De knipfragmenten moeten samen 4200 bp geven. Een passende som ondersteunt een lengtebalans; oriëntatie, sequentie en expressie moeten apart getoetst worden.

30.2 Primer richting

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Referentiebinding aan rechterzijde 5'-TTGACCAA-3'.

Geef de reverse-primer 5'→3' en de verlengingsrichting in het schema.

Reverse complement is 5'-TTGGTCAA-3'. Hij bindt antiparallel aan de referentiestreng; zijn 3'-uiteinde wijst naar het binnengebied en de verlenging groeit in het schema linkswaarts 5'→3'. Acht basen zijn hier een richtingsoefening, geen praktisch primerontwerp.

30.3 Efficiëntie gebruiken

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

N0=5, ε=0,8, 10 cycli.

Bereken kopieën en vergelijk met ideaal verdubbelen.

N10=5·1,8^{10}=1785,234 kopieën als verwachting in een constante-efficiëntiefase; ideaal 5·2^{10}=5120. De factor is 1+ε=1,8. Werkelijke aantallen zijn discreter en plateau/remming kunnen de extrapolatie verbreken.

30.4 Gel lezen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Monster A heeft een band bij 300 bp, NTC heeft geen zichtbare band.

Geef twee gerechtvaardigde en twee te sterke conclusies.

Onder gelcondities bestaat een zichtbaar product met geschatte lengte 300 bp; in de NTC is geen band boven de zichtbare grens. Niet gerechtvaardigd: het product heeft zeker de bedoelde sequentie, of de tank is pathogeenvrij. Ontbrekende remmings/recoverycontrole en beperkte samplehoeveelheid blijven relevant.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

30.5 Ct en factor

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Geldige exponentiële assay met factor 2; monster A Ct20 en B Ct23.

Vergelijk beginhoeveelheden en verklaar wat gelijk moet zijn.

Bij dezelfde drempel/efficiëntie bevat A 2^(23−20)=8 keer zo veel beginkopieën per reactie. Voor oorspronkelijk water moet je daarnaast volume, recovery, verdunning en aliquot gelijk hebben of corrigeren. Ct alleen is geen cellenteller.

30.6 Logaritmische gelinterpolatie

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

300 bp op 42 mm en 1200 bp op 22 mm; onbekend op 32 mm.

Bereken lokale lengte en een belangrijk voorbehoud.

Halverwege afstand is halverwege loglengte: √(300·1200)=600 bp. Controleer dat 32 mm tussen calibratiepunten ligt. Geldig voor vergelijkbare lineaire fragmenten in hetzelfde lokale gelgebied; andere conformatiestoestanden of extrapolatie vragen nieuwe gegevens.

30.7 Een target gemist

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

C=0,2 kopie/mL, V=50 mL, recovery 0,5, aliquotfractie 0,1.

Bereken λ en de ideale kans op minstens één target; wat als interne controle faalt?

λ=0,2·50·0,5·0,1=0,5. P≥1=1−e^−0,5=39,347%; P0=60,653%. De beperkte samplehoeveelheid kan targets missen. Bij falende interne controle is een afwezig targetsymbool niet interpreteerbaar, ook als λ groot zou zijn.

30.8 Een nul-telling begrenzen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Geldige ideale detectie; Vrf=10 mL, nul targets.

Bereken eenzijdige 95%-bovengrens en formuleer de conclusie.

−ln0,05/10=0,299573 kopieën/mL onder Poisson, vaste recovery en perfecte detectie van ieder aanwezige target. Formuleer een modelgrens voor deze target/sample, geen tankveiligheids- of medische grens. Werkelijke LOD en ruimtelijke/tijdvariatie vragen afzonderlijk bewijs.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

30.9 Een volledige modelrun

Uitdagen · 9 · Programmeren · 75 min

testmodel.py geeft efficiëntie, residuen en een onbekend Ct 25.

Reproduceer getallen en voer herstel/fractie/efficiëntiegevoeligheid uit; geef geldige rapportvelden.

Voer werkelijk uit en controleer de 300bp-primerbalans en standaardcurve. Verlaag recovery en aliquot: λ daalt lineair en nul-tellingsgrens stijgt omgekeerd. Verander factor 1,9: Ct-helling en terugberekende beginhoeveelheid wijzigen. Rapporteer residualen/modelgrenzen en sample-, recovery-, aliquot- en controlegegevens. Deze synthetische fit mag niet als validatie van een echte assay worden gebruikt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

techniek	Richting, model en controles zijn correct.
grenzen	Samplevolume, herstel, detectie en identiteit worden onderscheiden.
besluit	Een signaal wordt niet zonder validatie een veiligheidsvrijgave.

30.10 Cas9-resultaat beoordelen

Uitdagen · 9 · Analyseren · 60 min

Een kniptest is positief; de beoogde reparatie ontbreekt in veel geanalyseerde cellen.

Geef een mechanistische verklaring en een toetsplan voor een functionele uitspraak.

Knip en reparatie zijn aparte gebeurtenissen; verschillende indels, ongewijzigde cellen of alternatieve reparatie kunnen een gemengde populatie geven. Meet werkelijke doel-sequenties, gewenste fractie, relevante ongewenste veranderingen en functie in passende condities. Een knippercentage is geen percentage exact gewenste functionele uitkomst. Voeg stabiliteit en toepassingsspecifieke gevolgen toe.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

techniek	Richting, model en controles zijn correct.
grenzen	Samplevolume, herstel, detectie en identiteit worden onderscheiden.
besluit	Een signaal wordt niet zonder validatie een veiligheidsvrijgave.

30.11 Habitat monsterplan

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

Een 500 L-drinkwatertank heeft één snelle targetniet-detectie zonder vastgelegd samplevolume.

Ontwerp een reviewbaar monster-/controle-/rapportplan en herstel de te sterke conclusie.

Kies met een geschikt laboratorium doelorganisme/matrix en gevalideerde methode. Leg plekken/tijden/volume, verwerking/recovery, aliquot, LOD/LOQ, standaardcurve en controles vast. Scheid geldige niet-detectie van ongeldige run. Voeg herhaalde onafhankelijke monstername en passende bevestiging toe; houd bestaande kwaliteitsprocedure aan. Eén onbekende sampleomvang bewijst geen tankveiligheid; de cursus kiest geen nieuw vrijgavecriterium.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

techniek	Richting, model en controles zijn correct.
grenzen	Samplevolume, herstel, detectie en identiteit worden onderscheiden.
besluit	Een signaal wordt niet zonder validatie een veiligheidsvrijgave.

30.12 Biotechnologie afwegen

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 80 min

Een koudegewasvoorstel gebruikt een aangepaste regulerende sequentie; een bestaande andere cultivar is alternatief.

Maak een beslismatrix met bewijs, baten, gevolgen en verantwoordelijkheid.

Vergelijk echte opbrengst/schade/energie, stabiliteit, mogelijke ecologische verspreiding, voedselgebruik, onderhoud en alternatieven. Benoem betrokken telers/bewoners/omgeving, eigendom/data en wie monitoring/terughalen draagt. Vraag techniek- en prestatiebewijs zonder knipresultaat als opbrengstbewijs te gebruiken. Juridische eisen worden voor een echt project actueel door bevoegde partijen gecontroleerd; de les verzint geen vrijstelling.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

techniek	Richting, model en controles zijn correct.
grenzen	Samplevolume, herstel, detectie en identiteit worden onderscheiden.
besluit	Een signaal wordt niet zonder validatie een veiligheidsvrijgave.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 31

Bioprocestechniek

Groei, voeding, licht en gas op één controleerbare systeemgrens

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 525 min

B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren · M Materie en chemie



Een getoetste reactorprestatie bevat groei, gas, oogst, lichtenergie en onderhoud samen.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

31.1 Monod in het midden

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

μmax=0,6 h^{-1}, Ks=2 g/L; S=2 of 6 g/L.

Bereken μ en tijdelijke verdubbelingstijden.

Bij S=2: μ=0,30 h^{-1}, td=ln2/0,30=2,310 h. Bij S=6: μ=0,6·6/8=0,45 h^{-1}, td=1,540 h. Beide tijden veronderstellen tijdelijk gelijkblijvend S en andere condities.

31.2 Batchopbrengst

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

X0=0,2, S0=8 g/L; Y=0,4 g/g; volume 5 L.

Bereken theoretisch Xmax en totale droogmassa.

Xmax=X0+YS0=0,2+0,4·8=3,4 g/L; totale massa XV=17 g. Nieuw gevormd is 5 L·0,4·8=16 g, naast 1 g beginbiomassa. Dit ene-substraatmodel bevat geen onderhoud, sterfte of andere beperking.

31.3 Concentratie versus voorraad

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Biomassamassa groeit van 10 naar 15 g terwijl V van 2 naar 4 L groeit.

Bereken X voor/na en verklaar waarom de lagere X geen sterftebewijs is.

Xvoor=10/2=5 g/L, Xna=15/4=3,75 g/L. De massa is 50% groter, maar het volume 100% groter: verdunning verlaagt de concentratie. Meet XV en niet alleen X om de groeivraag te beantwoorden.

31.4 Uitwassen herkennen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een continu vat heeft $\mu=0{,}15\ h^{-1}$ en $D=0{,}20\ h^{-1}$.

Geef het teken van X' en de betekenis zonder meteen exact nul te claimen.

X'=(0,15−0,20)X=−0,05X bij X>0: biomassa wordt netto afgevoerd. Als deze toestand aanhoudt, neemt X exponentieel af; een eindige tijd hoeft X niet precies nul te maken. Controleer veranderende S en μ.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

31.5 Fed-batch massa sluiten

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

V0=3 L, X0=0,2, S0=4 g/L, Y=0,5. Voer 1 L van Sin=12 g/L toe; S aan het einde is 1 g/L, geen oogst.

Bereken eind-X en totale biomassa via de equivalentenbalans.

Begin-equivalent=3(0,2+0,5·4)=6,6 g. Toegevoegd YI=0,5·1·12=6 g; totaal 12,6 g. Eindvolume is 4 L: 4(X+0,5·1)=12,6, dus X=2,65 g/L en biomassamassa 10,6 g. Resterend S is 4 g met 2 g X-equivalent; samen 12,6 g.

31.6 Chemostat kiezen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

$\mu_{max}=0{,}5\ h^{-1}$, Ks=1 g/L, Sin=9 g/L, Y=0,4, $D=0{,}25\ h^{-1}$.

Bereken S*, X*, productiviteit en Dcrit.

S*=1·0,25/(0,5−0,25)=1 g/L. X*=0,4(9−1)=3,2 g/L. PX=D X*=0,8 g/(L·h). Dcrit=0,5·9/(1+9)=0,45 h^{-1}; 0,25 ligt eronder. Beoordeel transport en reserve apart; wiskundige bestaanbaarheid is geen productvrijgave.

31.7 Zuurstofoverdracht

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

C*=9, Cmin=3 mg/L, kLa=8 h^{-1}; qO2=0,016 g/(g·h).

Bereken Xgrens en de stationaire C bij X=2 g/L.

OTRmax=8(9−3)=48 mg/(L·h). qO2=16 mg/(g·h), dus Xgrens=48/16=3 g/L. Bij X=2 is OUR=32 mg/(L·h) en Cstationair=9−32/8=5 mg/L. Cmin is de verstrekte procesgrens, geen algemene veiligheidsnorm.

31.8 Elementbalans naar bewoners

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Gebruik de CH1,8O0,5N0,2-lesbiomassa en 1,68 kg O_2/dag voor twee bewoners.

Controleer C, H, O, N en bereken droge biomassa/CO_2; wat ontbreekt voor echte levering?

Reactie: $CO_2+0{,}2NH_3+0{,}6H_2O \rightarrow$ biomassa$+1{,}05O_2$. C: 1=1; N: 0,2=0,2; H: 0,6+1,2=1,8; O: 2+0,6=0,5+2,1=2,6. Per 24,6 g droog ontstaat 33,6 g O_2; 1,68 kg vraagt 1,23 kg droog en 2,20 kg CO_2. Werkelijke samenstelling/N-bron, respiratie, licht, voedingsstof-/gastransport, zuiverheid en buffers ontbreken nog.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

31.9 Alle reactorbalansen reproduceren

Uitdagen · 9 · Programmeren · 80 min

reactoren.py bevat vier modi met cumulatieve voeding en afvoer.

Controleer waarden, dt-verfijning en invariant; voeg een onderhoudsterm toe zonder het balansverlies te verbergen.

Reproduceer alle runs en vergelijk dezelfde halve-uurpunten. De invariant V(X+YS)+HX+YHS−YI blijft tot afronding gelijk. Voor een extra onderhoudsterm −mS·X in S' hoort een cumulatieve onderhoudsvoorraad bij de equivalente controle; fysieke koolstof/gas/energie vraagt afzonderlijke stofbalansen. Voeg die boekhouding toe en rapporteer hoeveel productiviteit verloren gaat. Clip negatieve toestanden niet stil om foutieve massabalans te verbergen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

balans	Voorraad, voeding, verdunning, oogst en gas hebben controleerbare eenheden.
model	Kinetiek, licht/transport en toepassingsgrenzen zijn expliciet.
validatie	Eigen code, stapverfijning en onafhankelijk massabehoud ondersteunen het resultaat.

31.10 Licht opschalen

Uitdagen · 9 · Analyseren · 75 min

Bij dezelfde oppervlakte wordt de lesreactor van 5 naar 25 cm diep.

Leid de geïntegreerde factor af, reproduceer productie en vergelijk met ‘vijf keer volume’.

Integreer I/(KI+I) met I=I0e^−az: de integraal over 0…L is ln[(KI+I0)/(KI+I0e^−aL)]/a. Deel door L. Factor bij 5 cm: 0,522771; bij 25 cm: 0,138616. Netto μ: 0,368217/0,060893 per dag. Biomassavoorraad: 0,025/0,125 kg per m^2; droogproductie: 0,009205/0,007612 kg/dag. Respiratie van het extra donkere volume maakt netto opbrengst kleiner ondanks vijf keer voorraad. Parameters zijn lesgegevens, geen stamvalidatie.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

balans	Voorraad, voeding, verdunning, oogst en gas hebben controleerbare eenheden.
model	Kinetiek, licht/transport en toepassingsgrenzen zijn expliciet.
validatie	Eigen code, stapverfijning en onafhankelijk massabehoud ondersteunen het resultaat.

31.11 Een O_2-reactor als systeemplan

Uitdagen · 9 · Habitat · 100 min

Een ontwerper wil de bewonersventilatie vervangen na één hoge fotosynthesemeting.

Maak een dimensie-/validatieplan met energie, koolstof, donkerperiode, oogst en storing.

Gebruik de netto gasvraag en aparte licht/donkerflux; sluit C/H/O/N plus oogst/afval en voedingsstoffen. Meet werkelijke lichtverdeling, warmte, gasoverdracht/-zuiverheid en lamp-/meng-/pompenergie. Leg onderhoud, contaminatiecontrole, restbuffer en onafhankelijk falen/levering vast. Het 5 cm-lesmodel vraagt 133,617 m² en 213,787 kWh/dag alleen voor de gegeven lampbijdrage; dit is geen gekozen installatie. Een momentane bruto O_2-meting rechtvaardigt geen vervanging van de bestaande levensvoorziening.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

balans	Voorraad, voeding, verdunning, oogst en gas hebben controleerbare eenheden.
model	Kinetiek, licht/transport en toepassingsgrenzen zijn expliciet.
validatie	Eigen code, stapverfijning en onafhankelijk massabehoud ondersteunen het resultaat.

31.12 Schaalregels kunnen botsen

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 70 min

Geometrische lengtes×10; eis gelijk P/V én gelijke tipsnelheid voor hetzelfde Np.

Bewijs de botsing en kies een toetsbaar vervolg in plaats van beide stil te claimen.

Gelijk P/V geeft N∝λ^(−2/3) en tipsnelheid∝λ^(1/3); bij λ=10 groeit de tipsnelheid 2,154 keer. Gelijke tipsnelheid geeft N∝λ^(−1) en P/V∝λ^(−1), dus tien keer lager. Beide kunnen voor hetzelfde impellerconcept niet tegelijk behouden blijven. Onderzoek meerdere impellers, andere geometrie, transport-/mengproeven en energie/kwaliteit; controleer Re/Np en kLa. Kies prioriteiten met empirische validatie in plaats van een universele schaalwet.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

balans	Voorraad, voeding, verdunning, oogst en gas hebben controleerbare eenheden.
model	Kinetiek, licht/transport en toepassingsgrenzen zijn expliciet.
validatie	Eigen code, stapverfijning en onafhankelijk massabehoud ondersteunen het resultaat.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 32

Ecologische modellen

Groei, interactie en materiaalbehoud vragen elk hun eigen stabiliteitsbewijs

Uitgewerkte oplossingen bij de 12 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 395 min

B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Een ecosysteem heeft levende én niet-levende voorraden; een groene kleur bewijst geen gesloten balans.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen — één stap, direct toepassen

32.1 Draagkracht en tekens

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Gebruik $r = 0{,}70$ per dag en $K = 770\,000$ cellen/mL.

a Bereken de netto groei bij N = 0, K/2, K en 1,2 K. Vermeld eenheden.

De vier snelheden zijn 0; $rK/4 = 134\,750$; 0; $r(1{,}2K)(-0{,}2) = -129\,360$ cellen/(mL·dag). Het teken geeft netto groei of afname, niet het afzonderlijke aantal geboorten.

b Leg met f' uit welk evenwicht aantrekt. Wat betekent K biologisch niet?

$f'(0) = +0{,}70$ per dag, dus een kleine positieve afwijking groeit. $f'(K) = -0{,}70$ per dag, dus een kleine afwijking dooft. K is de modeldraagkracht bij constante omstandigheden; geen universeel maximum voor iedere reactor en geen gezondheidsoordeel.

32.2 Alarm en buigpunt

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Gebruik de afgeronde reservoirparameters en N_0 = 1900 cellen/mL.

a Bereken het moment waarop N = K/2 en N = 500 000 cellen/mL. Vergelijk met exponentiële groei vanaf dezelfde start.

Het buigpunt ligt op $\ln(770\,000/1900 - 1)/0{,}70 = 8{,}574380$ dagen. De grens geeft $\ln[(770\,000/1900 - 1)500\,000/270\,000]/0{,}70 = 9{,}454646$ dagen. Exponentieel geeft $\ln(500\,000/1900)/0{,}70 = 7{,}961077$ dagen: zonder beperking te vroeg.

b Bereken de totale netto celtoename per dag bij K/2 in een constant vat van 60 L. Maakt dit het vat een gevalideerde zuurstofbron?

60 L = 60 000 mL, dus $134\,750 \cdot 60\,000 = 8{,}085 \cdot 10^9$ cellen per dag. Cellen zijn geen mol O_2: celmassa, respiratie, licht en gasoverdracht moeten apart worden gemeten. Dit volume is alleen een rekenscenario met reservoirparameters.

32.3 Een gekoppelde stap

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Lotka–Volterra: $r = 0{,}60$, $a = 0{,}030$, $\eta = 0{,}40$, $d = 0{,}30$; start (40,10).

a Bereken twee Eulerstappen van 0,1 dag. Gebruik steeds beide oude waarden.

Eerste stap: snelheden (12;1,8), dus (41,2;10,18). Daarna $\dot{x} = 41{,}2(0{,}60 - 0{,}030 \cdot 10{,}18) = 12{,}13752$ en $\dot{y} = 10{,}18(0{,}012 \cdot 41{,}2 - 0{,}30) = 1{,}979808$. Tweede toestand: (42,413752;10,3779808).

b Bepaal de tekens van beide afgeleiden bij (10,30), (40,30) en (10,10).

Bij (10,30) zijn x < 25 en y > 20: beide dalen. Bij (40,30) daalt prooi en groeit predator. Bij (10,10) groeit prooi en daalt predator. De verschillende nulclijnen bepalen de tekens.

32.4 Een Eulerfout herkennen

Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

Een lineaire mode heeft $\lambda = \pm 0{,}424264i$ per dag. Neem $h = 0{,}1$ dag.

a Bereken de Euler-amplitudefactor en haar effect na 400 stappen in het gelineariseerde model.

$q = \sqrt{1 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}18} = 1{,}000899595$. Na 400 stappen is $q^{400} = 1{,}432865$; ongeveer 43,3 % amplitudegroei is door de rekenmethode toegevoegd.

b Waarom kan de exacte niet-lineaire populatiebaan niet met precies die factor worden voorspeld?

Dit is een lineaire kleine-verstoringsanalyse nabij (25,20). De echte snelheden en vorm van grote banen veranderen met x en y; gebruik daar de berekende invariantdrift en stapvergelijking. De analyse verklaart de richting van de fout, niet alle eindcomponenten.

32.5 Euler vergelijken met exact

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Gebruik reservoir_logistiek.py en simuleer tot dag 10.

a Maak voor h = 0,25; 0,125; 0,0625 dag een tabel met N(10), fout en verhouding tussen opeenvolgende foutgroottes.

De uitvoer geeft 498 567,152 / −64 035,023; 531 988,613 / −30 613,562; 547 679,690 / −14 922,485 cellen/mL. De foutverhoudingen zijn 2,0917 en 2,0515, steeds dichter bij 2. Een lus over de drie h-waarden met euler_log en exact(10) reproduceert deze tabel.

b Schat met de twee kleinste stappen een Richardson-extrapolatie. Vergelijk met exact en bespreek de beperking.

Voor orde 1 is $N(h) \approx N^* + ch$, dus $N^* \approx 2N(h/2) - N(h)$. De twee kleinste stappen geven 563 370,767 cellen/mL, tegenover exact 562 602,175: een resterende fout van +768,592. Hogere fouttermen blijven; extrapolatie is geen biologisch nauwkeurigheidsbewijs.

32.6 Een ander evenwicht door draagkracht

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

De aangepaste prooi heeft draagkracht $K_x = 100$. De predatorvergelijking blijft gelijk.

a Leid (25,15) en de Jacobiaan af. Bereken spoor, determinant en eigenwaarden.

Uit $\dot{y} = y(\eta a x - d) = 0$ bij y > 0 volgt x* = 25. Uit $\dot{x} = x[r(1 - x/K_x) - ay] = 0$ volgt y* = 15. Afgeleiden geven $J_{11} = r - 2rx/K_x - ay = -rx^*/K_x = -0{,}15$, $J_{12} = -ax^* = -0{,}75$, $J_{21} = \eta a y^* = 0{,}18$, $J_{22} = 0$. Spoor −0,15 en determinant 0,135 geven λ = −0,075 ± 0,359687 i per dag.

b Bereken de lokale Eulergrens en bespreek K_x = 20.

$|\lambda|^2 = 0{,}135$, dus $h < 0{,}15/0{,}135 = 1{,}111111$ dagen. Kies veel kleiner voor nauwkeurigheid. Bij K_x = 20 zou de positieve-evenwichtformule y* = −5 geven, fysisch ongeldig. Rond (20,0) is predatortoenamefactor ηa·20−d = −0,06 per dag, dus predator sterft in dit model uit.

32.7 De oogst als expliciete export

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Gebruik het gesloten stikstofmodel met A = 2, D = 1, R = 9, H = 0 g N. Licht = 1 en E = 0,20 per dag.

a Bereken de vier afgeleiden en één Eulerstap van 0,1 dag.

U = 0,80·9/(1+9)·2 = 1,44 g N/dag; sterfte 0,20, retour 0,20 en oogst 0,40. Dus (dA,dD,dR,dH) = (0,84;0;−1,24;0,40) g N/dag. De nieuwe toestand is (2,084;1,000;8,876;0,040) g N.

b Controleer het kleine systeem A+D+R en het uitgebreide systeem inclusief H. Waarom mag H niet worden weggegooid?

Binnen A+D+R resteert 11,960 g N: een correct geboekte uitstroom van 0,040 g. Met H is het totaal precies 12,000 g. H negeren zou een werkelijk modelverlies als onverklaarde numerieke fout laten verschijnen, of een kunstmatige terugvoer suggereren.

32.8 Een synthetische validatieproef ontwerpen

Toepassen · 7 · Onderzoeken · 40 min

Je gebruikt de drie poolscenario's uit het handboek als rekenproef, niet als werkelijke gemeten reactor.

a Geef twee onafhankelijke rekentoetsen voor de donkerproef en een test die een verkeerd teken in de mineralisatie ontdekt.

Toets (1) de poolsom op elke stap en (2) A(13)/A(10) tegen exp(−0,3) = 0,740818. Een verkeerd retourteken in R maakt de som veranderen met −2kD; de somtoets ontdekt dit zelfs wanneer A er geloofwaardig uitziet. Halveer daarnaast h en vergelijk met een onafhankelijke integrator.

b Maak een biologische meetopzet die μ en de terugvoersnelheid k kan onderscheiden.

Een bruikbare proef meet biomassa, minerale stikstof en detritus afzonderlijk, met volume, licht en temperatuur gelogd. Schat μ uit een lichtfase met bekende R en meet k uit een afzonderlijke detritus-/mineralisatieproef. Houd een tweede lichtverstoring apart voor validatie. Alleen algenaantal geeft μ en k niet automatisch identificeerbaar; meetfouten en veranderende celmassa blijven relevant.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

32.9 De invariant bewijzen

Uitdagen · 9 · Analyseren · 35 min

Gebruik $D = \eta a[x - x^* - x^* \ln(x/x^*)] + a[y - y^* - y^* \ln(y/y^*)]$ voor positieve aantallen.

a Differentieer D langs een Lotka–Volterra-baan en toon dat alle termen wegvallen.

$\dot{D} = \eta a(x - x^*)(r - ay) + a(y - y^*)(\eta ax - d)$. Gebruik r = ay* en d = ηax*. Dan wordt dit $-\eta a^2(x - x^*)(y - y^*) + \eta a^2(y - y^*)(x - x^*) = 0$.

b Toon dat D positief is buiten het evenwicht en verklaar het verschil tussen stabiel en asymptotisch stabiel.

Voor u > 0 is u−1−ln u ≥ 0, want de afgeleide 1−1/u wisselt van negatief naar positief op u = 1. Beide D-termen zijn zulke positieve gewogen functies. Kleine contouren houden banen nabij het evenwicht: stabiel. Omdat D constant positief blijft, bereikt een verstoorde baan D = 0 niet: niet asymptotisch stabiel.

32.10 Voorraadvlak en herstel

Uitdagen · 9 · Analyseren · 40 min

Gebruik μ = 0,80; m = 0,10; k = 0,20 per dag, K_R = 1 g N, M = 12 g N.

a Elimineer D en leid de gereduceerde Jacobiaan op het positieve evenwicht af.

D = M−A−R. f_A = A[μR/(K_R+R)−m], f_R = k(M−A−R)−μRA/(K_R+R). Op het evenwicht is f_A,A = 0 en b = f_A,R = A*μK_R/(K_R+R*)² = 4,841667 per dag. f_R,A = −k−m = −0,30 en f_R,R = −k−b = −5,041667. De eigenwaarden zijn −0,306765 en −4,734902 per dag. De laatste snelle mode maakt een ruime stap onverstandig.

b Een export haalt 3 g N weg, waarna hetzelfde licht terugkomt. Bereken het nieuwe evenwicht. Is herstel tot de oude A mogelijk?

M wordt 9 g N. R* blijft 1/7 g N, A* = (9−1/7)/1,5 = 5,904762 g N en D* = 2,952381 g N. Dat stabiele evenwicht is lager. De oude A* = 7,904762 zou met D* = A*/2 en hetzelfde R* weer 12 g N vragen: zonder retour niet mogelijk.

32.11 Habitat: twee soorten sluiten geen station

Uitdagen · 9 · Habitat · 65 min

Het team wil 'een stabiel gesloten ecosysteem' aantonen met een mooie prooi–predatorgrafiek. De bestaande woonmodule heeft twee bewoners en ventilatie volgens e14.

a Schrijf een minimaal programma van model- en meeteisen met aparte gas-, voedingsstof- en energiegrenzen.

Een goed programma definieert per stof de voorraad in mol of kg, grensstromen met ventilatie/voedsel/oogst/afval, meettijd, onzekerheid en verliesposten. Gasbalans heeft afzonderlijke O_2 en CO_2 plus druk/temperatuur; voeding heeft algen/detritus/mineraal en export; energie heeft licht, elektriciteit en warmteverlies. Numerieke acceptatie toetst balansresiduen en stapconvergentie, biologische acceptatie vereist onafhankelijke echte meetproeven. Voor bewoners blijft ventilatie een werkelijke systeemstroom.

b Werk een storingsmatrix uit voor lichtverlies, wegvallen van mineralisatie, oogstexport en een foutieve CO_2-sensor.

Lichtverlies: lager U, algenafname en veranderende gasbalans; toets hersteltijd en minimumvoorraad. Mineralisatie uit: detritus groeit en R kan uitputten; meet D/R, niet alleen A. Export: M daalt en evenwicht verschuift; boek H en retour. CO_2-sensorfout: vergelijk onafhankelijke kalibratie/druk/gasmeting en O_2; een laag CO_2-getal kan verlies van O_2 verbergen. Elke rij noemt detectie, veilige bestaande bedrijfsvoering en een onafhankelijke toets.

c Formuleer een verdedigbare conclusie na alleen de synthetische proeven uit dit hoofdstuk.

Verdedigbaar: 'De didactische modellen zijn numeriek geverifieerd, met expliciete voorraad- en scenario-grenzen. De poolvariant herstelt na drie dagen duisternis bij terugkerend licht en zonder export. Dit bewijst geen bemande autonome materiële sluiting of werkelijke zuurstofcapaciteit van Habitat.' Benoem nog te meten processen en behoud de bestaande ventilatie.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Grens	stoffen, gasdruk, ventilatie en energie afzonderlijk
Bewijs	numerieke verificatie en biologische validatie onderscheiden
Storingen	minstens vier fysisch uitgewerkte scenario's
Conclusie	geen autonoom bemand station uit twee fictieve populaties

32.12 Biosphere 2 als causale analyse

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 40 min

Een samenvatting beweert: 'Beton verbruikte rechtstreeks alle zuurstof; daarom zijn gesloten ecosystemen onmogelijk.' Gebruik de primaire bronnen in het handboek.

a Corrigeer het mechanisme met twee reacties en benoem de verborgen pool.

Microbiële respiratie verbruikt O_2: $CH_2O + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$. Carbonatatie neemt de geproduceerde CO_2 op: $Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$. Koolstof eindigt onder meer als vast carbonaat in een bouwmateriaalpool. De directe O_2-verbruiker in deze verklaring is respiratie; CO_2-opname door beton maakt één luchtsensor onvoldoende.

b Leg uit wat lage lekkage zichtbaar maakt en wat deze proef niet kan bewijzen.

Lage gasuitwisseling maskeert een traag intern onevenwicht minder door buitenlucht. De proef onthult ontbrekende koppelingen in een specifiek ontwerp. Zij bewijst geen algemene onmogelijkheid van iedere gesloten ecologische opzet; evenmin bewijst zij dat Habitat met de bestaande kleine teelt autonoom bemand kan functioneren. Energie-invoer en echte lek-/materiaalstromen horen expliciet in de conclusie.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 33

Het lichaam als regelsysteem

Homeostase begrijpen en meetketens beoordelen zonder een lesmodel voor een mens aan te zien

Uitgewerkte oplossingen bij de 14 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

4× oefenen · 5× toepassen · 5× uitdagen · ± 530 min

B Leven en systemen · R Regelen en robotica · L Elektriciteit en elektronica



Een demonstratie maakt meetketens zichtbaar; medische betrouwbaarheid vraagt ander bewijs dan een mooie simulatie.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

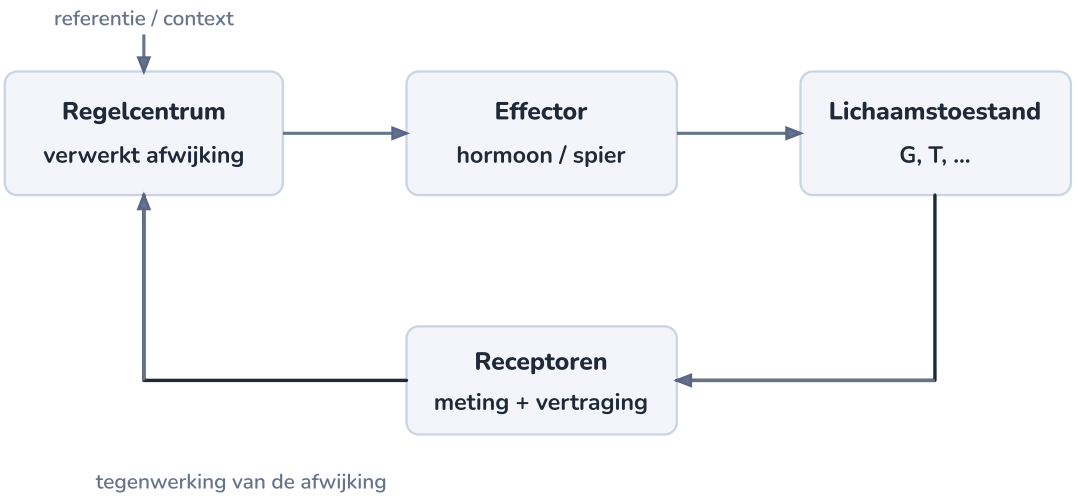
Oefenen

●○○ Oefenen — één stap, direct toepassen

33.1 De richting van homeostase

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Bekijk het generieke schema. Een glucosestijging verhoogt het insuline-effect, dat glucose verlaagt.



Negatief gaat over het teken van de volledige lus. Bij stijgende glucose neemt het insuline-effect toe en werkt de glucoseverandering tegen. Bij warmte regelen neurale en hormonale processen meerdere verschillende effectoren.

a Geef de tekens van de twee werkingen en van de gehele lus. Geef een overeenkomstige thermische tegenwerking.

✓ Glucose → insuline-effect is positief; insuline-effect → glucose is negatief. Het product is negatief: de lus werkt de eerste verandering tegen. Een thermische voorbeeldlus is hogere temperatuur → meer extra warmteafvoer → lagere temperatuur. Tijdvertraging en begrenzing bepalen daarnaast of en hoe de lus stabiel is.

b Leg het verschil uit tussen een fysiologische toestand, een sensorwaarde en een diagnose.

✓ De toestand is de lichamelijke grootheid in een bepaald compartiment, de sensor levert daarvan een plaats- en tijdgebonden schatting met fouten. Een diagnose vraagt klinische beoordeling en passende informatie; zij volgt niet automatisch uit één lesdrempel, simulatieparameter of plausibel monitorgetal.

33.2 Eenheden en de eerste hormoonstap

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Het eigen model gebruikt a = 0,020, b = 0,050, c = 0,040, d = 0,080 in de aangegeven minuut-eenheden. Start g = 3, i = 0, w = 0.

a Bereken beide afgeleiden en één gelijktijdige Eulerstap van 1 min.

