

E

Expert
Handboek

Leerstof: uitleg, uitgewerkte voorbeelden, proeven, naslag en verbanden.

16-18+ jaar | 49 hoofdstukken | schaal 6–9

Brecht Corbeel · schoolium.me

StemExpert Expert — Handboek

Auteur: Brecht Corbeel
Uitgave: schoolium.me
Reeks: StemExpert — STEM in drie niveaus (Fundamental, Intermediate, Expert)

Voor wie: Voor wie Intermediate beheerst (derde graad STEM-richtingen, doorstroom naar ingenieurs- en wetenschapsopleidingen). Afgeleiden, integralen, differentiaalvergelijkingen en statistiek worden het gereedschap; systemen worden gemodelleerd, gesimuleerd en geregeld.

Wiskunde op dit niveau: afgeleiden, integralen, differentiaalvergelijkingen (numeriek), vectoren en matrices, statistiek

Habitat-laag: Het brein van het station: een geïntegreerd, zelfsturend systeem met PID-regeling, energiebeheer, een sensornetwerk, een digitale tweeling en AI-voorspellingen, ontworpen volgens het V-model.

Dit boek hoort bij een handboek, een werkboek en een oplossingenboek per niveau, en bij de offline website van StemExpert. De StemExpert-schaal (1 tot 9) loopt over de drie niveaus heen. Druk af zonder schaling (100 %).

Inhoud

E1 · Wiskundige gereedschapskist

E1 Afgeleiden: verandering meten 5
E2 Optimaliseren 35
E3 Integralen: ophopen 60
E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie 83
E5 Vectoren en matrices 113
E6 Statistiek en meetonzekerheid 144
E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren 179

E2 · Mechanica en constructies

E8 Beweging in twee dimensies 211
E9 Impuls en botsingen 243
E10 Rotatie 270
E11 Trillingen en resonantie 297
E12 Sterkteleer 327
E13 Vakwerken en constructieanalyse 355

E3 · Thermodynamica en stroming

E14 Gassen en de gaswetten 376
E15 De hoofdwetten van de thermodynamica 405
E16 Warmtepompen en koelen 431
E17 Warmteoverdracht kwantitatief 458
E18 Stroming van vloeistoffen en gassen 476

E4 · Elektrotechniek en elektronica

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie 493
E20 Wisselstroom 530
E21 Filters en signaalverwerking 560
E22 Operationele versterkers 575
E23 Digitale logica 589
E24 Vermogenselektronica en elektrische machines 602

E5 · Chemie en materialen

E25 Thermochemie en reactiesnelheid 619
E26 Chemisch evenwicht 635
E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse 653
E28 Materiaalkunde 671

E6 · Life sciences en bio-engineering

E29 DNA, genen en eiwitten 689
E30 Biotechnologie en genetische technieken 707
E31 Bioprocestechniek 725
E32 Ecologische modellen 745
E33 Het lichaam als regelsysteem 766

E7 · Informatica

E34 Algoritmen en complexiteit 792
E35 Objectgericht programmeren en softwareontwerp 804
E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen 818
E37 Embedded systemen en IoT 828

E8 · Regeltechniek

E38 Dynamische systemen modelleren 839
E39 PID-regeling 849
E40 Sensorfusie en schatten 863

E9 · Data science en AI

E41 Van data naar model: regressie 874
E42 Classificatie en clustering 884
E43 Neurale netwerken 898
E44 AI verantwoord inzetten 909

E10 · Systems engineering

E45 Systems engineering en het V-model 922
E46 Betrouwbaarheid en risico 934
E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse 948
E48 Technisch communiceren en projectmanagement 963

E11 · Habitat E: het brein van het station

E49 Integratieproject: het brein van het station 981

HANDBOEK · HOOFDSTUK 1

Afgeleiden: verandering meten

Van de helling tussen twee meetpunten naar de snelheid van verandering op één ogenblik

Een ingenieur wil niet alleen weten hoe warm de kas is, maar hoe snel ze opwarmt; niet alleen hoeveel energie de batterij bevat, maar hoeveel watt eruit stroomt. Dat is de **afgeleide**: de verandering per eenheid, op één ogenblik. Je bouwt ze op uit een helling tussen twee punten, leidt de rekenregels af in plaats van ze te geloven, en leert ze numeriek berekenen uit een meetreeks met ruis. Aan het eind haalt het brein van het station de opwarmsnelheid van de meetkas uit echte data en voorspelt het wanneer het dakraam open moet.

11× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

W Wiskundig modelleren · K Krachten, beweging en constructies



Om acht uur is de meetkas nog koud; twee uur later warmt ze vijf graden per uur op.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een gemiddelde veranderingssnelheid berekenen als differentiequotiënt, met de juiste eenheid, en ze aflezen als helling van een koorde.
- Je kan de afgeleide definiëren als limiet van een differentiequotiënt, ze interpreteren als helling van de raaklijn en een raaklijn opstellen.
- Je kan de machtsregel en de productregel uit de definitie afleiden en de rekenregels (som, veelvoud, product, quotiënt, ketting) toepassen op veeltermen, machten, exponentiële, logaritmische en goniometrische functies.
- Je kan snelheid, versnelling en schok als eerste, tweede en derde afgeleide van de plaats berekenen en een grafiek van een functie en haar afgeleide aan elkaar koppelen.
- Je kan een functie in een punt lineariseren en daarmee de gevoeligheid van een sensor of een schakeling schatten.
- Je kan een afgeleide numeriek benaderen met een voorwaartse, achterwaartse en centrale differentie, de orde van de fout verklaren en de invloed van afronding en ruis op de keuze van de stap inschatten.
- Je kan in de techniek de afgeleide herkennen en gebruiken: vermogen, stroom, stroom in een condensator, warmtestroom.

- Je kan uit een meetreeks van de meetkas de opwarmsnelheid bepalen en er een onderbouwde voorspelling mee maken.

VERHAAL · 1.1

Twee uitvinders en een bittere ruzie

1/25

In 1665 sloot de universiteit van Cambridge haar deuren voor de pest. De 22-jarige student Isaac Newton trok zich terug op de boerderij van zijn familie in Woolsthorpe en werkte er ongeveer anderhalf jaar aan wat hij de **methode van de fluxies** noemde: rekenen met grootheden die veranderen (*fluenten*) en met hun veranderingssnelheid (*fluxies*). Hij vond er raaklijnen, snelheden en oppervlakten mee. Publiceren deed hij het niet: zijn manuscript *De analysi* uit 1669 ging van hand tot hand en werd pas in 1711 gedrukt.

In 1675-1676 bouwde de Duitse filosoof, wiskundige en diplomaat Gottfried Wilhelm Leibniz in Parijs onafhankelijk hetzelfde gereedschap, met een notatie die we nog altijd gebruiken: $\mathrm{d}x$ voor een heel kleine toename, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor de verhouding van twee zulke toenamen en een uitgerekte S, $\int$, voor een som (*summa*). Dat integraalteken staat al in een manuscript van 29 oktober 1675. Leibniz publiceerde als eerste, in 1684 in het tijdschrift *Acta Eruditorum*.

Wat volgde, was een van de bitterste prioriteitsruzies uit de wetenschap. Newtons aanhangers beschuldigden Leibniz van plagiaat; toen Leibniz de Royal Society om een oordeel vroeg, stelde die een commissie aan. Het verslag van 1712 gaf Newton volledig gelijk, maar Newton was toen voorzitter van de Royal Society en had het verslag grotendeels zelf geschreven. Historici zijn het er vandaag over eens dat beiden de differentiaal- en integraalrekening onafhankelijk uitvonden: Newton eerst, Leibniz als eerste in druk.

De ruzie had een lang staartje. Britse wiskundigen bleven trouw aan Newtons puntnotatie ($\dot{x}$), het vasteland rekende met de soepelere notatie van Leibniz. Pas in 1812 richtten drie studenten in Cambridge, onder wie Charles Babbage, de *Analytical Society* op om de d-notatie ook daar in te voeren. In dit hoofdstuk gebruik je beide: $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ van Leibniz, en voor een afgeleide naar de tijd soms de punt van Newton, $\dot{T}$.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het brein van het station meet niet alleen hoe warm het is, maar ook hoe snel het warmer wordt. Een regelaar die die snelheid kent, grijpt in voor een grens bereikt is (de D-actie van hoofdstuk 39); vermogen is de afgeleide van energie, stroom die van lading. Bijna elk model in Expert, van de differentiaalvergelijkingen in hoofdstuk 4 tot de neurale netwerken in hoofdstuk 43, rust op dit hoofdstuk.



Newton en Leibniz werkten met ganzenveer en inkt; hun rekenregels gebruik je vandaag in elke simulatie.

UITLEG · 1.2

Wat je al weet: de helling van een koorde

2/25

wat je al kan (Intermediate)	wat nu komt
de richtingscoëfficiënt van een rechte, met eenheid (hoofdstuk 3 en 4)	de helling van een kromme in één punt: de afgeleide
snelheid als helling van de (x,t)-grafiek, een raaklijn op het oog (hoofdstuk 7)	de raaklijn berekenen; $v(t)$ en $a(t)$ als afgeleiden
exponentiële modellen, $\tau = RC$ (hoofdstuk 5 en 24)	de afgeleide van e^{x}; de stroom $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ uit $u(t)$
Python: lijsten, CSV-bestanden, grafieken (hoofdstuk 27 en 28)	afgeleiden uit een meetreeks, met hun fout

Op de zonnige aprildag uit hoofdstuk 4 van Fundamental steeg de temperatuur in de meetkas van 8,2 °C om 7 uur naar 25,0 °C om 11 uur. Gemiddeld steeg ze dus met

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{25{,}0\,^{\circ}\mathrm{C} - 8{,}2\,^{\circ}\mathrm{C}}{11\,\mathrm{h} - 7\,\mathrm{h}} = 4{,}2\,^{\circ}\mathrm{C/h}.$$

GEMIDDELDE VERANDERINGSSNELHEID OP [A, B]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

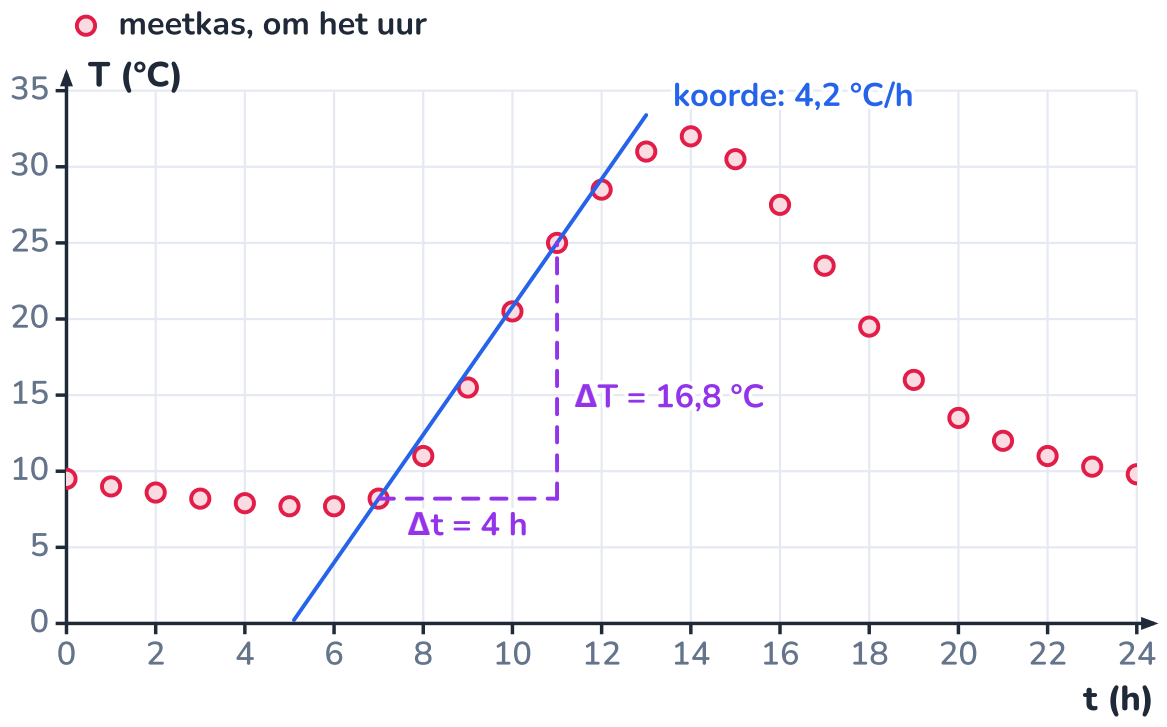
Het **differentiequotiënt**: in de grafiek de helling van de **koorde** tussen $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$. Eenheid: de eenheid van y per eenheid van x.

Zo meet je elke verandering in Habitat: het reservoir van de meetkas zakt 1,8 L per dag (L/dag), de batterij van de module verliest op een donkere winteravond 6,5 procentpunt per uur (%/h, of met 3,07 kWh capaciteit ongeveer 200 W), de weerstand van een NTC daalt tussen 20 en 30 °C met gemiddeld −0,450 kΩ per kelvin.

Maar een gemiddelde verbergt veel. Tussen 7 en 8 uur steeg de kas maar 2,8 °C, tussen 9 en 10 uur 5,0 °C. Hoe korter het interval, hoe meer detail je ziet, tot je bij één ogenblik uitkomt. Dat is de vraag van dit hoofdstuk: hoe snel verandert iets *nu*?

Temperatuur gedeeld door tijd

25,0 °C om 11 uur is geen '2,3 °C per uur'. Een veranderingssnelheid is altijd een verhouding van twee **verschillen**: $\Delta T/\Delta t$, nooit T/t. Een kas van 25 °C kan even goed afkoelen als opwarmen.



De koorde van 7 tot 11 uur stijgt 4,2 °C per uur: een gemiddelde over vier uur, niet de helling op één ogenblik.

UITLEG · 1.3

Van koorde naar raaklijn: de afgeleide

3/25

Een voorwerp valt vanuit stilstand: $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4{,}905\,t^2$ (in m, t in s, luchtweerstand verwaarloosd). Hoe snel valt het op $t = 2\,\text{s}$? Neem de koorde van $t = 2$ tot $t = 2 + h$ en maak h steeds kleiner:

h (s)	$s(2+h)$ (m)	helling van de koorde (m/s)
1,0	44,1450	24,525
0,5	30,6563	22,073
0,10	21,6311	20,111
0,01	19,8167	19,6690
0,001	19,6396	19,6249

De hellingen naderen 19,62 m/s. Algebra laat zien waarom:

$$\frac{s(2+h)-s(2)}{h} = \frac{4{,}905\,(4+4h+h^2)-4{,}905\cdot 4}{h} = 4{,}905\,(4+h) = 19{,}62 + 4{,}905\,h.$$

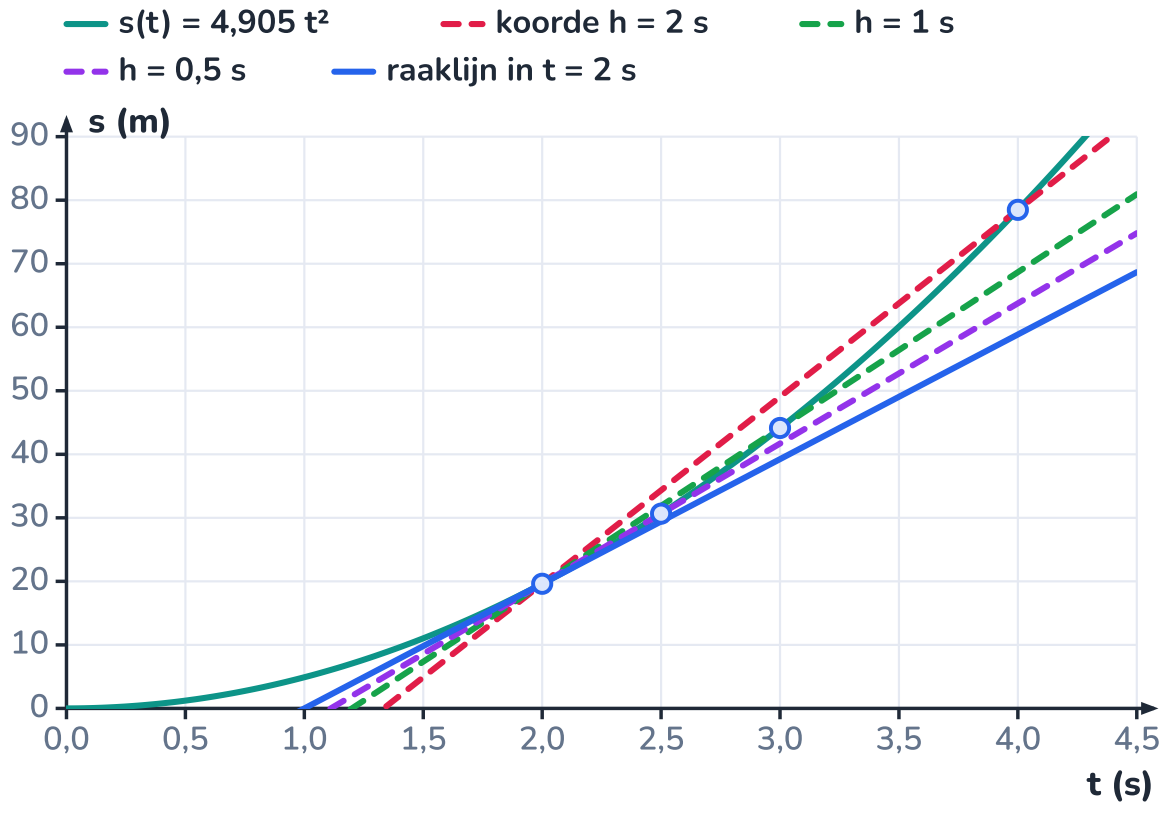
Voor elke $h \neq 0$ mag je delen; daarna gaat de term $4{,}905\,h$ naar nul. De koorden draaien naar één rechte: de **raaklijn**. Haar helling is de **ogenblikkelijke** snelheid, 19,62 m/s, precies $g\,t$ zoals in hoofdstuk 7 van Intermediate.