✓ $\dot{g} = -0{,}020 \cdot 3 = -0{,}060$ mmol/(L·min) en $\dot{i} = 0{,}040 \cdot 3 = 0{,}120$ relatieve eenheid/min. Na één minuut: g_1 = 2,94 en i_1 = 0,12; dus G_1 = 7,94 mmol/L. Beide volgen uit de oude toestand.

b Leg uit waarom i = 0,12 geen insulinedosis is. Welke eenheid moet b hebben?

✓ i is een gekozen relatieve effectafwijking rond een basis; er is geen relatie tot toegediende eenheden insuline gekalibreerd. b draagt mmol/(L·min) per relatieve eenheid, zodat bi dezelfde eenheid heeft als de glucoseafgeleide.

c Bereken g* en i* bij constant w = 0,06 mmol/(L·min).

✓ Uit 0 = cg−di volgt i* = (c/d)g* = 0,5g*. De eerste vergelijking geeft w = (a+bc/d)g* = 0,045g*. Dus g* = 1,333333 mmol/L en i* = 0,666667; G* = 6,333333 in deze lesvariant.

33.3 Warmte opslaan is een integraal

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een fictieve eenknoopsmassa heeft C = 210 kJ/K. Extra vermogen is 50 W gedurende 60 min.

a Bereken extra energie en de stijging zonder extra verlies. Bereken ook het gemiddelde vermogen van 10 MJ/dag.

✓ 60 min = 3600 s. E = 50·3600 = 180 kJ; ΔT = 180/210 = 0,857143 K. 10 MJ/dag komt gemiddeld overeen met $10^7/86400$ = 115,740741 W. De grootheden zijn verschillende: energiestroom, opgeslagen energie en temperatuurverandering.

b Waarom leveren deze getallen geen werkelijke bewonerkerntemperatuur?

✓ C is hier fictief, het lichaam is niet uniform, verlies en regeling veranderen, en de gemiddelde voedingsenergie is geen constante extra verwarming. Huid en kern hebben andere tijdschalen. De vergelijking toetst alleen de eigen onderwijsbalans.

33.4 RR en PP betekenen andere intervallen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Elektrische R-tijden zijn 0,50; 1,30; 2,12 s. De drie optische vertragingen zijn 0,20; 0,23; 0,21 s.

a Bereken R-R, optische piektijden en P-P. Controleer PP = RR + Δτ.

✓ RR = 0,80 en 0,82 s. Optische tijden zijn 0,70; 1,53; 2,33 s; PP = 0,83 en 0,80 s. De veranderingen in vertraging +0,03 en −0,02 geven inderdaad RR+Δτ = 0,83 en 0,80.

b Bereken de gemiddelde frequentie van de twee intervalreeksen. Welke gevolgtrekking over gezondheid is toegestaan?

✓ ECG: 60/0,81 = 74,074074 slagen/min; PPG: 60/0,815 = 73,619632 pulsen/min. Het verschil ontstaat in deze synthetische data door vertraging; geen gezondheidsconclusie is ondersteund. Ook bij dezelfde gemiddelde frequentie zouden de intervalreeksen nog verschillen.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

33.5 De gesloten hormoondynamiek afleiden

Toepassen · 7 · Analyseren · 35 min

Gebruik $\dot{g} = -ag - bi$ en $\dot{i} = cg - di$ met de eigen vier parameters.

a Elimineer i, bereken spoor/determinant en leid de eigenwaarden af.

✓ Differentieer: g'' = −ag'−bi' = −ag'−bcg+bd i. Uit bi = −g'−ag volgt g'' = −(a+d)g'−(ad+bc)g. Spoor −0,100 per min en determinant 0,0036 per min² geven λ²+0,100λ+0,0036=0, dus −0,050 ± 0,033166 i per min.

b Controleer de analytische g-oplossing met g(0) en g'(0). Bereken G(20) en G(60).

✓ g = 3 exp(−0,05t)[cos(ωt)+(0,03/ω)sin(ωt)], ω² = 0,0011. Op nul geeft dit 3; g'(0)=3(−0,05+0,03)=−0,06, zoals de eerste vergelijking. G(20)=5+1,484291=6,484291 en G(60)=5+0,062614=5,062614 mmol/L. Deze modelwaarden zijn geen klinische referentiegrenzen.

33.6 Vertraging onderscheiden van ijkfout

Toepassen · 7 · Programmeren · 35 min

Gebruik glucose_lesmodel.py met de derde toestand g_m en τ = 6 min.

a Reproduceer de waarden op 20 min en bereken het metingsverschil. Waarom is het verschil tijdens de daling positief?

Voer het script uit; lees z[round(20/0.25),2] = 1,923585 en exact(20)[0] = 1,484291. Voeg de basis 5 aan beide toe: 6,923585 en 6,484291. Verschil +0,439294 mmol/L. Een trage meting behoudt tijdens een daling nog meer van de eerdere hogere toestand.

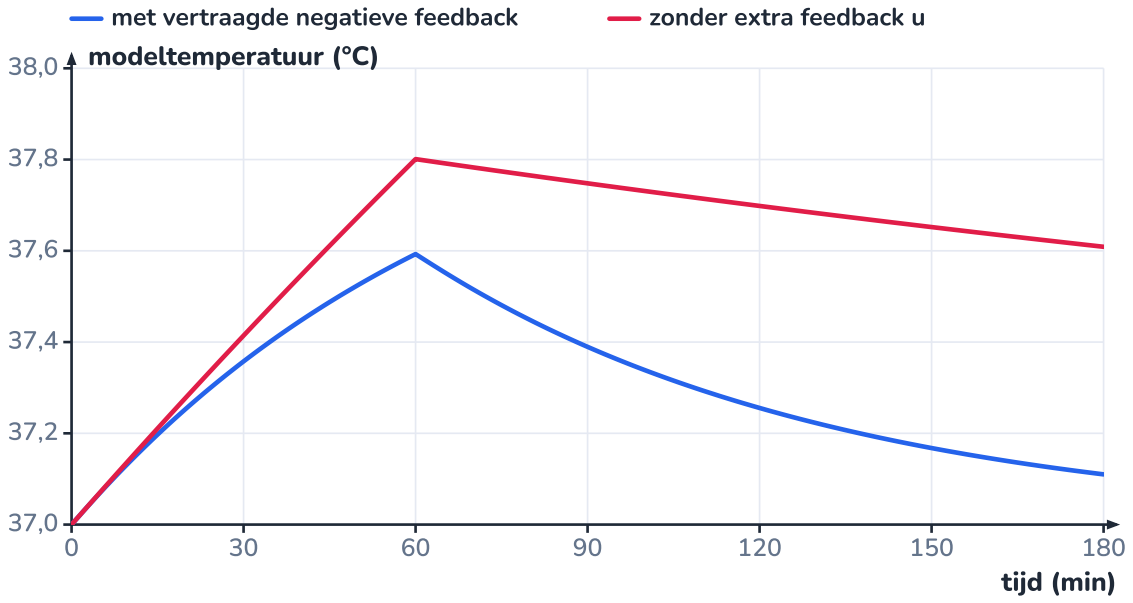
b Vergelijk met een vaste +0,20 mmol/L-bias. Wat gebeurt er in een constant eindpunt?

Een constante bias geeft overal +0,20 boven de juiste toestand, ook in een constant eindpunt. Een pure eerste-orde-vertraging bereikt daar gm* = g*. In werkelijkheid kunnen beide tegelijk bestaan en kan het compartiment verschillen; een dynamische proef en een aparte kalibratie onderscheiden ze beter dan één stil meetpaar.

33.7 Temperatuurcompensatie en reserve

Toepassen · 7 · Analyseren · 40 min

Gebruik het lesmodel met C = 210 kJ/K, H = 8 W/K, k_p = 40 W/K, τ = 120 s en u_max = 60 W.



Eén uniforme thermische knoop, vaste H en een begrensde vertraagde compensatie zijn eigen onderwijskeuzen. Beide lijnen blijven modelresultaten; zij voorspellen geen werkelijke kern-, huid- of koortstemperatuur.

a Bereken het constante 50 W-evenwicht en de formele verzadigde uitkomst bij 120 W.

50/(8+40) = 1,041667 K en u = 40x = 41,666667 W, dus niet verzadigd. Bij 120 W zou de onbegrensde u = 100 W zijn; met u = 60 W volgt formeel x = (120−60)/8 = 7,5 K. Dat laatste overschrijdt het lokale lesmodelgebied en voorspelt geen persoonstemperatuur.

b Vergelijk op 60 min de geregelde en passieve proef. Verklaar waarom beide onder hun constante evenwicht kunnen liggen.

Geregeld x = 0,592857 K; passief x = 0,800965 K. De constante-input-evenwichten zijn respectievelijk 1,041667 en 6,25 K, maar één uur is geen oneindige tijd. Warmtecapaciteit en effectorvertraging maken het bereiken traag. Na 60 min gaat de invoer uit en ontstaat een andere herstelbaan.

c Noem twee ontbrekende lichaamstoestanden/processen die H en het regelbereik variabel maken.

Bijvoorbeeld kern–huidkoppeling door veranderde doorbloeding en verdamping afhankelijk van vocht/lucht/contact. Ook spierwarmte, kleding en straling zijn variabel. Voor echte validatie meet je afzonderlijke locaties en stromen; een huidprobe wordt niet zonder bewijs als kernprobe gebruikt.

33.8 Een optische ratio toetsen

Toepassen · 7 · Rekenen · 30 min

Rood: AC = 0,020, DC = 1,000; IR: AC = 0,036, DC = 1,200. De fictieve kalibratie is 105−15R.

a Bereken ratio en demo-uitkomst. Herhaal met rood AC = 0,024.

Basis: (0,020/1)/(0,036/1,2) = 2/3; demo105−15·2/3 = 95 %. Tweede geval: 0,024/0,030 = 0,8; demo93 %. Het zijn ontworpen ratios, geen echte saturatiemetingen.

b Deel beide AC's door 20. Bereken het getal vóór de kwaliteitstoets en verklaar waarom de code het weigert.

De nieuwe genormaliseerde modulaties zijn 0,001 en 0,0015. Hun ratio blijft 2/3 en de ongecontroleerde formule geeft opnieuw 95 %. Beide vallen onder de eigen lesgrens 0,005, dus de code retourneert None met een kwaliteitsreden. Die drempel is geen medische perfusiegrens; echte ruis/kalibratie en populatievalidatie ontbreken.

33.9 Een monitorpakket beoordelen

Toepassen · 7 · Analyseren · 35 min

Voor een displayproef geldt een zelfgekozen maximale pakketleeftijd van 10 s. Dit is een informatiecontract, geen klinische alarmdeadline. Bekijk de vijf synthetische records op 08:00:20 UTC+1.

record	tijd UTC+1	grootheid	waarde/status
A	08:00:15	PPG-pulsfrequentie	74,7 / kwaliteit geldig
B	08:00:02	PPG-pulsfrequentie	74,7 / kwaliteit geldig
C	08:00:18	PPG-pulsfrequentie	81,5 / beweging
D	08:00:19	SpO_2-demo	NaN / ongeldig
E	08:00:18	lucht-O_2	20,9 % / geldig

a Bepaal welke records actueel geldig zijn en welke juist een afzonderlijke status moeten krijgen.

A is 5 s oud en geldig in dit beperkte contract. B is 18 s oud: verouderd, zichtbaar markeren. C is 2 s oud maar beweging maakt het niet geldig. D is niet-eindig en ongeldig. E is 2 s oud en een geldige omgevingsmeting, maar hoort niet bij de lichaamsmeting. Leeftijd en signaalkwaliteit zijn onafhankelijke voorwaarden.

b Een programmeur middelt E met een SpO_2-getal en meldt 'gemiddelde zuurstof'. Corrigeer dit meetcontract.

Lucht-O_2 is gasfractie in de woonmodule; SpO_2 is een optische hemoglobinesaturatieschatting. Hun percentages hebben verschillende definities. Bewaar afzonderlijke grootheid, plaats, apparaat, eenheid en kwaliteit; middelen verandert geen van beide in een zinvolle gemeenschappelijke zuurstofstatus.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

33.10 Wat is uit alleen G identificeerbaar?

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 45 min

Elimineer i in het lesmodel. Voor w = 0 blijft $g'' + (a+d)g' + (ad+bc)g = 0$.

a Welke parametercombinaties bepaalt een ideale g-baan? Toon een schaaltransformatie van b, c en i die dezelfde g geeft.

De tweede-orde-baan bepaalt combinaties a+d en ad+bc, niet automatisch a,b,c,d apart. Kies s > 0 en ĩ = s i, b̃ = b/s, c̃ = sc, d̃ = d, ã = a. Dan is −b̃ĩ = −bi en ĩ′ = c̃g−d̃ĩ, terwijl b̃c̃ = bc gelijk blijft. Bij i(0)=0 blijft g'(0)=−ag(0) eveneens gelijk. De interne effectschaal is dus niet uit alleen g bepaald.

b Waarom bewijst de variant c = 0,010 geen insulineresistentie of diagnose? Geef een bruikbare verdere onderzoeksgrens.

c is een zelfgekozen relatieve versterking, geen gemeten klinische gevoeligheid. Onbekende aanvoer, compartimenten, andere hormonen, sensorvertraging en errors kunnen vergelijkbare G-verandering geven. Onderzoek met een gevalideerd model, onafhankelijke metingen en passend professioneel onderzoeksprotocol zou parameters moeten identificeren; deze cursus maakt uitsluitend een modelgevoeligheidsvergelijking.

33.11 Een ontbrekende of extra piek doorrekenen

Uitdagen · 9 · Programmeren · 50 min

Gebruik synthetisch_ecg_ppg.py. Vergelijk bekende synthetische tijden met de detector.

a Verwijder één middelste geselecteerde ECG-piek. Bereken de frequentie opnieuw en leg uit wat met het betreffende RR-interval gebeurt.

Bijvoorbeeld

```
minder=np.delete(ir,5)
rr_fout=np.diff(t[minder])
print(60/np.mean(rr_fout))
```

geeft 67,873303 slagen/min. De eerste en laatste tijd blijven 0,50 en 9,34 s, maar er zijn 10 in plaats van 11 intervallen over 8,84 s. Twee opeenvolgende intervallen worden samengevoegd tot een lang interval; de fout is geen werkelijke ritmeverandering.

b Reproduceer de optische extra piek en de bewegingsvlag. Publiceer vóór en na correctie zowel frequentie als kwaliteitsstatus.

Het programma geeft 12 gewone optische pieken en 13 na het artefact, met 81,521739 pulsen/min. De aparte vlag verwijdert de piek op 5,12 s; daarna zijn er 12 pieken en 74,728261 pulsen/min. Toon het afgekeurde venster en de reden; in een echte meting mag een ontbrekende puls niet automatisch vanuit het gewenste gemiddelde worden ingevuld. De vlag is alleen de hier gegeven synthetische waarheid.

c Ontwerp een onafhankelijke vergelijking die een gemiddeld correcte maar intervalfoute detector ontdekt.

Vergelijk elke gevonden gebeurtenis één-op-één met bekende referentietijden binnen een vooraf gekozen proeftolerantie. Rapporteer gemiste en extra pieken, tijdsfouten en alle RR-fouten naast gemiddelde frequentie. Het e33-voorbeeld heeft een PP−RR-afwijking tot 17,398 ms ondanks bijna gelijke gemiddelde frequentie. Voor medische claims blijft een andere onafhankelijke biologische validatie nodig.

33.12 Een gemiddelde fout kan een conditie verbergen

Uitdagen · 9 · Analyseren · 40 min

Twee fictieve testcondities hebben elk vier fouten in saturatieprocentpunten: A = [0,5;1,0;0,5;1,0], B = [2,0;3,0;2,0;3,0]. Dit zijn statistiekdata, geen echte personen of huidgroepen.

a Bereken bias en RMS per conditie en de gezamenlijke RMS.

A: bias 0,75 en RMS √(2,5/4) = 0,790569 procentpunten. B: bias 2,50 en RMS √(26/4) = 2,549510. Samen is de bias 1,625 en RMS √(28,5/8) = 1,887459. Het gunstige samengestelde getal verbergt een sterk verschillend foutpatroon.

b Een rapport toont alleen de gezamenlijke RMS. Welke informatie ontbreekt voor een nauwkeurigheidsclaim?

Rapporteer condities, proefpersonen/selectie, aantal onafhankelijke personen en herhalingen, referentiemethode, saturatiegebied, geweigerde resultaten, bias en spreiding per relevante groep. Werkelijke circulatie, beweging en huidpigmentatie mogen niet in één synthetische conditielabel worden weggepoetst. Deze acht getallen leveren geen validatie van een apparaat of FDA-specificatie onder alle omstandigheden.

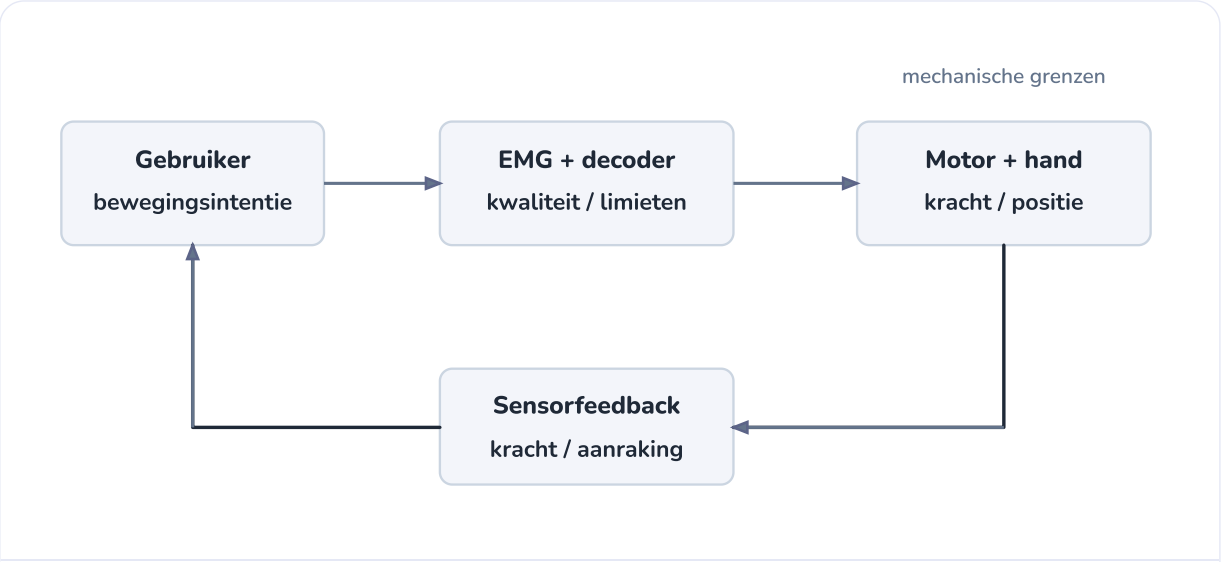
c Gebruik het zestienpuntenvoorbeeld uit het handboek om 'RMS≤3 betekent elke fout≤3' te weerleggen.

Met één fout 8 en vijftien fouten 0 is RMS $\sqrt{(64/16)} = 2$, terwijl de grootste fout 8 bedraagt. Dus RMS ≤ 3 geeft wiskundig geen individuele harde grens. Ook een systematische groepsbias kan met een lage totale RMS blijven bestaan.

33.13 Een prothese op functie beoordelen

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 55 min

Een fictieve motorhand moet op een bank een massa van 0,150 kg op 0,060 m kunnen houden. De gebruiker moet beweging en contact kunnen waarnemen; dit is een onderwijsontwerp zonder persoonsgebruik.



EMG is elektrische spieractiviteit, geen ECG. Deze architectuur toont een mogelijke terugkoppeling; zij specificeert geen implantatie, stimulatieparameter of voor een persoon veilige grijpkracht. Ook zicht kan een feedbackroute vormen.

a Bereken het ideale statische koppel. Geef afzonderlijke mechanische, signaal- en gebruikersfunctie-eisen.

$mg\ell = 0{,}150 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}060 = 0{,}08829$ N·m. Mechanisch: last, eigenmassa, wrijving, beweging, contactdruk en begrensde kracht. Signaal: EMG/positiesensor-kwaliteit, vertraging, storingsgedrag en decoder. Gebruikersfunctie: concrete taak, comfort en begrijpelijke feedback. Het ene koppel is geen complete pasvorm- of medische functie-eis.

b Ontwerp een proef met en zonder feedback en drie vooraf vastgelegde uitkomstmaten. Neem een sensoruitvalscenario op.

Een vergelijkbare bankproef gebruikt dezelfde objecten, gerandomiseerde volgorde en gelijk motorbereik. Vooraf vastleggen: taakvoltooiing/gevallen objecten, voltooiingstijd en contactkrachtfout of feedbackwaarneming. Vergelijk niet alleen één gunstige gemiddelde score. Bij sensoruitval volgt een vooraf benoemd begrensd stop-/vasthoudgedrag afhankelijk van de banktaak; toets dat los met een dummyobject. De menselijke en klinische vervolgproef vraagt apart passend bewijs.

c In de primaire proef steeg SHAP bij S1 van 58 naar 71, significant, en bij S2 van 51 naar 55, niet significant. De feedbackproef kwam steeds als tweede. Schrijf een passende conclusie.

> Bijvoorbeeld: 'Objectdetectie en -manipulatie verbeterden binnen deze beperkte proef. De SHAP-score steeg bij beide deelnemers, met een statistisch significante uitkomst alleen bij S1. Omdat de feedbackconditie steeds later kwam, kan leren hebben bijgedragen; meer deelnemers en gerandomiseerde volgorde zijn nodig voor sterker causaal bewijs. De uitkomst bewijst geen gelijkwaardigheid met een natuurlijke hand.' Dit bewaart de deelnemeruitkomsten en beperkingen van Schiefer et al. Niet-significant bij S2 betekent ook niet dat elk mogelijk effect bewezen afwezig is.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Eisen	mechanica, signalen en functie afzonderlijk
Proef	vergelijkbare voorwaarden, vooraf uitkomsten
Uitval	begrensd bankgedrag daadwerkelijk toetsbaar
Conclusie	taak/populatie/beperking precies

33.14 Habitat: een informatiecontract voor twee bewoners

Uitdagen · 9 · Habitat · 65 min

Het station krijgt een vrijwillige bewonersmonitor naast de bestaande e14-luchtbewaking. Het voorstel bevat geen behandelpad of implantaatbesturing.

a Ontwerp de gegevensstructuur met identiteit/pseudoniem, grootheid, plaats, tijd UTC+1, versie en kwaliteit. Werk een voorbeeldrecord uit.

> Een passende structuur heeft bijvoorbeeld subject='B1', device='PPG-demo', quantity='perifere_pulsfrequentie', value=74.728261, unit='min^{-1}', measured_at='2026-09-30T08:00:15+01:00', window_s=10, sample_hz=250, algorithm='demo1', quality='synthetisch_geldig', source='gegenereerde_data'. Een echt record onderscheidt meetplaats en methode; de synthetische bron blijft expliciet. De ruwe signaalmetadata maken het resultaat reproduceerbaar.

b Maak minstens vier testscenario's voor ouderdom, beweging, identiteit, verkeerde grootheid of netwerkuitval. Formuleer toetsbare verwachte uitkomsten.

> Test oud: buiten de gekozen displayleeftijd verschijnt 'verouderd', geen actuele herpublicatie. Beweging: kwaliteit ongeldig en geen nieuwe ratio/frequentieclaim in dat venster. Identiteitswissel: trendkoppeling blokkeren totdat de juiste subjectkoppeling vaststaat. Verkeerde grootheid: lucht-O_2 en SpO_2 kunnen niet in één reeks worden samengevoegd. Netwerk uit: centrale status onbekend/verouderd; medische apparatuur behoudt eigen lokale werking en gezag. Elke proef heeft concrete input, verwacht record/status en passcriterium.

c Beschrijf toestemming, toegang, bewaartermijn en de conclusie die het prototype werkelijk mag tonen.

> Bewoners bepalen doel, vrijwilligheid, toegangsrollen en passende bewaartermijn; gevoelige gezondheidsgegevens worden niet vanzelf een publieke stationslog. De prototypeconclusie luidt bijvoorbeeld 'synthetische trend en meetkwaliteit getoond, geen medische diagnose of nauwkeurigheidsvalidatie'. Voor echte toepassing zijn passende medische apparatuur, validatie en professionele afspraken vereist; deze cursus kiest geen universele sensor-/diagnosedrempel.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Metadata	persoon, grootheid, plaats, tijd, bron en versie
Kwaliteit	invalid/stale/identity apart zichtbaar
Grens	geen lucht/lichaam-menging of implantaatgezag
Mens	vrijwilligheid, doel, toegang en bewijsgrens

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 34

Algoritmen en complexiteit

Een correct programma wordt pas bruikbaar als zijn werk binnen het budget past

Uitgewerkte oplossingen bij de 9 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 3× uitdagen · ± 275 min

P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



De snelste route op een kaart is alleen bruikbaar als elke verbinding werkelijk berijdbaar is.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

34.1 Halveren zonder randfout

●○○ Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

De geordende array is [2, 4, 7, 9, 13, 18, 25, 31]. Gebruik [l,r).

a Volg binair zoeken naar 13 en naar 8. Geef l, r en m na elke stap.

13: (0,8,m=4) vindt direct 13. Voor 8: (0,8,m=4:13) → [0,4); m=2:7 → [3,4); m=3:9 → [3,3), leeg. Index 4 voor 13; None voor 8. Geen toegang tot index 8 is nodig.

b Formuleer de invariant en verklaar waarom m+1 nodig is in de rechterhelft.

Als de sleutel aanwezig is, ligt een mogelijke positie in [l,r). De middelste waarde is al uitgesloten wanneer de sleutel groter is; m+1 verwijdert haar. Alleen l=m kan bij een interval van één element dezelfde m blijven geven en dus niet eindigen.

34.2 Groeiklasse kiezen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een programma doet $8n + 20$ stappen; een ander $n^2 + 3n$.

Geef de scherpste O-klasse en leg uit waarom één tijdmeting de klasse niet bewijst.

De hoogste groeiende termen geven $O(n)$ en $O(n^2)$. De constanten verdwijnen alleen in de asymptotische grens. Eén invoergrootte kan niet tonen hoe de tijd bij grotere n schaalt; ook caches en I/O kunnen de tijd vertekenen.

34.3 Verschuivingen tellen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Invoegsorteren krijgt 1000 records in omgekeerde volgorde.

Bereken het aantal verschuivingen en de verhouding tot 2000 records.

$1000 \cdot 999/2 = 499\,500$; voor 2000: $2000 \cdot 1999/2 = 1\,999\,000$. De verhouding is 4,002: bij verdubbeling ongeveer viermaal werk.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

34.4 Een zoekfunctie schrijven

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Schrijf zelf binair zoeken; de uitvoer is de eerste index bij dubbele sleutels.

Geef code of precieze pseudocode en tests voor lege lijst, één element, afwezig en [2,2,2].

Bewaar een kandidaat bij gelijkheid en zoek links verder: lo=0, hi=len(a); while lo<hi: m=(lo+hi)//2; als a[m]<x: lo=m+1; anders hi=m. Na de lus: return lo als lo<len(a) en a[lo]==x, anders None. Tests: []→None; [2],2→0; [2],3→None; [2,2,2],2→0. Het halfopen interval wordt altijd kleiner.

34.5 Een recursie herstellen

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Faculteit wordt recursief gedefinieerd met alleen n == 1 als basisgeval.

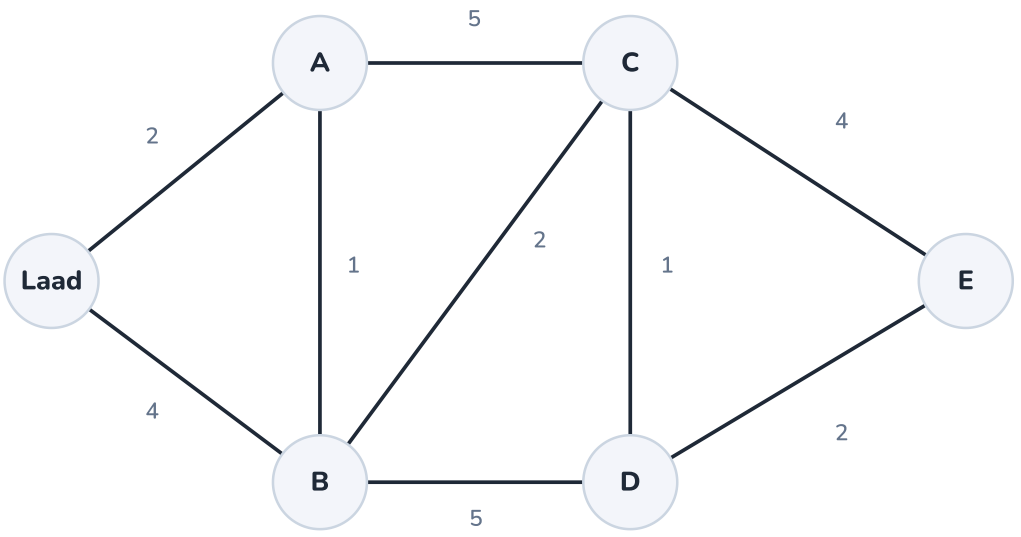
Toon waarom n = 0 faalt; herstel het contract en beschrijf tijd en geheugen.

0 roept −1, −2 enzovoort aan tot de Python-recursiegrens een fout geeft. Valideer dat n een niet-negatief geheel getal is; gebruik if n==0: return 1, anders n*fac(n-1). Tijd O(n), stapel O(n). Een iteratieve productlus bewaart constant veel variabelen.

34.6 Een blokkade in de kaart

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Gebruik de volledige graaf uit het handboek. De kant C–D is geblokkeerd.



Kanten zijn berijdbare verbindingen; getallen zijn modelafstanden in meter, geen schaaltekening van de gang.

Bereken de nieuwe route Laad–E en rijtijd bij 0,20 m/s. Leg uit waarom een groot gewicht minder goed is dan verwijderen.

Afstanden: A2, B3, C5, D8 via B, E9 via C. Route Laad–A–B–C–E, 9 m, 45 s. Via D zou het 10 m zijn. Verwijderen maakt de blokkade absoluut; een eindige straf kan toch gekozen worden als andere routes duurder zijn.

Uitdagen — Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

34.7 Een eerlijke tijdmeting

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 40 min

Je vergelijkt twee sorteerders op een laptop.

Ontwerp een meetprotocol dat invoervorm, n, herhalingen en geheugen omvat. Geef een analyse die toevallige ruis van groei onderscheidt.

Gebruik dezelfde kopieën van random, geordende en omgekeerde data; n bijvoorbeeld 1000, 2000, 4000, 8000. Doe opwarming en minstens meerdere herhalingen per geval, rapporteer mediaan en spreiding. Meet alleen het sorteren, maar rapporteer ook de totale pipeline afzonderlijk. Verdubbelingsverhoudingen rond 2 wijzen op lineair, rond 4 op kwadratisch; n log n ligt ertussen. Meet piekgeheugen en noteer interpreter en machine. Dit ondersteunt een model, het bewijst geen worst-case bovengrens.

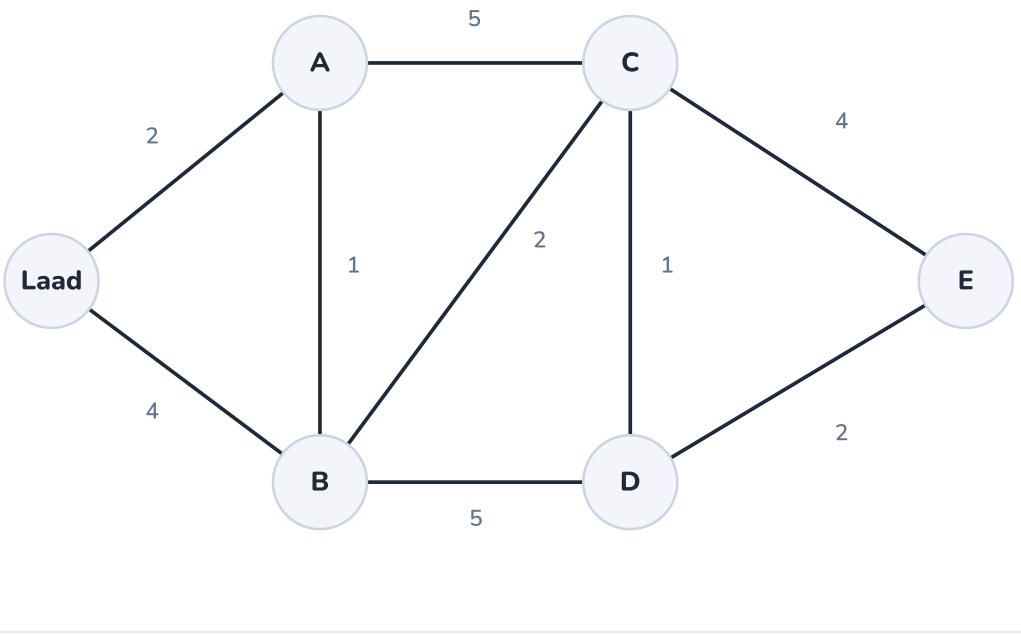
ZO WORDT DIT BEOORDEELD

reproduceerbaarheid	Vaste invoer, omgeving, ruwe tijden en script.
interpretatie	Groei en spreiding afzonderlijk besproken.

34.8 Een routeplanner met terugweg

Uitdagen · 9 · Habitat · 60 min

De voorbeeldgraaf heeft meetpunten A, C en E. De robot moet terug naar Laad. Elke meting kost 5 s; een beurt mag 120 s duren.



Kanten zijn berijdbare verbindingen; getallen zijn modelafstanden in meter, geen schaaltekening van de gang.

Bereken een korte ronde en totaalduur; ontwerp het contract tussen Pi-planner en robot en de reactie op obstakels of netwerkuitval.

Dijkstra-afstanden geven ronde Laad–A–C–E–Laad van 2+3+3+8=16 m (A–C via B, C–E via D), dus 80 s rijden +15 s meten=95 s. Het budget heeft 25 s marge. Contract: kaartversie, route-ID, knopen, limiet, opdrachtverval en ontvangstbevestiging. De Uno stopt lokaal bij obstakel, meldt welke kant blokkeert en vraagt herplanning; bij verloren verbinding eindigt hij veilig zijn actuele beweging of stopt volgens de vooraf geteste modus, nooit blind een nieuwe route. De 16 m is een modelronde, niet de fysieke i33-lus.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

berekening	Afstand, meettijd en reserve gescheiden.
correctheid	Alle meetpunten en terugweg gecontroleerd.
veilig gedrag	Actuele blokkades en communicatieverlies begrensd.

34.9 Een negatieve energiekant

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 25 min

Bij afdalen zou een robot energie terugwinnen. Iemand voert negatieve kantgewichten in Dijkstra in.

Verklaar het probleem en geef twee bruikbare alternatieven, inclusief een beperking.

Dijkstra kan een afstand definitief verklaren vóór een later negatief segment die verkleint. Gebruik Bellman–Ford met detectie van negatieve cycli, of optimaliseer reistijd met niet-negatieve gewichten en evalueer de energie afzonderlijk. Een fysisch energiemodel moet SoC, verliezen en regeneratiebegrenzing bevatten: een negatieve cyclus betekent geen onbeperkte echte energiewinst. Alleen alle gewichten met dezelfde constante verhogen verandert het aantal gebruikte kanten en behoudt dus niet algemeen het optimale pad.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 35

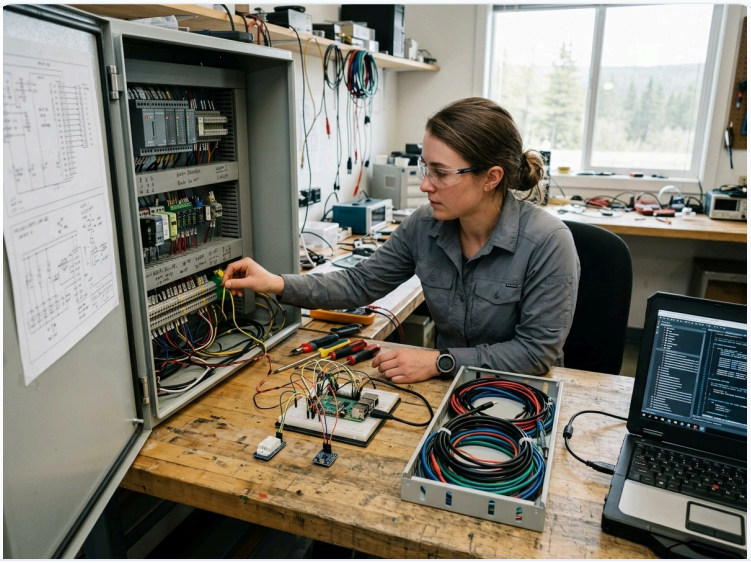
Objectgericht programmeren en softwareontwerp

Software groeit door duidelijke contracten, vervangbare onderdelen en aantoonbaar gedrag

Uitgewerkte oplossingen bij de 9 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 3× uitdagen · ± 290 min

P Programmeren en computationeel denken · D Ontwerpen en maken



Een softwaregrens maakt een sensor verwisselbaar zonder de regelwet te herschrijven.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

35.1 Twee objecten, één foutlijst

●○○ Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

Een klasse definieert fouten=[] buiten __init__.

Leg uit wat er gebeurt als s1.fouten.append('oud') wordt uitgevoerd. Herstel het ontwerp.

s1 en s2 vinden dezelfde klasse-lijst; s2 ziet 'oud' ook. Zet self.fouten=[] in __init__, zodat elke instantie een eigen lijst krijgt. Als een collectief alarmregister bedoeld is, benoem het expliciet als apart registerobject met eigenaar.

35.2 Een eenheid in het contract

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

De sensor levert 291,15 K; de regelaar verwacht graden Celsius en setpoint 20 °C, Kp 200 W/K.

Bereken de correcte vraag en toon de fout bij blind doorgeven.

291,15−273,15=18,00 °C, dus e=2 K en u=400 W. Blind: e=20−291,15=−271,15 en de begrenzing maakt u=0 W. De fout is een interfacefout, geen PID-afstelling.

35.3 Is of heeft

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een kamerregelaar gebruikt een SHT31 en een SSR.

Kies overerving of samenstelling en motiveer met het substitutiecontract.

Samenstelling: Regelaar heeft Sensor en Actuator. Hij kan niet zelf als SHT31 gebruikt worden; zijn stap() produceert een warmtevraag, geen meetrecord. Verschillende adapters kunnen wel dezelfde Sensor-interface implementeren.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

35.4 Leeftijd exact op de grens

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Het contract staat leeftijden van 0 tot en met 5 s toe.

Schrijf tests op −0,1; 0; 5; 5,1 s en voor NaN. Geef het verwacht gedrag.

Maak vaste meetrecords en kies nu=10. Leeftijd −0,1 betekent toekomsttijd: ValueError. 0 en 5 zijn toegestaan: bij 18 °C 400 W. 5,1 wordt geweigerd. NaN wordt door isfinite geweigerd. Gebruik assertRaises voor fouten en assertEqual voor 400 W; test desgewenst aparte kalendertijd zonder deze monotone klok te vermengen.

35.5 Een methode blokkeert

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een wifi-sensor duurt soms 800 ms; lees() had maximaal 5 ms beloofd.

Beschrijf hoe de contractbreuk de regeling raakt en herstel de architectuur.

Een vervanging houdt de methodenaam maar niet de timingbelofte: de regelaar mist zijn deadline. Lees netwerkdata in een afzonderlijke begrensde taak, bewaar een immutable laatste record en laat lees() dat record snel leveren. Oude data wordt expliciet geweigerd. Een langere timeout binnen de regelaar maakt de deadline nog slechter.

35.6 Wat zit in de commit?

Toepassen · 7 · Begrijpen · 25 min

Je voert git add model.py uit, wijzigt model.py opnieuw en doet git commit.

Welke versie wordt vastgelegd? Geef een veilige reviewvolgorde.

De versie op het moment van git add zit in de index en wordt gecommit; latere edits blijven in de werkmap. Bekijk git diff, selecteer opnieuw met git add als nodig, inspecteer git diff --staged, draai tests op de bedoelde versie en commit. git status toont resterende wijzigingen. Een commit kan dus geslaagd zijn terwijl de werkmap nog verschilt.

35.7 Van lange functie naar ontwerp

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 55 min

Een functie leest I²C, rekent PID, stuurt MQTT, schrijft een SD-kaart en schakelt de pomp.

Verdeel verantwoordelijkheden en leg ten minste vier interfacecontracten vast. Toon welke integratietest een unit test aanvult.

Adapters leveren immutable Meting met eenheid/tijd/kwaliteit. Regelaar.stap(r,m,dt) levert begrensde W. Supervisor verwerkt alarmbits en bepaalt modus; één actuatoradapter schrijft het fysieke bevel. Logger accepteert record plus manifest-ID; transport levert berichten met ontvangst, verval en sequence. Integratietest: een oude MQTT-setpoint wordt geweigerd, lokaal alarm verhindert pompen en de logger registreert weigering met juiste versie. De unit test van PID bewijst dit signaalpad niet.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

grenzen	Hardware, beslislogica en opslag onafhankelijk.
contract	Eenheid, tijd, fouten en eigenaar benoemd.
bewijs	Integratietest verbindt minstens twee onderdelen.

35.8 Stationssoftware vrijgeven

Uitdagen · 9 · Habitat · 60 min

De predictor wordt vervangen, terwijl de klimaatmodule moet blijven regelen.

Ontwerp een release- en terugrolprocedure met manifest, toetsing en actor-eigenaarschap.

Leg modelchecksum, codecommit, configuratie en kalibratie vast. Draai tests en replay op bevroren data, vervolgens schaduwmodus: nieuwe voorspellingen loggen zonder actuatoren. Vergelijk fout en deadlines met acceptatiecriteria. Installeer met atomair wisselen van een versiereferentie; behoud vorige combinatie. De supervisor begrenst voorstellen; Mega blijft lokale eigenaar. Bij ontbrekende of ongeldige voorspelling werkt de vaste regelstrategie verder. Test terugrol met dataformaten en stuur geen dubbel pompbevel. Log wie en welke release is geactiveerd.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

reproduceerbaarheid	Alle code-, data-, model- en configuratieversies vast.
veiligheid	Lokale sturing blijft eigenaar en begrenst.
terugrol	Vorige versie en migratiepad aantoonbaar getest.

35.9 Een groene testset tegenspreken

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 25 min

Alle tests slagen, maar elke test berekent verwacht vermogen met precies dezelfde functie als productie.

Leg uit waarom dit zwak bewijs is en ontwerp onafhankelijke orakels en minstens één mutatietest.

Verwacht en werkelijk delen dezelfde fout: de vergelijking is tautologisch. Gebruik handberekende gevallen: 18 °C → 400 W, 23 °C → 0 W, 0 °C → 2000 W. Gebruik procesinvarianten: $0 \le u \le 2000$ en stijgende y mag de P-vraag niet verhogen. Verander tijdelijk het min/max of de leeftijdsgrens in een kopie; minstens een test moet falen. Een niet gedetecteerde mutatie toont een gat. Test ook een echte adapter apart met bekende sensorinvoer.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 36

Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Een getal is pas een resultaat als je ook zijn fout en gevoeligheid kent

Uitgewerkte oplossingen bij de 9 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 3× uitdagen · ± 280 min

P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



Twee gemeten temperaturen helpen de snelle lucht en trage buffer van elkaar onderscheiden.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

36.1 Arrayvorm lezen

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

T heeft shape (49,2), C heeft shape (2,) en tijd heeft shape (49,1).

Leg uit wat T/C en tijd+T opleveren, en waarom tijd[:,0]+T kan falen.

T/C heeft shape (49,2), per kolom delen. tijd+T broadcast naar (49,2). tijd[:,0] heeft shape (49,); laatste maten 49 en 2 passen niet, dus ValueError. Voor een kolom gebruik tijd of tijd[:,0, None].

36.2 Bisectiebudget

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een bracket is 8 K breed; de middenfout moet ≤ 0,001 K zijn.

Bereken het minimum aantal halveringen.

✓ $8/2^{k+1} \leq 0{,}001$ geeft $k+1 \geq \log_2 8000 = 12{,}966$, dus k≥12. Na 12 halveringen bedraagt de middenfout 8/8192 = 0,0009766 K.

36.3 Newton bij een vlak punt

●○○ Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

$f(x) = x^2 - 2$ en $x_0 = 0$.

Waarom kan de Newtonstap niet worden uitgevoerd? Kies een andere start en bereken één stap.

✓ $f'(0) = 0$: delen door nul. Met $x_0 = 1$ geeft Newton $1 - (-1)/2 = 1{,}5$. Een bracket [1,2] voorkomt dat een onbetrouwbare stap buiten het bekende gebied terechtkomt.

●●○ Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

36.4 Afkoeling met Euler

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Station: τ = 10 800 s, beginoverschot 20 K, één stap h = 1800 s.

Bereken Euler en exact na één stap; bepaal de absolute fout en stabiliteitsfactor.

✓ Euler: $20(1 - 1800/10800) = 16{,}6667$ K. Exact: $20\mathrm{e}^{-1/6} = 16{,}9296$ K. Fout 0,2630 K. Factor 5/6 heeft modulus kleiner dan 1, dus stabiel; dit betekent niet foutloos.

36.5 Energie verdwijnt intern niet

●●○ Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

De tweeknoopsbalans staat in het handboek.

Tel de vergelijkingen op en controleer P=0, UA=0: wat blijft constant? Geef een implementatietest.

✓ De H-termen annuleren; $\mathrm{d}(C_a T_a + C_b T_b)/\mathrm{d}t = 0$. De totale sensible energie ten opzichte van een vaste referentie blijft constant, terwijl beide temperaturen naar een gezamenlijk evenwicht gaan. Test verschillende starttemperaturen met vaste h, controleer energieresidu met tolerantie en halveer h. Een tekenfout in H geeft geen annulering.

36.6 Een fit heeft te veel vrijheden

●●○ Toepassen · 7 · Begrijpen · 25 min

Alleen lucht wordt één uur gemeten; UA, H, beide C en sensorvertraging zijn vrij.

Leg uit waarom een klein residu onvoldoende is en wijzig proef en fit.

✓ Verschillende parametercombinaties kunnen dezelfde korte respons geven; sensortraagheid en warmtecapaciteit lijken op elkaar. Meet buffer en buiten tegelijk, verleng afkoeling, geef verschillende bekende vermogens en ijk de sensorvertraging apart. Houd fysisch bepaalde capaciteiten eerst vast en fit UA/H. Controleer gevoeligheidsrang en test een andere cyclus. Klein residu toont geen unieke parameters.

36.7 Orde en fout aantonen

Uitdagen · 9 · Programmeren · 45 min

Gebruik y' = −y/10 800, y(0)=20, eindtijd 10 800 s.

Implementeer Euler en RK4 voor h=1800,900,450. Vergelijk foutverhoudingen en formuleer beperkingen.

De code uit het handboek berekent de exacte referentie 20/e. Bij halveren daalt Eulerfout ongeveer met factor 2 en RK4-fout ongeveer met factor 16, zodra de asymptotische foutterm domineert. De globale ordes zijn één en vier. Ronding kan bij extreem kleine h overheersen; inputdiscontinuïteiten vragen gesplitste stappen. Een grafiek van log(fout) tegen log(h) heeft helling ongeveer 1 respectievelijk 4.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

berekening	Dezelfde eindtijd, exacte referentie en drie stappen.
interpretatie	Foutorde en stabiliteit onderscheiden.

36.8 Warmteproef voor Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 60 min

Je wilt UA en H identificeren zonder het teeltklimaat te verstoren.

Maak een proefplan met input, sensoren, tijd, veiligheid, fit en onafhankelijke validatie. Leg vast welke waarden je niet opnieuw schat.

Gebruik een lege of afgescheiden module, begrens warmte en buitenconditie; registreer P, Ta, Tb, To en sensorleeftijd op UTC+1. Begin nabij evenwicht, wissel twee of meer veilige vermogens en neem een lange afkoelfase; warmtecapaciteiten 80 kJ/K en 1,10 MJ/K staan eerst vast, sensorvertraging is apart geijkt. Fit positieve UA/H met gewogen residuen. Reserveer een andere cyclus voor validatie; toets bias, rms en residustructuur. Stop de proef bij klimaatalarm; noodstop en lokaal regelbeleid blijven actief. Publiceer raw data, versie en grenswaarden. Zonder echte proef blijft de 20,2/30-fit een synthetische softwaretest.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

identificatie	Bekende input, beide knopen en onafhankelijke proef.
veiligheid	Temperatuurgrenzen en afbreekprocedure.
bewijs	Residuen, onzekerheid, versies en geldigheidsgebied.

36.9 Een nauwkeuriger verschil

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 25 min

Voor kleine x wordt $1 - \cos x$ berekend.

Leid een stabiel equivalent af, vergelijk bij x=10^{-8} en bespreek conditionering.

Gebruik $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$. Voor $x = 10^{-8}$ is het resultaat ongeveer $5 \cdot 10^{-17}$. In float 64 kan cos afronden tot 1 waardoor de eerste vorm 0 wordt; de sinusvorm houdt het kleine resultaat. Het verlies betreft subtractie van bijna gelijke getallen, niet een nieuwe fysische onzekerheid. Vergelijk ook met de reeks x²/2 en rapporteer absolute/relatieve fout.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 37

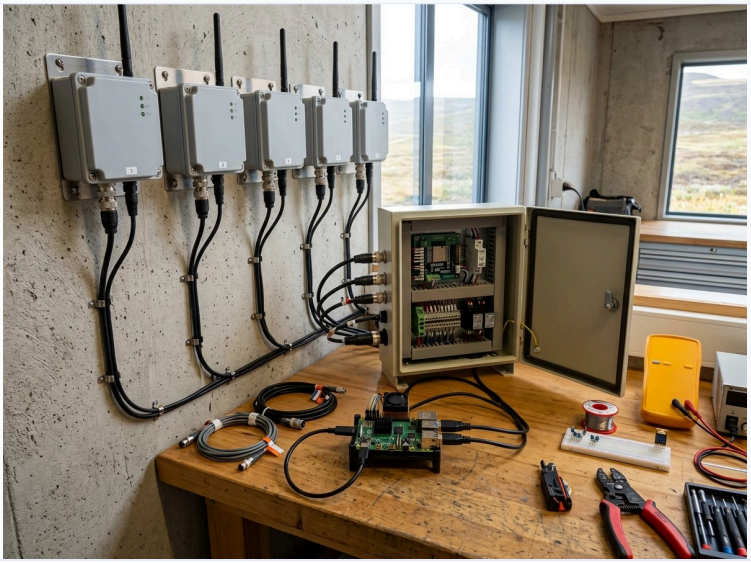
Embedded systemen en IoT

Een verbonden sensor moet ook op tijd, zuinig en veilig blijven werken

Uitgewerkte oplossingen bij de 11 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 385 min

P Programmeren en computationeel denken · L Elektriciteit en elektronica · R Regelen en robotica



Een draadloos netwerk verbindt onderdelen met verschillende timing- en energiebehoeften.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

37.1 Timerwaarde

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

16 MHz, prescaler 64, compare-teller begint op 0.

Bereken ticktijd en comparewaarde voor 2 ms.

Tick=64/16 MHz=4 µs.2 ms/4 µs=500 ticks; comparewaarde 499 als 0 t/m499 geteld worden. Controleer de specifieke timerstand; in een andere modus kan de registerbetekenis verschillen.

37.2 Tellerkwantisatie

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

53 flanken in 5 s, acht poolparen.

Bereken f, n en één-countresolutie. Waarom geen harde overtoerenbeveiliging hiermee?

f=10,6 Hz; n=79,5 tpm; één count=0,2 Hz=1,5 tpm. Het gemiddelde meldt pas na 5 s; snelle overspeed kan eerder ontstaan. Gebruik een apart snel en getest beveiligingspad.

37.3 Qo S en actie

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een pompstart via Qo S1 komt tweemaal binnen.

Wat garandeert Qo S1 en hoe voorkom je een tweede pompbeurt?

Qo S1 staat minstens-eenmaalaflevering toe. De applicatie bewaart request-ID en resultaat; een duplicaat krijgt dezelfde bevestiging en start geen nieuwe actie. De fysieke voltooide actie wordt apart bevestigd. Alleen sequence per MQTT-pakket volstaat niet voor een actuatoropdracht.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

37.4 Rollover narekenen

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

laatst=4294967290, nu=14 inuint 32_t.

Bereken dt en vergelijk met nu> laatst+periode; geef een test voor een 5 s-venster over rollover.

Modulo 2^{32} aftrekken geeft 20 ms. Een gewone geordende vergelijking over een tellerwrap is onbetrouwbaar en de som kan zelf wrap veroorzaken. Test starttijd net vóór 2^{32}, bied flanken vóór en na de wrap en roep loop na 5000 ms echte scenariotijd aan; de getelde dt moet 5000 en het toerental identiek blijven.

37.5 UART en taakdeadline

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een taak moet elke 20 ms gereed zijn. Ze print 240 bytes bij 115200bit/s8N1 en rekent 3 ms.

a. Bereken de minimale totale tijd bij blokkerend printen. Ontwerp een begrensde oplossing.

Serialisatie 2400/115200=20,833 ms, plus 3 ms=23,833 ms: deadline gemist. Verlaag payload/ritme, gebruik een begrensde TX-buffer en laat de kritieke taak alleen kopiëren; meet ook kopieertijd en schedulerblokking.

b. Welke nieuwe foutmodus introduceert een buffer?

Een volle buffer vraagt expliciet beleid: oudere niet-kritieke samples laten vallen met teller of opslag uitstellen; alarmen krijgen reserve. Onbegrensd bufferen verschuift het probleem naar geheugenuitputting.

37.6 I²C-golfvorm toetsen

Toepassen · 7 · Labo · 35 min

R=2,2 kΩ, C=500 p F,100kbit/s.

Voorspel t_r en bepaal of de 1000 ns-grens gehaald wordt. Beschrijf de oscilloscoopmeting en een hersteloptie.

✓ t_r=0,8473×2200×500 p F=932 ns, bijna de grens. Meet SDA/SCL tussen 30% en 70% met probes die weinig capaciteit toevoegen; bekijk worst-case bekabeling. Kortere kabel, kleinere geschikte pull-up met voldoende sinkstroom of lokale gateway geeft marge. Nominaal net slagen is geen robuust ontwerp.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

meting	30–70%, probe-effect en worst-case kabel.
afweging	Stroom en RC gezamenlijk getoetst.

37.7 Slaap eerlijk begroten

●●○ Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Een knoop gebruikt 120 m A voor 2 s plus reconnect 4 s,0,05 m A gedurende 54 s; batterij 2000 m Ah,80% bruikbaar.

Bereken gemiddelde stroom en autonomie; vergelijk met de 2 s-activiteit uit het handboek.

✓ I=(120×6+0,05×54)/60=12,045 m A. Autonomie 1600/12,045=132,84 h=5,53 dagen. Zonder reconnect was 16,47 dagen mogelijk in het rekenmodel. De verbinding kost dus meer dan tweederde van de autonomie. Meet hele bord, kou en regelaarverlies afzonderlijk.

●●● Uitdagen Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

37.8 Een bericht is ongeldige invoer

●●● Uitdagen · 9 · </> Programmeren · 45 min

Breid bericht_contract.py uit.

a Ontwerp tests voor ontbrekende sleutel, NaN, oud, duplicaat, herstart en teruglopende sequence. Geef elk verwacht resultaat.

✓ Ontbrekende key→schemafout; temperatuur NaN→getalfout; leeftijd 91 s→oud/bereik; dezelfde(node, boot, seq)→duplicaat/volgorde; nieuwe boot metseq 0 en verse tijd→aanvaard; lagerseq binnenzelfde boot→duplicaat/volgorde. Voeg maximale payload, type van node/boot en kalendertijdmapping toe voordat externe data wordt gebruikt.

b Wat kan deze offlinevalidator niet bewijzen?

✓ Geen authenticatie, TLS, radioverlies, broker ACL of realistische scheduling. Die vragen integratie-, netwerk- en hardwaretests. De validator neemt reeds geauthenticeerde identiteit aan.

37.9 Netwerkuitval als proef

●●● Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 55 min

Wifi wordt 120 min uitgeschakeld terwijl lokale regeling doorgaat.

Geef een meetbaar testplan voor lokale deadlines, buffer, replay, veroudering en herstel.

✓ Registreer lokale taakperioden en maxima; geen noodstop of alarm mag broker nodig hebben. Genereer 120 min records, controleer begrensde buffer en tellers voor verlies. De Pi markeert na 90 s centrale telemetrie oud; lokale sensoren blijven bruikbaar volgens hun eigen deadline. Na reconnect worden oude records als archief ingelezen, actuele alarmen blijven voorrang houden en een oud commando wordt geweigerd. Controleer boot-ID/seq na herstart en rapporteer gemiste samples en herstelduur.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

lokale plicht	Deadline en veiligheidsactie zonder netwerk.
data	Oud archief en actuele invoer onderscheiden.

37.10 Het sensornet van Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 75 min

Ontwerp het netwerk voor module, meetkas, luchtknoop en turbine.

a Teken architectuur met busadressen, voeding en eigenaars; geef MQTT-contract en beveiliging.

Pi host broker; Mega en Uno behouden lokale sturing. Gateways verbinden lokale UART/I²C met wifi; behoud SHT310x44, RTC0x68, INA2260x40/41 per modulebus en ADS11150x48/BME2800x76 op de luchtknoop. Vast gevoede alarmknopen; slaap alleen voor niet-kritieke telemetrie. Qo S1, boot/seq, tijd/kwaliteit,60 s-telemetrie,90 s-leeftijd centraal; commando met ID/verval, geen retained, begrensdsetpoint. Eigencredentials, ACL, TLS-verificatie en update/rollbackmanifest.

b Geef drie storingstests en objectieve acceptatiecriteria.

Wifi 2 h: lokale deadlines gehaald en oude centrale data binnen 90 s gemarkeerd. Duplicaatbevel: één actie en dezelfdeack. Vreemdecredential: topicpublicatie geweigerd. Aanvullend resetgateway: oudeboot niet als verse volgorde aanvaard, actuele meting herstelt zonder dubbel pompbevel.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

architectuur	Voeding, bussen, netwerk en actor-eigenaar zichtbaar.
contract	Eenheid, tijd, kwaliteit, ID en verval.
beveiliging	Identiteit, ACL, TLS en herstel toetsbaar.

37.11 Een verboden retained-start

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 25 min

Een nieuwe subscriber ontvangt een retained bericht 'pomp 120 s'.

Analyseer de fout en ontwerp een status/commandoverdeling die reconnect veilig maakt.

Het bericht kan oud zijn en onbedoeld een actie starten. Scheid status-topic(magretained, mettijd/kwaliteit) vancommando-topic(niet retained, ID, verval). De pompcontroller accepteert alleen geauthenticeerde verse aanvragen in geschikte modus, bevestigt aanvaard/weigering en bewaart deduplicatie. Reconnect is geen toestemming om een eerder bevel opnieuw uit te voeren.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 38

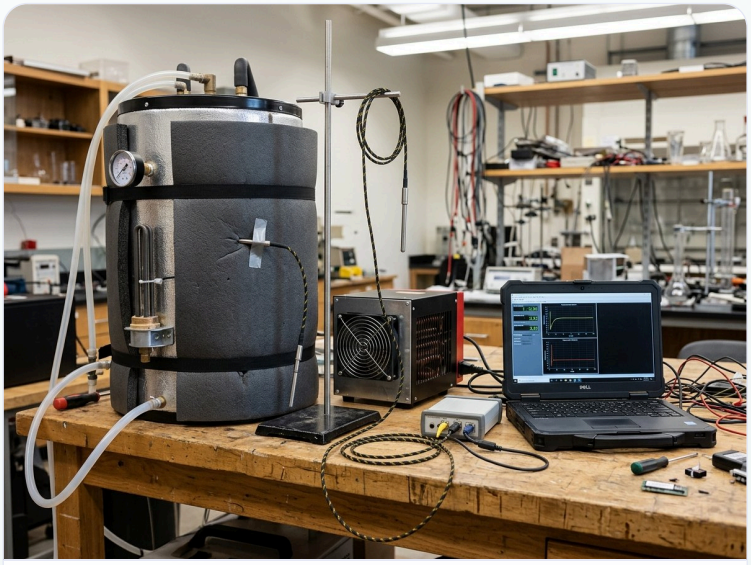
Dynamische systemen modelleren

Toestanden en tijdschalen verklaren waarom een station nog beweegt nadat de knop omgaat

Uitgewerkte oplossingen bij de 9 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 3× uitdagen · ± 290 min

R Regelen en robotica · W Wiskundig modelleren · E Energie



Dezelfde input voedt toestanden die op minuten en uren reageren.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

38.1 Tijdconstante uit een balans

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

C=120 kJ/K, H=40 W/K.

a Bereken τ, K en de eindstijging bij 400 W.

✓ τ=C/H=120000/40=3000 s=50 min. K=1/H=0,025 K/W; de eindstijging is K×400=10 K.

b Welke stijging is na één tijdconstante bereikt?

✓ Na 50 min is 10(1−exp(−1))=6,321 K bereikt. Een tijdconstante is geen insteltijd waarop de eindwaarde volledig bereikt wordt.

38.2 Dode tijd herkennen

Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

Uitvoer A stijgt direct exponentieel; uitvoer B blijft 90 s plat en stijgt daarna.

Kies het passende model. Waarom bootst een grotere warmtecapaciteit het plateau niet exact na?

A past bij een eersteordemodel; B vraagt daarnaast dode tijd L=90 s. Een grotere C geeft meteen een kleinere niet-nulle beginhelling en dus geen exact plateau. Een heel kleine helling kan wel onder de meetresolutie verdwijnen; rapporteer daarom ook die resolutie.

38.3 Polen lezen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een model heeft polen −0,01 en −0,0001 s^{-1}; een ander model heeft een pool +0,001 s^{-1}.

Geef tijdschalen en stabiliteit.

De negatieve polen hebben tijdschalen 100 s en 10000 s: beide vrije modes sterven uit. De positieve pool groeit met een e-voudtijd van 1000 s; dat model is instabiel. Een solver kan een stabiel continu model numeriek laten divergeren, maar verandert de continue polen niet.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

38.4 P-regeling afleiden

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

$\tau\dot{y} + y = Ku$ en $u = K_p(r - y)$.

a. Leid de gesloten-lusversterking en tijdconstante af.

Invullen geeft $\tau\dot{y} + (1 + KK_p)y = KK_p r$. Delen door $(1 + KK_p)$ geeft $\tau_{cl} = \tau/(1 + KK_p)$ en $K_{cl} = KK_p/(1 + KK_p)$.

b. Bereken voor e39: K=0,02 K/W, τ=10800 s en Kp=200 W/K. Wat gebeurt bij r=15 K?

KKp=4; τcl=2160 s=36 min en Kcl=4/5. Bij r=15 K wordt uiteindelijk 12 K bereikt: een blijvende fout van 3 K. Dit resultaat geldt tijdens onbegrensde lineaire werking; de vermogenslimiet kan de respons veranderen.

38.5 Tweedeordeontwerp

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

ωn=0,02 rad/s; maximaal 10% doorschot.

a. Bereken de minimaal vereiste ζ.

Neem de logaritme: $\ln 0{,}1 = -\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$. Kwadrateren en herschikken geeft $\zeta = |\ln 0{,}1|/\sqrt{\pi^2 + (\ln 0{,}1)^2} = 0{,}5912$.

b. Bereken de piektijd op deze grens en geef een beperking van het resultaat.

De piektijd is π/(0,02√(1−ζ²))=194,75 s. Deze grens geldt voor het lineaire standaardmodel. Bevestig de respons met de werkelijke actuatorbegrenzing in een simulatie.

38.6 Thermische overdracht controleren

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Gebruik de tweeknoops-overdracht uit het handboek.

a Toon dat G(0)=1/H en controleer de dimensies.

De Laplacevariabele s heeft eenheid s^{-1}. Cbs en de koppeling G hebben eenheid W/K; elke noemerterm heeft eenheid $(W/K)^2$. De verhouding heeft dus eenheid K/W. Bij s=0 volgt G/(HG)=1/H.

b Wat wordt de luchtoverdracht als de koppeling G naar nul gaat?

De ontkoppelde lucht volgt 1/(Cas+H). De buffer wordt dan niet meer door P beïnvloed. Bij G=0 kan voor niet-nulle s een gemeenschappelijke s-factor worden geschrapt. De buffertoestand blijft constant en heeft geen invloed op de lucht.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

38.7 Responskenmerken automatiseren

Uitdagen · 9 · Programmeren · 50 min

Gebruik stap2(t,ζ) met ωn=1 rad/s voor ζ=0,2; 0,4; 0,8.

a Bepaal piek, t10, t90 en de echte 2%-insteltijd. Vergelijk de laatste met 4/ζ.

Gebruik een tijdreeks tot ruim 20/ζ met een vaste Δt. Zoek de eerste punten boven 0,1 en 0,9, het maximum en de laatste index waarvoor |y−1|>0,02. De insteltijd ligt één sample na die laatste overschrijding; een eerdere eerste binnenkomst in de band volstaat niet.

b Hoe controleer je de tijdresolutie van je uitkomst?

Herhaal met de halve Δt. Rapporteer het verschil als discretisatiecontrole, vooral bij kleine ζ met meerdere bandkruisingen. De piekformules zijn exact binnen het model; 4/ζ is een benadering.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

uitvoering	Alle kenmerken uit dezelfde respons en een expliciete band.
controle	Formules en tijdresolutie onafhankelijk getoetst.

38.8 De tweeling van Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 65 min

Een manager wil alle thermische toestanden vervangen door C=540 kJ/K omdat dit in de PID-proef goed werkt.

a Verdedig de systeemgrenzen en ontwerp een validatieproef voor nachtplanning.

540 kJ/K hoort bij de vereenvoudigde stationsknoop. De module heeft Ca=80 kJ/K, Cb=1,10 MJ/K, H=20,2 W/K en G=30 W/K. Tel deze beschrijvingen niet blind op. Voor nachtplanning blijft de trage buffer nodig. Meet bekende warmte-input, buiten, lucht en buffer tijdens een opwarmfase en lange afkoeling, met tijd UTC+1. Reserveer een andere inputcyclus voor validatie. Voeg de 100 L warmtepompbuffer alleen als aparte knoop toe met een expliciete grens die dubbeltelling voorkomt.

b Geef een meetbaar criterium om het model af te wijzen.

Leg vooraf een eis vast, bijvoorbeeld een rms-luchtvoorspelfout ≤0,3 K en geen blijvende bias >0,2 K over 2 h in het beoogde gebied. Dit zijn ontwerpvoorstellen. Structurele residuen na iedere inputwissel of een ontbrekende bufferenergiebalans vragen modelherziening.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

grens	Vereenvoudigingen en fysieke opslag onderscheiden.
proef	Bekende input, buiten, twee toestanden en aparte validatie.
besluit	Kwantitatieve criteria en afwijzingsregel.

38.9 Een model met verzadiging

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 25 min

Een lineair model vraagt 3000 W, terwijl de SSR maximaal 2000 W kan leveren.

Welke conclusies gelden niet rechtstreeks? Bouw de geschikte simulatiestructuur.

Superpositie en vaste gesloten-luspolen beschrijven de verzadigingsfase niet exact. Standaardformules voor doorschot en insteltijd kunnen niet rechtstreeks worden toegepast. Simuleer de regelaar, thermische toestanden, begrenzing 0–2000 W, anti-windup en echte bemonstering. Gebruik de overdrachtsfunctie voor lokale analyse buiten de verzadiging en toets een koudegolf en opwarmstart met het begrensde model.

E EXPERT · DEEL E8 · REGELTECHNIEK

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 39

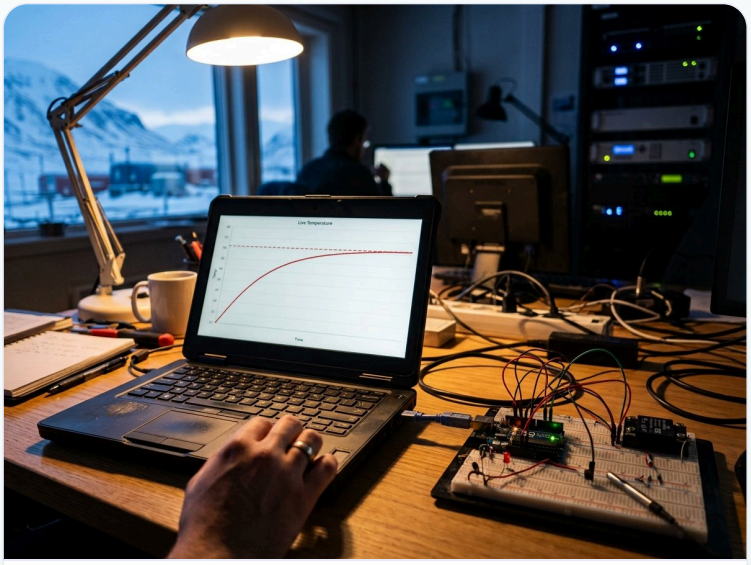
PID-regeling

Drie getallen die van een verwarming, een drone of een insulinepomp een regelaar maken

Uitgewerkte oplossingen bij de 11 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 312 min

R Regelen en robotica · P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



Regelen is meten, vergelijken en bijsturen, elke seconde opnieuw.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

39.1 Welke actie doet wat?

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 10 min

Een regeling van een waterreservoir (niveau in cm, pomp als actuator) gedraagt zich telkens anders. Welke aanpassing past het best bij elke waarneming?

a Het niveau blijft 4 cm onder het setpoint hangen, ook na een uur.

- A Kp verlagen
- B een I-actie toevoegen
- C Kd verhogen
- D de bemonsteringstijd verlengen

✓ B: een blijvende afwijking wijst op zuivere P-regeling; de I-actie maakt de fout in rust nul.

b Het niveau schiet telkens ver door en slingert lang na.