DEFINITIE VAN DE AFGELEIDE

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Bestaat die limiet, dan is f **afleidbaar** in a. Notaties: $f'(x)$ (Lagrange), $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ of $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Leibniz), $\dot{y}$ voor een afgeleide naar de tijd (Newton). Eenheid: die van f gedeeld door die van x: m/s, °C/h, W = J/s.

De raaklijn in a heeft vergelijking $y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$. Niet elke functie heeft overal een raaklijn: in een knik (de snelheid van het kasdak in hoofdstuk 7 van Intermediate op $t = 1$ s) verschillen de hellingen links en rechts, bij een sprong (een lamp die aanspringt: het vermogen) bestaat de limiet niet.



Koorden met h = 2, 1 en 0,5 s draaien rond het punt op t = 2 s naar de raaklijn met helling 19,62 m/s.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.4

Uit de definitie: de valsnelheid op elk ogenblik

Bereken met de definitie de afgeleide van $s(t) = 4{,}905\,t^2$ in een willekeurig tijdstip t, en die van $f(x) = x^3$. Controleer het eerste resultaat met de tabel van het vorige blad.

GEGEVEN

- $s(t) = 4{,}905\,t^2$ (m), $f(x) = x^3$
- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

GEVRAAGD

- $s'(t)$ en $f'(x)$

OPLOSSING

1 Differentiequotiënt van s: $\dfrac{4{,}905\,(t+h)^2 - 4{,}905\,t^2}{h} = \dfrac{4{,}905\,(2th + h^2)}{h} = 4{,}905\,(2t + h)$.

2 Limiet $h \to 0$: $s'(t) = 9{,}81\,t$ (m/s). Op $t = 2\,\text{s}$: $19{,}62\,\text{m/s}$, zoals de tabel. De afgeleide van de plaats is een nieuwe functie: de snelheid $v(t) = g\,t$.

3 Voor x^3: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, dus $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$.

4 Limiet: $f'(x) = 3x^2$. De termen met h verdwijnen; alleen de term die lineair was in h blijft over.

ANTWOORD

$s'(t) = 9{,}81\,t$ **en** $(x^3)' = 3x^2$**.**

Klopt dit? Numeriek: $\frac{(2{,}001)^3 - 2^3}{0{,}001} = 12{,}0060$, dicht bij $3 \cdot 2^2 = 12$. Het verschil, ongeveer $3 \cdot 2 \cdot 0{,}001$, is de term $3xh$.

UITLEG · 1.5

Machten, sommen en veelvouden

Het patroon uit het voorbeeld geldt voor elke natuurlijke macht. Met het binomium van Newton is

$$(x+h)^n = x^n + n\,x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n.$$

Trek x^n af en deel door h: er blijft $n\,x^{n-1}$ plus termen die allemaal nog minstens één factor h bevatten. In de limiet vallen die weg:

MACHTSREGEL

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^n = n\,x^{n-1}$$

Bewezen voor $n = 1, 2, 3, \ldots$; ze geldt voor elke reële exponent (zie de kettingregel verder). Zo is $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $(1/x)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$.

Twee eigenschappen volgen meteen uit de definitie, omdat een limiet van een som de som van de limieten is:

SOM, VEELVOUD, CONSTANTE

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (c\,f)' = c\,f' \qquad c' = 0$$

Afleiden is **lineair**. Een constante verschuift de grafiek maar verandert geen helling.

Daarmee leid je elke veelterm af: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t^3 - 5t + 7\right) = 6t^2 - 5$. Een fysisch voorbeeld: de doorbuiging van een balk, het volume van een bol $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ met $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2$, precies de oppervlakte van de bol: een dun laagje verf van dikte $\mathrm{d}r$ heeft volume $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.6

Hoe gevoelig is de stroom voor de weerstand?

6/25

De ledstrip van de meetkas trekt $I = U/R$ met $U = 12\,\mathrm{V}$ en $R = 30\,\Omega$. Leid de afgeleide van $1/x$ af uit de definitie, controleer ze met de machtsregel, en bereken hoeveel de stroom verandert per ohm extra weerstand (bv. door een warme verbinding).

GEGEVEN

- $I(R) = U/R, U = 12\,\mathrm{V}, R = 30\,\Omega$

GEVRAAGD

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}R}$ bij $30\,\Omega$

OPLOSSING

1. Differentiequotiënt: $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - (x+h)}{h\,x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$.
2. Limiet: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Machtsregel met $n = -1$: $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2}$. Klopt.
3. Dus $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}R} = -\frac{U}{R^2} = -\frac{12}{900} = -0{,}0133\,\mathrm{A}/\Omega$: $-13{,}3\,\mathrm{mA}$ per ohm.
4. Eenheid: A/Ω. Het minteken zegt: meer weerstand, minder stroom. Relatief: $\frac{\mathrm{d}I/I}{\mathrm{d}R/R} = -1$, 1 % meer weerstand geeft 1 % minder stroom.

ANTWOORD

$(1/x)' = -1/x^2$**; bij 30 Ω daalt de stroom met ongeveer 13 mA per ohm extra weerstand (van 400 mA).**

Klopt dit? Exact bij 31 Ω: $12/31 = 0{,}3871\,\mathrm{A}$, dus $-12{,}9\,\mathrm{mA}$. De afgeleide (13,3 mA) is de helling in 30 Ω zelf; over een hele ohm kromt de grafiek al een beetje.

UITLEG · 1.7

De afgeleide als functie, en de tweede afgeleide

7/25

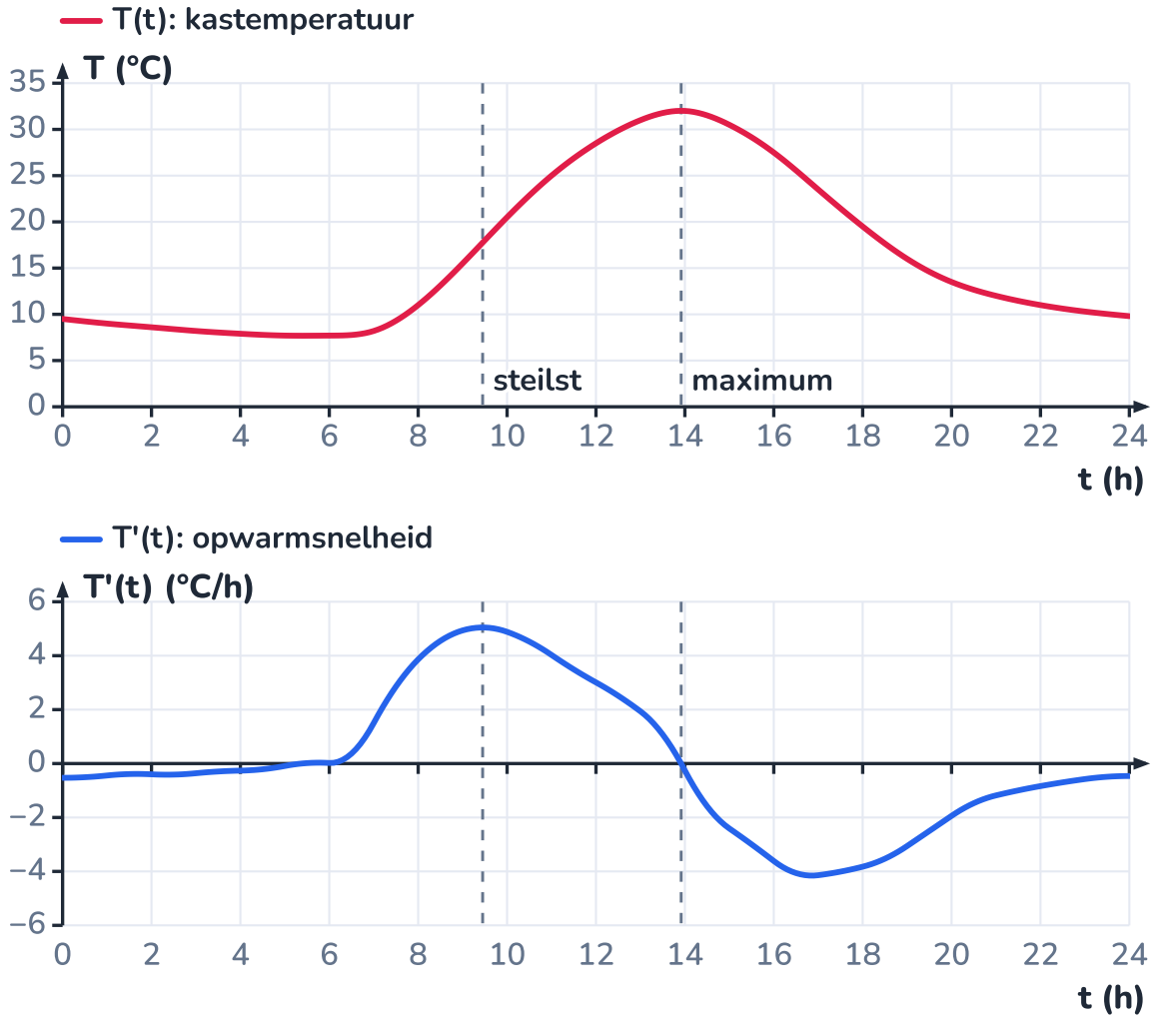
Bereken je de afgeleide in elk punt, dan krijg je een nieuwe functie f'. Onder de temperatuur van de meetkas (een glad model door de uurwaarden van de aprildag) staat haar afgeleide, de opwarmsnelheid in °C/h. Lees ze samen:

- Waar T stijgt, is $T' > 0$; waar T daalt, is $T' < 0$.
- Op het warmste moment (13:55, 32,0 °C) is de raaklijn horizontaal: $T' = 0$. Dat is het werkpaard van hoofdstuk 2: extrema zoek je waar de afgeleide nul is.
- De kas warmt het snelst op om 9:27: 5,0 °C/h, bij amper 18 °C. Daar is T' maximaal en gaat de grafiek van T over van hol naar bol: een **buigpunt**.

De afgeleide van f' is de **tweede afgeleide** f'' (of $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$). Ze meet hoe de helling verandert: $f'' > 0$ is hol (de helling neemt toe, de grafiek buigt naar boven), $f'' < 0$ is bol. Eenheid: °C/h² bij de kas, m/s² bij een plaatsfunctie. In een buigpunt is $f'' = 0$ en f' extreem.

Hoogste waarde, grootste afgeleide

Om 13:55 is de kas het warmst, maar ze warmt dan niet meer op. De grootste opwarmsnelheid valt vier uur eerder, bij een kas die nog koel aanvoelt. Waarde en verandering zijn twee verschillende vragen: een regelaar die alleen naar de waarde kijkt, is altijd te laat.



Boven de temperatuur, onder haar afgeleide op dezelfde tijdas: het maximum van T valt samen met het nulpunt van T', de steilste stijging met het maximum van T'.

Productregel. Stel dat u en v allebei veranderen, bv. spanning en stroom in $p = u\,i$. Denk aan $u \cdot v$ als de oppervlakte van een rechthoek. Groeien de zijden met Δu en Δv, dan komt er $v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v$ bij. Deel door Δx en laat $\Delta x \to 0$: het hoekje $\Delta u\,\Delta v/\Delta x$ gaat naar nul (het is Δu maal iets eindigs).

PRODUCTREGEL

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

Dus niet $u'v'$. Voorbeeld: $(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Quotiëntregel. Schrijf $f = u/v$ als $u = f\,v$ en leid af met de productregel: $u' = f'v + fv'$, dus $f' = (u' - fv')/v$. Vul $f = u/v$ in:

QUOTIËNTREGEL

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

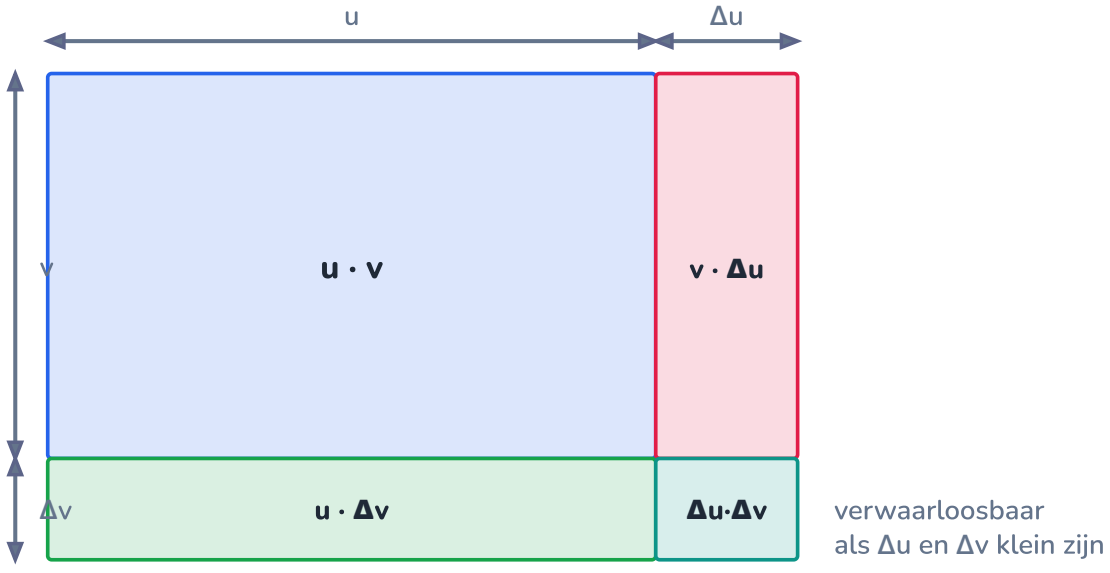
Voor $v \neq 0$.

Kettingregel. Bij een samengestelde functie $y = f(g(x))$ verandert x eerst $u = g(x)$, en u verandert dan y. De verhoudingen vermenigvuldigen, zoals overbrengingen: draait tandwiel B 3 keer zo snel als A en C 2 keer zo snel als B, dan draait C 6 keer zo snel als A. Met Leibniz lijkt het of je gewoon breuken vereenvoudigt:

KETTINGREGEL

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x)$$

Buitenste functie afleiden (met de binnenste erin laten staan), maal de afgeleide van de binnenste. Voorbeeld: $\big((3x^2+1)^5\big)' = 5(3x^2+1)^4 \cdot 6x$.



Groeit een rechthoek u · v, dan komen er twee stroken bij (v · Δu en u · Δv) en een hoekje dat in de limiet wegvalt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.9

Rekenregels combineren

9/25

Leid af: (a) $P(R) = \dfrac{144\,R}{(R+0{,}5)^2}$, het vermogen in een belasting R aan een bron van 12 V met 0,5 Ω inwendige weerstand (hoofdstuk 2 zoekt het maximum); (b) $y = \sqrt{1+x^2}$; (c) $x(t) = 0{,}60\,(10u^3 - 15u^4 + 6u^5)$ met $u = t/7$.

GEGEVEN

- product-, quotiënt- en kettingregel
- machtsregel voor reële exponenten

GEVRAAGD

- $P'(R)$, $y'(x)$, $\dot{x}(t)$

OPLOSSING

1. (a) Quotiëntregel met $u = 144R$ en $v = (R+0{,}5)^2$, $v' = 2(R+0{,}5)$ (ketting): $P' = \dfrac{144(R+0{,}5)^2 - 144R\cdot 2(R+0{,}5)}{(R+0{,}5)^4}$.

2. Deel teller en noemer door $(R+0{,}5)$: $P'(R) = \dfrac{144\,(0{,}5-R)}{(R+0{,}5)^3}$ (W/Ω). Positief voor $R < 0{,}5\,\Omega$, negatief erboven: het vermogen is maximaal bij $R = 0{,}5\,\Omega$.

3. (b) Kettingregel met $u = 1+x^2$: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. (c) Eerst naar u: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 0{,}60\,(30u^2 - 60u^3 + 30u^4) = 18\,u^2(1-u)^2$; dan $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{7}$. Samen: $\dot{x} = \dfrac{18}{7}\,u^2(1-u)^2$ (m/s).

ANTWOORD

$P'(R) = \dfrac{144(0{,}5-R)}{(R+0{,}5)^3}$, $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\dot{x} = \dfrac{18}{7}u^2(1-u)^2$ **met** $u = t/7$.

Klopt dit? (c) Op $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$ ($u = 0{,}5$): $\dot{x} = \frac{18}{7}\cdot\frac{1}{16} = 0{,}1607\,\mathrm{m/s}$, de topsnelheid van het kasdak verder in dit hoofdstuk. Eenheden: 0,60 m maal 1/(7 s) geeft m/s.

UITLEG · 1.10

Exponentiële functies, logaritmen en sinussen

10/25

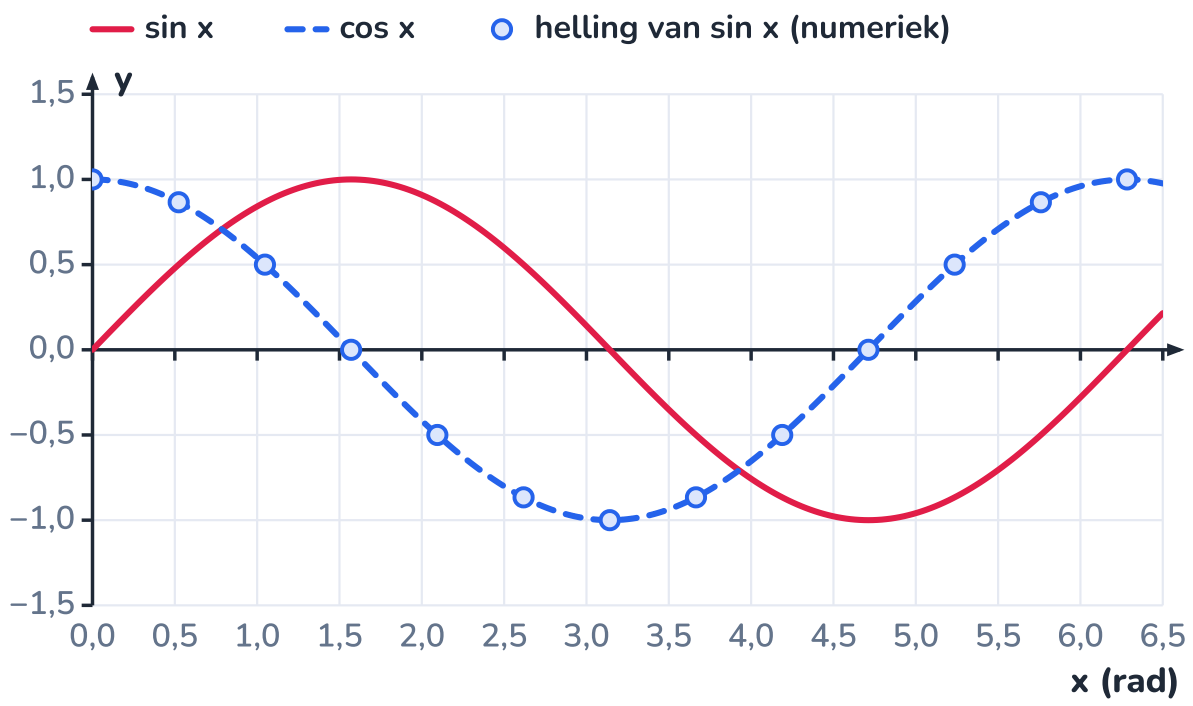
Exponentieel. Voor $f(x) = a^x$ is $\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$: de afgeleide is de functie zelf maal een getal dat alleen van a afhangt. De tabel toont dat getal:

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0,1000	0,7177	1,0517	1,1612
0,0100	0,6956	1,0050	1,1047
0,0010	0,6934	1,0005	1,0992
0,0001	0,6932	1,0001	1,0987
limiet	$\ln 2 = 0{,}6931$	1	$\ln 3 = 1{,}0986$

Het getal $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$ is precies het grondtal waarvoor die factor 1 is. Daarom is $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}$: in elk punt is de helling even groot als de hoogte. Met de kettingregel volgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, de wiskunde achter elke afkoeling en elke RC-kring (hoofdstuk 5 en 24 van Intermediate): hoe verder van het evenwicht, hoe sneller het gaat.

Logaritme. Als $y = \ln x$, dan is $x = \mathrm{e}^{y}$, dus $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{y} = x$ en omgekeerd $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$. Zo volgt ook de machtsregel voor elke reële n: $x^{n} = \mathrm{e}^{n\ln x}$ geeft $(x^{n})' = \mathrm{e}^{n\ln x}\cdot\frac{n}{x} = n\,x^{n-1}$.

Sinus en cosinus. Met de somformule en de limieten $\frac{\sin h}{h} \to 1$ en $\frac{\cos h - 1}{h} \to 0$ (voor h in radialen) vind je $(\sin x)' = \cos x$ en $(\cos x)' = -\sin x$. De figuur toont het numeriek: de helling van $\sin x$ in twaalf punten ligt telkens op de cosinus. In graden klopt het niet: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^{\circ}) = \frac{\pi}{180}\cos(x^{\circ})$, een kettingregel.



De punten zijn centrale differenties van sin x met h = 0,01 rad; ze vallen op de cosinus.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.11

De gevoeligheid van een NTC-sensor

11/25

De NTC in het reservoir van de module (hoofdstuk 22 van Intermediate) volgt $R(T) = R_{25}\,\mathrm{e}^{B\,(1/T - 1/T_{25})}$ met $R_{25} = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $B = 3950\,\mathrm{K}$, T in kelvin. Ze staat boven in een deler met 10 kΩ naar de massa op 5 V: $U = 5\cdot\frac{10}{10+R}$ (R in kΩ). Hoeveel mV verandert U per kelvin bij 25 °C, en hoeveel ADC-stappen is dat?

GEGEVEN

- $R_{25} = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $B = 3950\,\mathrm{K}$, $T_{25} = 298{,}15\,\mathrm{K}$
- ADC: 10 bit op 5 V, stap $5/1024 = 4{,}88\,\mathrm{mV}$

GEVRAAGD

- $\mathrm{d}R/\mathrm{d}T$ en $\mathrm{d}U/\mathrm{d}T$ bij 25 °C

OPLOSSING

1 Kettingregel met binnenfunctie $B(1/T - 1/T_{25})$, waarvan de afgeleide $-B/T^{2}$ is: $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = R\cdot\left(-\dfrac{B}{T^{2}}\right)$.

2 Bij 25 °C: $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = -\dfrac{3950}{298{,}15^2} \cdot 10\,000 = -444\,\Omega/\mathrm{K}$, of $-4{,}44\,\%/\mathrm{K}$.

3 Deler: $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} = 5 \cdot 10 \cdot \dfrac{-1}{(10+R)^2} = -\dfrac{50}{400} = -0{,}125\,\mathrm{V/k\Omega}$ bij $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$.

4 Nog een kettingregel: $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} \cdot \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = -0{,}125 \cdot (-0{,}444) = 55{,}5\,\mathrm{mV/K}$.

5 In ADC-stappen: $55{,}5/4{,}88 = 11{,}4$ stappen per kelvin: één stap is $0{,}088\,\mathrm{K}$.

ANTWOORD

Bij 25 °C stijgt U met ongeveer 55,5 mV per kelvin: 11,4 ADC-stappen, een resolutie van ongeveer 0,09 K.

Klopt dit? Numeriek: $U(25{,}5\,^\circ\mathrm{C}) - U(24{,}5\,^\circ\mathrm{C}) = 55{,}5\,\mathrm{mV}$ over 1 K. De afgeleide is een gevoeligheid: bij 0 °C of 50 °C is ze anders, omdat R en T^2 veranderen.

UITLEG · 1.12

Snelheid, versnelling en schok

12/25

Voor een beweging langs een rechte is de snelheid de afgeleide van de plaats en de versnelling die van de snelheid:

KINEMATICA MET AFGELEIDEN

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \qquad j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

j is de **schok** (jerk), in m/s³. Hij bepaalt hoe 'zacht' een beweging aanvoelt.

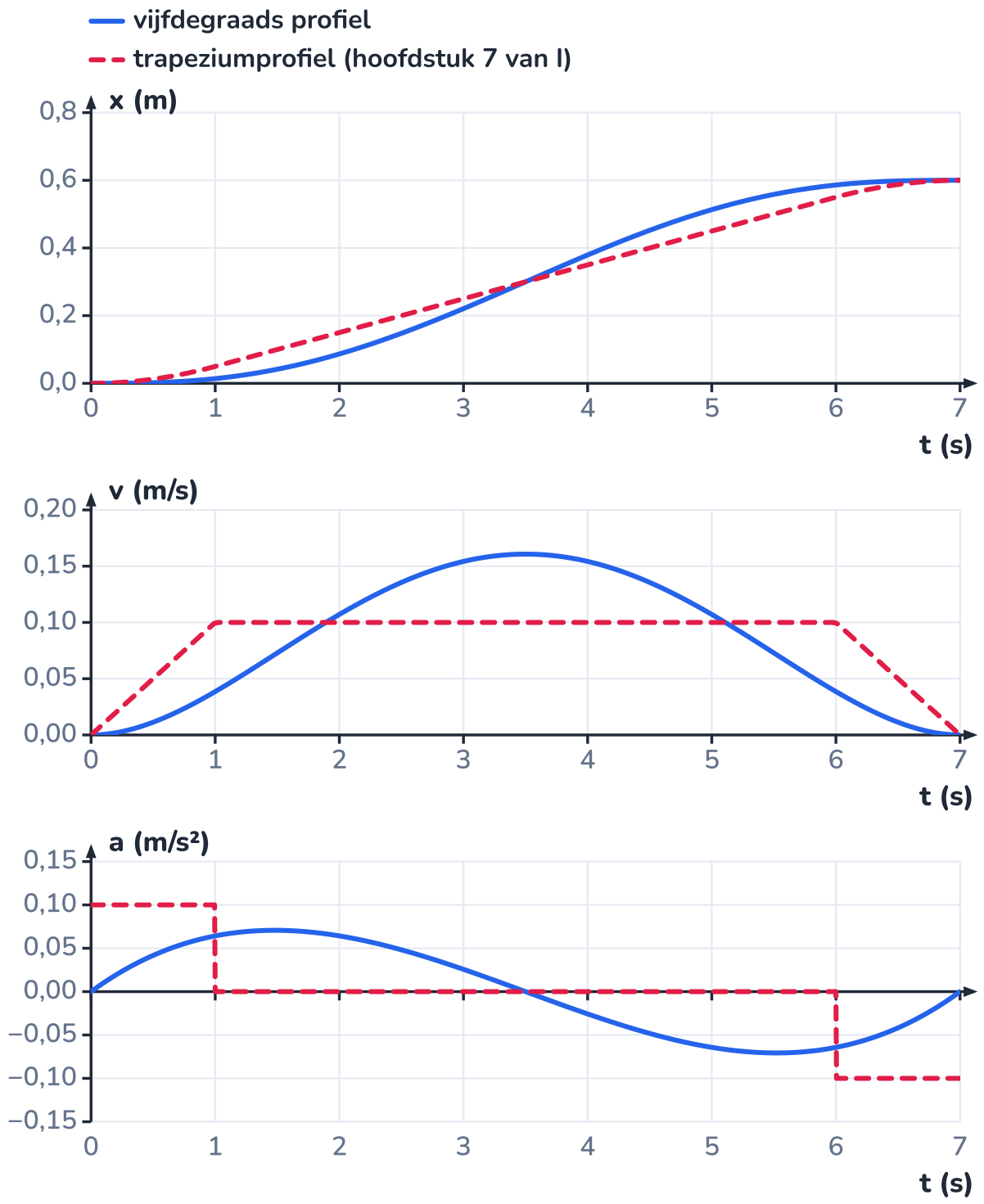
In hoofdstuk 7 van Intermediate reed het schuifpaneel van de kasmodule met een **trapeziumprofiel**: 1 s versnellen met 0,10 m/s², 5 s aan 0,10 m/s, 1 s remmen, samen 0,60 m in 7,0 s. De versnelling springt daar van 0 naar 0,10 m/s² en terug: de schok is op die ogenblikken oneindig groot, en dat hoor je als een tik in riem en geleiding. Liften, cnc-machines en robotarmen gebruiken daarom gladde profielen, bv. de **vijfdegraadsveelterm**

$$x(t) = s\,(10u^3 - 15u^4 + 6u^5), \qquad u = t/T,$$

die in $t = 0$ en $t = T$ plaats, snelheid én versnelling juist goed zet ($x = 0$ of s, $v = 0$, $a = 0$). Afleiden met de kettingregel ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = 1/T$):

$$v = \frac{30s}{T}\,u^2(1-u)^2, \qquad a = \frac{60s}{T^2}\,u(1-u)(1-2u).$$

De figuur toont beide profielen voor $s = 0{,}60\,\mathrm{m}$ en $T = 7{,}0\,\mathrm{s}$. Het gladde profiel heeft een hogere topsnelheid nodig (0,161 in plaats van 0,100 m/s), maar een kleinere, continue versnelling (0,071 in plaats van 0,100 m/s²). De helling van elke grafiek is de hoogte van de grafiek eronder.



Plaats, snelheid en versnelling van het schuifpaneel: vijfdegraadsprofiel (volle lijn) en trapeziumprofiel (stippellijn), op dezelfde tijdas.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.13

Het kasdak zacht laten vertrekken

13/25

Het schuifpaneel (10 kg, slag 0,60 m) moet in 7,0 s open met het vijfdegraadsprofiel. Bereken de topsnelheid, de grootste versnelling en het tijdstip waarop die optreedt, de extra kracht die de motor daarvoor levert, en de schok bij de start.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- $s = 0{,}60\,\mathrm{m}$, $T = 7{,}0\,\mathrm{s}$, $m = 10\,\mathrm{kg}$
- $v = \frac{30s}{T}u^2(1-u)^2$, $a = \frac{60s}{T^2}u(1-u)(1-2u)$

- $v_{\max}$, $a_{\max}$ en wanneer, $F = m\,a_{\max}$, $j(0)$

OPLOSSING

1. v is maximaal waar $a = 0$ binnen het interval: $1 - 2u = 0$, dus $u = \frac{1}{2}$ ($t = 3{,}5\,\mathrm{s}$). $v_{\max} = \frac{30s}{16\,T} = 0{,}161\,\mathrm{m/s}$.

2. a is maximaal waar $\dot{a} = 0$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u - 3u^2 + 2u^3\right) = 1 - 6u + 6u^2 = 0$, dus $u = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 0{,}2113$ ($t = 1{,}48\,\mathrm{s}$).

3. Invullen: $a_{\max} = \frac{60s}{T^2} \cdot u(1-u)(1-2u) = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{s}{T^2} = 0{,}0707\,\mathrm{m/s^2}$.

4. Kracht om te versnellen: $F = m\,a = 10 \cdot 0{,}0707 = 0{,}71\,\mathrm{N}$, bovenop wrijving en zwaartekracht langs het dak (hoofdstuk 8 van Intermediate: tientallen newton). Klein, maar zonder sprong.

5. Schok: $j = \frac{s}{T^3}(60 - 360u + 360u^2)$, in $u = 0$: $j(0) = \frac{60s}{T^3} = 0{,}105\,\mathrm{m/s^3}$. Eindig, terwijl het trapeziumprofiel een sprong van 0,10 m/s² in nul seconden maakt.

ANTWOORD

$v_{\max} = 0{,}161\,\mathrm{m/s}$ op 3,5 s; $a_{\max} = 0{,}071\,\mathrm{m/s^2}$ op 1,48 s (en even groot remmend op 5,52 s); 0,71 N extra; schok bij de start 0,105 m/s³.

Klopt dit? Dimensies: s/T is m/s, s/T^2 m/s², s/T^3 m/s³. En $\int$ van v over 7 s moet 0,60 m zijn: dat controleer je in hoofdstuk 3.

UITLEG · 1.14

De raaklijn als benadering

14/25

Dicht bij een punt valt een gladde grafiek bijna samen met haar raaklijn. Dat is de nuttigste formule van dit hoofdstuk:

LINEARISEREN

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x$$

De fout is van de orde $\frac{1}{2}f''(a)\,\Delta x^2$: klein als Δx klein is en de grafiek weinig kromt.