- A Ki verhogen
- B Kp verhogen
- C Kd verhogen of Ki verlagen
- D de D-actie op de fout zetten

✓ C: meer demping (Kd) of minder integrerende werking; Kp of Ki verhogen maakt het erger.

c Bij elke wijziging van het setpoint krijgt de pomp een harde stoot.

- A D op de meting nemen
- B Ki verlagen
- C Kp verhogen
- D anti-windup toevoegen

✓ A: derivative kick door de sprong van e; D op de meting ziet de sprong van het setpoint niet.

d Na een lange periode met de pomp op vol vermogen schiet het niveau ver door.

- A Kd verhogen
- B anti-windup toevoegen
- C een P-regelaar gebruiken
- D sneller bemonsteren

✓ B: integrator-windup tijdens de verzadiging.

39.2 De blijvende afwijking van een P-regelaar

Oefenen · 6 · Rekenen · 15 min

Een kleine kweekkast volgt $\tau\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -y + Ku$ met $\tau = 900\,\mathrm{s}$ en $K = 0{,}050\,^\circ\mathrm{C/W}$. Een P-regelaar met $K_p = 60\,\mathrm{W/^\circ C}$ moet y van 0 naar $r = 12\,^\circ\mathrm{C}$ brengen. Het verwarmingselement kan 0 tot 1000 W.

a Bereken de lusversterking, de eindwaarde van y en de blijvende afwijking.

✓ $KK_p = 0{,}050 \cdot 60 = 3{,}0$; $e_\infty = 12/4{,}0 = 3{,}0\,^\circ\mathrm{C}$; $y_\infty = 9{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.

b Bereken het eindvermogen en controleer het met het procesmodel.

✓ $u_\infty = K_p e_\infty = 60 \cdot 3{,}0 = 180\,\mathrm{W}$; controle: $Ku_\infty = 0{,}050 \cdot 180 = 9{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.

c Raakt het element zijn grens? Bereken de tijdconstante van de gesloten lus.

✓ Grootste vermogen bij de start: $60 \cdot 12 = 720\,\mathrm{W} < 1000\,\mathrm{W}$: geen verzadiging. $\tau_g = 900/4{,}0 = 225\,\mathrm{s}$.

39.3 Eén stap van een discrete PID

Oefenen · 6 · Rekenen · 12 min

Een discrete PID ($\Delta t = 2\,\text{s}$, D op de meting) heeft $K_p = 150$, $K_i = 0{,}8$, $K_d = 400$ (eenheden zoals in het handboek). Setpoint 20,0 °C. Vorige meting 18,2 °C, nieuwe meting 18,5 °C. De som van alle fouten tot en met de vorige stap is 214,0 °C.

a Bereken de fout e_k, de nieuwe som, en de drie termen apart.

✓ $e_k = 20{,}0 - 18{,}5 = 1{,}5\,^\circ\text{C}$; som $= 214{,}0 + 1{,}5 = 215{,}5$. P: $150 \cdot 1{,}5 = 225\,\text{W}$. I: $0{,}8 \cdot 2 \cdot 215{,}5 = 344{,}8\,\text{W}$. D: $-400 \cdot (18{,}5 - 18{,}2)/2 = -60\,\text{W}$.

b Welk vermogen stuurt de regelaar als de actuator 0 tot 2000 W kan?

✓ $u = 225 + 344{,}8 - 60 = 509{,}8\,\text{W}$, binnen de grenzen, dus $u \approx 510\,\text{W}$.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

39.4 Waarom een P-regelaar sneller is

Toepassen · 7 · Rekenen · 20 min

Het station ($\tau = 10\,800\,\text{s}$, $K = 0{,}020\,^\circ\text{C/W}$) krijgt twee strategieën om 12 °C boven buiten te komen: (A) gewoon 600 W aanzetten; (B) een P-regelaar met $r = 15\,^\circ\text{C}$ en $K_p = 200\,\text{W}/^\circ\text{C}$.

a Toon aan dat beide strategieën op dezelfde eindtemperatuur uitkomen.

✓ A: $y_\infty = Ku = 0{,}020 \cdot 600 = 12\,^\circ\text{C}$. B: $e_\infty = 15/(1+4) = 3$, dus $y_\infty = 12\,^\circ\text{C}$ en $u_\infty = 600\,\text{W}$.

b Leid voor B de gesloten-lusvergelijking af en bereken de tijdconstante. Hoeveel keer sneller is B dan A?

✓ $\tau\dot{y} = -y + KK_p(r - y) \Rightarrow \frac{\tau}{1+KK_p}\dot{y} = -y + \frac{KK_p}{1+KK_p}r$, dus $\tau_g = 10\,800/5 = 2160\,\text{s}$ (36 minuten): vijf keer sneller dan de 3 uur van A.

c Strategie B begint met een vermogen boven 2000 W. Wat betekent dat voor je antwoord op b?

✓ $u(0) = 200 \cdot 15 = 3000\,\text{W}$, maar de verwarming levert maximaal 2000 W. In het begin loopt B dus trager dan het lineaire model belooft; de factor 5 geldt pas als u onder 2000 W zakt (bij $e < 10\,^\circ\text{C}$).

39.5 Anti-windup inbouwen

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Een leerling schreef deze PI-regelaar in Python. De verwarming kan 0 tot 1500 W.

```
def pi_stap(r, y, toestand, Kp=300, Ki=1.2, dt=1.0):
    e = r - y
    toestand["som"] += e * dt
    u = Kp * e + Ki * toestand["som"]
    return min(max(u, 0), 1500)
```

a Leg uit wat er met `toestand["som"]` gebeurt als de verwarming een halfuur op 1500 W staat.

✓ De som blijft groeien zolang de fout positief is, ook al levert de verwarming niet meer. Na het setpoint moet die opgestapelde som eerst 'afgebouwd' worden: groot doorschot.

b Herschrijf de functie met anti-windup (niet integreren als de uitgang verzadigd is en de fout de verzadiging vergroot).

```
def pi_stap(r, y, toestand, Kp=300, Ki=1.2, dt=1.0):
    e = r - y
    u_vrij = Kp * e + Ki * toestand["som"]
    u = min(max(u_vrij, 0), 1500)
    if not (u != u_vrij and (u_vrij > 0) == (e > 0)):
        toestand["som"] += e * dt
    return u
```

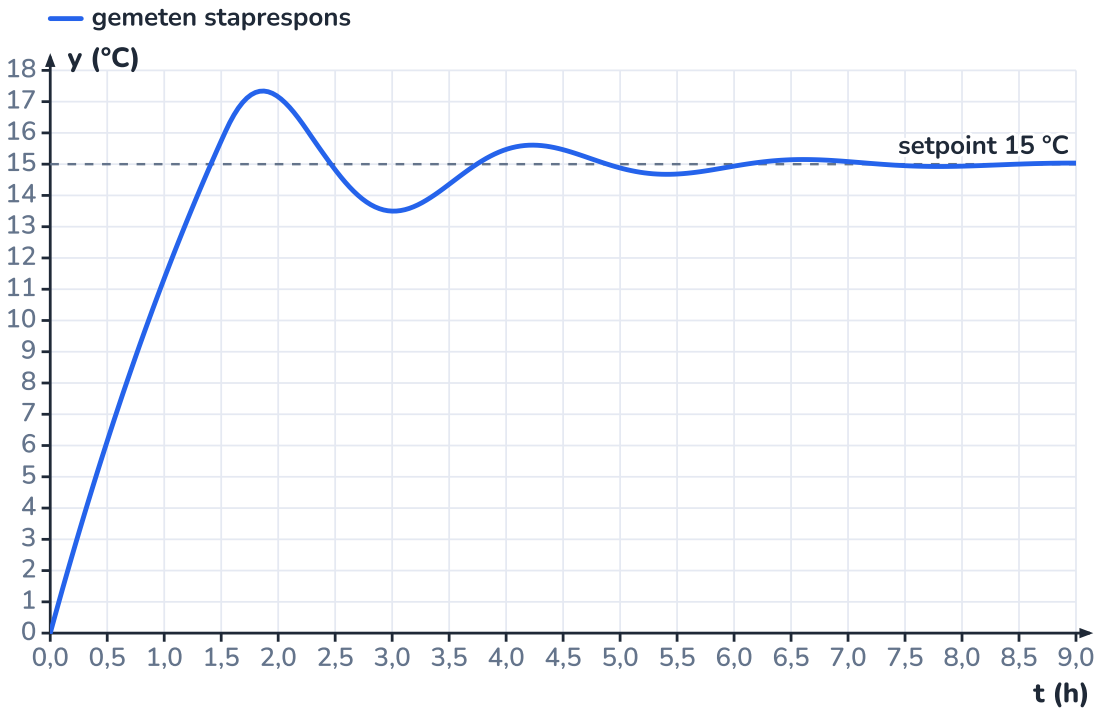
c Bedenk een tweede manier van anti-windup en beschrijf ze in één zin.

Bijvoorbeeld: de som begrenzen zodat Ki·som nooit meer dan 1500 W kan geven (clamping), of terugrekenen: som bijsturen met het verschil tussen u en u_vrij (back-calculation).

39.6 Een staprespons aflezen

Toepassen · 7 · Analyseren · 20 min

Lees de grafiek zo nauwkeurig mogelijk af.



Gemeten stap respons van een PI-regeling (setpoint van 0 naar 15 °C boven buiten).

a Bepaal de stijgtijd (10 % tot 90 %).

10 % (1,5 °C) na ongeveer 7,0 min, 90 % (13,5 °C) na ongeveer 74,2 min: stijgtijd ≈ 67,2 min (aflezen: ±0,5 min is goed).

b Bepaal de piekwaarde, de piektijd en het doorschot in procent.

Piek ≈ 17,3 °C na ≈ 111,8 min; doorschot ≈ 16 %.

c Bepaal de insteltijd voor een band van ±2 %.

Binnen 14,7 tot 15,3 °C vanaf ≈ 334 min.

d Deze regeling had doorschot, terwijl het proces van eerste orde is. Geef een mogelijke oorzaak.

De I-actie voegt een orde toe, zodat een PI-lus van een eerstegraadsproces al kan doorschieten; hier komt nog een trage sensor bij (de regelaar ziet de temperatuur te laat). Ook verzadiging met een beetje windup kan meespelen.

39.7 Ziegler-Nichols voor de waterpomp

Toepassen · 7 · Rekenen · 15 min

De druk in de waterleiding van het station wordt geregeld met een pomp (sturing in %). Met alleen P-actie begint de druk blijvend te slingeren bij $K_u = 12\,\%/\text{bar}$; de periode van de slingering is $T_u = 8{,}0\,\text{s}$.

a Bereken de instellingen voor een PI-regelaar (K_p, T_i, K_i).

$K_p = 0{,}45 \cdot 12 = 5{,}4\,\%/\text{bar}$; $T_i = 8{,}0/1{,}2 \approx 6{,}7\,\text{s}$; $K_i = 5{,}4/6{,}67 \approx 0{,}81\,\%/(\text{bar}\cdot\text{s})$.

b Bereken de instellingen voor een PID-regelaar (K_p, T_i, T_d, K_i, K_d), met eenheden.

$K_p = 0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2\,\%/\text{bar}$; $T_i = 4{,}0\,\text{s}$; $T_d = 1{,}0\,\text{s}$; $K_i = 7{,}2/4{,}0 = 1{,}8\,\%/(\text{bar}\cdot\text{s})$; $K_d = 7{,}2 \cdot 1{,}0 = 7{,}2\,\%\cdot\text{s/bar}$.

c Welke bemonsteringstijd kies je hoogstens voor deze lus? Motiveer met T_u.

Een vuistregel is minstens tien samples per slingerperiode, liefst meer: $\Delta t \le T_u/10 = 0{,}8\,\text{s}$, bv. 0,1 tot 0,5 s. Bij Δt in de buurt van T_d wordt de D-actie zinloos.

Uitdagen

Uitdagen — transfer, open problemen, leerlijnen combineren

39.8 Simulatie-onderzoek: de beste PI voor het station

Uitdagen · 8 · Onderzoeken · 60 min

Gebruik de simulatiecode uit het handboek (met anti-windup). Eisen voor een stap van 0 naar 15 °C: doorschot hoogstens 5 %, insteltijd (±2 %) hoogstens 3 uur, en bij een storing van 300 W (vanaf uur 6 blijft er een deur op een kier) mag de temperatuur hoogstens 0,5 °C zakken.

a Breid de simulatie uit met de storing d (in W, zelfde teken als in het procesmodel) en met een functie die doorschot, insteltijd en grootste daling berekent.

Bv. d = 300 als t ≥ 21 600 anders 0, en y += dt*(-y + K*(u - d))/TAU; kenmerken zoals in het handboek (piek, insteltijd vóór uur 6) plus 15 − min(y) na uur 6.

b Zoek systematisch (een rooster van Kp- en Ki-waarden) naar instellingen die aan alle eisen voldoen. Noteer je beste drie.

Zo'n rooster (met anti-windup) geeft oplossingen rond Kp ≈ 400 tot 800 W/°C met Ki ≈ 0,11 tot 0,25 W/(°C·s), bv. Kp = 500, Ki = 0,14: doorschot 0,1 %, insteltijd 1,9 h, daling 0,40 °C. Met Kp = 200 of 300 zakt de temperatuur 0,6 à 0,8 °C: te veel. Controleer je eigen getallen met je code.

c Welke eis is het moeilijkst, en waarom botst ze met een andere? Verklaar met de werking van P en I.

De storingseis vraagt een grote Kp (sneller extra vermogen) en een voldoende grote Ki (snel herstel), de doorschoteis bij de stap vraagt net een kleinere Ki. Omdat de verwarming bij de stap verzadigt, helpt anti-windup: dan kan Ki groter zonder veel doorschot. Een alternatief is setpoint-weighting of een trager opgebouwd setpoint (ramp).

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Code	Storing correct ingebouwd, kenmerken automatisch berekend, anti-windup behouden.
Zoektocht	Systematisch rooster, resultaten in een tabel, eisen expliciet getoetst.
Verklaring	Afweging tussen doorschot bij de stap en herstel na de storing correct uitgelegd.

39.9 Bewijs: PI maakt ook een storing ongedaan

Uitdagen · 8 · Analyseren · 25 min

Het station staat stabiel op het setpoint. Op t_0 gaat er een deur open: vanaf dan geldt $\tau\dot{y} = -y + Ku - d_0$ met een constante $d_0 > 0$.

a Toon aan dat een P-regelaar een blijvende extra fout overhoudt en bereken die in functie van d_0, K en K_p.

In rust: $0 = -y + KK_p(r - y) - d_0 \Rightarrow y = \frac{KK_p r - d_0}{1 + KK_p}$, dus $e = r - y = \frac{r + d_0}{1 + KK_p}$. De extra fout door de storing is $\frac{d_0}{1 + KK_p}$ (in °C als d_0 uitgedrukt is als K maal een vermogen; hier heeft d_0 de eenheid °C).

b Toon aan dat bij een PI-regelaar, als de lus weer tot rust komt, de fout nul is. Leg ook uit waar het extra vermogen vandaan komt.

In rust is u constant, dus is $\int e\,\mathrm{d}t$ constant, dus $e = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int e\,\mathrm{d}t = 0$. Het extra vermogen d_0/K wordt geleverd door de I-term: die is tijdens de dip gegroeid tot precies het vermogen dat nodig is.

39.10 Habitat: de temperatuurregeling van het station ontwerpen

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

Het brein van het station moet de binnentemperatuur op 20 °C houden (±0,5 °C in normaal bedrijf) met een verwarming van 2 kW (SSR, tijdproportioneel), een sensor met ruis van ongeveer ±0,1 °C en een tijdconstante van 60 s. Het station staat in ons klimaat: de ontwerptemperatuur voor Ukkel is −8 °C, bij een uitzonderlijke koudegolf zakt het tot −15 °C. Het station verliest 50 W per °C verschil met buiten (dus $K = 0{,}020\,^\circ\mathrm{C/W}$ in het model, zoals in het handboek).

a Controleer of 2 kW volstaat bij −8 °C en bij −15 °C. Welke reserve blijft er telkens?

Bij −8 °C: verschil 28 °C, verlies $50 \cdot 28 = 1400\,\mathrm{W}$: 600 W (30 %) reserve om op te warmen en storingen op te vangen. Bij −15 °C: verschil 35 °C, verlies 1750 W: nog 250 W (12,5 %) reserve. Dat volstaat om de temperatuur te houden, maar na een koude nacht duurt het opwarmen lang. Een warmtepomp (hoofdstuk 16) of het buffervat van de module (i18) geeft meer marge.

b Teken het volledige blokschema: regelaar, SSR, verwarming, station, sensor, filter, en de buitentemperatuur als storing.

Setpoint 20 °C → Σ → PI(D) → begrenzing 0-2000 W → SSR (venster) → verwarming → station (τ, K) ← buitentemperatuur als storing; sensor (60 s) → filter → terug naar Σ.

c Kies en motiveer: P, PI of PID; de bemonsteringstijd; het venster van het SSR; een filter op de meting; de anti-windup.

PI: de ruis (±0,1 °C) en de sensorvertraging maken een D-actie weinig zinvol. Bemonstering 1 à 5 s (klein tegenover 60 s en 3 uur). SSR-venster 5 à 20 s. Een eerste-orde filter met een tijdconstante van enkele seconden. Anti-windup verplicht: de verwarming verzadigt bij strenge kou (zie a).

d Wat doet je regeling als de sensor uitvalt of een onmogelijke waarde geeft (bv. −40 °C of +85 °C)? Beschrijf een veilige toestand.

Waarden buiten een fysisch mogelijk bereik of sprongen groter dan wat het station in één sample kan doen, gelden als sensorfout. Dan: overschakelen op een tweede sensor, of naar een vaste veilige stand (bv. 50 % vermogen, berekend uit de laatste buitentemperatuur), alarm geven, en nooit 0 % of 100 % onbeperkt laten staan.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

Dimensionering	Warmteverlies bij −8 en −15 °C correct berekend, reserve benoemd en beoordeeld.
Blokschema	Alle blokken en signalen met symbool en eenheid; storing en filter op de juiste plaats.
Keuzes	Elke keuze gemotiveerd met een getal of een argument uit dit hoofdstuk (ruis, tijdconstanten, verzadiging).
Veiligheid	Sensorfout gedetecteerd (bereik, sprong) en een fail-safe toestand die het station niet laat bevriezen of oververhitten.

39.11 Aan/uit of PID?

Uitdagen · 7 · Argumenteren · 20 min

Een collega vindt PID overdreven voor de verwarming: 'Een thermostaat met hysterese van ±0,5 °C doet het ook, is eenvoudiger, en een SSR dat telkens schakelt slijt toch niet.'

a Geef twee sterke argumenten vóór de aan/uit-regeling en twee vóór PI, telkens met een getal of voorbeeld.

Aan/uit: geen afstelling nodig, robuust bij sensorruis dankzij de hysterese, en goed genoeg als ±0,5 °C volstaat en het proces traag is (τ = 3 uur: de schommeling blijft klein). PI: geen blijvende schommeling, nauwkeuriger (±0,1 °C haalbaar), zachter voor de installatie, en tijdproportioneel met een SSR even eenvoudig in hardware.

b Voor welk onderdeel van het station zou je zelf aan/uit kiezen, en voor welk PID? Motiveer.

Bv. aan/uit voor een pomp die een tank vult tussen twee niveaus of voor een ventilator bij hoge luchtvochtigheid (de exacte waarde doet er niet toe); PI voor de binnentemperatuur en de waterdruk, waar een constante waarde en weinig schakelen belangrijk zijn.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 40

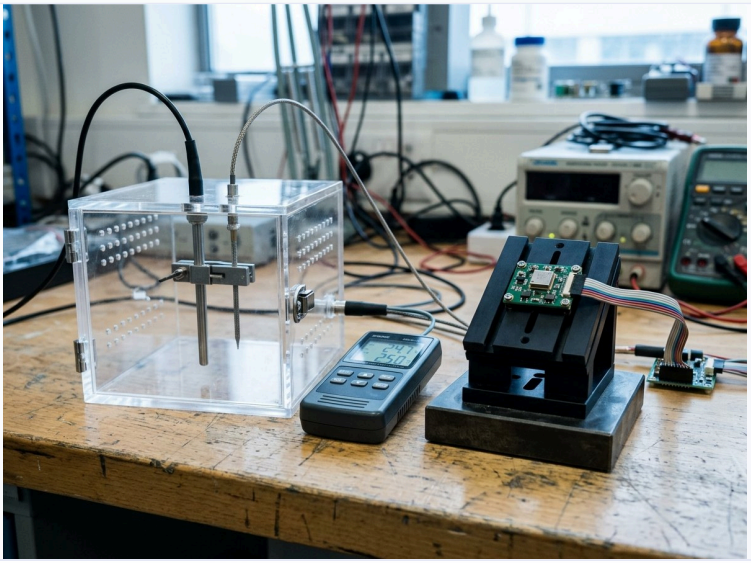
Sensorfusie en schatten

Een schatting vertelt zowel wat je weet als hoe onzeker dat weten is

Uitgewerkte oplossingen bij de 10 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 3× uitdagen · ± 335 min

R Regelen en robotica · A Data en AI · W Wiskundig modelleren



Co-located sensoren kunnen dezelfde toestand toetsen; een water- en luchtsensor meten verschillende toestanden.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

40.1 Niet dezelfde temperatuur

●○○ Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een NTC meet 18 °C in water; een SHT31 meet 22 °C in lucht.

Waarom is het gemiddelde 20 °C geen betere schatting? Welke informatie moet het model bewaren?

De probes meten verschillende toestanden. Het verschil kan echt zijn en hoeft geen ruis te zijn. Bewaar Twater en Tair met tijd, kwaliteit en kalibratie. Een warmtewisselmodel koppelt ze fysisch. Fusie van één toestand vraagt dezelfde meetplaats of een expliciete observatievergelijking.

40.2 Precisiegewichten

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

z1=10,2 K, z2=9,8 K; R1=0,04 K² en R2=0,01 K².

Bereken schatting en standaardafwijking met alle tussenstappen.

Precisies zijn 25 en 100 K^{-2}. Normaliseren geeft gewichten 0,2 en 0,8. De schatting is $0{,}2\times10{,}2+0{,}8\times9{,}8=9{,}88$ K. $P=1/125=0{,}008$ K^2 en $\sigma=0{,}08944$ K. Dit geldt voor onafhankelijke ruis met gemiddelde nul.

40.3 Drift en filtergewicht

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Gyrobias 0,05 °/s; $\Delta t=0{,}1$ s en filtertijdconstante $\tau=5$ s.

Bereken de ongeijkte drift na 2 min en het gewicht α van de oude schatting.

Drift$=0{,}05\times120=6°$. $\alpha=\exp(-0{,}1/5)=0{,}9801987$. Corrigeer eerst de gyro-bias. Het complementaire filter gebruikt daarnaast een geldige zwaartekrachtreferentie om langzame drift te begrenzen.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

40.4 Voorspel en corrigeer

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

$x=19{,}9$ °C, $P=0{,}02$ K^2, $Q=0{,}01$ K^2, $a=h=1$; $z=20{,}2$ °C en $R=0{,}03$ K^2.

a. Bereken P^-, gain, nieuwe schatting en variantie.

$P^-=0{,}02+0{,}01=0{,}03$ K^2. Gain$=0{,}03/(0{,}03+0{,}03)=0{,}5$. Innovatie $\nu=0{,}3$ K; $x_{nieuw}=19{,}9+0{,}5\times0{,}3=20{,}05$ °C. $P_{nieuw}=(1-0{,}5)\times0{,}03=0{,}015$ K^2 en $\sigma_{nieuw}=0{,}12247$ K.

b. Toets de innovatie met de 3σ-poort.

$S=0{,}06$ K^2 en $\nu^2/S=0{,}09/0{,}06=1{,}5$. Dat is kleiner dan 9, dus de meting wordt aanvaard. Procesruis heeft de oude schatting minder zeker gemaakt.

40.5 Een gedeelde biasvloer

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Elke probe heeft $\sigma_{ruis}=0{,}10$ K; beide delen ijkonzekerheid 0,08 K.

Bereken de standaardonzekerheid van het gemiddelde. Vergelijk met blind middelen van onafhankelijke totale fouten.

De variantie van onafhankelijke gemiddelde ruis is $0{,}01/2=0{,}005$ K^2. De gedeelde ijking blijft 0,0064 K^2. Totaal$=0{,}0114$ K^2, dus $u=0{,}10677$ K. Blind middelen van twee totale varianties 0,0164 K^2 geeft 0,0082 K^2 en $u=0{,}09055$ K: de gedeelde bijdrage wordt onderschat.

40.6 Synchroniseren bij een stap

Toepassen · 7 · Labo · 45 min

Een snelle probe en een sensorkast met tijdconstante 60 s zien dezelfde opwarmproef.

Ontwerp een vergelijking die vertraging van bias onderscheidt. Leg meetmoment en bereik vast.

Begin en eindig bij thermisch evenwicht. Een blijvend verschil wijst op ijking; een verschil tijdens de overgang kan uit dynamiek komen. Log dezelfde tijdreferentie UTC+1 en monotone sampletijd, ruwe samples en omgeving. Fit de bekende sensorvertraging apart of vertraag de snelle probe voor vergelijking. Gebruik een veilige kleine temperatuurstap, herhaal en controleer een derde referentie. Middelen over de hele transiënt verbergt het onderscheid.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

proef	Evenwichten en overgang onderscheiden.
tijd	Meetmoment en sensorvertraging vastgelegd.

40.7 Ontbreken simuleren

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Tien opeenvolgende stappen ontbreken alle metingen; Pstart=0,008 K² en Q=0,0004 K² per stap.

Bereken eindvariantie en σ. Pas de code aan zodat ontbreken geen nulmeting wordt.

P=0,008+10×0,0004=0,012 K² en σ=0,10954 K. Voer per stap P+=Q uit en sla de meetupdate over als z ontbreekt, oud of niet eindig is. Bewaar de kwaliteit ‘voorspeld’. Een vervangende nulmeting zou ten onrechte informatie toevoegen en kan een grote innovatie veroorzaken.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

40.8 Kalman-afleiding veralgemenen

Uitdagen · 9 · Rekenen · 25 min

$z = hx + v$; de voorspelling heeft variantie P^-.

a Leid de gain voor h≠1 af.

De fout is $(1-Kh)e^- + Kv$; de variantie is $(1-Kh)^2P^- + K^2R$. Afleiden geeft $-2h(1-Kh)P^- + 2KR = 0$ en dus $K = P^-h/(h^2P^- + R)$.

b Controleer de eenheden als z volt en x kelvin is.

h heeft eenheid V/K; P– heeft K² en R heeft V². De gain heeft K/V. Kv heeft K; de eindvariantie heeft K². De onafhankelijkheid en het gemiddelde nul blijven modelaannamen.

40.9 Een foutdetector tegenspreken

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 40 min

Iedere meting met ν²/S>9 schakelt de sensor direct permanent uit.

Analyseer valse meldingen, modeltekort en herstel. Geef een beter beleid dat lokale alarmen ondersteunt.

Een 3σ-overschrijding kan onder het Gaussmodel normale ruis zijn; veel samples geven veel kansen. Een deurbeweging kan een grote innovatie veroorzaken terwijl de sensor goed werkt. Houd bereik-, leeftijd- en innovatiestatus apart, met tellers en herstelvoorwaarden. Vergelijk een onafhankelijke referentie. Het lokale O_2/CO_2-alarm blijft werken wanneer het voorspelmodel de waarneming onwaarschijnlijk vindt. Na ijking en een geslaagde hersteltest mag de probe terugkeren met passende onzekerheid.

40.10 Fusie voor Habitat ontwerpen

Uitdagen · 9 · Habitat · 75 min

Het station wil een temperatuur blijven schatten als één probe faalt.

a Kies toestand, sensoren, ijking, tijd- en foutcontract. Schets fusie en supervisor.

Kies bijvoorbeeld twee luchtprobes op dezelfde meetplaats met bekende vertraging. Leg °C, kalibratieversie, meetmoment, kwaliteit, leeftijd en boot-ID vast. Voorspel de temperatuur uit een gevalideerd model en corrigeer alleen met verse onafhankelijke metingen. De logger bewaart x, P, innovaties, status en versie. De supervisor kiest bij uitval een geteste gedegradeerde modus; lokale noodstop en luchtgevaarsalarm blijven afzonderlijk.

b Formuleer storingstests en een onafhankelijk onzekerheidsbudget.

Injecteer een bias van 2 K, een stilstaande waarde, NaN, netwerkvertraging en uitval van beide probes. Controleer detectietijd, valse meldingen, herstel en onzekerheidsgroei. Het budget omvat ruis, ijking, gedeelde referentie, montage, tijd en modeltekort. Meet intervaldekking op een nieuwe proefreeks.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

meetgrens	Dezelfde toestand en kalibratiebewijs.
foutbeleid	Uitval, ouderdom, herstel en lokale veiligheid.
zekerheid	Gedeelde fouten en modeltekort opgenomen.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 41

Van data naar model: regressie

Een energievoorspelling vraagt een eerlijke toekomsttest en een verklaring voor haar fouten

Uitgewerkte oplossingen bij de 9 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 3× uitdagen · ± 325 min

A Data en AI · W Wiskundig modelleren · O Onderzoeken en meten



Een plan gebruikt alleen informatie die bij het besluit al bekend kan zijn.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen Oefenen

één stap, direct toepassen

41.1 Een lijn handmatig fitten

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Data: (0,2), (1,3), (2,5).

Bereken helling en intercept, voorspellingen en residusom.

✓ $\bar{x}=1$ en $\bar{y}=10/3$. Kruissom=3, noemer=2, dus b=1,5 en a=11/6. Voorspellingen: 11/6, 10/3, 29/6. Residuen: 1/6, −1/3, 1/6. Hun som is nul en SSE=1/6.

41.2 Feature of toekomstlek?

●○○ Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

Invoer voor morgen: gisterenenergie, morgen gemeten lichtsom, weerprognose en geplande lampuren.

Beoordeel beschikbaarheid en welke versie je moet bewaren.

Gisterenenergie is bekend. Morgen gemeten lichtsom lekt de toekomst. De weerprognose is bruikbaar als je de bij het besluit beschikbare versie bewaart. Geplande lampuren zijn bekend, maar moeten apart van later uitgevoerde uren worden gelogd. Een achteraf verbeterde prognose kan ook lekken.

41.3 Foutmaten

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Residuen: 2, −2, 0 kWh.

Bereken MAE, RMSE en bias. Wat verbergt de bias?

MAE=4/3=1,3333 kWh; RMSE=√(8/3)=1,6330 kWh; bias=0. Tegengestelde fouten heffen elkaar in de bias op, maar blijven voor elke dag relevant.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

41.4 Een matrix bouwen

Toepassen · 7 · Programmeren · 25 min

Koufeatures [0,2,5], lampuren [8,6,9], energie [9,10,12] kWh.

Schrijf designmatrix en NumPy-fit. Waarom bewijst een perfecte fit geen generalisatie?

X=np.column_stack((np.ones(3),[0,2,5],[8,6,9])); b=np.linalg.lstsq(X,[9,10,12],rcond=None)[0]. De berekende coëfficiënten zijn [8,333333; 0,583333; 0,083333]. Voorspellingen zijn [9;10;12], residuen nul op rekenafronding na. Bij volle rang treffen drie parameters drie waarnemingen exact. Er zijn geen resterende residuvrijheidsgraden en nog geen nieuwe dagen getest. Reserveer onafhankelijke data en vergelijk een basislijn.

41.5 Een scaler zonder lek

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Je standaardiseert alle 180 dagen en splitst daarna 110/35/35.

Benoem het lek en geef de juiste workflow voor folds en eindtest.

De scaler bevat informatie uit latere dagen. Splits eerst, leer scaler op training en pas hem onveranderd toe op validatie en test. In een fold wordt hij opnieuw uitsluitend op die trainingsfold geleerd. Na vastgelegde modelkeuze mag hertraining op training plus validatie, met nieuw manifest. De eindtest blijft buiten alle keuzes.

41.6 Residustructuur

Toepassen · 7 · Onderzoeken · 40 min

Koude dagen hebben opeenvolgende positieve residuen; warme dagen willekeurige residuen.

Geef twee ontbrekende factoren en een proef om ze te onderscheiden. Waarom helpt alleen λ verhogen mogelijk niet?

COP-daling en bufferontlading zijn twee kandidaten; ook defrost kan bijdragen. Log thermisch en elektrisch vermogen, buiten en buffer, en vergelijk regimes in een aparte proef. λ begrenst coëfficiënten, maar voegt geen ontbrekende fysica of toestand toe. Een zwaardere straf kan de bias juist vergroten.

41.7 Rolling-originpipeline

●●● Uitdagen 9 </> Programmeren 60 min

De predictor gebruikt maximaal dertig dagen verleden.

a Ontwerp folds, preprocessing, modelkeuze en basislijn zonder toekomstlek.

Lagfeatures gebruiken uitsluitend bekend verleden. Training groeit en validatie ligt later. Leer imputatie en scaler per trainingsfold en kies λ daarbinnen. Vergelijk op het volgende blok met een laatste-zeven-dagenbasislijn; rapporteer RMSE, MAE en ernstige onderschatting per koud/donker regime. Houd de eindtest apart.

b Wanneer is een tussenruimte nodig? Welke data mogen bij actualisering worden gebruikt?

Een tussenruimte voorkomt overlap als feature- of doelvensters over grenzen heen informatie bevatten. Een causaal verledenvenster voor een validatiedag mag werkelijk bekend verleden benutten. Trainingsdoelen mogen geen toekomstige toetshorizon overlappen. Actualiseer uitsluitend met afgesloten geldige dagen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

tijd	Horizon van features en doelen verklaard.
pipeline	Preprocessing en selectie per fold.
bewijs	Basislijn en regimefouten apart.

41.8 Energievoorspeller voor Habitat

●●● Uitdagen 9 Habitat 75 min

Om 20:00 UTC+1 reserveert het station energie voor morgen.

a Geef doel, invoer, basislijn, validatie en acceptatiebesluit.

Voorspel dagverbruik naast onbegrensde vraag. Gebruik gearchiveerde weerprognose, lampplanning en bekende SoC, buffer en bewoning. Vergelijk het fysische model en recente vergelijkbare dagen met temporele toetsing. Stel bijvoorbeeld ≥20% RMSE-verbetering tegenover de basislijn en geen verslechtering van ernstige onderschattingen voor als proefcriteria. Lokale PID, noodstop en vermogensgrenzen blijven onafhankelijk.

b Hoe log je beheeracties om een later verkeerd verband te voorkomen?

Bewaar voorspelling, inputversie, aangeboden en uitgevoerde setpoints, afschakeling, comfort en beschikbare en afgeknepen bronenergie. Markeer beleidswijzigingen als een nieuw regime. Test een nieuwe predictor eerst in schaduwmodus.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

beschikbaarheid	Invoer bekend op het planmoment.
toetsing	Tijdtest, basislijn en staartfout.
beheer	Besluit, grens en log traceerbaar.