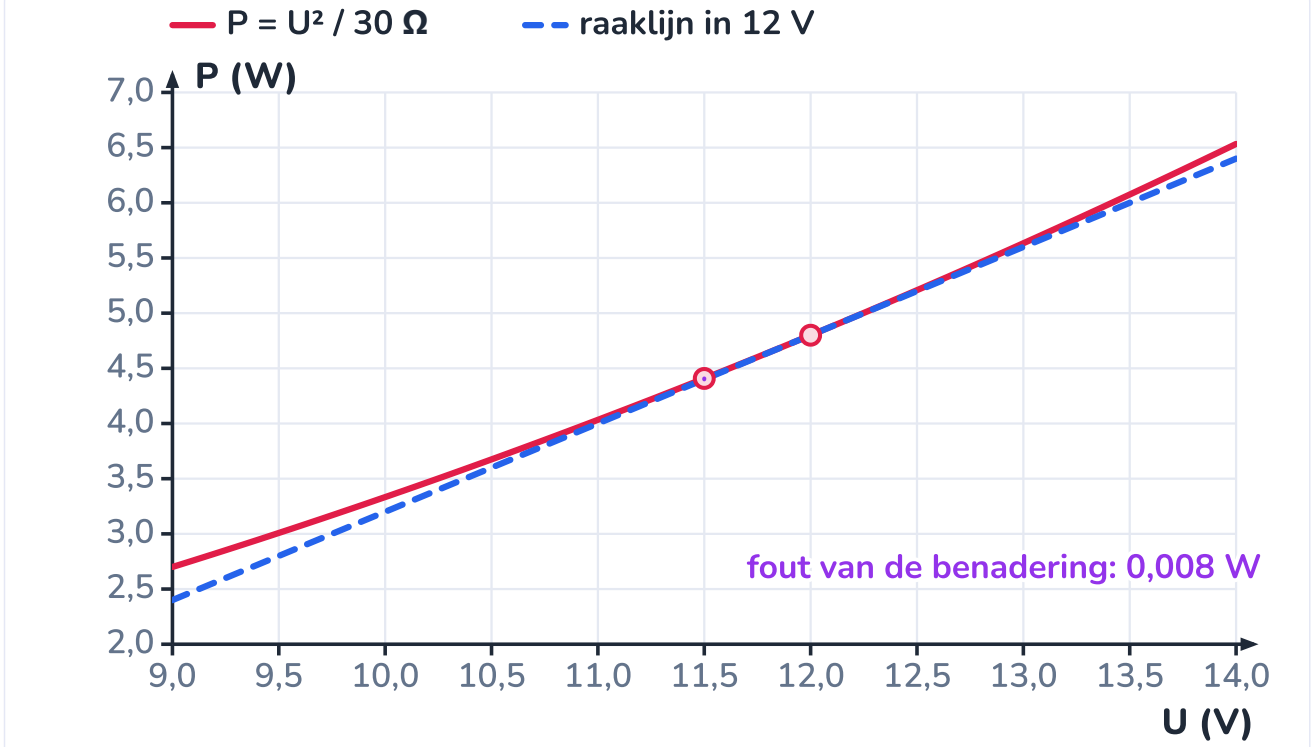
Voorbeeld: de ledstrip (weerstandsmodel 30 Ω) neemt bij 12 V $P = U^2/R = 4{,}8\,\mathrm{W}$. Zakt de batterij naar 11,5 V, dan is met $\mathrm{d}P/\mathrm{d}U = 2U/R = 0{,}80\,\mathrm{W/V}$

$$\Delta P \approx 0{,}80\,\mathrm{W/V} \cdot (-0{,}5\,\mathrm{V}) = -0{,}40\,\mathrm{W},$$

terwijl exact $11{,}5^2/30 - 4{,}8 = -0{,}392\,\mathrm{W}$. Handiger nog is de **relatieve** vorm: uit $\mathrm{d}P = \frac{2U}{R}\mathrm{d}U$ volgt $\frac{\mathrm{d}P}{P} = 2\,\frac{\mathrm{d}U}{U}$. Een spanning die 4,2 % lager is, geeft 8,3 % minder vermogen. Zo reken je in hoofdstuk 6 met meetonzekerheden: een macht n vermenigvuldigt de relatieve fout met n.

Het model bepaalt de gevoeligheid

Een ledstrip is geen gewone weerstand: per segment staan drie leds (samen ongeveer 9 V) in serie met 150 Ω (hoofdstuk 19 van Fundamental). Dan is $I = (U - 9\,\mathrm{V})/150\,\Omega$ en $\frac{\mathrm{d}I/I}{\mathrm{d}U/U} = \frac{U}{U-9} = 4$ bij 12 V: dezelfde spanningsdaling kost ongeveer vier keer zoveel stroom. De afgeleide is zo goed als het model waarvan je ze neemt.



Bij 11,5 V ligt de raaklijn maar 0,008 W onder de kromme: voor kleine veranderingen is lineariseren uitstekend.

NASLAG · 1.15

Afgeleiden en rekenregels

15/25

Alle regels volgen uit de definitie. Controleer een resultaat altijd numeriek (een centrale differentie) en op eenheden.

definitie

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

symbool	betekenis	eenheid
$f'(a)$	afgeleide in a	eenheid van f per eenheid van x
h	toename van x	eenheid van x

raaklijn in a

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

product en quotiënt

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

kettingregel

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

voorwaartse en centrale differentie

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

symbool	betekenis	eenheid
h	stap	eenheid van x

tweede afgeleide, numeriek

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \approx f''(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$	opmerking
c (constante)	0	een constante verandert niet
x^n	$n\,x^{n-1}$	voor elke reële n, bv. $\sqrt{x} = x^{1/2}$ en $1/x = x^{-1}$
e^x	e^x	de enige functie (op een factor na) die haar eigen afgeleide is
a^x	$a^x \ln a$	want $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$
$\ln x$	$1/x$	voor $x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	x in radialen
$\cos x$	$-\sin x$	x in radialen
e^{kx}, $\sin(\omega t)$	$k\,\mathrm{e}^{kx}$, $\omega\cos(\omega t)$	kettingregel met een lineaire binnenfunctie

methode	fout (afbreken)	stap h halveren	beste h (float, $f \sim f''$)
voorwaarts of achterwaarts	$\approx \frac{1}{2} f'' \, h$	fout / 2	$\sqrt{\varepsilon} \approx 10^{-8}$
centraal	$\approx \frac{1}{6} f''' \, h^2$	fout / 4	$\sqrt[3]{\varepsilon} \approx 10^{-5}$
uit meetdata met ruis σ	$+\,\sigma/(\sqrt{2}\,h)$ (centraal)	ruis × 2	volgt uit ruis en kromming

$\varepsilon = 2^{-52} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-16}$: de relatieve afrondingsfout van een float.

UITLEG · 1.16

Numeriek differentiëren: drie differenties

16/25

Een computer kent geen limieten. Hij neemt een kleine, eindige stap h en rekent een helling uit. Welke koorde je neemt, maakt veel uit. De reeks van Taylor (een raaklijn met correcties, zie de naslag) zegt

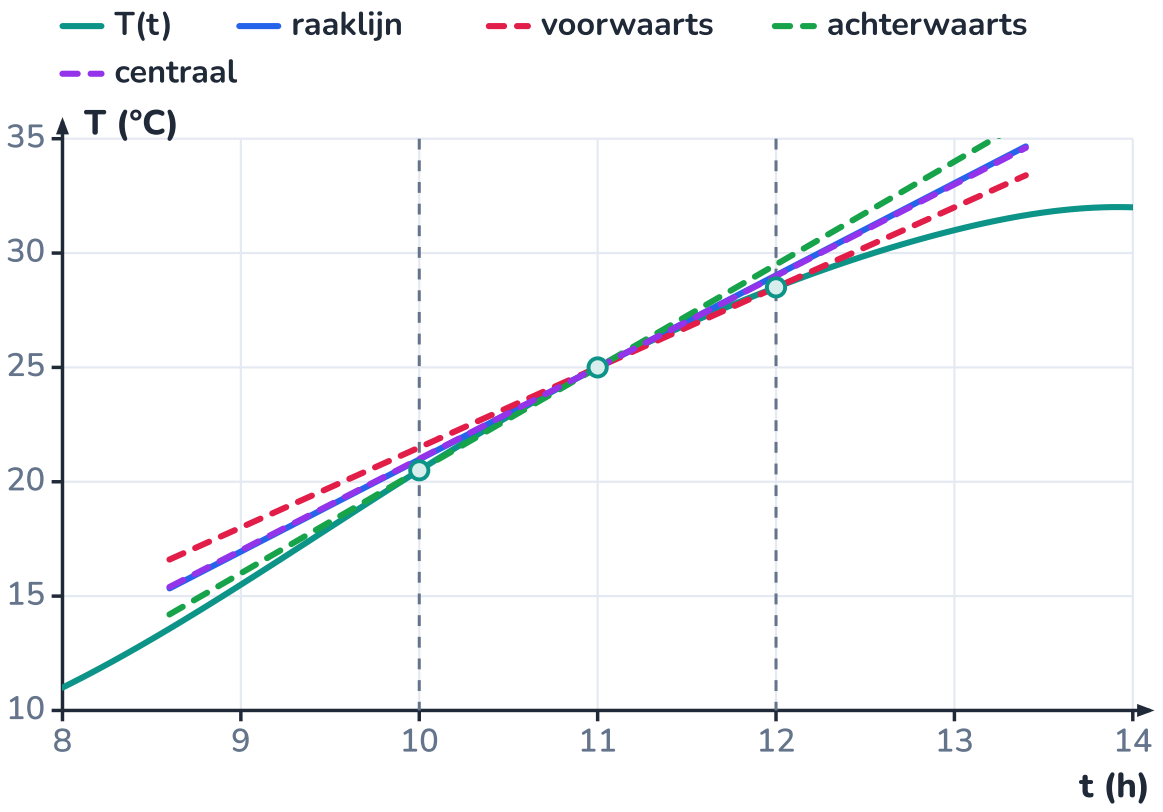
$$f(x \pm h) = f(x) \pm h f'(x) + \tfrac{h^2}{2} f''(x) \pm \tfrac{h^3}{6} f'''(x) + \dots$$

Houd je alleen het plusteken, dan is de **voorwaartse differentie** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \dots$: de fout is evenredig met h (eerste orde). Trek je de twee versies van elkaar af, dan vallen de termen met f'' weg:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \tfrac{h^2}{6} f'''(x) + \dots$$

De **centrale differentie** is van tweede orde: halveer h en de fout wordt vier keer kleiner. In de figuur, met de uurwaarden van de kas rond 11 uur ($h = 1\,\mathrm{h}$): voorwaarts $28{,}5 - 25{,}0 = 3{,}5$ °C/h, achterwaarts $25{,}0 - 20{,}5 = 4{,}5$ °C/h, centraal $(28{,}5 - 20{,}5)/2 = 4{,}0$ °C/h. De helling van het model is 4,03 °C/h: de centrale koorde ligt bijna evenwijdig met de raaklijn.

Waarom zou je dan ooit voorwaarts rekenen? Omdat je in een regelaar de toekomst niet kent: op het laatste meetpunt kan alleen de **achterwaartse** differentie. De D-actie van hoofdstuk 39 doet precies dat.



Voorwaarts (3,5), achterwaarts (4,5) en centraal (4,0 °C/h) rond 11 uur: de centrale koorde is bijna evenwijdig met de raaklijn.

CODE · 1.17

Hoe klein mag h zijn?

17/25

Kleiner is beter, zegt de afbreekfout. Maar een computer rekent met ongeveer 16 beduidende cijfers. Is h heel klein, dan liggen $f(x+h)$ en $f(x)$ zo dicht bij elkaar dat hun verschil vooral uit afrondingsruis bestaat, en die deel je dan nog eens door een heel kleine h. Probeer het met $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $x = 1$, waarvan de afgeleide exact e is:

Python **stapgrootte.py** 13 regels

```python
# stapgrootte.py - de fout van een voorwaartse en een centrale differentie
import math

f = math.exp            # testfunctie f(x) = e^x: haar afgeleide is e^x zelf
x = 1.0
exact = math.exp(x)

print("  h       voorwaarts  centraal")
for k in range(1, 14):
    h = 10.0 ** -k
    voorw = (f(x + h) - f(x)) / h
    centr = (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
    print("1e-%02d   %9.1e   %9.1e" % (k, abs(voorw - exact), abs(centr - exact)))
```

Uitvoer:

```
  h       voorwaarts  centraal
1e-01     1.4e-01     4.5e-03
1e-02     1.4e-02     4.5e-05
```

1e-03	1.4e-03	4.5e-07
1e-04	1.4e-04	4.5e-09
1e-05	1.4e-05	5.9e-11
1e-06	1.4e-06	1.6e-10
1e-07	1.4e-07	5.9e-11
1e-08	6.6e-09	6.6e-09
1e-09	2.2e-07	6.6e-09
1e-10	1.5e-06	6.7e-07
1e-11	3.3e-05	1.0e-05
1e-12	4.3e-04	2.1e-04
1e-13	4.6e-04	4.6e-04

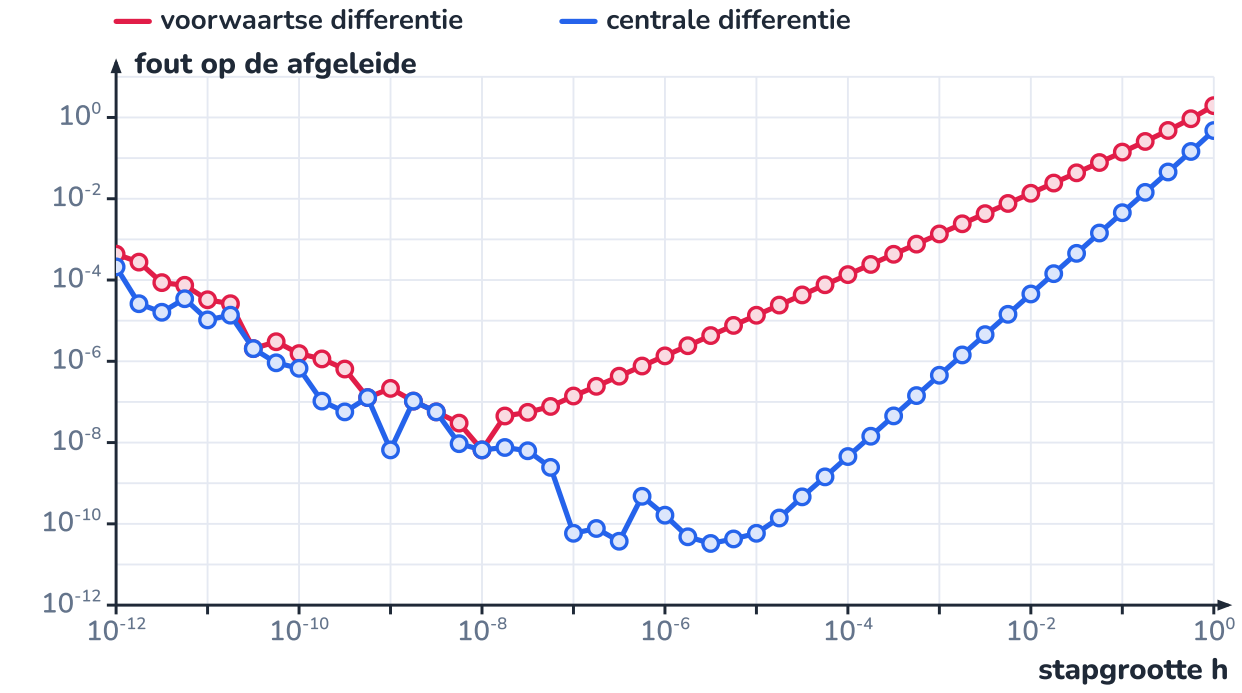
Zolang de afbreekfout domineert, daalt de centrale fout met een factor 100 per factor 10 in h (tweede orde) en de voorwaartse met een factor 10 (eerste orde). De centrale fout is het kleinst rond $h = 10^{-5}$, de voorwaartse rond 10^{-8}; bij nog kleinere h stijgen beide weer. Een model voor de totale fout van de voorwaartse differentie is

$$E(h) \approx \tfrac{1}{2}|f''|\,h + \frac{\varepsilon\,|f|}{h}, \qquad \varepsilon = 2^{-52} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-16}.$$

De eerste term daalt met h, de tweede stijgt: het minimum ligt waar ze ongeveer even groot zijn, bij $h \approx \sqrt{2\varepsilon} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-8}$. Voor de centrale differentie geeft hetzelfde redeneren $h \approx \sqrt[3]{3\varepsilon} \approx 9 \cdot 10^{-6}$. De log-loggrafiek (uit dezelfde formules, met vier punten per decade) toont het V-patroon: rechts de rechte van de afbreekfout (helling 1 of 2), links de ruwe rand van de afronding (helling −1).

In de praktijk

Neem voor een centrale differentie van een functie die je zelf kan uitrekenen $h \approx 10^{-5}$ tot 10^{-6} maal de grootte van x. Beter nog: gebruik een exacte afgeleide (met de hand of automatisch, zoals neurale netwerken dat doen in hoofdstuk 43).



Links wint de afrondingsfout, rechts de afbreekfout; de centrale differentie haalt ongeveer tien cijfers, de voorwaartse acht.

Afgeleiden uit meetdata: ruis tegenover stapgrootte

Een meetreeks heeft geen afrondingsfout van 10^{-16} maar ruis van een tiende graad. Stel dat elke meting een toevallige fout met standaardafwijking σ heeft. De centrale differentie deelt het verschil van twee metingen door $2h$; de fout op dat verschil is $\sqrt{2}\,\sigma$ (hoofdstuk 6), dus

RUIS OP EEN CENTRALE DIFFERENTIE

$$\sigma_{\dot y} \approx \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{2h} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\,h}$$

Halveer h en de ruis op de afgeleide verdubbelt. Tegelijk groeit de afbreekfout $\frac{h^2}{6}|f'''|$ met h.