41.9 Regularisatie tegenspreken

●●● Uitdagen 9 Argumenteren 25 min

Een collega zegt dat een hoge λ overfitting en extrapolatie oplost.

Verdedig ridge en benoem twee grenzen met een stationsvoorbeeld.

Ridge kan gevoeligheid voor ruis en collineariteit verlagen door coëfficiënten te begrenzen. Het voegt geen ontbrekende COP-afhankelijkheid toe en valideert geen koudegolf buiten het trainingsdomein. Zonder standaardisatie worden features bovendien ongelijk bestraft. Een kleiner verschil tussen training en test is slechts één aanwijzing, geen bewijs dat elke toepassing geschikt is.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 42

Classificatie en clustering

Labels voorspellen, groepen ontdekken en de kosten van verkeerde besluiten meten

Uitgewerkte oplossingen bij de 11 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 435 min

A Data en AI · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Een sensorpatroon en een diagnose hebben verschillende bewijslast.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

42.1 Sigmoid narekenen

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Score z=−1,5 voor een plant.

Bereken p en het label bij drempels 0,5 en 0,15.

p=1/(1+exp(1,5))=0,182426. Bij 0,5 wordt gezond voorspeld; bij 0,15 volgt een positief voorstel. De score blijft dezelfde: de actiegrens verandert.

42.2 Een confusiematrix

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

200 planten: 20 ziek. Voorspeld ziek: 25, waarvan 15 werkelijk ziek.

Bereken TP, FP, FN, TN, precisie, recall en accuracy.

TP=15, FP=10, FN=5, TN=170. Precisie=15/25=60%; recall=15/20=75%; accuracy=185/200=92,5%. De meerderheidbasislijn is 90% met recall nul.

42.3 Eén k-meansstap

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Punten 0, 2, 8, 10; begincentra 0 en 8.

Wijs toe, update centra en bereken J voor en na.

0 en 2 gaan naar 0; 8 en 10 naar 8. Nieuwe centra 1 en 9. Voor de update J=0²+2²+0²+2²=8; daarna J=1²+1²+1²+1²=4. De volgende toewijzing verandert niet.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

42.4 Gradiënt van logistiek

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

x=2, y=0, b=0 en w=0; η=0,1.

Leid p−y uit kruis-entropie af en voer één stap uit.

$dL/dp = -y/p + (1-y)/(1-p)$ en $dp/dz = p(1-p)$, dus $dL/dz = p - y$. Bij z=0 is p=0,5; de b-gradiënt is 0,5 en w-gradiënt 1. Nieuw b=−0,05 en w=−0,1. Nieuwe score voor dezelfde x is −0,25 en p=0,437824.

42.5 Een split vergelijken

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Ouder: 12 planten, 6 ziek. Split A geeft 6 met 5 ziek en 6 met 1 ziek. Split B geeft 4 met 4 ziek en 8 met 2 ziek.

Bereken de gewogen Gini van beide splits en kies de trainingssplit.

Ouder-Gini=0,5. A: beide kinderen 2×(5/6)×(1/6)=0,277778, dus ook gewogen 0,277778. B: links nul, rechts 2×0,25×0,75=0,375; gewogen (8/12)×0,375=0,25. B wint op dit criterium. Minimumbladgrootte of validatie kan toch een andere inzetkeuze vragen.

42.6 Onbalans verandert precisie

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Recall=90%, vals-positieve fractie onder gezonde planten=5%. Vergelijk prevalentie 10% met 1%, elk op 10000 planten.

Bereken TP, FP en precisie voor beide populaties.

Bij 10%: TP=900, FP=450; precisie=900/1350=66,67%. Bij 1%: TP=90, FP=495; precisie=90/585=15,38%. Dezelfde recall en vals-positieve fractie geven veel lagere precisie wanneer ziekte zeldzaam is.

42.7 Afstand en groepen testen

Toepassen · 7 · Programmeren · 45 min

Dezelfde plant is elke dag gemeten; vocht is in procent en ΔT in kelvin.

Ontwerp KNN-validatie die schaal en groepslek voorkomt.

Splits eerst per plant of per nieuwe batch, afhankelijk van de inzetvraag. Leer gemiddelde en schaal alleen op foldtraining. Toets k op dezelfde groepsfolds; bewaar een eindgroep voor test. Bereken afstanden met die scaler, meld onbekend bereik en vergelijk een eenvoudige inspectieregel. Random dagsamples van dezelfde plant aan beide kanten geven te optimistische generalisatie.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

42.8 Drempel en kosten

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 40 min

Een inspectie kost 1 eenheid bij een gezonde plant; een gemiste ziekte kost 9.

Leid de theoretische kansgrens af. Waarom kies je die grens niet blind op iedere gewogen modelscore?

Inspecteren kost (1−p), missen 9p. Inspecteer als 1−p<9p, dus p>0,1. Dit vraagt passende kosten en een gekalibreerde populatiekans. Klassegewichten en oversampling kunnen de scoreverdeling wijzigen. Kies en controleer de grens op representatieve validatie en toets kalibratie, capaciteit en kosten op een aparte groep.

42.9 Clusters onderzoeken

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

K-means geeft drie plantgroepen en het team noemt cluster 2 meteen ‘infectie’.

Ontwerp externe beoordeling en een gevoeligheidsproef voor deze claim.

Neem onafhankelijk beoordeelde planten uit alle clusters, blind voor de clusternaam. Vergelijk referentielabels, cultivar, kaspositie, batch en sensorversie. Herhaal met andere starts, schalen en k; controleer stabiliteit en uitschieters. Een groep kan licht- of montageverschil zijn. Alleen aangetoonde samenhang met een onafhankelijke referentie rechtvaardigt een beperkt probleemlabel.

42.10 Zieke planten in Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

Een classifier moet planten voor inspectie voorstellen.

a Schrijf label-, data- en actieregels, inclusief validatie en acceptatie.

Definieer de doelziekte en onafhankelijke referentie. Bewaar plant/batch, tijd UTC+1, feature-eenheden, kwaliteit en annotatieversie. Split per nieuwe plant en seizoen of batch, leer preprocessing binnen training, kies drempel op validatie en toets precisie/recall/aantallen op test. Een ontwerpvoorstel kan recall≥90% bij haalbare inspectielast zijn; de proef bepaalt of het haalbaar is. Het systeem stelt inspectie voor, een bevoegde operator bevestigt vervolgstappen.

b Welke storingen en schadelijke fouten toets je?

Toets droge gezonde planten, andere cultivars, ontbrekende meting, sensorbias, batchverschuiving en lage ziekteprevalentie. Meet gemiste zieken, onnodige inspecties, onzekerheidsmeldingen en bevestigingsvertraging. Bewaar verworpen voorstellen zodat de evaluatie geen selectiebias krijgt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

referentie	Label onafhankelijk en reproduceerbaar.
evaluatie	Groepssplit, onbalans en foutkosten expliciet.
actie	Begrensde bevoegdheid en herstelprocedure.

42.11 Een classifier vergelijken

Uitdagen · 9 · Programmeren · 70 min

Breid de echte NumPy-simulatie uit met gewijzigde ziekteprevalentie en een temperatuur-offset van 1 K in een nieuwe batch.

Vergelijk logistiek, KNN en boom op vooraf vastgelegde grenzen. Geef een verantwoord inzetbesluit.

Train uitsluitend op de oorspronkelijke trainingsgroep. Kies instellingen en grens op validatie; maak daarna nieuwe testbatches met andere prevalentie en offset. Rapporteer matrices, precisie, recall, foutkosten en onbekend-bereikmeldingen. Verander de modellen niet op die eindtest. Kalibratieverschuiving vraagt herstel van de meetketen of hertraining met een nieuwe apart getoetste versie; een model dat de acceptatie-eis mist blijft in schaduwmodus.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

uitvoering	De drie methoden op dezelfde nieuwe groepen.
bewijs	Aantallen, kosten en verschuiving apart.
besluit	Manifest en acceptatie traceerbaar.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 43

Neurale netwerken

Een netwerk leert door de kettingregel door iedere laag terug te rekenen

Uitgewerkte oplossingen bij de 10 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 3× uitdagen · ± 405 min

A Data en AI · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Beschikbaar zonnevermogen vraagt instraling, temperatuur en een duidelijke systeemgrens.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

43.1 Een neuron vooruit

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

x=(1,2), w=(0,5;−0,2), b=0,1.

Bereken z, ReLU(z) en tanh(z).

z=0,5×1−0,2×2+0,1=0,2. ReLU=0,2; tanh=0,197375. De activaties veranderen de uitvoervorm en afgeleide.

43.2 Vormen en parameters

●○○ Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Batch 20×3, verborgen laag vijf neuronen, lineaire uitvoer één.

Geef alle gewicht/biasvormen en parameter- en activatieaantallen.

W1=3×5, b1=5; W2=5×1, b2=1. Parameters 15+5+5+1=26. Verborgen activaties 20×5=100 en uitvoer 20×1=20. Batchgrootte verandert activatiegeheugen, niet parameteromvang.

43.3 Lineaire lagen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Drie affine lagen bevatten geen activatie.

Waarom maakt deze diepte de regressierelatie niet niet-lineair?

Substitutie vermenigvuldigt matrices en combineert biases. De totale functie blijft Ax+b. Niet-lineaire activaties of andere niet-lineaire bewerkingen zijn nodig voor een kromme relatie.

Toepassen — Toepassen

meerdere stappen, in een context

43.4 Backprop met één verborgen ReLU

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

x=2, w1=0,3, b1=0,1, w2=0,5, b2=0; y=1; L=(ŷ−y)²/2.

Bereken forward en alle gradiënten, daarna één update met η=0,1.

z1=0,7, h=0,7, ŷ=0,35 en e=−0,65. dW2=e·h=−0,455; db2=−0,65. Omdat z1>0 is f'=1: δ1=e·w2=−0,325, dW1=δ1×2=−0,65 en db1=−0,325. Nieuw w1=0,365; b1=0,1325; w2=0,5455; b2=0,065. Alle gradiënten komen uit oude parameters.

43.5 Gradientcheck uitbreiden

Toepassen · 7 · Programmeren · 50 min

De code toetst één element van W1.

Toets alle parameters op een kleine batch met meerdere ε-waarden en een relatieve afwijking.

Loop over de vier parameterarrays en hun indices. Bewaar de oude waarde, bereken verlies bij ±ε en herstel haar. Vergelijk met de analytische gradiënt via |g−fd|/max(1e−8,|g|+|fd|). Herhaal bijvoorbeeld ε=1e−4,1e−5,1e−6. Grote afwijkingen kunnen bias-som, normalisatie, broadcast of voortijdig updaten aanwijzen; zeer kleine ε kan afronding vergroten.

43.6 Een leercurve lezen

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Train-MSE daalt van 0,01 naar 0,001; validatie-MSE stijgt na epoch 400 van 0,003 naar 0,008.

Kies een opslagregel en twee vervolgonderzoeken. Wat mag de test niet doen?

Sla de vooraf gedefinieerde beste validatie-epoch op; hier is een epoch nabij het minimum rond 400 kandidaat. Onderzoek modelcomplexiteit/regularisatie en dataverschuiving of groepslekken. Gebruik de eindtest eenmaal voor de vastgelegde keuze. Haar score mag geen nieuwe epoch of hyperparameter selecteren.

43.7 Een convolutioneel vak

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

3×3-beeldvak met elke rij [0,0,1]; kernel met elke rij [−1,0,1]; bias 0.

Bereken uitvoer en ReLU. Geef de uitvoermaat voor een 4×4-beeld zonder padding.

Elke rij geeft 0+0+1=1, dus kruiscorrelatie=3 en ReLU=3. Bij stride 1 is ruimtelijke maat (4−3)+1=2: 2×2. Een echte mathematische convolutie draait de kernel om en geeft hier het tegengestelde teken.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

43.8 PV-netwerk voor Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 80 min

De planner vraagt een voorspelling van morgenopbrengst.

a Definieer features, doel, grens, baselines en toetsing zonder toekomstlek.

Doel is morgen beschikbare DC-energie binnen een expliciete PV-grens. Archiveer op het planmoment weerprognose, temperatuurmodel, paneelconfiguratie en bekende storingen. Train op tijd- of seizoensblokken en toets op latere periodes. Vergelijk fysisch PV-model en lineaire regressie, met fout per donker/koud regime en ernstige overschattingen. De huidige NumPy-code schat vermogen uit gerealiseerd modelweer en bewijst die dag-vooruittaak niet.

b Welke fysische en operationele voorwaarden blijven onafhankelijk?

Integreer vermogen met echte tijdstappen, houd clipping en geleverd vermogen apart en meld ontbrekende of vreemde invoer. Batterij-, laad- en actuatorgrenzen blijven bij hun eigen regelaar. Nieuwe versies draaien eerst in schaduwmodus met een model/scaler/datamanifest.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

doel	Energiehorizon en systeemgrens helder.
toetsing	Forecastarchief en aparte toekomsttest.
beheer	Fysische grenzen en schaduwmodus.

43.9 CNN tegen een verborgen lek

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 50 min

Veel foto's van dezelfde plant worden willekeurig over train en test verdeeld. Testaccuracy is 99%.

Ontwerp een toets die nieuwe planten, belichting en camera onderzoekt.

Split per plant en batch vóór augmentatie; houd een later seizoen of camera als aparte inzettest. Leer normalisatie op training. Toets gewijzigde belichting, montage en onbekende cultivar met onafhankelijke labels. Rapportage bevat matrix, onbalans, abstentie en foutkosten. De 99%-score kan hetzelfde blad of achtergrond herkennen en bewijst geen nieuwe-plantdiagnose.

43.10 Meer neuronen verdedigen

Uitdagen · 9 · Programmeren · 75 min

Vergelijk verborgen breedtes 4,12,40 bij dezelfde PV-dataset.

Voer een vooraf bepaalde modelvergelijking uit en maak het inzetbesluit reviewbaar.

Gebruik dezelfde train/validatie/testgrenzen en trainingsscaler. Kies optimizerinstellingen op training/validatie, gebruik meerdere vastgelegde seeds en vergelijk validatiefout, parameteraantal en rekentijd. Leg de winnende keuze vast vóór de test. Rapporteer daarna testfout tegen fysische en lineaire baselines. Een breder netwerk wint alleen als de onafhankelijke verbetering zijn reken- en beheerkosten rechtvaardigt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

vergelijking	Gelijke data en vooraf gekozen selectie.
bewijs	Fout, complexiteit en seeds.
besluit	Manifest en modelgrenzen zichtbaar.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 44

AI verantwoord inzetten

Een overtuigende uitkomst vraagt bewijs, begrensde bevoegdheid en verantwoordelijkheid

Uitgewerkte oplossingen bij de 10 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 3× uitdagen · ± 405 min

A Data en AI · D Ontwerpen en maken



De bevoegdheid van een model wordt buiten het model vastgelegd.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

één stap, direct toepassen

44.1 Score en waarheid

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een chatbot zegt een sensorwaarde met zeer stellige taal.

Wat bewijst stelligheid? Geef drie controleerbare velden voor een stationsfeit.

Stelligheid bewijst geen sensorwaarheid. Controleer bron-ID, meettijd en eenheid/kwaliteit, met kalibratieversie waar relevant. Haal het getal uit de log of meetketen en verifieer de berekening. Een modelscore voor tekst is geen gekalibreerde kans op dat feit.

44.2 Een illustratie beoordelen

Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

Een beeldgenerator toont een prachtige correcte montage.

Welke claims kun je met dit beeld wel en niet ondersteunen?

Het beeld kan sfeer of een voorgestelde vorm illustreren. Het bewijst geen werkelijke montage, technische afmetingen, veiligheid of historische gebeurtenis. Gebruik voor die claims meetfoto's met herkomst en exacte tekeningen of testverslagen.

44.3 Energie-eenheden

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Een gemeten IT-taak gebruikt 600 J; PUE=1,3. Netwerk is 0,010 Wh.

Bereken totale gebruiksenergie in Wh en kWh voor 10000 taken.

600 J=600/3600=0,166667 Wh. Met PUE: 0,216667 Wh; plus netwerk 0,226667 Wh. Tienduizend taken gebruiken 2266,67 Wh=2,26667 kWh. Training en hardwareproductie zijn niet meegenomen; PUE mag niet dubbel worden toegepast.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

44.4 Bias gericht toetsen

Toepassen · 7 · Onderzoeken · 40 min

Totaalrecall 90%; per cultivar zijn aantallen onbekend.

Ontwerp een toets die een zwakke cultivar of kasplaats kan vinden zonder selectiebias.

Leg relevante groepen vooraf vast; verzamel onafhankelijke referenties uit alle groepen en ook uit niet-gemelde planten. Rapporteer TP/FN/aantal en onzekerheid per groep naast totaal. Split per plant/batch. Controleer meetkwaliteit, prevalentie en labelcriteria. Nieuwe proefdata toetsen een verbeterde versie; kies niet alleen een achteraf gunstige groep.

44.5 Privacy vóór upload

Toepassen · 7 · Ontwerpen · 25 min

Een stationslog bevat bewoners-ID, aanwezigheid en ruwe stemopnamen.

Maak een doelgebonden gegevensbesluit voor energieplanning en logsamenvatting.

Beoordeel welke velden echt nodig zijn. Energieplanning kan mogelijk met geaggregeerde bezetting werken en vraagt geen ruwe audio. Leg doel, passende rechtsgrond, bewaartermijn, toegang en verwerking door derden vast. Een pseudoniem is niet automatisch anoniem. Houd trainingsgebruik en operationele verwerking apart en maak verwijderen en toegangscontrole uitvoerbaar.

44.6 Recht met peildatum

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een artikel van november 2025 noemt de Omnibus een voorstel; een ontwerpbesluit valt op 30-09-2026.

Welke bron en data gebruik je? Noem de actuele hoogrisicodata en een transparantie-overgang.

Gebruik de vastgestelde wijziging 2026/1744 en geconsolideerde AI-verordening van 27-07-2026, met Commissie-uitleg. Annex III-hoogrisicoregels: 02-12-2027; productroute Annex I: 02-08-2028. Artikel 111(4) geeft bestaande generatieve systemen van vóór 02-08-2026 tot 02-12-2026 voor artikel 50(2). Dat verschuift niet alle transparantieregels. Bewaar de bronversie en de concrete toepassings-/rolbeoordeling.

44.7 Menselijke controle uitvoeren

Toepassen · 7 · Labo · 45 min

De operator bevestigt ieder voorstel binnen één seconde zonder broninformatie.

Ontwerp een proef die toont of correctie werkelijk mogelijk is.

Geef bron, tijd, reden, alternatief, beperkingen en voldoende beslistermijn. Injecteer oude data, verkeerde modus en een onplausibel voorstel. Observeer of de operator weigert en of de uitvoering dan echt stopt binnen zijn bevoegdheid. Log weigering en herstel. Een snel klikmoment zonder kennis of actorrecht bewijst geen betekenisvolle controle.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

informatie	Fout is zichtbaar te beoordelen.
bevoegdheid	Weigering wijzigt uitvoering.
bewijs	Injectie en herstel gelogd.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

44.8 Afwegingskader voor Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 90 min

Een generatief model wil energie, klimaat en onderhoud zelfstandig sturen.

a. Schrijf per taak een bevoegdheidsbesluit met doel, alternatief, bewijs, data/recht, foutgevolg en terugval.

Onderhoud: concept met broncontrole en menselijke bevestiging. Energie: schaduwvoorstel, vergelijken met fysische basislijn en toekomsttest; begrensde planner na acceptatie. Klimaat: lokale regeling en onafhankelijke alarmen blijven eigen functies; AI mag alleen voorstellen binnen expliciet getoetste interface. Beoordeel persoonsgegevens en rol onder geldend recht, log versie, bron en actor. Geen goed puntensaldo kan een ontbrekende wettelijke of veiligheidsvoorwaarde compenseren.

b. Welke voorwaarden zouden uitbreiding of intrekking van rechten rechtvaardigen?

Uitbreiding vraagt vooraf vastgelegde fout-, beschikbaarheids- en herstelcriteria op nieuwe proefdata plus review van doel en juridische scope. Incident, drift, onbekend domein of niet-herstelbare actie trekt bevoegdheid in en activeert de geteste basisstrategie. Een wijziging krijgt een nieuw manifest en proefbesluit.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

doel	Taken en alternatieven afzonderlijk.
bewijs	Onafhankelijke test en concrete foutkosten.
rol	Eigenaar, grens en herstel.
recht	Peildatum, data en toepassingsscope.

44.9 Een AI-claim falsificeren

Uitdagen · 9 · Programmeren · 65 min

Een aanbieder claimt 98% betrouwbare antwoorden en energiebesparing.

Ontwerp een reproduceerbare acceptatieproef die beide claims met een systeemgrens toetst.

Definieer taken, referentieantwoorden, foutzwaarte en representatieve regimes vóór toetsing. Bevries model/prompt/bronnen en rapporteer feitfouten, bronfouten, abstenties en onzekerheid met aantallen. Meet toegerekende training, gebruik, netwerk en hardware, en vergelijk een gelijkwaardige basisworkflow. Een gemiddelde answer-score bewijst geen veilige actorketen; energie per vraag bewijst geen totale jaarbesparing als het gebruik toeneemt.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

toets	Referentie, taken en versie vast.
energie	Gelijke dienst en complete grens.
besluit	Grenzen en herhaling reviewbaar.

44.10 Een besluit verdedigen

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 40 min

Een collega zegt dat menselijke review alle AI-risico's oplost.

Geef een concreet tegenvoorbeeld en een werkbaar stationsontwerp.

Een reviewer zonder bron, tijd of bevoegdheid kan een oud warmtevoorstel niet effectief tegenhouden. Een verborgen fout kan door automatiseringsvertrouwen worden overgenomen. Combineer betrouwbare meetcontracten, vooraf begrensde interfaces, zichtbare onzekerheid, echte weigering, lokale terugval en onafhankelijke beveiliging. Toets die rollen met storinginjectie; review is één onderdeel van het hele ontwerp.

E EXPERT · DEEL E10 · SYSTEMS ENGINEERING

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 45

Systems engineering en het V-model

Eisen, architectuur en bewijs vormen samen één beheerde systeemversie

Uitgewerkte oplossingen bij de 9 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 3× uitdagen · ± 330 min

D Ontwerpen en maken



Het systeemdoel verbindt eisen, verantwoordelijkheden en proefbewijs.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkbook af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen

één stap, direct toepassen

45.1 Een eis scherp maken

Oefenen · 6 · Ontwerpen · 25 min

Wens: ‘De logger is snel.’

Schrijf een toetsbare versie met gebeurtenis, grens, belasting en meetmethode.

Voorbeeldvoorstel: bij een geldige telemetriemeting van maximaal 256 byte onder gespecificeerde belasting schrijft de logger binnen 2 s een status met bron en meettijd. Definieer hardware, opslag, meetduur en percentile of harde deadline. Toets ook fout/volle opslag. De 2 s is een ontwerpcriterium dat nog bewijs vraagt.

45.2 Verificatie of validatie?

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

De code respecteert de afgesproken band, maar de bewoner kan het nachtalarm niet begrijpen.

Classificeer beide beoordelingen en geef een passende vervolgactie.

Bandcontrole is verificatie van de gespecificeerde eis. Onbegrijpelijk alarm wijst op onvoldoende validatie van gebruik en mogelijk een ontbrekende gebruikseis. Onderzoek de operatoractie en herstel de eis/interface, met nieuwe gebruiksproef.

45.3 Trade-off rekenen

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Scores A=(4,3,5), B=(5,4,2); gewichten (0,5;0,3;0,2).

Bereken scores en geef één ontbrekende voorwaarde vóór selectie.

A=2+0,9+1=3,9; B=2,5+1,2+0,4=4,1. B wint alleen binnen deze beoordeling. Controleer eerst harde eisen, gelijke systeemgrens, onderbouwde scores en onzekerheid.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

45.4 Een traceermatrix

Toepassen · 7 · Ontwerpen · 25 min

Eisen: oude data markeren, dubbel voorstel weigeren, lokale regelaar bij netwerkverlies behouden.

Geef per eis ontwerp-ID, test-ID en welk bewijs nog buiten unittest valt.

RN-AGE koppelt meettijd/leeftijdvalidator aan T-AGE-grensgevallen en klokfoutproef. RF-REPLAY koppelt boot/ID/sequence aan T-REPLAY en echte herstart/integratie. RN-LOCAL koppelt actor-eigenaar aan T-NETLOSS met hardware en tijdmeting. Unittests alleen bewijzen geen fysieke regeling of langdurige klimaatprestatie.

45.5 Interface tegen eenhedenfout

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Planner stuurt 500 W elektrisch; warmtebalans behandelt dit als 500 W thermisch.

Ontwerp veldnamen, conversielaag en test die de vergissing aantonen.

Gebruik P_elek_W en P_therm_W met expliciete systeemgrens en bron. De aangewezen conversielaag gebruikt passende COP of gemeten thermisch vermogen; geen vaste COP zonder domein. Bij model-COP 3 zijn 500 W elektrisch 1500 W thermisch. Test beide routes, grensgevallen en ontbrekende COP; een onbekende waarde krijgt foutstatus.

45.6 Een wijziging beheersen

Toepassen · 7 · Programmeren · 45 min

De voorstel-TTL verandert van 60 naar 30 s.

Werk manifest, eisen, tests en terugrol uit. Welke grensgevallen veranderen?

Wijzig eis/interface/configuratie in één baseline. Toets leeftijd 0,30,30,001 s en toekomstige tijd, plus positieve en te grote TTL. Controleer oude clients en replay na herstart. Bewaar oud manifest/firmware voor terugrol en voer betreffende integratieproeven opnieuw uit. Een hash verandert, maar geeft alleen nieuwe identiteit.

45.7 Eisenboom van Habitat

●●● Uitdagen | 9 | Habitat | 90 min

Ontwerp het brein met centrale planning en bestaande lokale controllers.

a Maak doel, functionele/kwaliteits/interface-eisen en de bewijsboom.

H0: bruikbare, beheerbare klimaat/energie/meetdienst. Functies: plannen, loggen, voorstelstatus, alarmmeldingen. Kwaliteit: leeftijd, rekentijd, herstel, reproduceerbaarheid. Interfaces: SI-eenheden, meetplaats, ID/boot/tijd/kwaliteit, actor-eigenaar en twee energienetten. Ieder blad krijgt ID, rationale, ontwerpdeel en toets-ID. Lokale regelaars behouden hun deadlines en bestaande pin/adrescontracten.

b Geef acceptatie en open bewijs voor de eerste baseline.

Acceptatie vereist geslaagde relevante unit-, integratie-, scenario- en gebruiksproeven op één manifest. Markeer onbewezen hardwareveiligheid, extreme weersregimes en herstartreplay als open punten als zij nog niet getest zijn. Een voorbeeld-eis wordt geen behaalde eis door registratie alleen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

grens	Functies, lokale eigenaren en netten herkenbaar.
eisen	Meetbare afzonderlijke eisen.
bewijs	Versiegebonden matrix en open punten.

45.8 Een trade-off verdedigen

●●● Uitdagen | 9 | Onderzoeken | 25 min

Een tweede Pi krijgt automatisch score 5 voor betrouwbaarheid.

Onderzoek gemeenschappelijke oorzaken, gewichtgevoeligheid en ontbrekende proefgegevens.

Controleer gedeelde voeding, netwerk, software, opslag, omgeving en onderhoud. Twee computers zijn niet automatisch onafhankelijk. Maak scores expliciete beoordelingen met bron en onzekerheid. Varieer gewichten en scores, vergelijk lokale terugval en beheerkosten. Stel foutinjectie en hersteltest voor; zet geen berekende beschikbaarheidskans op een ordinal score.

45.9 Review van een green dashboard

●●● Uitdagen | 9 | Argumenteren | 45 min

Alle unit-tests zijn groen; het team wil de stationversie accepteren.

Geef een concrete reviewbeslissing met ontbrekend bewijs en vervolgstap.

Vergelijk iedere eis met passend bewijs en versie. Unit-tests kunnen functies aantonen, maar laten interfacefouten, hardware, timing, klimaatregimes, operatorherstel en fysieke beveiliging open. Geef per open eis eigenaar, proefopstelling, acceptatiegrens en deadline. Accepteer hoogstens de bewezen beperkte scope of houd de release in proefmodus; een groen dashboard vervangt geen traceerbare systeemvalidatie.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 46

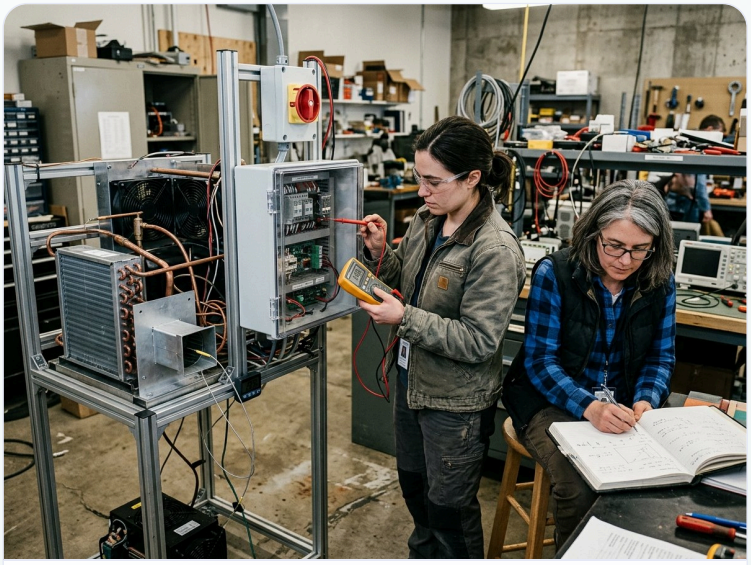
Betrouwbaarheid en risico

Een veilige terugval begint bij faalwijzen, afhankelijkheden en aantoonbaar ingrijpen

Uitgewerkte oplossingen bij de 10 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 3× toepassen · 4× uitdagen · ± 380 min

D Ontwerpen en maken · W Wiskundig modelleren



Een storing wordt gecontroleerd geïnjecteerd en de werkelijke reactie gemeten.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen

één stap, direct toepassen

46.1 Oorzaak, faalwijze, effect

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een kabelbreuk maakt een temperatuurwaarde leeg en de centrale planner reserveert verkeerd.

Scheid de drie begrippen en geef één detectie en beheersing.

Oorzaak: kabelbreuk. Faalwijze: ontbrekende meting. Effect: mogelijk verkeerd plan. Detectie: kwaliteit/schema/leeftijd; beheersing: geen nieuwe voorspelling uit een nulvervanging, status en lokale terugval. Toets dat beide echt optreden.

46.2 Serie en parallel

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Twee onafhankelijke paden hebben R1=0,98 en R2=0,97 voor dezelfde missie.

Bereken R als beide nodig zijn en als één voldoende is.

Serie=0,98×0,97=0,9506. Parallel=1−0,02×0,03=0,9994. Dit geldt alleen bij onafhankelijkheid en de beschreven functie. Omschakel- en gedeelde voedingsfouten zijn nog niet opgenomen.

46.3 MTBF en beschikbaarheid

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

MTBF=10000 h, totale gemiddelde uitval=5 h; constante faalintensiteit.

Bereken beschikbaarheid en R voor een 100 h-missie.

A=10000/10005=0,99950025. λ=0,0001 h^{-1}; R(100)=exp(−0,01)=0,99004983. Hoog beschikbaar tijdsaandeel is niet hetzelfde als kans op geen storing tijdens een missie.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

46.4 Foutenboom algebra

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

T=(A OF B) EN C; qA=0,01,qB=0,02,qC=0,005; onafhankelijk.

Geef minimale snijverzamelingen en exacte topkans. Waarom is simpel optellen van snijsetkansen niet exact?

Minimale sets {A,C} en {B,C}. P(A OF B)=0,01+0,02−0,0002=0,0298; topkans=0,000149. Optellen geeft 0,00005+0,0001=0,00015, maar telt {A,B,C} dubbel. De overlap 0,01×0,02×0,005=0,000001 moet eraf.

46.5 FMEA met scoregrens

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een ernstige hazard heeft S/O/D=5/1/1 en een hinderlijke storing 2/3/3.

Bereken RPN en geef een betere prioriteitsbeslissing dan ‘hoogste getal eerst’.

RPN's zijn 5 en 18. De tweede heeft een hoger product, maar de eerste ernst 5 vraagt eigen beheersing en aantoonbaar bewijs. Onderzoek onzekerheid, hazardgevolg en detectiepad. Ordinale producten zijn bespreekhulp, geen gevaar-kans of FIT. Sluit een ernstige faalwijze pas na bewijs van passende maatregel.

46.6 Gemeenschappelijke oorzaak simuleren

Toepassen · 7 · Programmeren · 50 min

Een redundant sensorpaar deelt voeding en kalibratiereferentie.

Breid een onafhankelijk model uit met een expliciet gedeeld event en vergelijk resultaten.

Trek eerst één gedeeld event per missie; als het optreedt falen beide. Anders trek onafhankelijke resterende events. Analytisch: R=(1−qc)[1−qi1qi2]. Gebruik alle kansen op dezelfde horizon, vergelijk Monte Carlo met formule en meld simulatiestandaardfout. qc en qi vragen externe data; de simulatie levert die niet.

46.7 Klimaat-FMEA van Habitat

●●● Uitdagen | 9 | Habitat | 95 min

Het station gebruikt centrale voorstellen, lokale regeling en een heateruitgang.

a Werk minimaal zes faalwijzen uit met oorzaak, effect, detectie, beheersing, eigenaar en bewijs.

Neem ontbrekende en bevroren sensor, controllerhang, oud/replaybericht, SSR vast aan en gedeelde voeding. Voeg zo nodig bufferbias toe. Koppel ieder geval aan eis/test-ID, versie en resterende onzekerheid. Lokale actor-eigenaar, kwaliteit/tijdcontract en onafhankelijke onderbreking hebben verschillende taken. Vermeld dat de fysieke beveiliging nog bewijs vraagt als die niet getest is.

b Maak de foutenboom voor een ernstig warmtescenario en markeer gedeelde oorzaken.

Definieer topgebeurtenis, tijd en modus. Een voorbeeld is (onveilig verzoek OF SSR kort) EN seriepad faalt. Onderzoek of het seriepad werkelijk de kortgesloten SSR stopt. Markeer gedeelde voeding, software, sensorreferentie en onderhoudsfout; modelleer ze eenmaal en claim geen onafhankelijkheid zonder onderbouwing.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

FMEA	Plausibele verschillende faalwijzen en eigenaars.
logica	Topgebeurtenis en fysieke poorten kloppen.
bewijs	Open aannamen en storingtoetsen traceerbaar.

46.8 Fail-safe in twee modi

●●● Uitdagen | 9 | Ontwerpen | 25 min

Alles uit voorkomt heaterovertemperatuur, maar laat ventilatie wegvallen tijdens een luchtalarm.

Ontwerp modusafhankelijke terugval en een afgebakende proef.