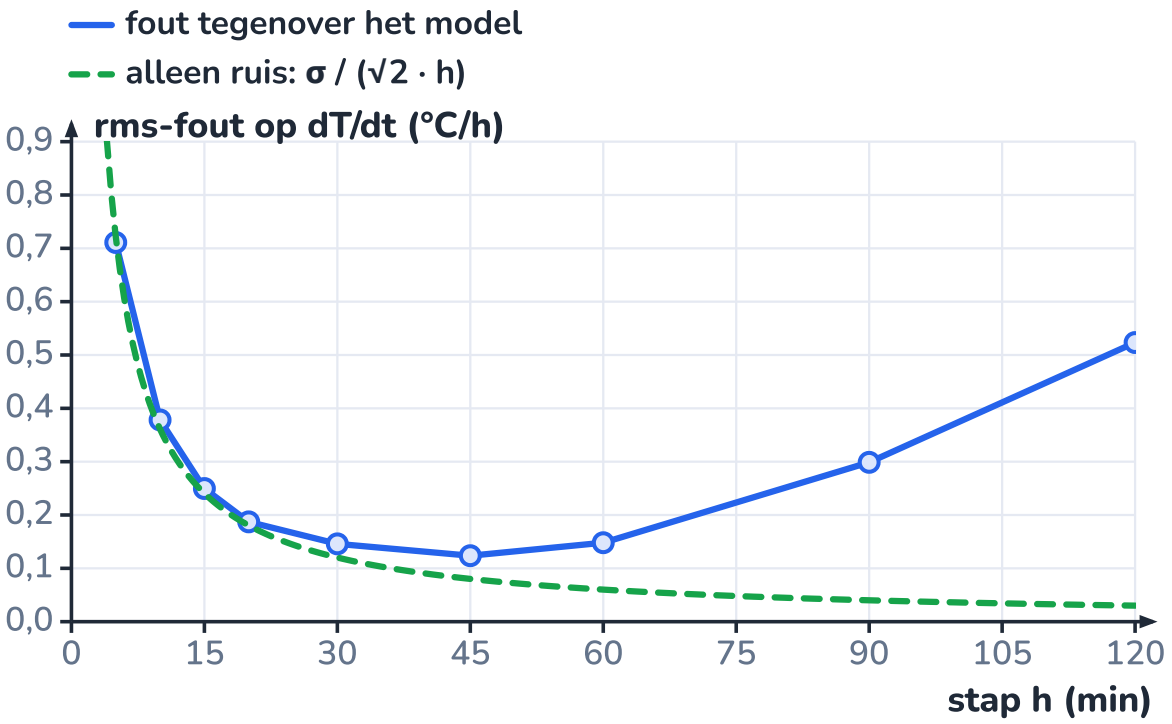
Voor de voorbeeldreeks van de meetkas (elke 5 minuten, ruis $\sigma \approx 0{,}08$ °C en afgerond op 0,1 °C, samen $\sigma \approx 0{,}085$ °C) geeft $h = 5\,\text{min}$ al $\sigma_{\dot T} \approx 0{,}72\,^\circ\text{C/h}$: de opwarmsnelheid springt alle kanten op. Omdat we de reeks zelf uit een glad model gemaakt hebben, kennen we hier de echte opwarmsnelheid en kunnen we de fout meten:

stap h	5 min	10 min	15 min	20 min	30 min	45 min	60 min	90 min	120 min
rms-fout (°C/h)	0,71	0,38	0,25	0,19	0,15	0,12	0,15	0,30	0,52

De fout daalt eerst (minder ruis), bereikt een minimum rond $h = 45$ minuten en stijgt dan weer (de centrale koorde vlakt de piek af). Met echte metingen ken je het model niet, maar het patroon blijft: kies h zo dat de ruis klein wordt tegenover het signaal, en niet groter dan de tijd waarop het signaal zelf verandert.

Hoe kleiner de stap, hoe nauwkeuriger

Dat geldt voor een formule, niet voor meetdata. Wie de afgeleide neemt tussen twee opeenvolgende metingen, meet vooral ruis. Andere remedies dan een grotere stap: eerst gladmaken (een voortschrijdend gemiddelde, hoofdstuk 21), of een rechte fitten door een venster van metingen en haar helling nemen (kleinste kwadraten, hoofdstuk 41).



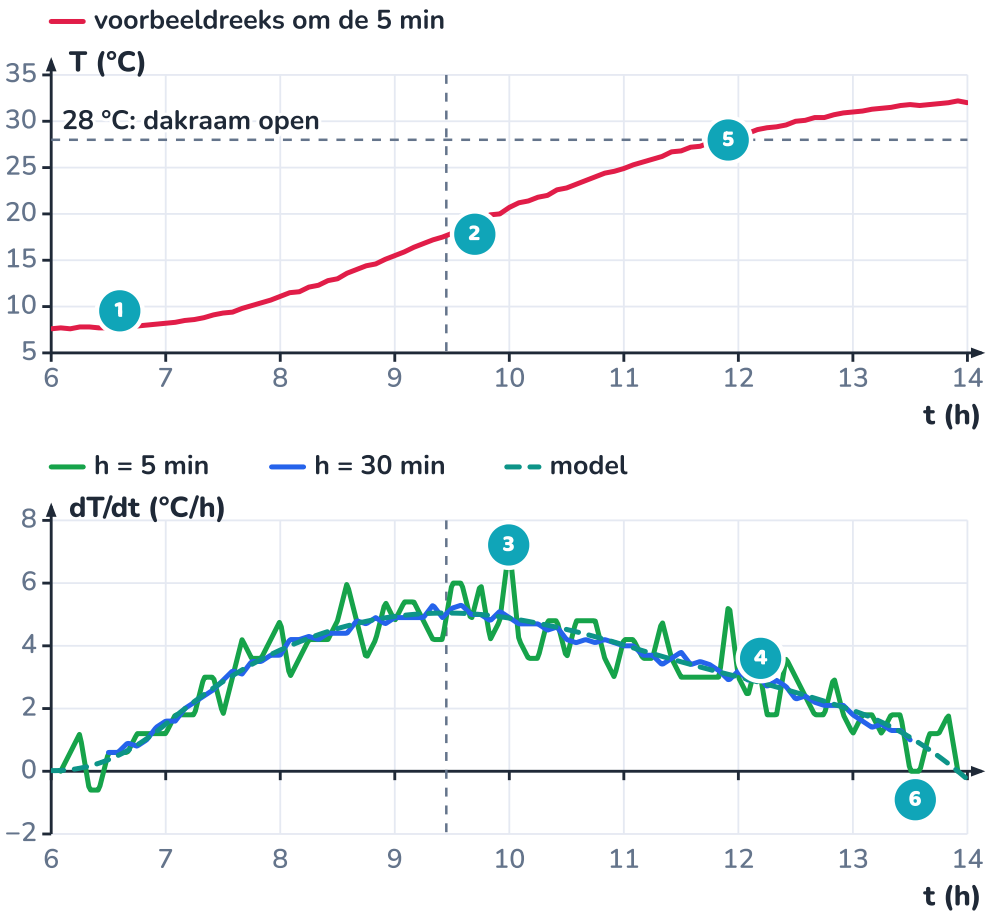
Bij kleine stap domineert de ruis (stippellijn), bij grote stap het afvlakken van de piek; ertussen ligt een beste stap.

ONTLEED · 1.19

De opwarmsnelheid van de meetkas lezen

19/25

De voorbeeldreeks (boven) is gemaakt uit het gladde model van de aprildag, met ruis van ongeveer 0,1 °C en afgerond op 0,1 °C, zoals een logger die elke 5 minuten een gemiddelde wegschrijft. Onder: de opwarmsnelheid met een centrale differentie met $h = 5$ en $h = 30$ minuten, en die van het model.



Dezelfde meetreeks, twee stapgroottes: kort geeft ruis, lang geeft een gladde maar iets afgevlakte opwarmsnelheid.

1 **Koude ochtend**
Tot ongeveer 7 uur staat de temperatuur bijna stil rond 8 °C: de afgeleide is ongeveer nul. De zon staat nog te laag.

2 **Steilste stijging**
Om 9:27 warmt het model het snelst op: 5,0 °C/h. De verticale lijn loopt door beide grafieken: hier is T' maximaal en heeft T een buigpunt.

3 **Ruis, geen opwarming**
Met h = 5 min piekt de afgeleide tot 7,2 °C/h om 10:00. Dat is ruis: een verschil van 0,1 °C over 10 minuten is al 0,6 °C/h.

4 **Glad, maar afgevlakt**
Met h = 30 min volgt de schatting het model op enkele tienden: grootste waarde 5,3 °C/h om 9:20, tegenover 5,0 °C/h in het model.

5 **28 °C**
Om 11:55 meet de logger voor het eerst 28 °C: hier moet het dakraam open (hoofdstuk 25 van Fundamental).

6 **Bijna aan de top**
Tegen 14:00 zakt de opwarmsnelheid naar nul: het maximum van 32,0 °C valt om 13:55.

CODE · 1.20

Habitat: de opwarmsnelheid berekenen op de Pi

20/25

De centrale computer van het station (een Raspberry Pi met Python) krijgt de metingen van de meetkas als CSV-bestand, in het formaat van hoofdstuk 28 van Intermediate. De eerste regels:

```
tijdstip,temperatuur_C
06:00,7.6
```

```
06:05,7.7
06:10,7.6
06:15,7.8
...
```

Het programma leest de reeks, berekent centrale differenties over k meetstappen aan elke kant en maakt met de raaklijn een voorspelling. De tijd staat in uren, zodat de afgeleide meteen in °C/h uitkomt.

Python **opwarmsnelheid.py** 33 regels

```python
# opwarmsnelheid.py - hoe snel warmt de meetkas op? Centrale differenties op een meetreeks.
import csv

tijden, temps = [], []                          # tijd in uren, temperatuur in graden Celsius
with open("meetkas_aprildag.csv", newline="") as f:
    for rij in csv.DictReader(f):
        uur, minuut = rij["tijdstip"].split(":")
        tijden.append(int(uur) + int(minuut) / 60)
        temps.append(float(rij["temperatuur_C"]))


def klok(t):
    m = round(t * 60)
    return "%d:%02d" % (m // 60, m % 60)


def afgeleide(t, y, k):
    """Centrale differentie over k meetstappen aan elke kant: (y[i+k] - y[i-k]) / (t[i+k] - t[i-k])."""
    return [(t[i], (y[i + k] - y[i - k]) / (t[i + k] - t[i - k])) for i in range(k, len(y) - k)]


for k in (1, 3, 6, 9):
    d = afgeleide(tijden, temps, k)
    t_max, v_max = max(d, key=lambda p: p[1])
    print("h = %2d min: grootste opwarmsnelheid %.1f °C/h om %s" % (5 * k, v_max, klok(t_max)))

# voorspelling om 11:00 met de raaklijn (h = 15 min): wanneer is het 28 °C?
nu = tijden.index(11.0)
snelheid = dict(afgeleide(tijden, temps, 3))[11.0]
t_28 = 11.0 + (28.0 - temps[nu]) / snelheid
echt = next(t for t, T in zip(tijden, temps) if T >= 28.0)
print("om 11:00: %.1f °C en %.1f °C/h -> 28 °C om ongeveer %s (gemeten: %s)"
      % (temps[nu], snelheid, klok(t_28), klok(echt)))
```

Uitvoer:

```
h =  5 min: grootste opwarmsnelheid 7.2 °C/h om 10:00
h = 15 min: grootste opwarmsnelheid 5.6 °C/h om 9:45
h = 30 min: grootste opwarmsnelheid 5.3 °C/h om 9:20
h = 45 min: grootste opwarmsnelheid 5.1 °C/h om 9:15
om 11:00: 24.9 °C en 3.8 °C/h -> 28 °C om ongeveer 11:49 (gemeten: 11:55)
```

Dezelfde meetreeks geeft een grootste opwarmsnelheid van 7,2 tot 5,1 °C/h, naargelang de stap. Het echte model zegt 5,0 °C/h om 9:27. Een stap van 30 tot 45 minuten zit er het dichtst bij; bij 5 minuten meet je ruis. Let op het detail `t[i + k] - t[i - k]`: het programma deelt door het echte tijdsverschil, zodat het ook werkt als er een meting ontbreekt of de logger niet precies om de 5 minuten schrijft.

numpy kan het ook

`numpy.gradient(temps, tijden)` geeft centrale differenties met $k = 1$ (en aan de randen een eenzijdige). Handig, maar met ruisende data wil je net een grotere k kunnen kiezen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.21

Wanneer moet het dakraam open?

21/25

Het dakraam van de meetkas opent bij 28 °C (hoofdstuk 25 van Fundamental). De duwstang heeft ongeveer 8 s nodig, maar de kas koelt pas echt af als het raam al een tijd open staat. Het brein van het station wil daarom een kwartier **vooruit** kijken. Om 11:00 meet de logger 24,9 °C. Voorspel met de raaklijn wanneer 28 °C bereikt wordt, en beoordeel de voorspelling.

GEGEVEN

- $T(11{:}00) = 24{,}9\,^\circ\mathrm{C}$
- centrale differentie met $h = 15\,\mathrm{min}$: $\dot{T} = 3{,}80\,^\circ\mathrm{C/h}$; met $h = 30\,\mathrm{min}$: $4{,}00\,^\circ\mathrm{C/h}$

GEVRAAGD

- het tijdstip t_{28} volgens de raaklijn
- hoe betrouwbaar dat is

OPLOSSING

1. Raaklijn: $T(t) \approx T(11) + \dot{T}\,(t - 11)$. Zet $T = 28$: $t_{28} = 11 + \dfrac{28 - 24{,}9}{3{,}80} = 11{,}816\,\mathrm{h}$, dus om 11:49.
2. Met $h = 30\,\mathrm{min}$: $t_{28} = 11 + \dfrac{3{,}1}{4{,}00} = 11{,}775\,\mathrm{h}$, om 11:46.
3. Werkelijkheid in de meetreeks: voor het eerst 28 °C om 11:55. De raaklijn voorspelt iets te vroeg, omdat de opwarmsnelheid rond 11 uur al daalt ($\ddot{T} < 0$): de grafiek is bol en ligt onder haar raaklijn.
4. Beslissing: 'open als de voorspelde temperatuur over 15 minuten 28 °C haalt'. Om 11:00 geeft dat $24{,}9 + 3{,}80 \cdot 0{,}25 = 25{,}8$ °C: nog niet. Rekent het brein dat elke 5 minuten opnieuw, dan gaat het raam open om 11:35 (voorspeld 28,0 °C), 20 minuten voor de kas 28 °C meet.

ANTWOORD

Volgens de raaklijn ongeveer om 11:49 (met een stap van 30 min om 11:46); gemeten om 11:55. Een voorspelling van bijna een uur vooruit met één helling zit 6 minuten te vroeg: voor een dakraam goed genoeg, en aan de veilige kant.

Klopt dit? De fout past bij de tweede afgeleide: in het model is $\ddot{T} \approx -1{,}1\,^\circ\mathrm{C/h^2}$ om 11 uur, dus mist de raaklijn na Δt ongeveer $\frac{1}{2}|\ddot{T}|\,\Delta t^2$: na 0,92 h ongeveer 0,5 °C, genoeg om het tijdstip enkele minuten te vroeg te leggen. Wie beter wil, neemt de kromming mee (een parabool, hoofdstuk 41) of een model van de kas (hoofdstuk 4 en 17).

UITLEG · 1.22

De afgeleide in de techniek

22/25

Veel grootheden in de techniek *zijn* afgeleiden. Telkens meet de ene grootheid hoe snel de andere verandert, en de eenheid volgt vanzelf:

grootheid	is de afgeleide van	formule	eenheid
snelheid	plaats	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	m/s
versnelling	snelheid	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	m/s²
vermogen	energie (of arbeid)	$P = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$	J/s = W
stroomsterkte	lading	$i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$	C/s = A
stroom in een condensator	spanning (maal C)	$i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$	A
spanning over een spoel	stroom (maal L)	$u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$	V
warmtestroom in een massa	temperatuur (maal C)	$P = C\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$	W
debiet	volume	$Q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$	m³/s, L/min
kracht	impuls	$F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$	N
gevoeligheid van een sensor	uitgang naar ingang	$\mathrm{d}U/\mathrm{d}T$	V/K

Een paar gevolgen die je in Habitat terugziet. De energiemeter van de module telt wattuur; het vermogen op een ogenblik is de helling van die telling. De stroom door een condensator is nul als de spanning constant is, en groot als ze snel verandert: daarom laat een condensator gelijkstroom tegen en wisselstroom door (hoofdstuk 20). Een spoel doet het omgekeerde: een stroom die plots onderbroken wordt, geeft een enorme $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, de reden voor de vrijloopdiode over de pomp (hoofdstuk 23 van Intermediate). En de warmtestroom in het station is $C\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$: meet je hoe snel het afkoelt, dan weet je hoeveel warmte er weglekt.

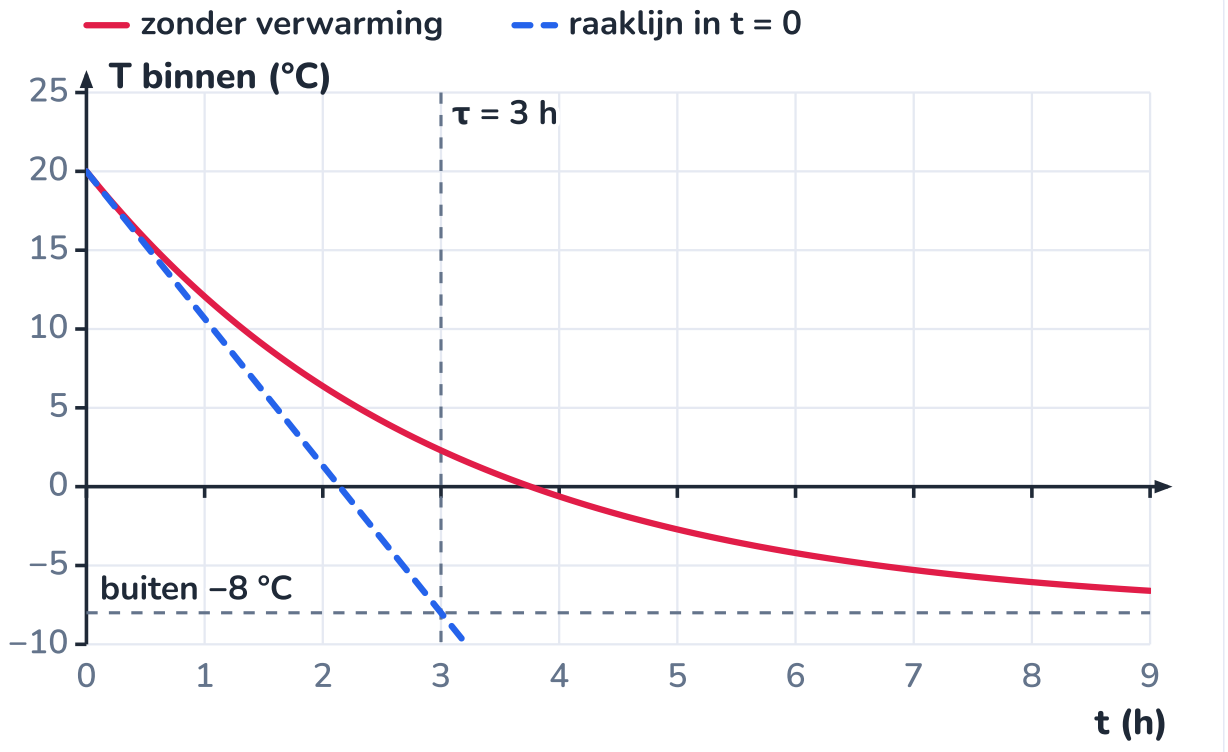


De energiemeter telt wattuur; het vermogen dat nu door de kabel gaat, is de helling van die telling.

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.23

Het warmteverlies van het station uit een afkoelcurve

Op een koude nacht (buiten −8 °C) valt de stroom uit. Het station stond op 20 °C. Het warmtemodel (hoofdstuk 39) zegt $T(t) = -8 + 28\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ met $\tau = 3\,\mathrm{h}$ en warmtecapaciteit $C = 540\,\mathrm{kJ/K}$. Bereken de afkoelsnelheid op het moment van de uitval en het warmteverlies dat daaruit volgt. Wat meet de logger na 10 minuten, en wat zou je met die meting besluiten?



De raaklijn in t = 0 bereikt de buitentemperatuur na τ = 3 h; haar helling maal C is het warmteverlies van 1400 W.

GEGEVEN

- $T(t) = -8 + 28\,\mathrm{e}^{-t/3}$ (t in h, T in °C)
- $C = 540\,\mathrm{kJ/K}$

GEVRAAGD

- $\dot{T}(0)$
- $P = C\,|\dot{T}|$
- de schatting uit twee metingen

OPLOSSING

1. Kettingregel: $\dot{T}(t) = 28 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-t/3}$, dus $\dot{T}(0) = -\tfrac{28}{3} = -9{,}33\,^\circ\mathrm{C/h}$.
2. Omrekenen: $-9{,}33\,^\circ\mathrm{C/h} = -2{,}593 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K/s}$. Warmtestroom: $P = C\,|\dot{T}| = 540\,000 \cdot 2{,}593 \cdot 10^{-3} = 1400\,\mathrm{W}$.
3. Controle met het dossier: 50 W per graad verschil maal 28 °C is ook 1400 W. De afgeleide van de temperatuur *is* het warmteverlies, gedeeld door C.
4. Na 10 minuten meet de logger $T = -8 + 28\,\mathrm{e}^{-1/18} = 18{,}5$ °C. De voorwaartse differentie is $\frac{18{,}5-20{,}0}{1/6} = -9{,}0\,^\circ\mathrm{C/h}$, dus $P \approx 1350\,\mathrm{W}$: 4 % te laag, omdat de curve al afbuigt (en de meting afgerond is).

ANTWOORD

$\dot{T}(0) = -9{,}33\,^\circ\mathrm{C/h}$ **en** $P = 1400\,\mathrm{W}$**. Uit twee metingen met 10 minuten ertussen schat je ongeveer 1350 W.**

Klopt dit? De raaklijn in $t = 0$ snijdt de buitentemperatuur na precies $\tau = 3\,\mathrm{h}$: $28/\frac{28}{3} = 3$. Dat is een algemene eigenschap van een exponentiële afkoeling, en een snelle manier om τ uit een gemeten curve te halen (hoofdstuk 17).

UITGEWERKT VOORBEELD · 1.24

Stroom in een condensator

24/25

Een condensator van 1,0 µF laadt via 10 kΩ op tot 5,0 V, zoals in een ontdenderfilter (hoofdstuk 24 van Intermediate): $u(t) = 5{,}0\,(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$ met $\tau = RC$. Bereken de stroom $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ en controleer met de wet van Ohm. Bereken daarna hoe snel de spanning van de supercondensator (1 F) op de 5 V-rail zakt als hij 0,16 A levert.

GEGEVEN

- $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$, $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $U_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$
- supercondensator $C = 1\,\mathrm{F}$, $i = 0{,}16\,\mathrm{A}$

GEVRAAGD

- $i(t)$, $i(0)$
- $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ van de supercondensator en de tijd van 5,0 tot 4,5 V

OPLOSSING

1 $\tau = RC = 10^4 \cdot 10^{-6} = 0{,}010\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{ms}$.

2 Kettingregel: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 5{,}0 \cdot \dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 500\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{V/s}$.

3 $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 10^{-6} \cdot 500\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = 0{,}50\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{mA}$; $i(0) = 0{,}50\,\mathrm{mA}$.

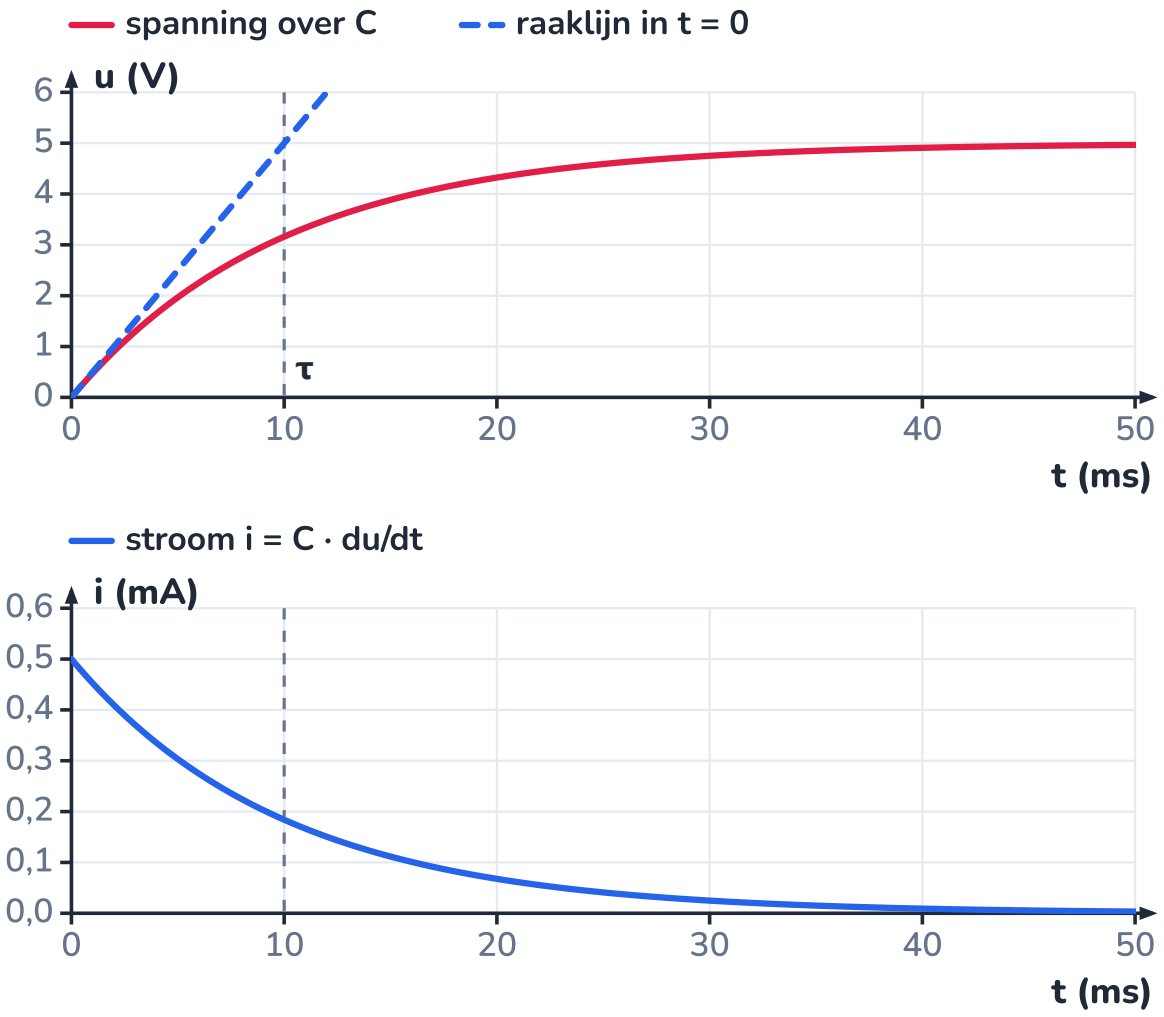
4 Ohm: over de weerstand staat $5{,}0 - u = 5{,}0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, dus $i = \dfrac{5{,}0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}{10\,000} = 0{,}50\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{mA}$. Dezelfde formule langs twee wegen.

5 Supercondensator: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{i}{C} = -0{,}16\,\mathrm{V/s}$, constant zolang de stroom constant is. Van 5,0 naar 4,5 V: $0{,}5/0{,}16 = 3{,}1\,\mathrm{s}$, zoals in hoofdstuk 24 van Intermediate.

ANTWOORD

$i(t) = 0{,}50\,\mathrm{e}^{-t/10\,\mathrm{ms}}\,\mathrm{mA}$**; de supercondensator zakt 0,16 V per seconde en houdt 3,1 s boven 4,5 V.**

Klopt dit? Eenheden: F · V/s = (C/V) · (V/s) = C/s = A. De raaklijn aan $u(t)$ in $t = 0$ bereikt 5,0 V na precies τ: dezelfde eigenschap als bij het afkoelende station.



Waar de spanning het steilst stijgt (bij de start), is de stroom het grootst; als u vlak wordt, valt i weg.

HET GEHEEL · 1.25

Waar afgeleiden vandaan komen en waar ze heen gaan

25/25

De afgeleide is de taal van verandering: ze verbindt de wiskunde (W) met beweging (K), energie en vermogen (E), elektronica (L), regelen (R) en data (A). Wie een model opstelt, schrijft bijna altijd op hoe snel iets verandert; wie meet, wil vaak weten hoe snel iets verandert. Het omgekeerde, uit een snelheid opbouwen hoeveel er is, is integreren: hoofdstuk 3.

F14 Beweging en snelheid
Steilheid van een (s,t)-grafiek is snelheid: het eerste idee van een afgeleide.

I3 Verbanden in data
De richtingscoëfficiënt met eenheid: de helling van een rechte, hier van een kromme.

I7 Beweging beschrijven
Raaklijnen op het oog en het trapeziumprofiel van het kasdak; hier exact.

I24 Condensatoren en de RC-tijd
i = C · du/dt en de laadcurve; hier afgeleid met de kettingregel.

I28 Functies, lijsten en data in Python
CSV-bestanden inlezen en verwerken in Python: de basis van de Habitat-code.

E2 Optimaliseren
Waar de afgeleide nul is, ligt een extremum: het beste ontwerp.

E3 Integralen: ophopen

Het omgekeerde van afleiden: uit vermogen energie, uit snelheid verplaatsing.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Modellen die zeggen hoe snel iets verandert: dy/dt = f(y, t).

E6 Statistiek en meetonzekerheid

Lineariseren is de basis van foutenpropagatie.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Differenties, afrondingsfouten en stabiliteit, verder uitgewerkt.

E39 PID-regeling

De D-actie is een achterwaartse differentie op een meting met ruis.

E43 Neurale netwerken

Leren is afleiden: de gradiënt van een fout naar duizenden parameters.

Habitat

Het brein van het station haalt uit elke meetreeks niet alleen waarden maar ook snelheden: de opwarmsnelheid van de meetkas (voorspellend dakraam), de afkoelsnelheid van het station (warmteverlies), het vermogen uit de energiemeter. Afspraak voor de software: een centrale differentie over 30 tot 45 minuten voor temperaturen die om de 5 minuten gelogd worden, en een achterwaartse differentie in regelaars. Opdracht 1.12 werkt dat uit.

SAMENVATTING

In het kort

- De gemiddelde verandering op $[a, b]$ is het differentiequotiënt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: de helling van een koorde, met als eenheid die van y per eenheid van x.
- De afgeleide $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ is de ogenblikkelijke veranderingssnelheid: de helling van de raaklijn $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Rekenregels: $(x^n)' = nx^{n-1}$, afleiden is lineair, $(uv)' = u'v + uv'$, $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$; $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\ln x)' = 1/x$, $(\sin x)' = \cos x$.
- Snelheid, versnelling en schok zijn de eerste, tweede en derde afgeleide van de plaats; een extremum van f valt waar $f' = 0$, een buigpunt waar f' extreem is.
- Lineariseren: $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$; een afgeleide is een gevoeligheid.
- Numeriek: voorwaartse differentie fout $\sim h$, centrale $\sim h^2$; bij heel kleine h wint de afrondingsfout, bij meetdata de ruis ($\sigma/(\sqrt{2}h)$): kies de stap bewust.
- In de techniek: $P = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$, $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, $P = C\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

differentiequotiënt

De gemiddelde verandering $\Delta y/\Delta x$ over een interval: de helling van de koorde tussen twee punten van een grafiek.

afgeleide

De ogenblikkelijke veranderingssnelheid $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$: de helling van de raaklijn in a. Eenheid: eenheid van f per eenheid van x.

raaklijn

De rechte door een punt van een grafiek met als helling de afgeleide in dat punt: de beste lineaire benadering van de functie daar.

tweede afgeleide

De afgeleide van de afgeleide; zegt hoe de helling verandert (bolling). Bij een plaatsfunctie is ze de versnelling.

buigpunt

Punt waar de bolling van een grafiek omslaat; daar is de eerste afgeleide extreem en de tweede afgeleide nul.

kettingregel

De afgeleide van een samengestelde functie: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

schok (jerk)

De afgeleide van de versnelling (m/s³). Een sprong in de versnelling geeft een oneindige schok: een tik in de mechaniek.

lineariseren

Een functie in de buurt van een punt vervangen door haar raaklijn: $f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x$.

centrale differentie

De numerieke benadering $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ van $f'(x)$, met een fout van orde h^2.

afbreekfout

De fout van een numerieke formule omdat de stap h niet nul is; ze wordt kleiner met h.

afrondingsfout

De fout doordat een computer met een eindig aantal cijfers rekent (ongeveer 16 bij float); ze wordt groter bij een heel kleine stap.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 2

Optimaliseren

Het beste ontwerp vinden: waar de afgeleide nul is, op de rand, of numeriek

Ingenieurs zoeken zelden 'een' oplossing; ze zoeken de beste: de tank met het minste materiaal, de spanning met het grootste vermogen, de route met de laagste kosten. Waar een gladde functie een maximum of minimum heeft, is haar afgeleide nul. Je leert optimalisatieproblemen opstellen en exact oplossen, herkent wanneer het optimum op een grens ligt, zoekt numeriek als de formule niet oplosbaar is, en weegt doelen af die elkaar tegenwerken. Het Habitat-werk: de drinkwatertank van het station.

8× uitleg | 5× uitgewerkt voorbeeld | 1× ontleed | 1× naslag | 1× verhaal | 1× het geheel | 2× code | ± 10 lestijden

W Wiskundig modelleren | D Ontwerpen en maken



Hoe breed en hoe hoog moet een tank van 500 L zijn? Minder materiaal, minder vloer, door de deur: drie doelen tegelijk.

Na dit hoofdstuk

- Je kan stationaire punten van een functie bepalen en met een tekenschema of de tweede afgeleide beslissen of het een maximum, minimum of buigpunt is.
- Je kan het globale extremum op een gesloten interval vinden door stationaire punten, randen en knikken te vergelijken.
- Je kan een optimalisatieprobleem opstellen: variabelen met eenheden, een doelfunctie, randvoorwaarden en het domein.
- Je kan klassieke problemen oplossen en interpreteren: het blik met het minste materiaal, maximale vermogensoverdracht, de kortste of goedkoopste weg.
- Je kan uitleggen waarom een optimum vlak is en wat dat betekent voor ontwerpvrijheid en toleranties.
- Je kan numeriek optimaliseren met een rooster, bisectie op de afgeleide, de gulden snede en perturb and observe, en de methoden vergelijken.
- Je kan meerdere doelen afwegen met een gewogen som of een Pareto-front en een ontwerpkeuze onderbouwen.
- Je kan het idee van partiële afgeleiden en gradiëntafdaling toepassen op een probleem met twee variabelen.