Scheid heater- en luchtfuncties. Bij gevaarlijke warmte moet een onafhankelijk passend pad energie kunnen onderbreken. Bij luchtalarm blijft de vereiste ventilatie/alarmfunctie waar nodig gevoed en onder lokale eigenaar. Definieer voeding, detectie, foutstatus, herstel en prioriteit. Toets eerst veilig afgebakende laag-energiegevallen; de productieopstelling vraagt geschikte componenten en toepasselijk productbewijs. Eén algemene ‘alles uit’-regel dekt beide hazards niet.

46.9 Nul falen beoordelen

●●● Uitdagen | 9 | Rekenen | 25 min

5000 apparaat-uren zonder storing; constant faalproces.

Bereken eenzijdige 95%-bovengrens λ en ondergrens 1/λ. Welke claim blijft onbewezen?

$\exp(-\lambda T)=0{,}05$ geeft $\lambda_{95}=-\ln(0{,}05)/5000=0{,}000599146\ h^{-1}$. Ondergrens voor $1/\lambda$ is 1669,04 h. De proef bewijst geen MTBF van 100000 h, geen afwezigheid van verborgen hazard en geen constante intensiteit buiten het proefgebied. Modelleer omgeving en censurering correct.

46.10 Een risicoactie sluiten

Uitdagen · 9 · Labo · 60 min

De FMEA zegt ‘watchdog toegevoegd, risico opgelost’.

Formuleer het ontbrekende bewijs en een sluitingsbesluit met herstartproef.

Injecteer hang en timingoverschrijding, meet detectie/reset en echte uitgangstoestand. Toets opstart met oude commando's, ongeldig sensorveld en netwerkverlies. Controleer dat reset geen korte ongewenste uitgangspuls geeft. Bewaar versie, metingen en herstelprocedure; onderzoek gedeelde fouten die ook watchdog/beveiliging treffen. Sluit alleen de beschreven faalwijze wanneer haar eis aantoonbaar wordt gehaald.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

injectie	Trigger en tijd meetbaar.
effect	Werkelijke uitgang en herstel gecontroleerd.
besluit	Geen ruimere claim dan het proefbewijs.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 47

Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

Van een duidelijke dienst en inventaris naar een onderbouwde milieukeuze

Uitgewerkte oplossingen bij de 11 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 465 min

D Ontwerpen en maken · E Energie · M Materie en chemie



Een milieuclaim begint bij onderdelen, functies en controleerbare gegevens.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen

één stap, direct toepassen

47.1 Formuleer de dienst

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een leverancier vergelijkt twee accu's per kg product.

Maak een passende functionele eenheid voor nachtstroom en noem minstens vier gelijk te houden prestaties.

Een bruikbaar begin: 1 kWh bruikbare energie geleverd aan hetzelfde belastingsprofiel over twintig jaar. Leg uitgangsspanning/kwaliteit, bruikbare eindcapaciteit, autonomie en toegestane uitval vast; ook temperatuur, cycli en onderhoud. De referentiestroom bevat alle pakketten en randapparatuur die de dienst werkelijk leveren. Per kg vergelijken kan minder dienst belonen.

47.2 Klimaatkarakterisatie

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

40 kg CO_2, 0,5 kg fossiel CH_4 en 0,02 kg N_2O; IPCC AR6 GWP100.

Bereken de drie bijdragen en het totaal. Welke eenheid heeft de uitkomst?

40×1=40; 0,5×29,8=14,9; 0,02×273=5,46. Som 60,36 kg CO_2-eq. De emissiemassa 40,52 kg is een andere grootheid. Noteer GWP100 en methodeversie; gebruik geen andere methaanfactor zonder het type te specificeren.

47.3 Vervangingsgrens

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

Horizon 20 jaar, productie 100 kg CO_2-eq per toestel, levensduur 10 jaar.

Tel installaties en bereken projectgemiddelde. Wat verandert bij levensduur 9 jaar?

Bij 10 jaar: installaties op 0 en 10; precies 20 ligt buiten [0,20). Twee pakketten, 200/20=10 kg/jaar. Bij 9 jaar: 0,9,18; drie pakketten, 300/20=15 kg/jaar. Een kleine levensduurwijziging kan bij een eindige grens een extra pakket veroorzaken; rapporteer de resterende levensduur en allocatieregel.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

47.4 Dubbele module in het station

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Een rapport telt 20×164 kg moduleimpact op bij een stationinventaris die al moduleonderdelen en globale netimport bevat.

Leg de dubbeltellingen en eenheidsfout uit. Ontwerp een herstelbare tabelgrens.

164 kg/jaar bevat eigen productiespreiding en gebruiksallocaties. 20×164 past qua horizon, maar telt componenten/gebruiksenergie opnieuw wanneer ze in de globale tabel staan. Het is geen nieuwe productiepost. Gebruik één componentinventaris, module-PV 1,4 en extra-PV 4,2 kWp apart, module- en stationbatterij apart en één globale netimport. Leg vervanging, transport en eindprocessen vast; verwijder overlappende modulejaarpakketrijen, niet willekeurig alleen de energie.

47.5 De opslagvergelijking narekenen

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Gebruik de opslagvarianten A en B uit het uitgewerkte voorbeeld, maar neem g=0,03 kg CO_2-eq/kWh.

Bereken totale impacts en kies binnen de beperkte grens. Waarom is de keuze voorwaardelijk?

A: 500+526,315789×0,03=515,789474 kg; B: 400+2500×0,03=475 kg. B wint hier met 40,789474 kg omdat 0,03 onder het omslagpunt 0,050667 ligt. Beide moeten dezelfde 10000 kWh leveren. Productieposten, rendement, levensduur en randapparatuur zijn aannamen; veiligheid en andere impactcategorieën blijven voorwaarden.

47.6 Paneel met minder benutting

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Eemb=1200 kWh primair, Y=350 kWh/jaar, p=2, geen degradatie.

Bereken tE bij benutting 1; 0,70 en 0,40. Vergelijk met koolstofterugverdientijd.

tE=1200/(700f). Voor f=1:1,714286 jaar; f=0,70:2,448980 jaar; f=0,40:4,285714 jaar. Koolstofterugverdientijd vraagt kg CO_2-eq en een vermeden emissiefactor; dezelfde energietijd mag je niet daarvoor gebruiken. De f is het nuttige aandeel van de opwek, geen elektrisch omzettingsrendement van het paneel.

47.7 Een parameter echt doorrekenen

Toepassen · 7 · Programmeren · 50 min

De 48 V-capaciteit staat nog open; gebruik lca_station_s1.py.

Maak een scenario-tabel voor B=5,10,20 en levensduur 8,10,12 jaar. Welke koppeling ontbreekt in deze simpele sensitiviteit?

Draai lca(B,station_batterij_leven=L) en deel door 20. Voor L=8/10/12 jaar geeft B=5: 783,68/758,68/758,68; B=10: 858,68/808,68/808,68; B=20: 1008,68/908,68/908,68 kg CO_2-eq per stationsjaar. Bij 10/12 jaar is de jaarlijkse batterijpost 10B; bij 8 jaar 15B; de rest is 708,68. In een echte keuze verandert B mogelijk import, verliezen, beschikbaarheid en levensduur; een vast gebruiksprofiel kan dus ongeldige functionele varianten vergelijken. Markeer alle punten als scenario, niet als nieuwe configuratie.

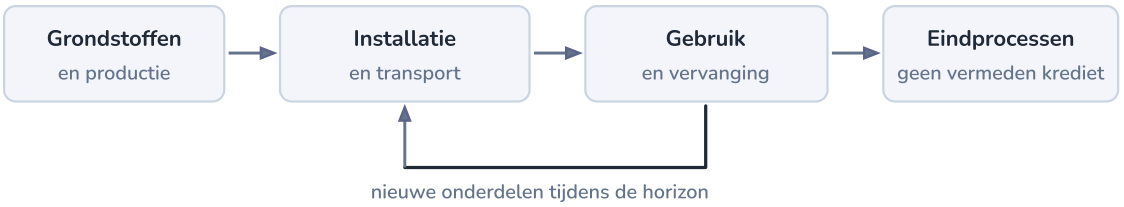
Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

47.8 Hele-stationsinventaris

Uitdagen · 9 · Habitat · 100 min

Je bereidt de LCA voor het brein van Habitat voor.



Binnen de grens: station én module; ieder onderdeel eenmaal.

Netimport omvat alle gebruiksfuncties; lokale opwek krijgt geen dubbel krediet.

Schematische procesgrens van LCA-S1. Recycling wordt met de gekozen cut-offregels verwerkt; een tweede analyse mag andere allocatie kiezen, mits zichtbaar en consistent.

a Maak een grensdiagram en inventaris met ieder onderdeel eenmaal, bronstatus en vervanging.

Neem station en één module samen; scheid beide PV-groepen en beide accu's, inclusief omvormers/kabels, waterstofketen, gebouw, warmte/water, transport, onderhoud en einde. Gebruik globale netimport eenmaal; wijs railstromen alleen toe met een expliciete verdeelregel. Geef capaciteit, hoeveelheid, productiefactor, bron/methode, regio/jaar, dienstduur, pakketcount en datastatus. Vermeld dat B en S1-bundels open zijn en dat i38's 164 niet extra wordt opgeteld.

b Formuleer een functionele eenheid, minimaal drie ontbrekende brongegevens en een besluit dat nu al verantwoord is.

Beschrijf hetzelfde gevalideerde woon-/klimaat-/teeltprofiel en horizon voor alle alternatieven. Ontbrekend kunnen zijn materiaallijst, leveranciers-EPD, accu-cycliveroudering, werkelijk importprofiel en eindverwerking. Een verantwoord voorlopig besluit prioriteert data voor hotspots en behoudt bewezen herstelbaarheid; het presenteert geen exacte werkelijke stationsvoetafdruk.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

grens	Geen dubbeltelling of verborgen gebruikspost.
gegevens	Bronstatus en onbekende parameters zichtbaar.
besluit	Dienst gelijk, claim beperkt tot bewijs.

47.9 Circulaire pompkeuze

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 45 min

De reparatievariant bespaart 14 kg CO_2-eq, maar verbruikt 2 W extra gedurende 3000 uur per jaar, vijf resterende jaren. Netfactor 0,15.

Bereken of de beperkte klimaatbesparing overeind blijft. Ontwerp de functionele acceptatieproef.

Extra energie=0,002 kW×3000 h/jaar×5=30 kWh. Extra impact=4,5 kg. Netto voordeel=14−4,5=9,5 kg CO_2-eq, als de overige grens gelijk blijft. Toets debiet/druk, lek, elektrische bescherming, hygiëne en verwachte levensduur. Een reparatie die die eisen niet haalt is geen gelijkwaardig alternatief; leg onderdelen en onderhoudsinstructie vast.

47.10 Allocatie verdedigen

Uitdagen · 9 · Analyseren · 50 min

Een aluminiumpost krijgt zowel een lage recyclaatfactor als een volledige vermeden-primaire-productiecredit aan het einde.

Onderzoek wanneer dit dubbel telt en maak twee transparante scenario's zonder zelf een universeel correcte regel te verzinnen.

Vraag wat de inputfactor al toerekent en aan welke levenscyclus de recyclingwinst behoort. Scenario 1: expliciete cut-off, inputproductie inclusief gekozen mix, eigen inzameling/verwerking, geen krediet voor volgend product. Scenario 2: een benoemde consistente verdeel-/substitutieregel met herstelrendement, kwaliteit en tegenfeitelijk materiaal; voer die voor beide varianten gelijk uit. Meld dat uitkomsten methodeafhankelijk zijn. Je mag recyclingwinst niet automatisch tweemaal boeken.

47.11 Robuuste keuze en tegenonderzoek

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 70 min

Een team wil op basis van één S1-totaal B=10 kWh vastleggen.

Geef een onderzoeksplan dat de keuze aan gelijkwaardige dienst, bronkwaliteit en gevoeligheid koppelt. Benoem één mogelijk omslagbewijs.

Valideer eerst het gelijke energie-/autonomieprofiel en bruikbare capaciteit met veroudering. Vraag productgegevens en dienstduur onder die cycli/temperatuur; onderzoek import/verliezen voor iedere capaciteit en gedeelde factoronzekerheid. Draai volledige scenario's met hetzelfde station-/modulegrensdiagram. Een extra pakket bij kortere levensduur of sterk andere import kan de rangorde omkeren. Publiceer code, invoer, bronversie, impactcategorieën en beperkingen; S1 blijft screening tot de gegevens zijn vervangen. Geen minimale CO_2-score overrulet de veiligheid of vereiste dienst.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

vergelijking	Zelfde prestaties en methode.
onderzoek	Hotspots en omslagfactor gericht getoetst.
communicatie	Scenario en bewijs onderscheiden.

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 48

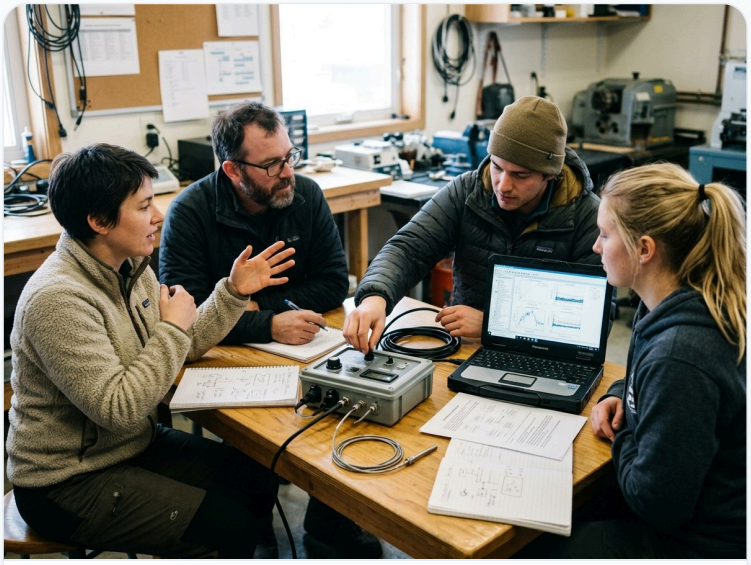
Technisch communiceren en projectmanagement

Een besluit wordt sterker als de lezer de claim, het bewijs en het vervolg kan volgen

Uitgewerkte oplossingen bij de 11 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

3× oefenen · 4× toepassen · 4× uitdagen · ± 485 min

D Ontwerpen en maken · O Onderzoeken en meten



Rapport, planning en proefopstelling vertellen hetzelfde controleerbare verhaal.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

Oefenen

Oefenen — één stap, direct toepassen

48.1 Rapportzinnen ordenen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een verslag bevat ‘we gebruikten RK4’, ‘de RMSE is 0,06 K’ en ‘de afwijking kan door sensorvertraging komen’.

Plaats elke zin en vul de ontbrekende bewijsvelden aan.

RK4 hoort bij methode: vermeld modelgrens, parameters, stap en versie. RMSE hoort bij resultaat: gegevenssoort, testprofiel, aantal punten en eenheid ontbreken. Sensorvertraging is een mogelijke interpretatie: toets een afzonderlijke vertragingshypothese en benoem andere verklaringen. De drie zinnen bewijzen samen nog geen gevalideerd model.

48.2 Een zelfstandige figuur

Oefenen · 6 · Ontwerpen · 25 min

Een grafiek heet ‘temperatuur’ en heeft assen x en y; model en meetpunten zijn onbenoemd.

Schrijf een complete caption en geef de noodzakelijke as-/legendavelden.

Bijvoorbeeld: ‘Eenknopstation, C=540 kJ/K, H=50 W/K, P=600 W, start 12 °C en buiten 4 °C; lijn: exacte modelrespons; punten: synthetische aflezingen uit rapport_getallen.py, versie R1; geen installatievalidatie’. X-as: tijd sinds start (h); y-as: temperatuur (°C); legenda voor beide reeksen. Benoem selectie, interpolatie en bron. Bij echte metingen vermeld je de juiste datastatus, kalibratie en ruisverwerking.

48.3 Voorwaartse planning

Oefenen · 6 · Rekenen · 25 min

A duurt 2 dagen; B duurt 3 na A; C duurt 4 na A; D duurt 2 na B en C.

Bereken ES/EF en de projectduur.

A: 0–2; B: 2–5; C: 2–6. D start op max(5,6)=6 en eindigt op 8. Projectduur: 8 werkdagen; het pad A–C–D is langst. De losse langste taak C alleen is niet het kritische pad.

Toepassen

meerdere stappen, in een context

48.4 Achterwaarts en speling

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

Gebruik het vier-takennetwerk van de vorige opdracht.

Bereken LS/LF en speling. Mag B twee dagen uitlopen zonder effect?

D: LS=6, LF=8. C: LS=2, LF=6. B: LS=3, LF=6. A: LF=min(3,2)=2, LS=0. Speling: A=0, B=1, C=0, D=0. B kan één dag uitlopen zonder de einddatum te veranderen. Twee extra dagen laten B tot dag 7 lopen en D van 7 tot 9, dus het project wordt één dag langer. De kritische route verschuift dan naar A–B–D.

48.5 Een onzekerheidsclaim corrigeren

Toepassen · 7 · Rekenen · 25 min

De vijf aflezingen uit rapport_getallen.py en uB=0,15 K. Een auteur deelt alle onzekerheid nog eens door √5.

Bereken de juiste uc en U. Wat blijft bij 100 herhalingen?

s=0,158114 K en uA=0,070711 K. uc=√(0,070711²+0,15²)=0,165831 K; U bij k=2 is 0,331662 K. Bij 100 aflezingen: uA=0,015811 K en uc=0,150831 K. De gedeelde kalibratiebijdrage wordt niet door herhaling verminderd. Rapporteer U, k en aannamen; k=2 geeft zonder verdelingsvoorwaarden niet automatisch een exact 95 %-interval.

48.6 Een teamconflict oplossen

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

Model en firmware gebruiken verschillende tijdstempels; ieder denkt dat de ander de interface beslist.

Maak een overdracht- en besluitafspraak met een kleine test.

Benoem één menselijke besliseigenaar voor interfacebaseline; beide auteurs zijn uitvoerder/reviewer. Leg vaste klok UTC+1 voor lesprofielen, SI-tijd sinds epoch/boot, tijdzoneveld en betekenis van meettijd versus ontvangst vast. Test één bekende tijdreeks met overgang/herstart en TTL-grenzen; ontvanger herhaalt en bevestigt. Bewaar versie en wijzigingimpact op model, leeftijdcontrole en captions. Escaleer het inhoudelijke verschil met beide voorstellen en bewijs, niet met een stilzwijgende formatwijziging.

48.7 Een beperkte conclusie schrijven

Toepassen · 7 · Analyseren · 25 min

E41 gebruikt synthetische gegevens van het gerealiseerde weer en heeft RMSE 0,2494; de E45-softwaretests slagen.

Schrijf een resultaatzin, beperking en vervolg voor de samenvatting.

‘De conditionele energieschatting haalt op 35 aparte synthetische testdagen RMSE 0,2494 kWh/dag bij gerealiseerd weer. De voorstelvalidator slaagt voor de benoemde softwaregrens- en fouttests. Operationele dag-vooruitkwaliteit en fysieke veiligheid zijn hiermee nog niet vastgesteld. Volgende stap: een test met gearchiveerde prognoses en afgebakende installatie- en storingproeven onder dezelfde versie.’ Noem scenario/test-ID en verwijzing naar de bijlagen; zet de beperking naast de claim.

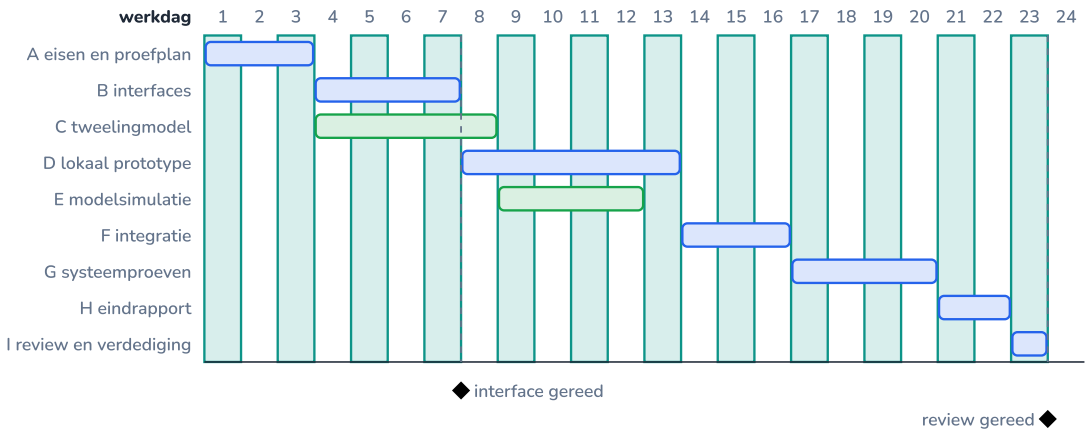
Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

48.8 Projectplan voor Habitat

Uitdagen · 9 · Habitat · 110 min

Je organiseert het brein van het station van eisen tot verdediging.



Onderwijsplanning zonder kalenderdatum of werkelijk voltooiingsbewijs. Dag 0 is het begin van werkdag 1; eind is exclusief. De kleur 1 volgt kritische activiteiten, kleur 3 volgt taken met één dag totale speling. Beschikbaarheid van mensen en proefopstelling vraagt een aparte controle.

a Maak een netwerk en Gantt met minstens acht werkproducten, rol, middel en gereedcriterium.

Een bruikbaar vertrekpunt: A eisen/proefplan, B interfaces, C tweeling, D lokaal prototype, E simulatie, F integratie, G systeemproeven, H rapport en I verdediging. Voeg bij A eisenreview, bij B eenheden/tijd/foutcontract, bij C een referentieproef, bij D een grens- en uitgangproef en bij G echte acceptatieruns toe. Wijs uitvoerder, besliseigenaar en middelen toe; houd de module en 48 V-grens apart. Dit zijn voorgestelde gereedcriteria, geen reeds behaalde mijlpalen.

b Bereken kritisch pad, controleer capaciteit en geef een wijzigingsscenario.

Het lesnetwerk levert 23 werkdagen met A–B–D–F–G–H–I kritisch; C en E hebben elk 1 dag speling. Met gedeelde proefopstelling en D vóór E wordt het 27 werkdagen, met A–B–D–E–F–G–H–I kritisch. Toon jouw eigen taakduren en afhankelijkheden in code, voer cycluscontrole uit en reken na elke wijziging opnieuw. Controleer ook mensen, kalender en benodigde brondata; een logische planning alleen is geen uitvoerbaarheidsbewijs.

c Leg een baseline, risicoactie en reviewmijlpaal vast.

De baseline bevat eisen/architectuur, parameterbron, code/data, filter- en klokversie, modelgrens en testplan. Een risicoactie kan de nog onbesliste batterij- en energie-invoer zijn, met eigenaar en datadeadline. De reviewmijlpaal sluit pas na gecontroleerde figuren, traceermatrix, open FMEA/LCA-grenzen en reproduceerbare run; verstreken tijd alleen sluit niets.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

planning	Afhankelijkheden, berekening en capaciteit coherent.
gereed	Werkproducten met passend bewijs.
beheer	Baseline, eigenaar en risicoactie vindbaar.

48.9 Een reproduceerbaar rapportfragment

Uitdagen · 9 · Maken · 65 min

Schrijf één pagina over een klimaat- of energieproef.

Lever onderzoeksvraag, methode, zelfstandige figuur/tabel, resultaat, discussie en besluit met bijlageverwijzing.

Een volledig voorbeeld gebruikt R1/R2. Vraag: zijn het e39-model en de verwerking reproduceerbaar? Methode: C=540 kJ/K, H=50 W/K, P=600 W, buiten 4 °C, start 12 °C, duur 0–4 h; bron rapport_getallen.py. Resultaat: eindmodel 14,945611 °C en synthetische RMSE 0,057155 K. De caption noemt beide datatypes en condities. Discussie: gekozen afwijkingen bewijzen geen sensormodel of werkelijke validatie. Besluit: rekenketen reproduceerbaar, installatieproef nog open. Voor eigen meetwerk voeg je kalibratie, sampling, onzekerheid en acceptatie-eis toe; publiceer invoer, uitvoer en versie.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

structuur	Vraag en besluit corresponderen.
bewijs	Reproduceerbaar en zelfstandig leesbaar.
grens	Geen grotere claim dan gegevens.

48.10 Pitch en tegenvragen

Uitdagen · 9 · Argumenteren · 75 min

Gebruik jouw projectplan en twee controleerbare resultaten.

Schrijf en repeteer een pitch van ongeveer twee minuten. Beantwoord daarna vragen over veiligheid, voorspelling en milieu-impact.

Begin met de dienst en netwerk- en sensorproblemen; leg centrale voorstellen, lokale bevoegdheid en de twee energiegrenzen uit. Gebruik bijvoorbeeld de module-referentietemperaturen en een contractgrensproef, telkens met datastatus. Vraag een concrete besluitstap over het proefplan. Repetitie met timer bepaalt de echte duur. Veiligheidsantwoord: beschreven softwarebewijs, fysieke proeven nog open. Voorspelling: conditioneel op gerealiseerd weer, prognosetest nodig. Milieu: LCA-S1 is screening met B als parameter, brondata zijn nodig. Laat de beoordelaar de claim terugzeggen en corrigeer een te grote indruk.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

kern	Dienst, keuze en besluit helder.
bewijs	Getallen en beperkingen controleerbaar.
vragen	Gericht antwoord en vervolgonderzoek.

48.11 Review als tweede lezer

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 60 min

Een collega vraagt of zijn rapport klaar is voor de eindbeoordeling.

Voer een gerichte review uit en schrijf een concreet herstelvoorstel voor de grootste ontbrekende claim.

Controleer per hoofdclaim eis/test-ID, bron/data/versie, methode, eenheid, grens, onzekerheid en conclusie. Herhaal één bijlagerun; lees iedere figuur los; reken kritisch pad en capaciteit na. Vraag bij veiligheids-/AI-/LCAclaims of bewijsniveau en datastatus kloppen. Meld vindplaats, probleem, gevolg en herstel met gereedcriterium. Bijvoorbeeld: hernoem ‘dagvoorspelfout’ naar ‘conditionele synthetische fout’, voeg gebruikte gerealiseerde weerinvoer toe en plan een echte prognosetest. Sluit de reviewactie pas na herlezing van actuele titel, caption en conclusie.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

review	Actuele bron werkelijk gelezen/herhaald.
feedback	Concreet bewijsprobleem en herstel.
sluiting	Hercontrole en beperkingen blijven zichtbaar.

E EXPERT · DEEL E11 · HABITAT E: HET BREIN VAN HET STATION

OPLOSSINGEN · HOOFDSTUK 49

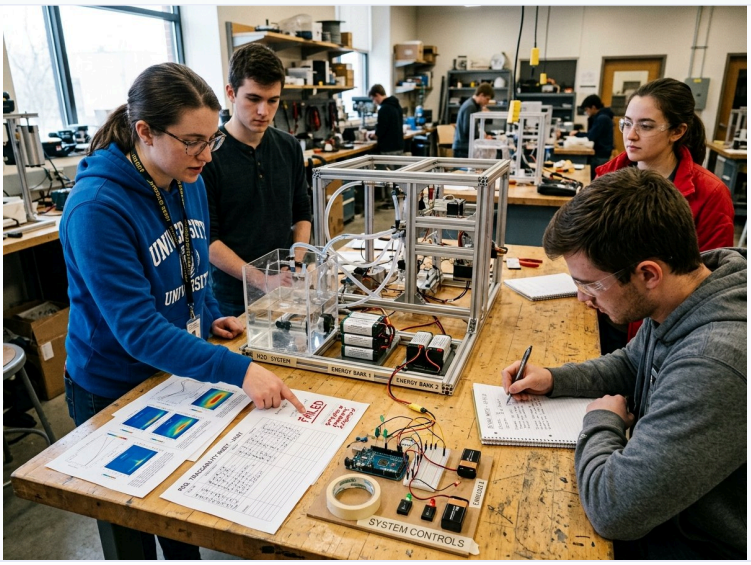
Integratieproject: het brein van het station

Een reproduceerbaar stationontwerp met twee energierails, lokale bevoegdheid en zichtbare bewijsgrenzen

Uitgewerkte oplossingen bij de 27 opdrachten van het werkboek. Voor de leerkracht, en voor wie zichzelf wil verbeteren nadat hij het eerst zelf probeerde.

8× oefenen · 10× toepassen · 9× uitdagen · ± 1615 min

D Ontwerpen en maken · R Regelen en robotica · E Energie · A Data en AI · P Programmeren en computationeel denken · B Leven en systemen



Het project eindigt met een review van bewijs en beperkingen, niet met alleen een groen dashboard.

Voor de leerkracht

Deze pagina bevat de antwoorden. Druk het werkboek af zonder deze pagina.

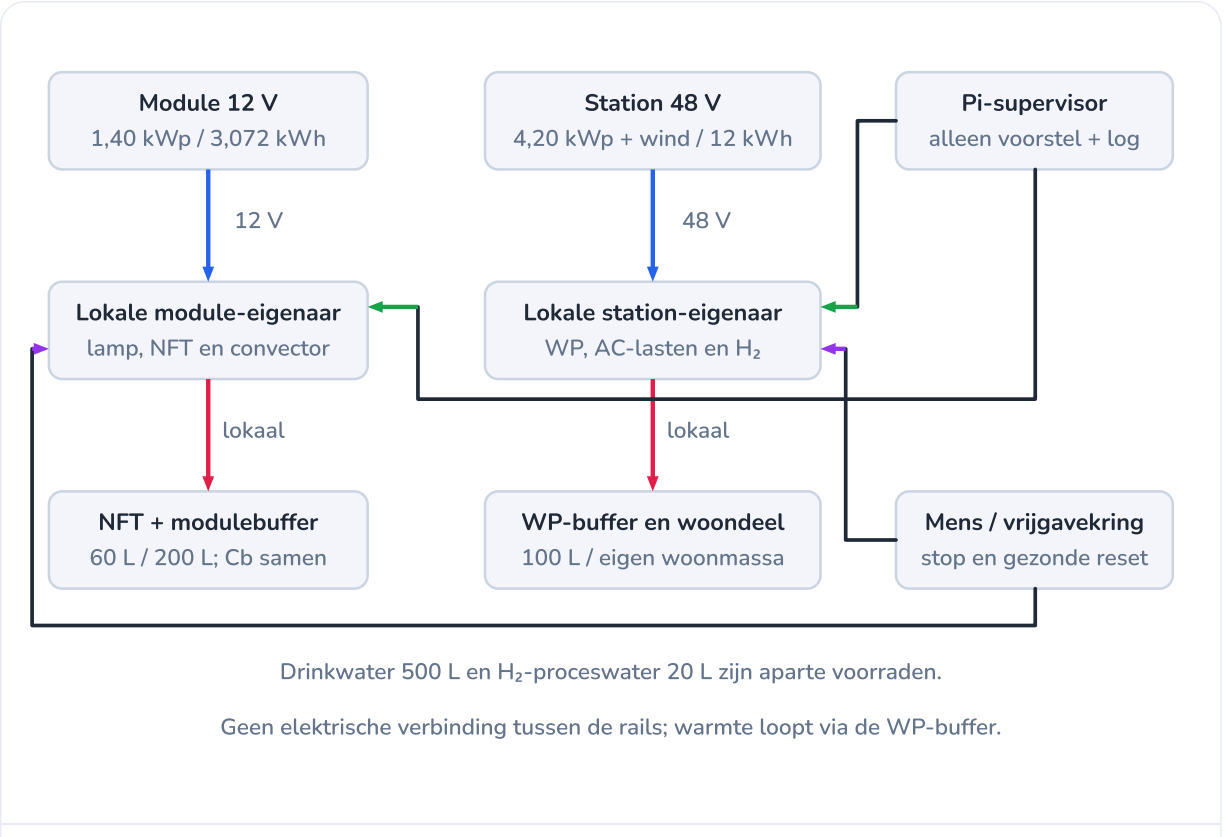
●○○ Oefenen

één stap, direct toepassen

49.1 De systeemgrens reconstrueren

●○○ Oefenen · 6 · Tekenen · 35 min

Je krijgt de architectuur van E49-S2-12-v1. Een nieuw teamlid tekent één gezamenlijke accu en voegt 5,60 kWp bovenop de module toe.



Kleur 1 toont voeding en kleur 3 de voorstelroute. De Pi vervangt geen lokale eigenaar; een aparte vrijgavekring begrenst gevaarlijke functies. Essentiële ventilatie heeft een afzonderlijke voedingstak, die in de koude lege proef toch kan uitvallen.

a Teken de twee rails met juiste PV/opslag en geef aan waar elektrolyse bereikbaar is.

Teken 1,40 kWp → 12 V → 3,072 kWh → modulelasten en 4,20 kWp + wind → 48 V → 12 kWh → AC/H_2. Totaal PV is 5,60 kWp, niet 7,00. Alleen 48 V-overschot bereikt H_2. Er is geen elektrisch pad tussen de rails; warmte kan via de stationbuffer naar de module. Een volle stationbank mag dus geen moduletekort stil opvullen.

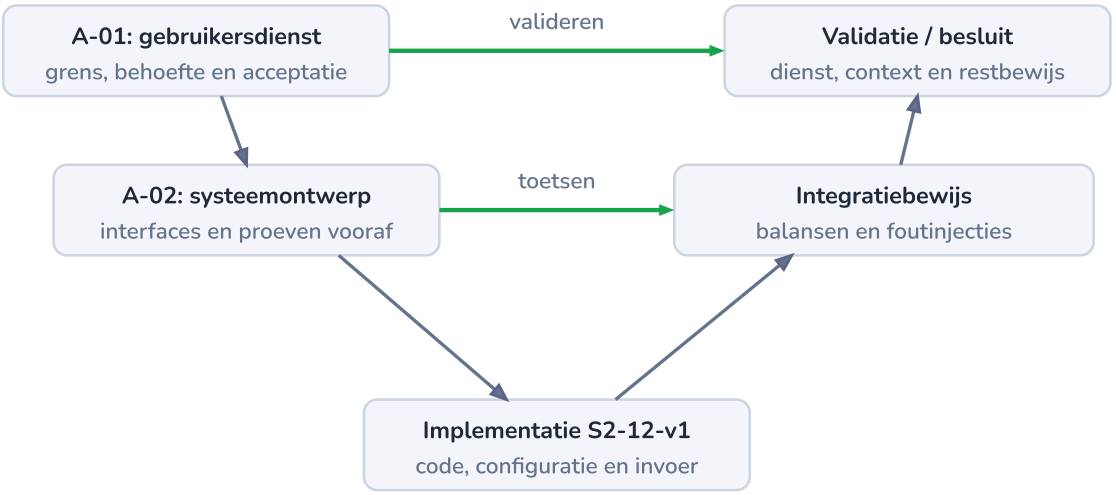
b Teken de drie waterinventarissen en de twee thermische waterbuffers. Leg uit waarom één reservoirvak onjuist is.