VERHAAL · 2.1

Fermat en de luie lichtstraal

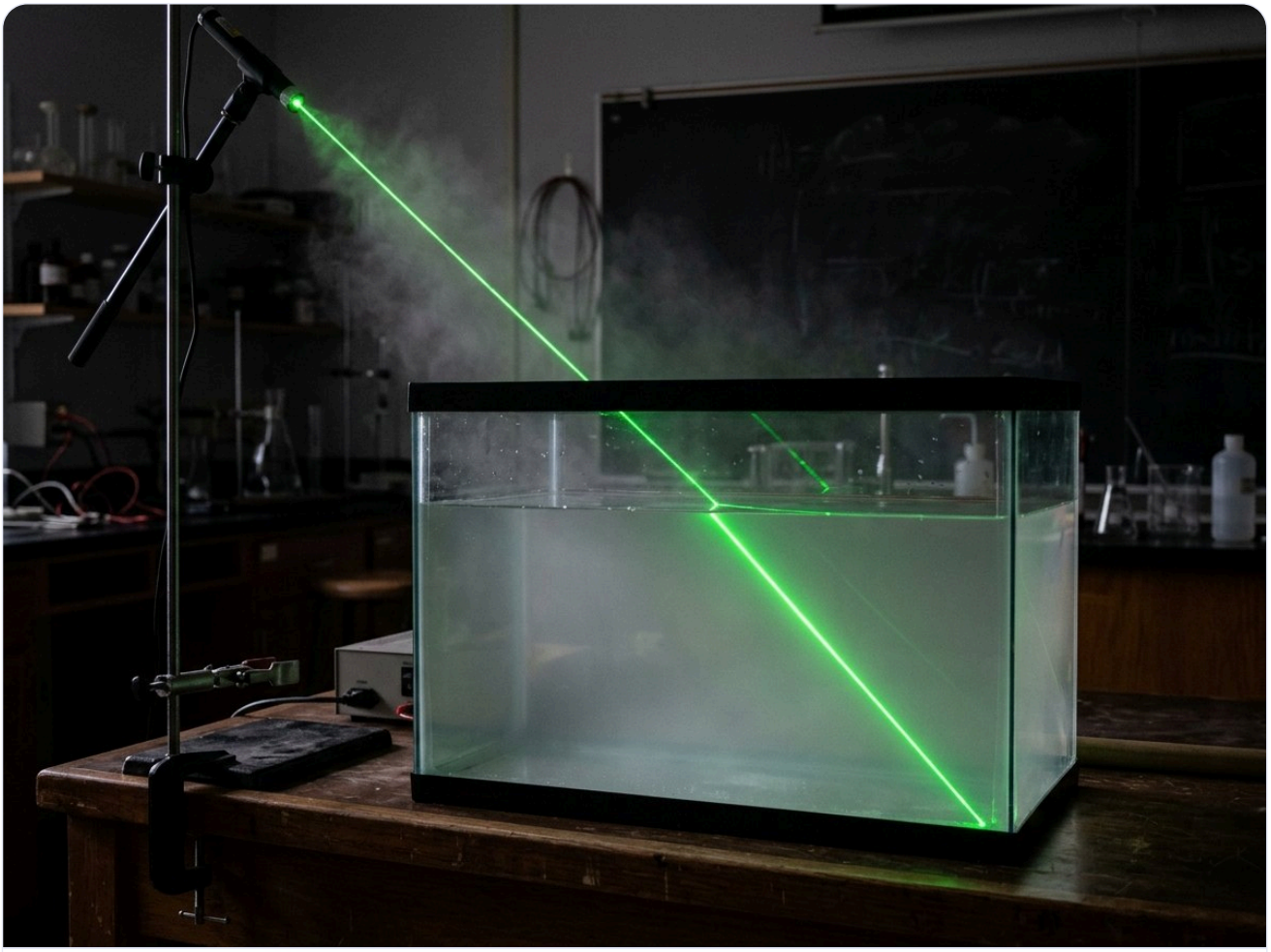
Al in de eerste eeuw liet Heron van Alexandrië zien dat een lichtstraal die op een spiegel weerkaatst, de kortste weg neemt tussen bron en oog. Vijftienhonderd jaar later ging de Franse jurist en amateurwiskundige Pierre de Fermat een stap verder. Rond 1636 beschreef hij in een tekst die via de Parijse monnik Marin Mersenne van hand tot hand ging, een methode om maxima en minima te vinden: vervang x door $x + e$, stel de twee uitdrukkingen 'bijna gelijk', deel door e en laat daarna e weg. Dat is, zonder het woord, de afgeleide gelijkstellen aan nul, dertig jaar voor Newton en Leibniz.

In 1662 gebruikte Fermat zijn methode voor licht dat van lucht naar water gaat. Hij nam aan dat licht niet de kortste weg neemt maar de **snelste**, en dat het in water trager gaat. De weg van de kortste tijd breekt dan af aan het oppervlak, en de knik volgt precies de brekingswet die Snellius en Descartes eerder uit metingen hadden gehaald. Voor het eerst werd een natuurwet geschreven als een optimum.

Dat idee kwam steeds terug: een zeepvlies neemt de kleinste oppervlakte aan, een ketting hangt met het laagste zwaartepunt, bijen bouwen zeshoekige cellen (dat zeshoeken de wand met de minste omtrek geven, werd pas in 1999 bewezen door Thomas Hales). Ingenieurs doen het bewust: minder materiaal, meer vermogen, lagere kosten. Maar de natuur heeft één doel per keer, een ontwerper vaak drie die elkaar tegenwerken.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het brein van het station neemt voortdurend beslissingen: welke spanning haalt het meeste uit de panelen, wanneer laden, hoeveel lampen aan? Achter elk van die beslissingen zit een optimalisatie. En elk onderdeel dat je ontwerpt, van tank tot mast, is een afweging die je met cijfers wil kunnen verdedigen. Gradiëntafdaling, het werkpaard van de AI in hoofdstuk 43, begint hier.



Licht dat van lucht naar water gaat, knikt: volgens Fermat de weg van de kortste tijd.

UITLEG · 2.2

Extrema en de horizontale raaklijn

wat je al kan	wat nu komt
de top van een parabool, betekenisvol interpreteren (hoofdstuk 4 van Intermediate)	het maximum of minimum van elke afleidbare functie
een criteriatabel met gewichten (hoofdstuk 30 van Fundamental, 38 van Intermediate)	de gewogen som en het Pareto-front
het MPP van een zonnepaneel aflezen (hoofdstuk 20 van Intermediate)	het MPP berekenen, en een regelaar die het zoekt
afgeleiden, raaklijnen, numeriek differentiëren (hoofdstuk 1)	de afgeleide nul stellen, en numeriek zoeken als dat niet exact kan

Een functie f heeft in c een **lokaal maximum** als $f(c) \geq f(x)$ voor alle x in de buurt van c; een **globaal maximum** als dat geldt voor het hele domein. Minimum analoog. Het kernargument is kort: is f afleidbaar in een lokaal maximum c binnen het domein, dan is het differentiequotiënt $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ niet positief voor $h > 0$ en niet negatief voor $h < 0$. Beide limieten zijn $f'(c)$, dus:

STELLING VAN FERMAT

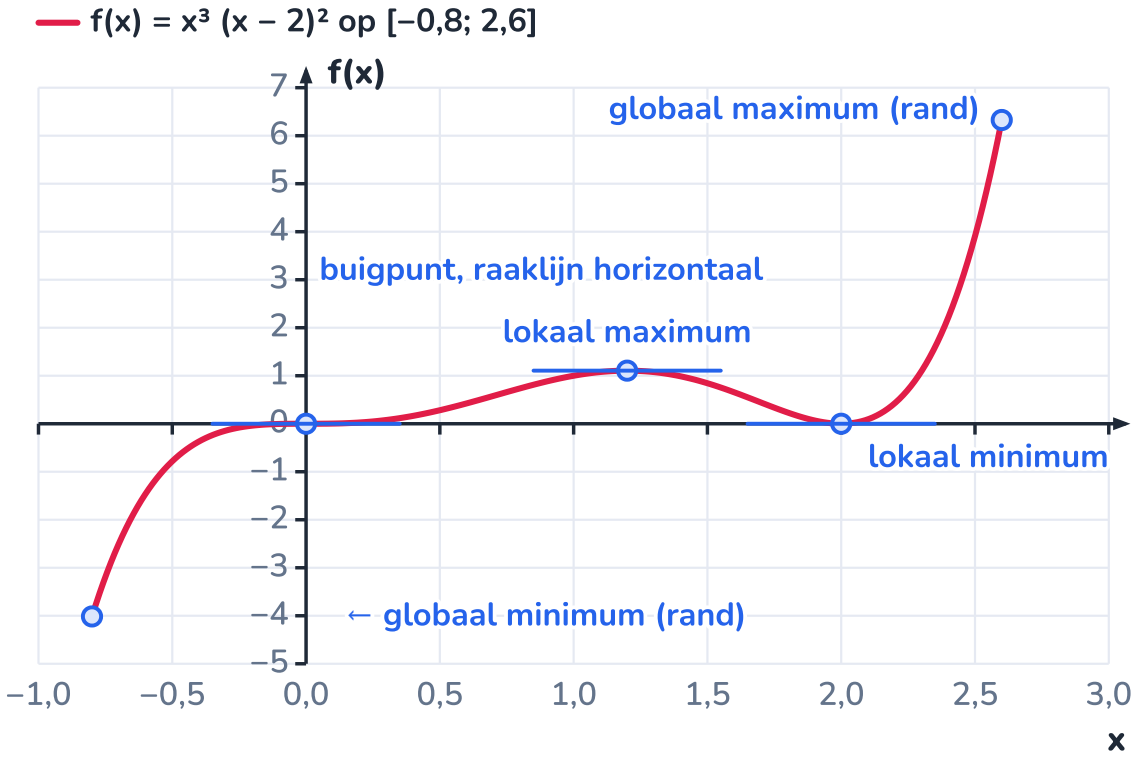
$$f \text{ heeft een lokaal extremum in } c \text{ (binnen het domein)} \implies f'(c) = 0$$

De omgekeerde richting geldt **niet**: $f'(c) = 0$ maakt c alleen een **kandidaat** (een stationair punt).

Waar zoek je dus? Op drie soorten plaatsen:

1. **Stationaire punten**: $f'(x) = 0$.
2. **Randen** van een gesloten domein: daar hoeft de afgeleide niet nul te zijn.
3. Punten waar f **niet afleidbaar** is: een knik, zoals $|x|$ in 0.

De figuur toont het allemaal voor $f(x) = x^3(x-2)^2$ op $[-0{,}8;\ 2{,}6]$. In $x = 0$ is de raaklijn horizontaal, maar de functie stijgt links én rechts: een **buigpunt** met horizontale raaklijn, geen extremum. Het globale maximum en minimum liggen op de randen, waar $f' \neq 0$.



Drie horizontale raaklijnen, maar maar twee lokale extrema; de globale extrema liggen op de rand.

UITLEG · 2.3

Maximum, minimum of geen van beide?

3/19

Tekenschema. De afgeleide vertelt waar f stijgt ($f' > 0$) en daalt ($f' < 0$). Gaat f' in een stationair punt van $+$ naar $-$, dan is het een maximum; van $-$ naar $+$ een minimum; wisselt het teken niet, dan geen extremum. Voor $f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3$ is $f'(x) = x^2(x-2)(5x-6)$:

x	$-0{,}8$		0		$1{,}2$		2		$2{,}6$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-4{,}01$	↗	0	↗	$1{,}106$	↘	0	↗	$6{,}33$

x	$-0{,}8$	0	$1{,}2$	2	$2{,}6$
$f''(x)$		0	$-5{,}76$	16	
	min (rand)	geen extremum	lok. max	lok. min	max (rand)

TEST MET DE TWEEDE AFGELEIDE

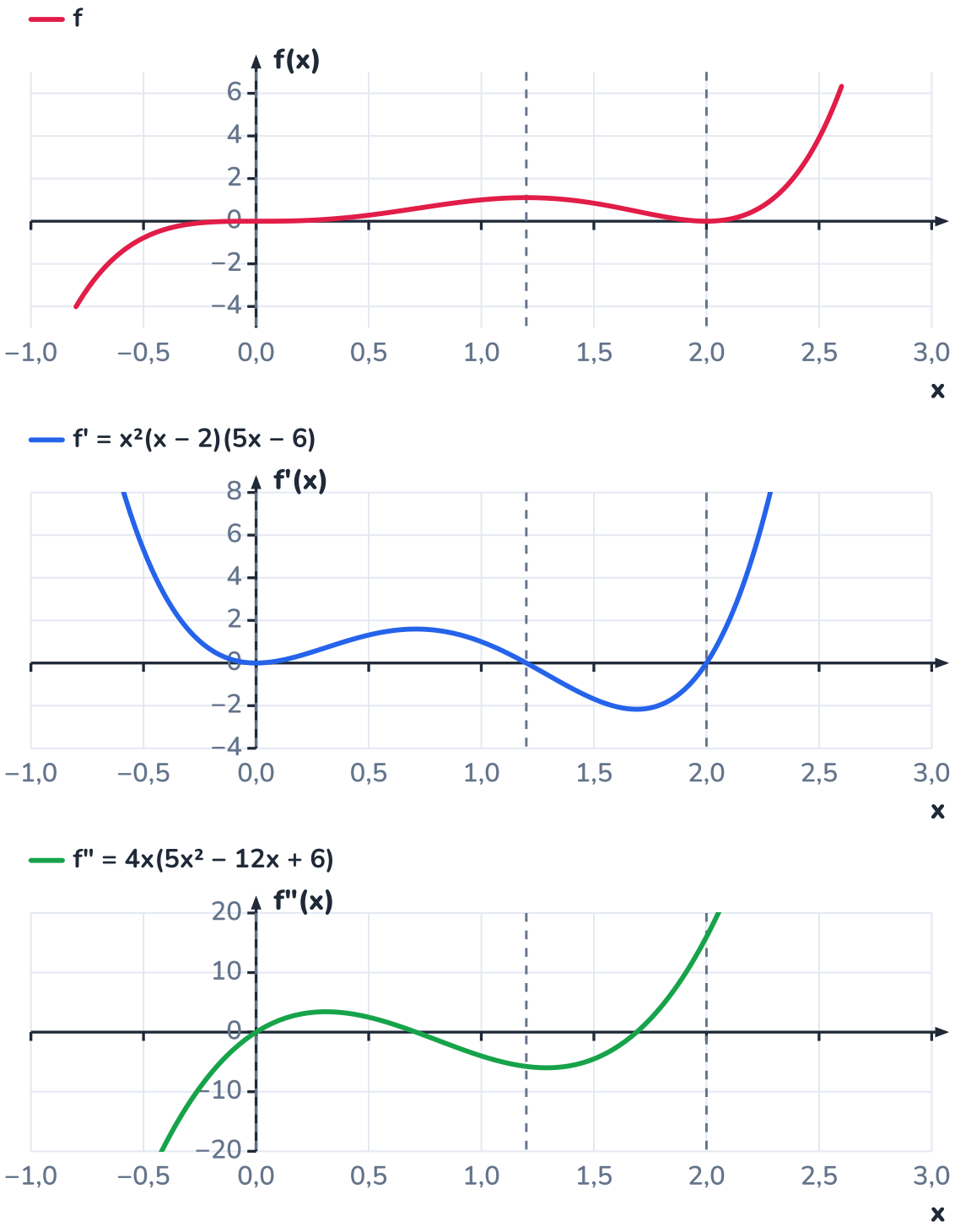
$$f'(c) = 0 \text{ en } f''(c) < 0 \Rightarrow \text{maximum} \qquad f'(c) = 0 \text{ en } f''(c) > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

Bol ($f'' < 0$) rond een horizontale raaklijn is een top, hol een dal. Is $f''(c) = 0$, dan zegt de test niets: gebruik het tekenschema.

In $x = 0$ is ook $f''(0) = 0$: de test faalt, het tekenschema beslist (geen extremum). In $x = 1{,}2$ is $f'' = -5{,}76 < 0$: maximum. In $x = 2$ is $f'' = 16 > 0$: minimum. In de figuur zie je dezelfde informatie op één tijdas: waar f' door nul gaat, heeft f een horizontale raaklijn; waar f'' door nul gaat (ook in $x = 0{,}71$ en $x = 1{,}69$), wisselt de bolling.

f' = 0 betekent een maximum of minimum

$f(x) = x^3$ heeft in 0 een horizontale raaklijn en is er toch nergens extreem. Een stationair punt is een kandidaat, geen besluit. In de techniek komt het voor waar twee effecten elkaar net opheffen, bv. een motorkoppel dat even vlak blijft.



Waar f' door nul gaat met een tekenwissel, heeft f een extremum; in x = 0 raakt f' de as zonder te wisselen: geen extremum.

UITGEWERKT VOORBEELD · 2.4

Het grootste proefveld

4/19

Tegen de zuidgevel van de klimaatmodule komt een rechthoekig proefveld voor buitenteelt. De gevel vormt één zijde; voor de drie andere zijden is er 12 m gaas. Welke afmetingen geven de grootste oppervlakte?

GEGEVEN

- drie zijden samen 12 m; de gevel is de vierde zijde

GEVRAAGD

- afmetingen en oppervlakte van het grootste veld

OPLOSSING

1. Variabelen: x = de zijde loodrecht op de gevel (m), y = de zijde evenwijdig met de gevel (m).
2. Doelfunctie: $A = x\,y$ (m²). Randvoorwaarde: $2x + y = 12$, dus $y = 12 - 2x$ en $A(x) = 12x - 2x^2$. Domein: $0 \le x \le 6$.
3. Kandidaten: $A'(x) = 12 - 4x = 0 \Rightarrow x = 3\,\text{m}$; randen $x = 0$ en $x = 6$ geven $A = 0$.
4. Aard: $A''(x) = -4 < 0$: maximum. $y = 12 - 6 = 6\,\text{m}$, $A = 18\,\text{m}^2$.

ANTWOORD

Een veld van 3 m diep en 6 m breed: 18 m². De zijde langs de gevel is twee keer zo lang als de diepte.