Water: NFT 60 L, drinktank 500 L en eigen gezuiverde H_2-voeding 20 L. Warmte: de 200 L-modulebuffer/NFT zitten al in Cb=1,10 MJ/K; de aparte 100 L-WP-buffer heeft Cwp=418,6 kJ/K. Waterinventaris is L; warmtecapaciteit is J/K. Eén vak zou verschillende kwaliteits-, massa- en warmtefuncties ten onrechte samenvoegen.

49.2 Een behoefte tot bewijs volgen

Oefenen · 6 · Begrijpen · 30 min

De gebruiker wil na brokeruitval lokaal kunnen blijven regelen.



De horizontale verbindingen koppelen een ontwerpbesluit aan vooraf benoemd bewijs. Rechts blijft het mogelijk dat de dienst niet wordt aanvaard.

a Werk behoefte → D-03 → interface → testcase → bewijs → besluit uit.

Behoefte: geen onbevoegd of onbegrensd doel vasthouden. D-03: na leaseverloop lokaal 20 °C. Interface: voorstel met boot/seq/tijd/TTL en applicatie-ACK; lokale eigenaar bewaart lease. Test: doel 19,5 °C bij t=0 met TTL 60 s; berichtstroom stopt; op t=60 doel 20 °C. Bewijs: contracttests en brokerlog met 1440 fallbackminuten. Besluit: logische terugval aangetoond; echte klok-/netwerk-/duurzame-opslagproeven blijven open.

b Waarom zijn een groene brokerstatus en een geslaagd warmte-residu daarvoor onvoldoende?

Brokerstatus betreft vervoer, niet daadwerkelijke actuatorbevoegdheid. Warmteresidu betreft conservatie binnen het plantmodel, niet tijdigheid van een setpoint. De juiste bewijssoort moet de eigen eis raken; verificatie van een andere invariant vervangt D-03 niet.

49.3 De bruikbare bank narekenen

Oefenen · 6 · Rekenen · 35 min

De 12 kWh-bank gebruikt SOC 0,20–0,90. Een advertentie rekent zonder verlies 33,6 h voor 250 W AC.

a Bereken bruikbare kWh en nominale Ah bij 51,2 V. Welke selectie is hiermee nog niet gedaan?

12×0,70=8,4 kWh vóór verliezen. 12000 Wh/51,2 V=234,375 Ah nominaal. Dit is energie/Ah-boekhouding, geen keuze van cel, BMS, koude-rating of werkelijk laadvenster. De modulevoorraad 2,4576 kWh is niet extra bereikbaar voor deze last.

b Bereken autonomie met 48 W DC, 25 W inverter, η_{inv}=0,93 en η_d=0,96. Verklaar het verschil.

Railvermogen=250/0,93+25+48=341,817204 W; opslagafname=356,059588 W. Autonomie=8400/356,059588=23,591557 h. De 33,6 h vergeet beide padverliezen, invertereigenverbruik en aparte DC-last. Dit constante-lastgeval bewijst geen dynamische winter- of jaarautonomie.

49.4 Een interne warmteflow controleren

Oefenen · 6 · Rekenen · 30 min

Op een moment is Tw=30 °C, Ta=18 °C en Th=20 °C. De PID vraagt qm=800 W en qh=2000 W.



De warmtestromen qm en qh hangen van Tw−Ta en Tw−Th af. Er komt geen convectorwarmte uit een koude buffer. De twee pijlen tussen lucht en modulebuffer staan voor een omkeerbare transportstroom, geen twee gelijktijdige bronnen.

a Bereken beide werkelijk mogelijke transporten bij Gconvector=80 en Gvloer=140 W/K. Zet hun tekens in alle betrokken knopen.

Convectortransport: 80×12=960 W; de PID-vraag was reeds op maximaal 800 W begrensd: qm=800 W. Vloertransport: 140×10=1400 W, dus qh=1400 W ondanks vraag 2000 W. Ta krijgt +800, Th +1400, Tw −2200 W. Interne bufferverliesflow 2×(30−20)=20 W geeft Tw−20 en Th+20; die verdwijnt uit de totaalsom.

b Wat gebeurt er bij Tw=17 °C? Waarom is onmiddellijk 800 W naar de module dan onjuist?

Bij Tw=17 °C zijn Tw−Ta en Tw−Th negatief; het gebruikte verwarmingsmodel max(verschil,0) geeft qm=qh=0. De voorraad kan nog andere interne uitwisseling hebben, maar geen warmtedienst uit een koudere WP-buffer. Een onafhankelijke elektrische noodlast kan Th wel verwarmen wanneer geselecteerd; die is een afzonderlijke bron.

49.5 Doorzet tegenover waterverbruik

Oefenen · 6 · Rekenen · 30 min

Gebruik dezelfde NFT- en drinkprofielen als de normale run.

a Bereken recirculatiedoorzet, netto NFT-verbruik en eindvoorraad.

Vier goten: 4×1,2×10×24×7=8064 L doorzet. Netto opname 25,2 L plus verdamping 4,9 L=30,1 L. Eind=50+20−30,1=39,9 L. De onderwegvoorraad 3,9 L verandert het tankpeil maar is geen verdamping of afvoer.

b Bereken drink-eindvoorraad en benoem de extra voorwaarde waardoor drink_leeg geen 490 L kan leveren.

Normaal: 500+200−490=210 L. Levering vraagt positieve voorraad en werkelijk gevoede drukpomp. Drink_leeg start 0 L, krijgt zaterdag 200 L na de ochtendvraag en levert pas zondag 70 L; 420 L blijft niet geleverd en eindvoorraad 130 L. Juist volumebeheer bewijst nog geen kwaliteit.

49.6 De leasegrens en replay

Oefenen · 6 · Analyseren · 30 min

Een geaccepteerd doel 19,5 °C krijgt tijd 600 s, TTL 60 s en seq 17. Er komt niets nieuws.

a Geef het lokale doel op t=659 s en t=660 s. Wat gebeurt er met hetzelfde voorstel opnieuw op t=620 s?

Op 659 s geldt 659<660: 19,5 °C. Op 660 s is de lease verlopen: 20 °C. Duplicaat seq 17 wordt REPLAY; het verlengt de lease niet. De applicatie-ACK vermeldt reden en seq zodat de supervisor geen ontvangst met acceptatie verwart.

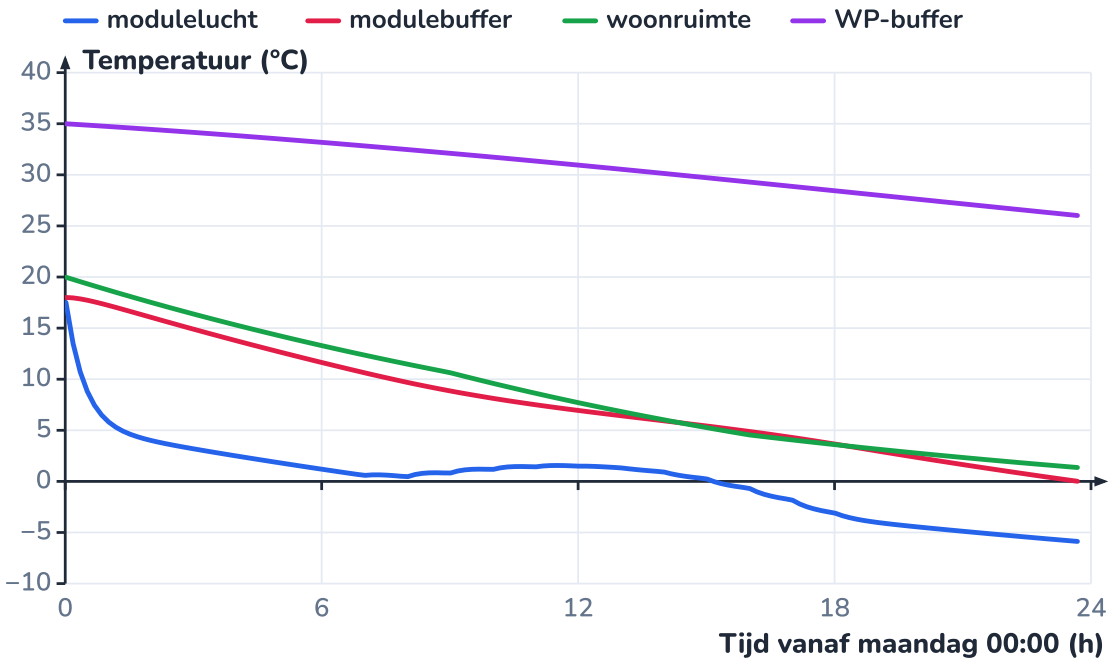
b Waarom bevat het bericht zowel bronboot als eigenaarboot en een duurzame seq-grens?

Bronboot voorkomt vermengen van oude en nieuwe bronidentiteiten; eigenaarboot adresseert de actuele ontvanger. Het duurzame register houdt het hoogste geaccepteerde seq bij, ook wanneer de eigenaar herstart. De JSON-roundtrip bewijst de logica; echte powercut-/opslagintegriteit en het veilige registreren van een nieuwe bronboot blijven hardware-/beheerbewijs.

49.7 Welke tijd staat op een logrij?

Oefenen · 6 · Analyseren · 25 min

De rij tijd 2021-03-08T23:42:00+01:00 heeft watermodel_geldig=0.



Het interval maandag 23:42–23:43 eindigt voor het eerst buiten het watermodelgebied boven 0 °C. Alleen geldige eindtoestanden zijn getekend. Latere algebra is geen bevriezingsvoorspelling en bewijst geen vloeibare watervoorraad.

a Leg uit welke tijd hoort bij toestand en bij vermogen. Mag je zeggen dat het water precies om 23:42 fysiek bevroor?

De rij labelt intervalbegin 23:42; temperatuur/SOC/water zijn na de minuut, dus einde 23:43. Vermogen en vrijgave beschrijven de intervalactie. Het model zegt hoogstens dat deze berekende eindtoestand buiten het vloeibaar-watergebied valt. Het bevat geen latente warmte/ijsdynamiek en geen exacte fysieke bevriezingstijd.

b Waarom tekent de koude grafiek alleen geldige eindtoestanden en bewaart de download toch de rest?

Alleen geldige eindtoestanden voorkomen dat een post-domeinbaan als fysisch wordt gelezen. Volledige logs met vlag bewaren reproduceerbaarheid en de zichtbare modelgrens; je wist geen ongunstige run. Comfort faalt al eerder, dus de acceptatie blijft negatief zonder een onbewezen ijsvoorspelling.

49.8 De score en de claim scheiden

Oefenen · 6 · Begrijpen · 25 min

Een team schrijft: ‘Alle balansen zijn nul, dus het station is autonoom en de ECG-monitor diagnosticeert correct.’

a Noem vier afzonderlijke fouten in die gevolgtrekking.

Conservatie binnen een model bewijst geen kalibratie; een winterweek bewijst geen jaarautonomie; niet-gehaalde comfort/voedingsdiensten verdwijnen niet door een saldo; synthetische ECG/puls/SpO_2 bewijst geen klinische juistheid/diagnose. Biologisch gesloten kring of PCR-drinkbaarheid is evenmin uit een energiebalans af te leiden.

b Herschrijf de conclusie met een geldige positieve uitkomst en twee open functies.

‘De vaste S2-run is zelfstandig reproduceerbaar en de gespecificeerde warmte-, rail- en massabalansen sluiten numeriek. Modulecomfort faalt 0,5 h en jaarrond beschikbaarheid is niet bewezen. Het medische dashboard blijft een synthetische meetdemonstratie zonder diagnose/dosering/behandeling.’ Deze conclusie koppelt iedere functie aan passend bewijs.

Toepassen

Toepassen · meerdere stappen, in een context

49.9 De 4,48 kVA-selectie opnieuw uitvoeren

Toepassen · 7 · Programmeren · 45 min

Gebruik habitat_brein.py, config.json en de contracttest ‘4.48kVA verzoek’.

a Reproduceer P/Q/S, de prioriteitsvolgorde en de geweigerde last. Waarom tel je niet gewoon alle afzonderlijke S op?

Voer pq uit op (750;0,81),(150;0,70),(1163,250573;0,98),(300;0,95),(2000;1). $Q=\Sigma P \tan(\arccos pf)$; $S=\sqrt{(P^2+Q^2)}$. Uit dezelfde run: P=4363,250573, Q=1030,834570, S=4483,366533. P en Q zijn componenten; ΣS verliest hun fasorrelatie. De functie behoudt drinkdruk/koelkast/WP/rest en weigert nood 2000 W.

b Bereken niet geleverde noodwarmte bij 60 s en beschrijf wat de log niet bewijst.

2000 W×60 s/3,6e6=0,033333 kWh noodwarmte ontbreekt. De continue selectie houdt de omvormer binnen 4000 VA, maar levert niet alle gevraagde diensten. Een ideale pf/lastselectie bewijst geen harmonischen, motorstart, relaisduur of veilige fysische uitschakeling.

49.10 Een 8 kVA-aanloop kritisch beoordelen

Toepassen · 7 · Rekenen · 45 min

Gebruik P=5232 W, S=7280 VA, U=44,8 V, ηinv=0,93, eigenverbruik 25 W, DC 48 W en ηd=0,96.

a Bereken Q en bankstroom; beslis voor 5 s. Bereken daarna maximaal toelaatbaar P bij 130 A.

$Q=\sqrt{(7280^2-5232^2)}=5062{,}072303$ var. $I=(5232/0{,}93+25+48)/(44{,}8\times0{,}96)=132{,}505730$ A>130; S voldoet maar bankstroom niet. $P_{max}=0{,}93\times(44{,}8\times130\times0{,}96-73)=5131{,}7772$ W. De grens geldt inclusief de gekozen verlies-/DC-paden; verander je die, dan moet je opnieuw rekenen.

b De 5000 W-selectie past. Is daarmee de pompstart opgelost? Formuleer een selectieproef.

Nee. 5000 W geeft 126,705359 A bij dezelfde aangenomen S, maar dezelfde motor kan niet willekeurig minder werkelijk startvermogen krijgen. Selectieproef: echte motor/starter met maximale proceslast, laagste toegestane bankspanning, andere gelijktijdige lasten en ≤5 s; meet P/Q/S/DCstroom/spanningsdip en afschakeling. Behoud de oorspronkelijke start als NIET_GEHAALD tot alternatief bewijs.

49.11 Warmteconservatie onafhankelijk narekenen

Toepassen · 7 · Programmeren · 50 min

Lees totalen en eindtemperaturen uit de normale JSON; gebruik de vier capaciteiten.



De warmtestromen qm en qh hangen van Tw−Ta en Tw−Th af. Er komt geen convectorwarmte uit een koude buffer. De twee pijlen tussen lucht en modulebuffer staan voor een omkeerbare transportstroom, geen twee gelijktijdige bronnen.

a Leid de totale warmtebalans af door de vier knoopvergelijkingen op te tellen. Geef welke termen verdwijnen.

✓ $\Sigma C\Delta T = \int (qwp + qnood + gains\_m + gains\_h - verlies\_m - verlies\_h)dt$. qm en qh worden in Tw afgetrokken en in Ta/Th toegevoegd; G(Ta−Tb) en 2(Tw−Th) zijn interne transporten en verdwijnen. De code gebruikt dezelfde RK4-gewichten voor flux en toestand. Cwp van 100 L staat éénmaal in ΣC; geen extra e39-kamer.

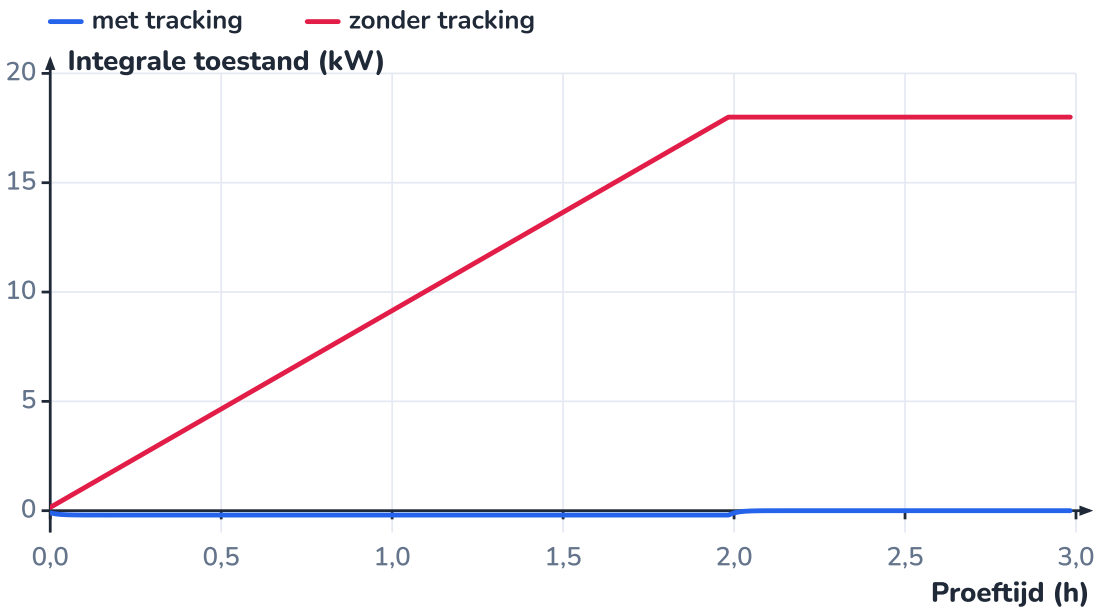
b Controleer het numerieke residu en de 60/15 s-vergelijking. Wat mag je hieruit concluderen?

✓ Controleer qwp+nood_geleverd+winst_module+winst_woon−verlies_module−verlies_woon−warmtevoorraad_delta. Normaal residu=0,000000000002 kWh; maximale minuutfout=0,000000011843 J. Plant 60 versus 30: 0,000000017725 K; 15 versus 30: 0,000000001090 K. Dit bevestigt numerieke convergentie in het model, geen fysieke identificatie of real-time deadline.

49.12 Windup als werkelijk actuatorprobleem

Toepassen · 7 · Programmeren · 45 min

Voer antiwindup_proef uit. Kp=100, Ki=0,5, maximum 800 W, trackingtijd 120 s; y=20 °C en 2 h actuatoruitval.



Dit aparte PID-rekenproefje gebruikt Kp=100, Ki=0,5 en trackingtijd 120 s. Het vergelijkt dezelfde opgelegde meetfout en actuatoruitval; het is geen extra temperatuurregelaar in Habitat.

a Verklaar I na 2 h met/zonder tracking en de eerste actuatoractie bij herstel.

Zonder tracking is e=5 K, dus ΔI/min=60×0,5×5=150 W; 120 minuten geven 18000 W. Na setpoint 20 blijft I staan en de actuator wordt 800 W. Met tracking trekt (0−u*)/120 de ongeleverde vraag terug; na 2 h I≈−200 W, zodat bij e=0 de eerste clamped actie 0 is. De proef legt de meting op en is geen extra temperatuurplant.

b Waarom moet de gewone Habitat-PID de geïntegreerde warmteflux terugkrijgen en niet alleen de clamp?

Bij koude buffer of ontbrekende voeding kan de clamp 800 W melden terwijl de plant 0 of minder levert. Alleen de werkelijk geleverde gemiddelde qm/qh uit RK4 sluit de actuatorfout. Ook afgewezen metingen moeten hun nulwarmte terugmelden. De echte drie lussen gebruiken trackingtijd 600 s; de 120 s-proef is een afzonderlijk didactisch voorbeeld.

49.13 Sensorfouten met tegenvoorbeelden

Toepassen · 7 · Labo · 55 min

Gebruik MeetPoort en de D-01-contracttests met dictionaries; er is geen hardware nodig.

a Reproduceer ontbreekt, 91 s leeftijd, NaN, ongeldige modelwaarde, +3 °C bias en 12 vlakke metingen. Geef alle redenen.

Afzonderlijke nieuwe poort per testcase: None→ONTBREEKT; tijd 0/nu 91→STALE_KLOK; NaN C→NIET_EINDIG; model NaN→ONGELDIG_MODEL; C=21/model=18→INNOVATIE. Voor freeze: seq 0..11, tijd=60i, C=18, voorspelling=18+0,02i; voorspelde spreiding 0,22 K>0,15 terwijl metingen exact vlak zijn →FREEZE. Waarde is telkens None; publiceer null/status, geen NaN.

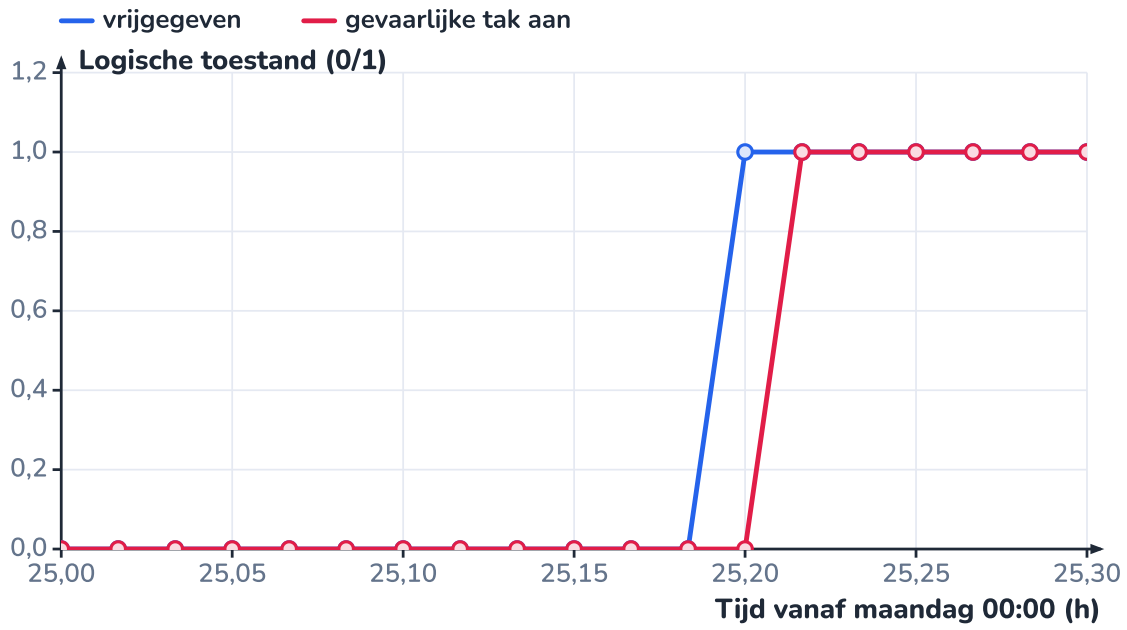
b Construeer de gedeelde-biastegenproef. Waarom sluit een geslaagde innovatiecontrole het nauwkeurigheidsbewijs niet?

C=19/model=19 wordt goed, zelfs als een aparte fictieve waarheid 18 is. De innovatie is nul omdat dezelfde fout beide raakt. Onafhankelijke referentie, ijking/plaatsing en onzekerheidsbudget blijven nodig. In de biasweek kost de gekozen convectoruit-strategie 26,2 h comfort; detectie en dienst zijn aparte conclusies.

49.14 Stop, loslaten en power-return

Toepassen · 7 · Analyseren · 45 min

Bekijk stop_herstel.csv rond dinsdag 01:00–01:13 en de losse resetreeks.



Reset om 01:12 geeft alleen bevoegdheid terug; het nog uitstaande uit-verzoek houdt de tak uit. Pas het nieuwe verzoek om 01:13 kan weer activeren. De aparte ventilatietak blijft in deze proef gevoed.

a Maak een tijdlijn van stop, loslaten, kringvoeding weg/terug, reset en nieuw verzoek. Welke tak blijft gevoed?

01:00 stop: gevaarlijke tak uit/vergrendeld. 01:01 stop los: blijft uit. 01:02 kringvoeding weg, 01:03 terug: blijft uit. 01:12 gezonde resetflank met verzoek/contact uit: vrijgave wordt 1 maar actie blijft uit. 01:13 nieuw verzoek kan activeren. De aparte 48 W kritieke tak blijft in deze stopproef gevoed, waaronder ventilatie. CSV-tijdcontract: vrijgave/contact zijn intervalgedrag, planttoestand het intervaleinde.

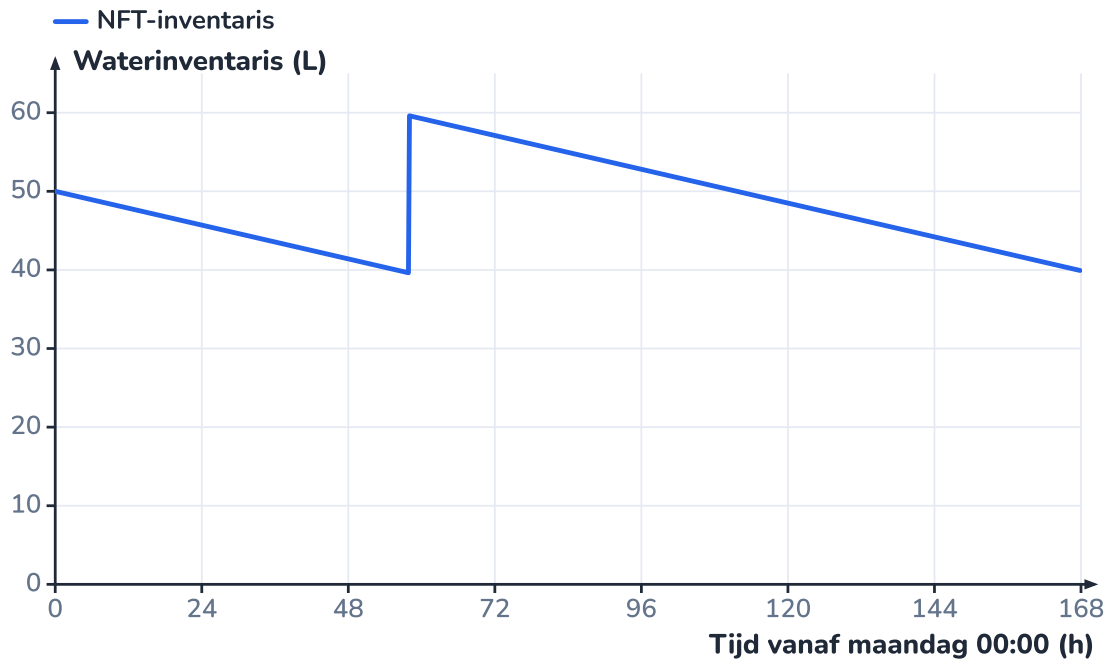
b Geef twee resetweigeringen en verklaar waarom een vastgehouden knop niet volstaat.

Reset met verzoek aan wordt geweigerd; reset met contact niet-uit eveneens. Na zo'n weigering geeft dezelfde vastgehouden knop geen nieuwe flank; eerst loslaten, voorwaarden gezond/uit en opnieuw drukken. Een logische boolmodeltest bewijst geen contactorreactietijd of gecertificeerde stop.

49.15 De vlotter stopt de pomp maar niet het lek

Toepassen · 7 · Rekenen · 45 min

Waterlek start NFT 31 L, onderweg 3,9 L en lek 2 L/min. Opname plus verdamping is 4,3 L/d.



De inventaris bevat tank plus water onderweg. De onafhankelijke vlotter ziet alleen het tankpeil; het drinkwater en gezuiverd elektrolysewater staan in andere balansen.

a Bereken tankpeil tijdens pompen en tijd tot 24 L bij de eerste lopende pomp. Vergelijk de analytische grens met het eventbestand.

Tankstart: 31−3,9=27,1 L. Afname=2+4,3/1440=2,002986111 L/min. Tot 24 L: 3,1/2,002986111=1,547689... min, circa 92,86 s. Het event ligt binnen het tweede minuutinterval bij tank 24 L; dat is het ideale contactmodel, geen fysiek vertragingbewijs. De pompfractie begrenst doorzet zonder negatieve voorraad.

b Waarom zijn lage eindvoorraad en groot recirculatietekort na de stop geen fout van de vlotter?

De vlotter voorkomt pompen onder zijn grens maar dicht het doorlopende lek niet. Totale lekafvoer wordt door werkelijk beschikbare voorraad begrensd; de kring kan leeg raken. De 20 L-bijvulling herstelt onvoldoende niveau/hysterese en geen leidingintegriteit. Warmtebaan bij groot verlies is niet fysiek gevalideerd doordat Cb vast blijft en waterenthalpie ontbreekt.

49.16 Een waterstofsaldo met alle deelposten

Toepassen · 7 · Rekenen · 45 min

Gebruik de normale JSON en de lege-proceswaterproef.

a Bereken H_2-productie, minimumwater, compressie en chemisch opgeslagen energie. Sluit de inputenergie.

m=E48×0,96/58=0,751118 kg. Water 9m=6,760058 L; compressie 3m=2,253353 kWh; chemisch 33,333333m=25,037251 kWh. E48=DCverlies+compressie+procesverlies+chemisch; deelposten zijn een verdeling van h2_in en geen extra railvraag.

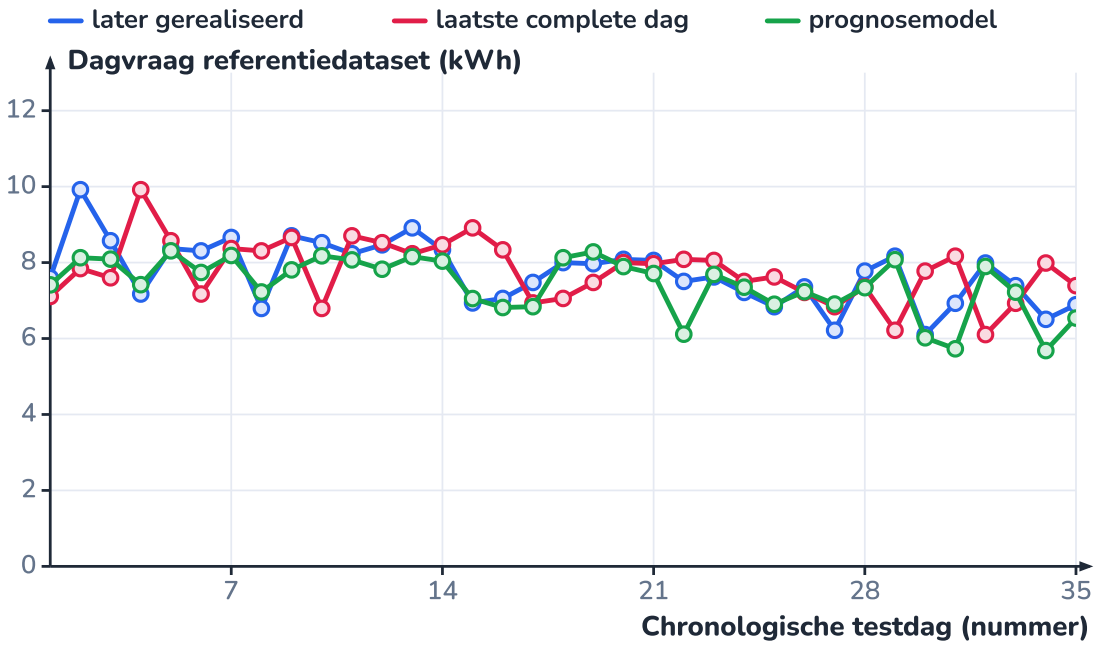
b Verklaar de massa-eindstand en waarom celretourwater geen drinkvoorraad is. Wat doet h2_water_leeg?

Eindmassa=2+m−verbruik−lek=2,734792 kg; gewoon verbruik 0 en lek=0,016326 kg. Celretourwater wordt als doorzet geteld, niet gezuiverd/opgevangen/bruikbaar bewezen. h2_water_leeg heeft 0 L en produceert 0 kg ondanks beschikbaar overschot; er komt geen stille NFT- of drinkwatervoeding. 9 L/kg is afgerond stoichiometrisch minimum, geen totaal praktijkverbruik.

49.17 Forecast zonder tijdlek

Toepassen · 7 · Programmeren · 55 min

Controleer features, train/val/test en baseline in voorspellers.



De realisaties dienen achteraf voor scoring; de modelinvoer bevat alleen eerder beschikbare weersprognoses. Deze synthetische referentievraag is een apart datamodel en geen gemeten of gedispatchte stationsvraag.

a Geef alle datumgrenzen en noem welke kolommen wel/niet in de fit mogen staan. Waarom is 07-03 om 20:00 geen fit-lek?

Fit 03-08–27-12-2020: 147 dagen; validatie 28-12–31-01: 35; test 01-02–07-03-2021: 35, achteraf. Features uitsluitend prognoseT/prognosezon met vaste transformaties; mean/scale alleen train. Oude vraag/PV zijn trainlabels, latere realisaties alleen evaluatie. Test 07-03 staat niet in beta; de fit is maanden eerder klaar. De basislijn gebruikt doeldag − 2, want vorige dag is om 20:00 nog onvolledig.

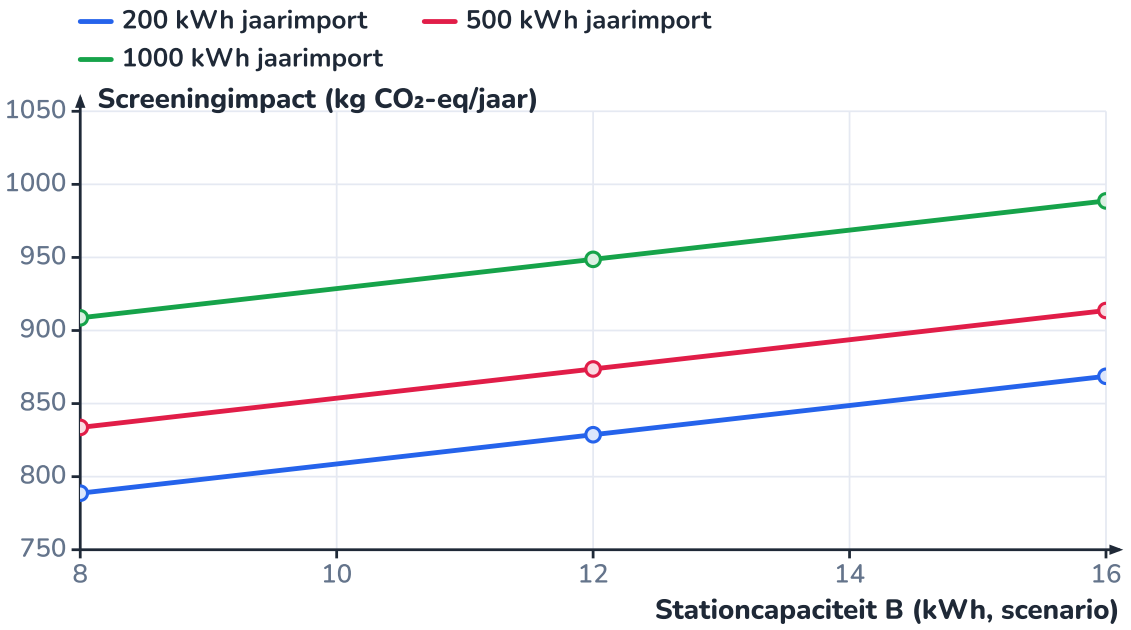
b Vergelijk de 35 testdagen en verklaar wat de vraag-/PV-RMSE en weer-RMSE elk meten.

Modelvraag-RMSE=0,585154 tegenover basis=1,116428 kWh; PV=2,534111 tegenover 5,479448 kWh, beide dezelfde horizon/dagen. Weerfouten=2,005657 K en 0,569032 h. De labelvraag is een apart synthetisch datasetmodel en bewijst geen operationele plantweeknauwkeurigheid of besparing.

49.18 S1, S2 en een korter batterijleven

Toepassen · 7 · Rekenen · 45 min

De screeninggrens is station plus één module over [0,20) jaar; B=12, I=500.



Batterijlevensduur hier 10 jaar; de download berekent ook 8 jaar. Alle lijnen behouden dezelfde geplande dienst en screeningfactoren. De weekrun rechtvaardigt geen jaarimport en geen daadwerkelijk jaarrond geleverde dienst.

a Herleid 873,68 kg/jaar vanaf S1 en bereken het geval leven 8 jaar.

S1 B=10/I=200=808,68. B=12/L=10:708,68+120+0,15×300=873,68. L=8 geeft drie pakketten op 0/8/16, dus batterijterm 15B=180:933,68 kg/jaar; verschil 60. Een vervanging op 20 telt niet mee. I=500 is onafhankelijk jaarscenario, geen 52×winterweek.

b Geef drie boekhoudfouten die de vergelijking ongeldig maken.

Extra i38-164 kg/jaar telt de module dubbel; volledige export-/recyclingcredit zonder methode vervalst de grens; dezelfde geplande dienst veronderstellen terwijl een variant meer tekorten heeft maakt de functionele vergelijking onbewezen. Ook H_2-beginvoorraad of onbekende hardware kan niet zonder levenscyclusinventaris een gratis werkelijke voorziening zijn.

Uitdagen

transfer, open problemen, leerlijnen combineren

49.19 Een compleet eisen- en acceptatiedossier

Uitdagen · 9 · Habitat · 100 min

Je team moet S2 als onderwijsontwerp reviewbaar opleveren. Gebruik alle 26 eis-IDs uit de gids.

OOK TE DOWNLOADEN

a Maak een traceermatrix met eis, rationale, eigenaar, architectuur/interface, testcase, bewijsbestand, criterium en besluit.

Het volledige uitgewerkte voorbeeld staat hieronder per eis-ID. Iedere rij bewaart eis, rationale, eigenaar, interface, proef, bewijsbestand, criterium en besluit. De interfaces verwijzen naar precies het S2-programma; hardware- en systeemvalidatie blijven apart. De 26 betekenisvaste IDs vormen samen de baseline. De aanvullende CSV-bijlage maakt de matrix bewerkbaar zonder de oplossing van het handboek te laten afhangen.

A-01 — Twee rails, één station plus één module; geen verborgen converter.
Rationale: Voorkom energie uit een verborgen converter of dubbele module.
Eigenaar: systeemverantwoordelijke; interface: ARCH / accu / twee rails
Proef: Alle weekruns; twee afzonderlijke saldi; bewijs: config.json en resultaten.json
Criterium: Geen 12↔48 V-pad; beide residuen $<10^{-7}$ kWh.
Besluit: modelgrens gecontroleerd.

A-02 — Elke eis heeft eigenaar, proef, bewijs en besluit.
Rationale: Een reviewer moet iedere beslissing terugvinden.
Eigenaar: reviewer; interface: V-model / deze traceermatrix
Proef: Inspectie van alle 26 betekenisvaste IDs; bewijs: traceermatrix_e49.csv
Criterium: Elke ID heeft alle traceervelden en expliciet besluit.
Besluit: projectprocedure.

E-01 — Opslag blijft binnen SOC-venster; tekorten blijven zichtbaar.
Rationale: Voorraad is geen vrij vermogen buiten haar venster.
Eigenaar: elektrisch beheer; interface: accu
Proef: Leeg/vol/alle volledige SOC-banen; bewijs: scenario.csv / resultaten.json
Criterium: Module SOC 0,20–1,00; station 0,20–0,90; geen verborgen clipping.
Besluit: model geslaagd; autonomie niet.

E-02 — 4 kVA continu, 8 kVA maximaal 5 s; P/Q/S en bankstroom samen.
Rationale: Apparaten en diensten hebben gelijktijdige grenzen.
Eigenaar: elektrisch beheer; interface: pq / kies_lasten / accu
Proef: 4.48kVA verzoek; twee 5 s-selecties; bewijs: contracttests in resultaten.json
Criterium: Continu S≤4000 VA; piek≤8000 VA/5 s; bank≤100/130 A; iedere geweigerde dienst gelogd.
Besluit: continue selectie geslaagd; aanloop niet.

E-03 — Laadstroom apart: 80 A module, 60 A station; koude-interlock.
Rationale: Laad- en ontlaadrating zijn verschillende paden.
Eigenaar: elektrisch beheer; interface: laad_toegestaan / accu
Proef: Koud/vol; 7000 W-bron met laadlimiet; bewijs: koud_leeg.csv en contracttests
Criterium: Laad≤80/60 A; module onder 0 °C geen lading; stationproef onder 5 °C geen lading.
Besluit: logica geslaagd; fabrikantbewijs open.

E-04 — 16S-venster 44,8–55,2 V; iedere cel 2,8–3,45 V.
Rationale: 16S-fullcharge kan buiten de rail vallen.
Eigenaar: cel-/BMSselectie; interface: laad_toegestaan
Proef: 58,4 V en één cel 3,6 V; bewijs: contracttests in resultaten.json
Criterium: Pack 44,8–55,2 V en iedere cel 2,8–3,45 V; anders weigeren. Fabrikantbewijs apart.
Besluit: weigering geslaagd; celselectie open.

E-05 — Windafregeling bewaakt 3 kW-dump en echte remgrenzen.
Rationale: Overtoeren en thermische overbelasting zijn fysisch.
Eigenaar: aandrijfbeheer; interface: nominale dumpboekhouding
Proef: Vol-week; $245^2/16{,}6$; later remproef; bewijs: vol.csv / contracttests
Criterium: Nominaal ≤3000 W. De 245 V-rekening overschrijdt de 3 kW-grens; fysieke thermiek/remproef blijft open.
Besluit: nominaal model geslaagd; fysiek open.

T-01 — Vier warmtevoorraden, transporttekens en residu sluiten.
Rationale: Interne fluxen mogen geen warmte creëren.
Eigenaar: fysica/data; interface: warmtestap / vier knopen
Proef: Iedere stap en week; plant60/30/15; bewijs: balansen en stapverfijning in JSON
Criterium: Stapresidu$<10^{-5}$ J; week$<10^{-7}$ kWh; 15/30 s verschil<0,02 K. Kalibratie apart.
Besluit: numeriek geslaagd; niet gekalibreerd.

T-02 — Convector maximaal 800 W; warmte hangt van buffertemperatuur af.
Rationale: Transport moet bij een echte thermische voorraad passen.
Eigenaar: lokaal klimaatbeheer; interface: PID.vraag / warmtestap
Proef: Temperatuurverschil en vraagbegrenzing; bewijs: qmodule_W / vierknopen
Criterium: Reeds begrensde vraag≤800 W; qm≤80·max(Tw−Ta,0), nul zonder hulpvoeding.
Besluit: modelgrens geslaagd.

T-03 — Woondeel ≥19 °C; module ≥17,5 °C van 07–22 h, anders ≥15,5 °C.
Rationale: Energie is alleen nuttig als dienst op tijd bestaat.
Eigenaar: systeemverantwoordelijke; interface: pm / ph / plant
Proef: Alle comforttellers; normale startup; bewijs: normaal.csv / alle scenario-totalen
Criterium: Geen minuten onder 19 °C woon; module onder 17,5 °C van 07–22 h, anders 15,5 °C. Normaal module faalt 0,5 h.
Besluit: module normaal 0,5 h niet gehaald.

T-04 — Tracking gebruikt werkelijk geleverde actuatorwarmte.
Rationale: Een geweigerde actie mag geen I-opbouw verbergen.
Eigenaar: regelsoftware; interface: PID.terug met flux
Proef: 2 h actuatoruitval en WP-storing; bewijs: antiwindup / wp_storing.csv
Criterium: Werkelijke flux terugkoppelen; na opgelegde proef geen ongewenste 800 W-herstelactie.
Besluit: logica geslaagd.

W-01 — NFT en drinkvoorraad apart; recirculatie is geen verbruik.
Rationale: Doorzet, verbruik en watertypes zijn niet hetzelfde.
Eigenaar: waterbeheer; interface: nft/drink afzonderlijke voorraad
Proef: Normaal en drink_leeg; bewijs: resultaten.json / nft_L / drink_L
Criterium: Massaresidu<10^{-7} L; doorzet 8064 L versus netto 30,1 L; tekorten zichtbaar. Kwaliteit open.
Besluit: model geslaagd; waterkwaliteit open.

W-02 — 24 L-vlotter onafhankelijk; flowverlies stopt pomp.
Rationale: Droogloop vraagt een onafhankelijk lokaal contact.
Eigenaar: lokaal waterbeheer; interface: vlotter / flowalarm
Proef: Waterlek 31 L / 2 L/min; pompfout met flow 0; bewijs: waterlek_events.json / pompfout_events.json
Criterium: Ideaal contact opent bij tank 24 L vóór droogloop; flowmodel stopt ≤120 s. Echte contactretour/vertraging open.
Besluit: ideaal contact geslaagd; hardware open.

H-01 — Elektrolyse alleen uit bereikbaar 48 V-overschot.
Rationale: Alleen bereikbare energie kan de keten voeden.
Eigenaar: procesbeheer; interface: 48 V-dispatch / el / fc
Proef: Normaal, vol en h2_reserve; bewijs: H_2-totalen / scenario-logs
Criterium: Geen elektrolyse uit 12 V; voorraad ≤12 kg; geen gelijktijdige cel/elektrolyse; massa en deelenergie sluiten.
Besluit: model geslaagd.

H-02 — Gezuiverde voeding begrenst H_2-productie.
Rationale: Elektrolyse vraagt eigen gezuiverde materiaalvoeding.
Eigenaar: procesbeheer; interface: proceswater / productieclamp
Proef: Normaal en h2_water_leeg; bewijs: proceswater_L / h2_water_verbruik_L
Criterium: Voorraad≥0; minimaal 9 L/kg in model; leeg →0 kg. Spoelen/zuivering/retourkwaliteit open.
Besluit: minimumvoeding geslaagd; praktijk open.

D-01 — Identiteit, leeftijd ≤90 s, kwaliteit, eindigheid en innovatie.
Rationale: Een slechte meting geeft geen geldige regelbevoegdheid.
Eigenaar: meetbeheer; interface: MeetPoort
Proef: None/stale/NaN/modelNaN/freeze/bias/gedeelde bias; bewijs: contracttests / sensorbias.csv
Criterium: Waarde null met reden; leeftijd≤90 s; innovatie≤0,8 K. Gedeelde bias toont ontbrekende absolute juistheid.
Besluit: logica geslaagd; gedeelde bias ontsnapt.

D-02 — Voorstel heeft boot/seq/tijd/TTL/mode/ACK en begrensd doel.
Rationale: Ontvangst alleen geeft geen actuatierecht.
Eigenaar: lokale software; interface: LokaleEigenaar.voorstel
Proef: Geldig/duplicaat/mode/boot/NaN/tijd/limiet; bewijs: contracttests en ACK-resultaten
Criterium: Alle tien velden, juiste identiteit/seq/mode/kwaliteit/TTL; setpoint 19–21 °C; afwijzing vernieuwt lease niet.
Besluit: logica geslaagd.

D-03 — Verlopen lease valt lokaal terug naar 20 °C.
Rationale: Afwezig netwerk mag een lease niet oneindig houden.
Eigenaar: lokale software; interface: LokaleEigenaar.doel
Proef: 19,5→20 °C op t=60 s; broker 24 h weg; bewijs: contracttests / broker.csv
Criterium: Na leaseverloop lokaal 20 °C; 1440 terugvalminuten. Geen besparingsclaim uit identieke curve.
Besluit: 1440 min terugval; geen besparingsbewijs.

D-04 — Oud voorstel wordt na herstart opnieuw geweigerd.
Rationale: Replay mag een eigenaarherstart niet overleven.
Eigenaar: software-/opslagbeheer; interface: register / ownerboot
Proef: JSON-roundtrip en nieuwe ownerboot; bewijs: contracttests
Criterium: Oud seq blijft geweigerd na reboot; echte powercut/atomische opslag apart aantonen.
Besluit: logica geslaagd; duurzame opslag open.

V-01 — Stop/voedingsverlies vergrendelt; gezonde resetflank met verzoek/contact uit.
Rationale: Een stop moet dominant blijven bij herstel.
Eigenaar: bevoegd veiligheidsontwerper; interface: StopVrijgave / contactfeedback
Proef: Stop/loslaten/powerreturn/resetvoorwaarden; bewijs: stop_herstel.csv / contracttrace
Criterium: Geen automatische herstart; nieuwe gezonde menselijke flank met verzoek/contact uit. Reactietijd/lastbewijs open.
Besluit: logica geslaagd; hardware open.

V-02 — Ventilatie heeft een afzonderlijke risicogestuurde tak.
Rationale: Stopbeleid moet de essentiële risicodienst behouden.
Eigenaar: systeem-/veiligheidsbeheer; interface: afzonderlijke crit48 W-tak
Proef: Stopweek en koude lege banken; bewijs: kritiek_DC_W / vent_tekort
Criterium: Stopweek voedt tak; koud_leeg toont tekort. Luchtkwaliteit/verblijfcontext nog niet gevalideerd.
Besluit: stopweek gevoed; koude lege proef faalt.

AI-01 — Alle features vóór dezelfde 24 h-doelhorizon beschikbaar.
Rationale: Toekomstinformatie mag de score niet vervalsen.
Eigenaar: data-eigenaar; interface: features / train-only schaal/lstsq
Proef: Tijdsplit en gelijke 35 testdagen; bewijs: forecast_archief.csv / forecast-JSON
Criterium: Fit tot 27-12-2020; alleen prognosefeatures; baseline/horizon gelijk 24 h; achterafscores als synthetisch labelen.
Besluit: synthetische demonstratie geslaagd.

AI-02 — Onthouding bij ontbrekende/ongeldige prognose; lokale terugval.
Rationale: Een buitengebiedmodel moet kunnen zwijgen.
Eigenaar: supervisor + lokale owner; interface: predict / begrensd voorstel
Proef: Ontbrekende T en −25 °C-prognose; bewijs: ai_onthouding in JSON
Criterium: null/status; lokaal 20 °C, nooit wijzigen van veiligheidsinstellingen.
Besluit: logica geslaagd.

L-01 — E47-S1-grens, 20 jaar, station plus één module; S2 expliciet.
Rationale: Impact vraagt een vaste grens en gelijke dienst.
Eigenaar: impactbeheer; interface: lca / S1→S2
Proef: B=8/12/16 × I=200/500/1000 × leven 8/10; bewijs: lca in resultaten.json
Criterium: S2=873,68 kg/jaar bij B=12/I=500/L=10; geen i38 extra/jaarweekfactor; jaardienst en bronkwaliteit open.
Besluit: screening geslaagd; jaarfunctie open.

B-01 — Geen PCR-/teelt-/ademgas-/medische claim zonder passend bewijs.
Rationale: Model- of targetbewijs geeft geen bredere voorziening.
Eigenaar: inhoudelijke reviewer; interface: onderzoeks-/acceptatiestatus
Proef: Claims e29–e33 tegen bewijsgrens lezen; bewijs: restonderzoek en eindrapport
Criterium: Geen onbewezen ras, potabiliteit/infectiviteit, ademgas/voedsel, diagnose/dosering/behandeling vrijgeven.
Besluit: geen behaalde stationsvoorziening.

Q-01 — Code, config, invoer en logs zelfstandig reproduceerbaar.
Rationale: Een andere leerling moet dezelfde proef kunnen draaien.
Eigenaar: reproduceerbeheer; interface: CLI/API / ingesloten bron
Proef: Schone map; twee runs; invoergenerator; bewijs: 26 uitvoerbestanden / SHA's
Criterium: Alle 26 bestanden byte-identiek; invoer idem; geen verborgen imports/wallclock/NaN; tijd/eenheden/schema beschreven.
Besluit: behaald voor dit pakket.

b Werk minimaal vijf verschillende uitkomsten volledig uit: numeriek geslaagd, logisch geslaagd, dienst niet gehaald, fysiek open en claim afgewezen.

> Vijf verschillende besluiten: T-01 sluit numeriek bij maximaal $1{,}18\times10^{-8}$ J minuutfout; D-03 geeft na 60 s lokaal 20 °C en telt 1440 brokerterugvalminuten; T-03 mist normaal 0,5 h modulecomfort; E-05 heeft 3615,964 W bij 245 V boven de 3 kW-rating en geen rem-/thermiekbewijs; B-01 geeft geen onbewezen levensondersteunende/medische functie vrij. Per geval verandert het besluit de vervolgstap: model aanvaarden, praktijkproef plannen, regeling herzien, hardware selecteren of claim weigeren. Een geslaagd criterium van een andere rij is geen vervangend bewijs.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

dekking	Alle eis-IDs traceerbaar.
bewijs	Criterium en echt resultaat passen bij elkaar.
besluit	Negatieve/open functies hebben expliciet gevolg.

49.20 Een reproduceerbare oplevering in een schone map

●●● Uitdagen · 9 · Maken · 100 min

Een reviewer krijgt alleen je downloadbestanden en geen cursusrepository.

a Reproduceer de volledige run en inventariseer bron-, invoer-, uitvoer- en gebeurtenisbestanden. Geef een controleprotocol voor identieke resultaten.

> Sla habitat_brein.py, config.json, week_uur.csv, forecast_archief.csv, maak_invoer.py, requirements.txt en LEESMIJ.txt in een schone map op. Gebruik de geteste Python 3.13.1 en NumPy 2.4.0. Run python habitat_brein.py --out resultaat. De uitvoer bevat 12 CSV-logs, 12 event-JSONs, resultaten.json en uitvoer.txt: 26 bestanden. Herhaal in een tweede map en vergelijk bytes/SHA256 van alle 26 bestanden. De generator moet beide invoer-CSV's byte-identiek reproduceren. De auteursproef en onafhankelijke review bevestigen dit voor het gegeven pakket. Een andere dependencyversie vraagt een nieuwe proef.

b Beschrijf de API-/CLIgrens, JSON-onthouding en tijd/eenheden zodat een andere leerling niets hoeft te raden.

> CLI leest expliciete paden en schrijft de gekozen out-map. API run_all(configdict, uurcsvtekst, forecastcsvtekst, programsha) retourneert resultaten/logs/events zonder verborgen bestanden. De cursus gebruikt __name__=e49_bouw; dus geen argparse-bouwargumenten of __file__. Klok vast UTC+1, seed 4902026; CSV/JSON decimale punt en cursus decimale komma. Ontbrekende prognose is null met status, geen NaN. Tijd is intervalbegin; temperatuur/SOC/water zijn eindtoestand na 60 s; vermogen/vrijgave is intervalgedrag. Schema/eenheden staan in LEESMIJ.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

zelfstandig	Geen verborgen imports/invoer.
reproductie	Alle bestanden/waarden vergelijkbaar.
contract	Eenheden, tijd en onthouding helder.

49.21 De niet-gehaalde modulecomforteis onderzoeken

●●● Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 100 min

Normaal mist de module0,5 h minimumcomfort; energie is nog beschikbaar. Je mag een nieuwe regelvariant ontwerpen maar de800 W-convectorgrens niet verhogen.

a Maak een diagnoseplan dat energie, transport, buffertemperatuur, sensorvertraging en PID uit elkaar houdt.

> Selecteer de minuten met eind-Ta onder 17,5 °C van 07–22 h of onder 15,5 °C daarbuiten. Leg SOC12, qmodule, Tw–Ta, WP-selectie, meetstatus en lamp/zon daarover. Energie boven de ondergrens sluit alleen volledige leegte uit. Transport kan beperkt zijn door 80(Tw–Ta), de reeds op 800 W begrensde vraag, sensorvertraging of PID-toestand. Vergelijk de woonlus zonder extra e39-massa toe te voegen. De feitelijke run bewijst 0,5 h tekort; deze uitkomst wijst nog niet één oorzaak exclusief aan.

b Geef een volledig wijzigings- en acceptatieplan met een verdedigbaar voorbeeldalternatief. Welke conclusie mag je nu al geven?

> Voorbeeldvariant: eerder lokaal voorverwarmen binnen 17–18 °C, met dezelfde 800 W-, bron-, meet- en stopgrenzen. Maak een nieuwe versie en behoud de baseline. Herhaal de twaalf scenario's en plantverfijning; vergelijk comfort, railsaldi, SOC, verbruik, waterstof en overtemperatuur. Acceptatie blijft de oorspronkelijke comfortgrens zonder tekort en zonder andere grensschending. Het alternatief is een ontwerpvoorstel tot de nieuwe proef werkelijk is uitgevoerd; verzin geen gunstige uitkomst. S2 zelf haalt T-03 niet volledig.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

diagnose	Oorzaak toetsen met samenhangende signalen.
variant	Alle oorspronkelijke grenzen behouden.
eerlijkheid	Geen onuitgevoerde variant als bewezen melden.

49.22 Een lokale eigenaar en netwerkproef ontwerpen

Uitdagen · 9 · Ontwerpen · 110 min

De dictionaries moeten later via een echte broker naar lokale owners. De opstelling is nog niet gekozen.

a Ontwerp topics/schema/autorisatie, ACK en gedrag voor TTL/replay/bronboot/eigenaarboot/klokverlies.

> Voorbeeldtopics: habitat/woon/voorstel en habitat/woon/ack, met telemetrie apart. Behoud de tien contractvelden, voeg schema-versie en expliciete eenheden toe, en beperk publicatie/ontvangst met de gekozen autorisatie. Een retained actuatorvoorstel krijgt altijd dezelfde lease-/identiteitstoets. QoS/message expiry vervangen geen applicatielease. ACK correleert node, boots en seq en meldt reden/doel. Ontwerp klokkwaliteit en monotone-tijd/UTC-mapping; bij ongezonde klok weigeren en lokaal terugvallen. Een nieuwe bronboot vraagt bewuste geautoriseerde registratie; de hoogste seq wordt duurzaam en atomair opgeslagen. Dit is een selectieontwerp bovenop het dictionarymodel.

b Geef een concreet fault-injectionplan en acceptatie zonder afhankelijkheid van een werkende Pi.

> Injecteer duplicaat, vertraagd bericht na TTL, toekomsttijd, verkeerde mode/ownerboot, Pi-herstart met oude bron, owner-powercut tijdens save, ontbrekende/NaN-meting en 24 h brokeruitval. Criteria: geen oude leaseverlenging, begrensd lokaal doel 20 °C, herleidbare ACK, stopdominantie ongeacht netwerk. Vergelijk software met echte contactfeedback/P/Q/S op een veilige proefadapter. Noteer afbreekconditie en gezonde herstelroute. Deze tests mogen geen gevaarlijke onbewezen last vrijgeven en leveren geen hardwarecertificaat.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

contract	Identiteit/tijd/bevoegdheid consistent.
test	Negatieve/herstartgevallen concreet.
bewijsgrens	Netwerkbewijs wordt geen hardwarecertificaat.

49.23 FMEA en een gemeenschappelijke oorzaak

Uitdagen · 9 · Analyseren · 90 min

Een team verklaart twee meetketens onafhankelijk omdat ze verschillende datavelden hebben.

a Werk drie FMEA-rijen uit voor meetbias, voedingsverlies en vast contactorcontact; koppel aan de getoonde proeven en hun open gaten.

Meetbias: plaatsing/ijking → verkeerd doel of meetweigering → koude module; D-01/biasweek, met absolute ijking en gemeenschappelijke modelbias als open bewijs. Voedingsverlies: bron/bank/kring → warmte en ventilatie weg → leefdienst faalt; koud_leeg/V-02, met werkelijke voedingen/fallback/verblijfcontext open. Vast contactorcontact: verzoek uit maar contact aan → gevaarlijke actie blijft; V-01 weigert reset, maar echte onderbreking en barrièrewerking zijn nog niet aangetoond. Elke rij krijgt eigenaar, detectiemiddel, criterium, onderhoud en bewijsstatus; geen FIT/SIL uit ordinale bespreekscores.

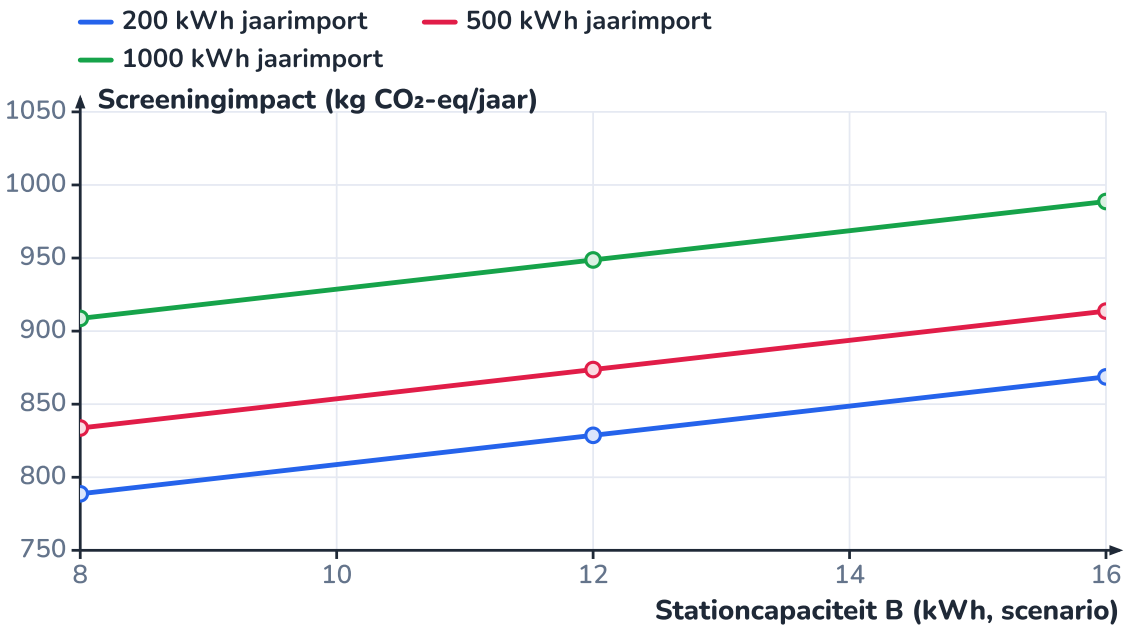
b Teken een foutboom voor verlies van leefdienst met minimaal één gemeenschappelijke oorzaak. Waarom is een product van twee foutkansen niet automatisch geldig?

Een voorbeeldtop is OR(essentiële ventilatie onbeschikbaar, klimaatdienst buiten contextgrens). Gedeelde 48 V-uitval kan beide veroorzaken. Gedeelde modelbias kan twee verschillende meetvelden gelijk verschuiven. $P(A \cap B)=P(A)P(B)$ vraagt onafhankelijkheid; een gedeelde oorzaak krijgt een eigen tak in de foutboom. Zonder gekalibreerde gegevens blijft dit een logische structuur met open kansen, geen numerieke stationsbetrouwbaarheid.

49.24 Jaarautonomie en LCA verantwoord vergelijken

Uitdagen · 9 · Onderzoeken · 100 min

Een voorstel vergroot B van 12 naar 16 kWh en claimt minder jaarimport. Er is alleen deze winterweek.



Batterijlevensduur hier 10 jaar; de download berekent ook 8 jaar. Alle lijnen behouden dezelfde geplande dienst en screeningfactoren. De weekrun rechtvaardigt geen jaarimport en geen daadwerkelijk jaarrond geleverde dienst.

a Bereken het impactverschil bij gelijke levensduur van 10 jaar en gelijke I=500; bereken welke importreductie dat klimaatverschil zou compenseren.

Bij gelijk leven 10 jaar en I=500 is de extra jaarpost $10\times(16-12)=40$ kg CO_2-eq. Compensatie met netfactor 0,15 vereist $40/0{,}15=266{,}666667$ kWh/jaar minder globale import. Bij I12=500 zou $I16 \leq 233{,}333333$ binnen deze beperkte screening het verschil compenseren. Dit is een tegenfeitelijk omslagpunt, geen door de winterweek bewezen importresultaat. Korter leven, extra randapparatuur of andere grenzen vragen een volledige herberekening.

b Ontwerp het ontbrekende jaaronderzoek met gelijke functionele dienst, veroudering en bewijsgrens.

Gebruik seizoensdekkende weer-/last-/onderhoudgegevens en dezelfde woon-, NFT-, drink- en ventilatiedienst. Houd begin/eindopslag cyclisch zodat een voorraad niet als jaarwinst wordt opgebrand. Neem veroudering, temperaturen, stromen, piekduur en H_2-aanvoer mee. Toets prognosebeschikbaarheid en storingen. Vraag materiaallijst/EPD/levensduur en waterzuivering/H_2-procesgrens. Vergelijk werkelijk geleverde dienst én impact; meer tekorten maken varianten nog niet gelijkwaardig. Winterweek×52 blijft ongeldig.

49.25 Biologische en medische restfuncties beoordelen

●●● Uitdagen | 9 | Argumenteren | 90 min

De voorzitter wil NFT, een algenmodel, PCR en een polssensor samen als volledig levensondersteunend systeem tonen.

a Werk per functie een acceptatie-/restonderzoekrij uit met concrete beperkende cijfers of testgrens.

NFT: recirculatie/watervolume in het lesmodel, geen oogst of voedselzekerheid. E31: onder $CH_{1,8}O_{0,5}N_{0,2}/NH_3$ vraagt 1,68 kg O_2/d 1,23 kg droog en 2,20 kg CO_2; 2 kg bewoners-CO_2/d geeft maximaal 1,527273 kg O_2/d. Het 5 cm-lichtscenario vraagt 133,617 m² en 213,787 kWh/d alleen lampenergie: geen gekozen installatie. E32: g-N-conservatie/evenwichten zijn geen stationkalibratie. PCR: gekozen target en controles; negatief met falende controle is oninterpreteerbaar, geen algemene drinkbaarheid/infectiviteit. Gezondheid: synthetische ECG/puls/SpO_2, geen diagnose/dosering/behandeling. E29 kiest geen ras/DNA-ingreep. Iedere functie krijgt eigenaar en passend meet-/validatieplan, geen gereed-status.

b Formuleer een verdedigbare demonstratietekst voor publiek en een weigering van één onbewezen claim.

Publiekstekst: ‘Deze demonstratie verbindt afzonderlijke synthetische energie-, water- en meetmodellen. Zij koppelt claims aan bewijs; voedsel-, ademgas-, waterkwaliteit- en medische functies vragen apart onderzoek.’ Weigering: ‘Een negatief PCR-target maakt water niet drinkbaar; wij geven geen potabiliteitsstatus zonder juiste controles en passende bredere kwaliteitstoets.’ Zo blijft B-01 zichtbaar zonder het biologische onderzoek uit de cursus te wissen.

49.26 Een onderhouds- en herstelprocedure beproeven

●●● Uitdagen | 9 | Ontwerpen | 90 min

Je hebt een veilige lesadapter met gesimuleerde contactfeedback, vlotter en opslagregister. De echte installatie is nog niet vrijgegeven.

a Schrijf een complete stop→onderzoek→bewijs→reset→nieuw verzoekprocedure met twee geweigerde herstelgevallen.

Controleer toepasselijke versie, owner en kringschema. Maak het actuele verzoek uit en activeer de onafhankelijke stop/latch. Bewaak contactfeedback uit. Beoordeel betrokken voeding/druk/water/energie volgens het bevoegde isolatieplan. Onderzoek oorzaak en bewaar reparatiebewijs. Test op de veilige adapter: vast contact → reset weigeren; verzoek nog aan → reset weigeren. Pas met gezonde voorwaarden en een nieuwe menselijke flank vrijgeven; een nieuw procesverzoek is daarna apart. Log tijd/correlatie/criteria/resultaat en afbreekconditie. Software uit is niet spanningsloos; 120 V is geen gegarandeerd veilige onderhoudsgrens.

b Koppel procedure en proefinterval aan FMEA zonder een certificaat of veilige-aanrakingsgrens te verzinnen.

Koppel vlotter aan lek/droogloop, powercut aan oud commando, stopfeedback aan vast contact, koudeladen aan schade en winddump aan thermiek/overtoeren. Een interval volgt uit gebruik, faalmechanisme en detectiegegevens. Ontbrekende gegevens betekenen een voorlopige proefselectie, geen betrouwbaarheidsbewijs. Geen gecertificeerde stop/SIL/PL-claim zonder passend ontwerp- en beoordelingsbewijs.

49.27 Eindrapport en verdediging met een tegenvraag

●●● Uitdagen | 9 | Habitat | 120 min

Lever het volledige S2-ontwerp op; de reviewer vraagt onverwacht waarom groene saldi niet genoeg zijn.

a Schrijf een eindrapportstructuur en werk de besluitparagraaf volledig uit met minimaal drie niet-gehaalde/open eisen.

Rapport: context/grens → PvE/traceermatrix → architectuur/interfaces → vergelijkingen/eenheden → versie/hash/invoer → normaal/storingen → forecast → FMEA/proof-tests → LCA → acceptatie/restonderzoek → onderhoud/planning → bijlagen. Besluit: Q-01 en de gekozen conserverings-/contractproeven slagen voor S2. T-03 mist 0,5 h modulecomfort; bias kost 26,2 h. E-02-aanloop faalt op 132,506 A; E-05-rem/thermiek blijft open. Koud_leeg verlaat het watermodel in interval 23:42–23:43 en mist kritieke voeding. B-01-voorzieningen zijn niet vrijgegeven. Het onderwijsontwerp is reviewbaar; zelfstandige bewoning en klinisch gebruik zijn geen behaalde functies. Elke open rij noemt bewijsbestand, eigenaar en vervolgstap.

b Bereken de rubric bij niveaus 4/3/3/2/4 in de vijf gewogen criteria. Bereid drie reviewer-vragen met antwoord/bewijs voor.

Score=20×4/4+25×3/4+20×3/4+15×2/4+20×4/4=81,25/100. De score geeft geen open functie vrij. Vraag 1: waarom kan 12 V-moduleoverschot niet naar H_2? A-01, twee rails zonder converter. Vraag 2: waarom tekort bij positief saldo? T-03, timing/transport/PID/sensor; normaal.csv. Vraag 3: waarom I=500? L-01, expliciet onafhankelijk jaar-scenario, geen week×52; 873,68 kg/jaar alleen screening. Toon live een replay- of resetweigering en zoek de negatieve uitkomsten terug. Eigen redenering en passend bewijs zijn sterker dan alles veilig noemen.

ZO WORDT DIT BEOORDEELD

rapport	Volledige route en traceerbaar besluit.
verdediging	Eigen redenering met live bewijs.
kwaliteit	Open grenzen blijven zichtbaar ondanks score.