Klopt dit? Probeer $x = 2{,}5$ en $x = 3{,}5$: $A = 17{,}5\,\text{m}^2$ in beide gevallen, iets minder, en symmetrisch rond 3 m zoals bij elke parabool. Zonder gevel (vier zijden) zou het optimum een vierkant zijn.

UITLEG · 2.5

Een optimalisatieprobleem opstellen

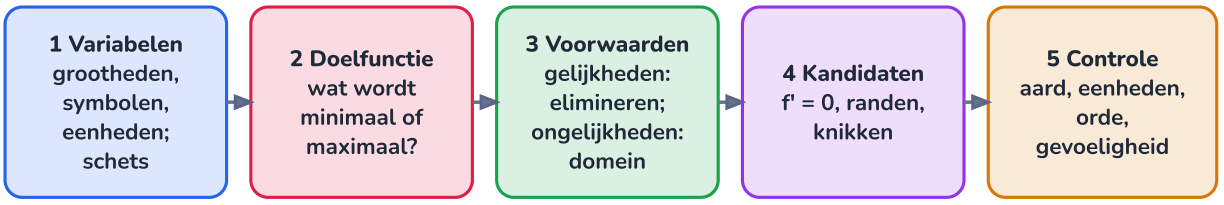
5/19

Het moeilijkste aan optimaliseren is zelden het afleiden; het is het probleem juist **opschrijven**. Vijf stappen helpen:

1. **Variabelen**: welke grootheden mag je kiezen? Geef ze een symbool en een eenheid, en maak een schets.
2. **Doelfunctie**: welke ene grootheid wordt minimaal of maximaal? Schrijf ze in functie van de variabelen: materiaal, kosten, vermogen, tijd.
3. **Randvoorwaarden**: een *gelijkheid* (het volume moet 500 L zijn) gebruik je om een variabele te elimineren; een *ongelijkheid* (past door de deur, niet hoger dan het plafond, positief) bepaalt het domein.
4. **Kandidaten**: stationaire punten, randen van het domein en knikken. Vergelijk hun waarden.
5. **Controle**: is het een maximum of minimum? Kloppen de eenheden en de orde van grootte? Hoe gevoelig is het resultaat voor de aannames?

Eén doel, de rest wordt voorwaarde

Wil je 'weinig materiaal én weinig vloeroppervlak', dan heb je geen doelfunctie maar twee. Kies er één en maak van de andere een voorwaarde ('hoogstens 0,5 m² vloer'), of weeg ze (verder in dit hoofdstuk). Wie twee doelen tegelijk wil maximaliseren, krijgt geen antwoord maar een discussie.



Vijf stappen: de wiskunde zit vooral in stap 4, de ingenieurskunst in 1, 2, 3 en 5.

UITGEWERKT VOORBEELD · 2.6

Het blik met het minste materiaal

6/19

Een cilindrisch blik moet 330 mL bevatten. Welke straal en hoogte vragen het minste materiaal, als bodem, deksel en wand even dik zijn? Vergelijk met een echt blikje (ongeveer 6,6 cm breed).



De wand wordt goedkoper bij een grotere straal, bodem en deksel duurder: het minimum ligt waar beide even snel veranderen.

GEGEVEN

- $V = \pi r^2 h = 330\,\text{cm}^3$
- gelijke dikte van bodem, deksel en wand

GEVRAAGD

- r, h en de oppervlakte A bij het minimum
- het meerverbruik van een blikje van 6,6 cm breed

OPLOSSING

1 Doelfunctie: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ (bodem, deksel, wand). Voorwaarde: $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, dus $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ voor $r > 0$.

2 $A'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$, $r = \left(\dfrac{330}{2\pi}\right)^{1/3} = 3{,}745\,\text{cm}$.

3 $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = 7{,}49\,\text{cm}$. Merk op: uit $r^3 = V/(2\pi)$ volgt $h = V/(\pi r^2) = 2r$. De hoogte is gelijk aan de diameter.

4 Aard: $A''(r) = 4\pi + \dfrac{4V}{r^3} > 0$: minimum. $A = 6\pi r^2 = 264{,}4\,\text{cm}^2$.

5 Blikje van 6,6 cm breed ($r = 3{,}3\,\text{cm}$) met dezelfde inhoud: $h = 9{,}65\,\text{cm}$ en $A = 268{,}4\,\text{cm}^2$, dus maar 1,5 % meer.

ANTWOORD

$r = 3{,}74\,\text{cm}$ en $h = 2r = 7{,}5\,\text{cm}$: het zuinigste blik is even hoog als breed. Een smaller blikje kost nauwelijks meer materiaal.

Klopt dit? Waarom zijn echte blikjes toch hoger (ongeveer 11,5 cm)? De wand van een blikje is maar ongeveer 0,1 mm dik, bodem en deksel ongeveer 0,25 mm. Weeg je de oppervlakken met hun dikte, dan verschuift het optimum naar $h/d = (t_{\text{bodem}} + t_{\text{deksel}})/(2\,t_{\text{wand}})$, hier ongeveer 2,5. Het echte blik ($h/d \approx 1{,}7$) ligt ertussen: een vernauwde hals, de greep in de hand, stapelen en automaten spelen ook mee.

UITLEG · 2.7

Een vlak optimum

7/19

Het echte blikje wijkt 12 % af van de optimale straal en kost toch maar 1,5 % meer materiaal. Dat is geen toeval. Rond een glad minimum is $A'(r^*) = 0$, dus volgens Taylor (hoofdstuk 1)

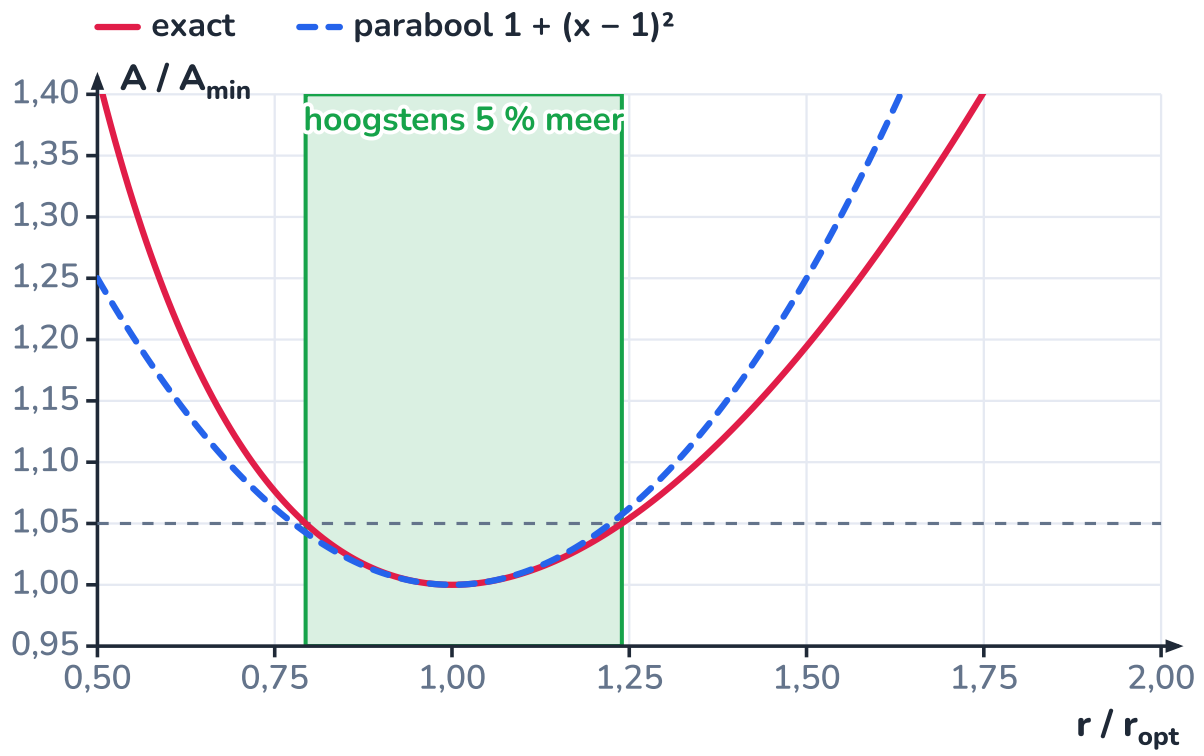
$$A(r^* + \Delta r) \approx A(r^*) + 0 \cdot \Delta r + \tfrac{1}{2} A''(r^*)\,\Delta r^2.$$

De eerste-ordeterm valt weg: een afwijking kost **kwadratisch** weinig. Schrijf je de straal relatief, $x = r/r^*$, dan is voor elke cilinder met gelijke dikte $\frac{A}{A_{\min}} = \frac{2/x + x^2}{3} \approx 1 + (x-1)^2$. Een afwijking van 10 % kost ongeveer 1 %, een van 20 % ongeveer 4 %. Wie minder dan 5 % extra materiaal wil, mag de straal kiezen tussen 0,79 en 1,24 keer de optimale.

Dat is goed nieuws voor de ontwerper: in de buurt van het optimum is er ruimte voor andere doelen (past het door de deur, staat het stabiel, bestaat die maat in de handel) zonder veel te verliezen. Het omgekeerde geldt ook: een optimum dat je nauwkeurig 'raakt', levert weinig op als het vlak is. Rekenen tot op de millimeter is dan zinloos.

Niet elk optimum is vlak

Een optimum op de rand (een actieve randvoorwaarde) heeft een helling die niet nul is: daar kost elke afwijking evenredig veel. En sommige grootheden reageren sterk, zoals het vermogen van een zonnepaneel voorbij het MPP (de kromme valt steil naar V_{oc}).



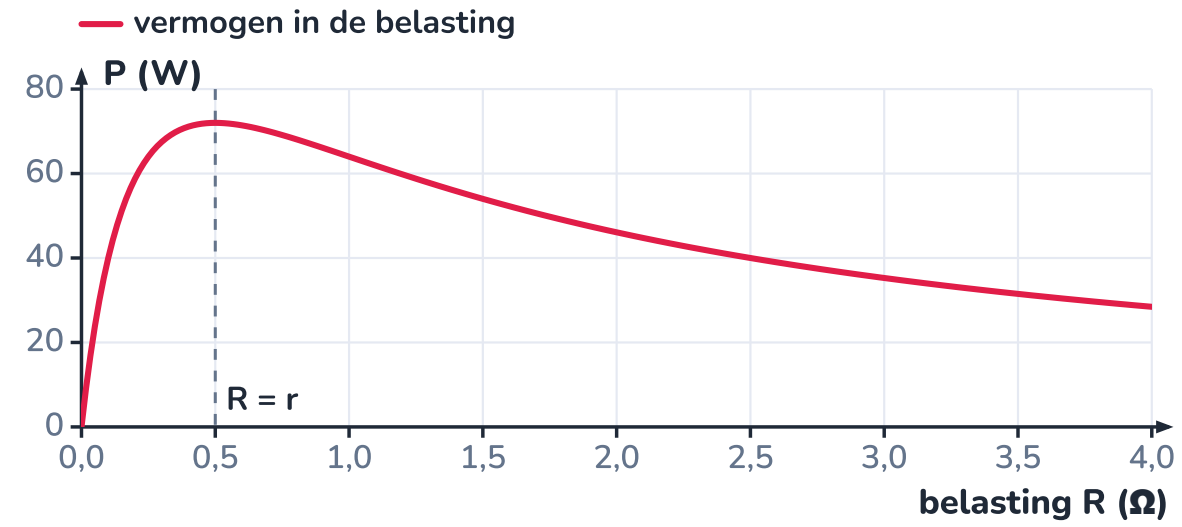
Binnen de groene band kost de afwijking minder dan 5 % extra materiaal; de parabool 1 + (x − 1)² is de benadering van Taylor.

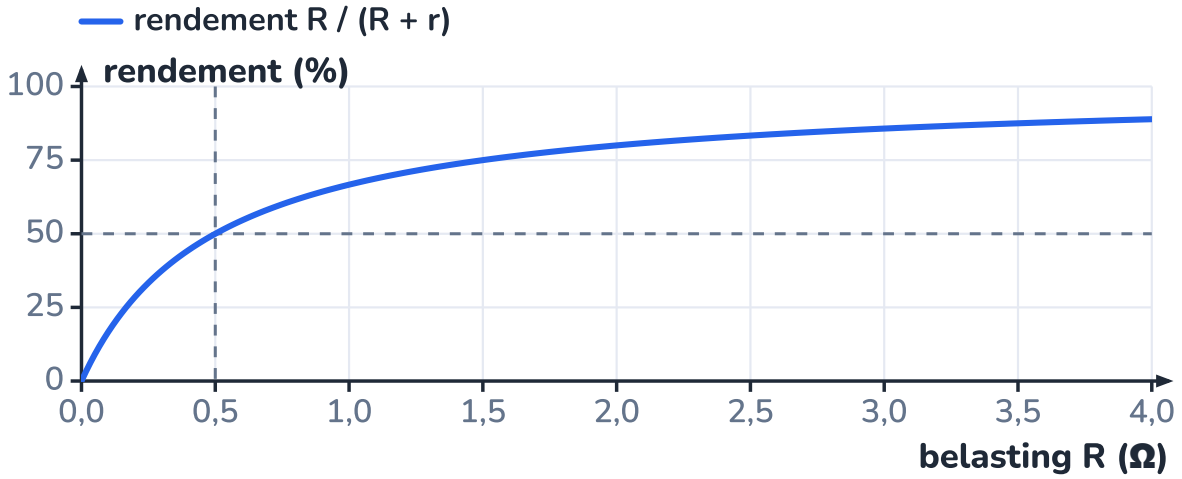
UITGEWERKT VOORBEELD · 2.8

Maximale vermogensoverdracht

8/19

Een bron met bronspanning $U = 12\,\mathrm{V}$ en inwendige weerstand $r = 0{,}5\,\Omega$ voedt een belasting R. Welke R krijgt het grootste vermogen, hoe groot is dat, en wat is dan het rendement? Is dat een goed idee voor de batterij van de module?





Het vermogen is maximaal bij R = r, maar dan gaat de helft verloren; bij grotere R daalt het vermogen en stijgt het rendement.

GEGEVEN

- $I = \dfrac{U}{R+r}$, $P = I^2 R$
- $U = 12\,\text{V}$, $r = 0{,}5\,\Omega$

GEVRAAGD

- R bij het maximum, $P_{\max}$, rendement η

OPLOSSING

1 Doelfunctie: $P(R) = \dfrac{U^2 R}{(R+r)^2}$ voor $R \geq 0$. In hoofdstuk 1 (opdracht 1.2) vond je $P'(R) = \dfrac{U^2(r-R)}{(R+r)^3}$.

2 $P' = 0 \Rightarrow R = r = 0{,}5\,\Omega$. Tekenschema: $P' > 0$ voor $R < r$, $P' < 0$ voor $R > r$: maximum.

3 $P_{\max} = \dfrac{U^2 r}{(2r)^2} = \dfrac{U^2}{4r} = \dfrac{144}{2} = 72\,\text{W}$.

4 Rendement: $\eta = \dfrac{I^2 R}{I^2(R+r)} = \dfrac{R}{R+r} = 50\,\%$: de helft van het vermogen wordt warmte in de bron zelf.

5 Met $R = 5\,\Omega$ (tien keer r): $P = \dfrac{144 \cdot 5}{5{,}5^2} = 23{,}8\,\text{W}$ bij $\eta = 91\,\%$.

ANTWOORD

$R = r = 0{,}5\,\Omega$ geeft 72 W, maar met 50 % rendement. Voor een batterij of een net is dat geen goed idee: daar wil je het rendement maximaliseren ($R \gg r$), niet het vermogen in de last.

Klopt dit? Bij signalen is het omgekeerd: een antenne, een microfoon of een meetversterker levert weinig vermogen en elke microwatt telt. Daarom zijn kabels en ingangen daar op elkaar afgestemd (50 Ω bij radio). En een zonnepaneel? Dat is geen spanningsbron met een weerstand; zijn optimum (het MPP) zoek je verder in dit hoofdstuk numeriek.

UITGEWERKT VOORBEELD · 2.9

Habitat: de drinkwatertank met het minste materiaal

9/19

Het station krijgt een drinkwatertank van **500 L**: genoeg voor een week volledig verbruik door twee bewoners (ongeveer 70 L per dag voor drinken, koken en wassen) als de waterzuivering uitvalt, of voor een maand drinken en koken. De tank is een gesloten cilinder in HDPE (hoofdstuk 17 van Intermediate). Welke vorm vraagt het minste materiaal (a) als bodem, deksel en wand even dik zijn, (b) als de bodem, die het water draagt, anderhalve keer zo dik is? Ter vergelijking: een open bak.

GEGEVEN

- $V = 0{,}50\,\mathrm{m}^3$
- (b) materiaal $\propto 1{,}5\,\pi r^2 + 1 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$ (in eenheden wanddikte × oppervlakte)

GEVRAAGD

- d en h in beide gevallen, en de oppervlakte in (a)

OPLOSSING

1. (a) Zoals het blik: $r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$, $d = 2r = 0{,}860\,\mathrm{m}$ en $h = d = 0{,}860\,\mathrm{m}$; $A = 6\pi r^2 = 3{,}49\,\mathrm{m}^2$.
2. Algemeen, met kosten c_b (bodem), c_d (deksel) en c_w (wand) per m²: $M(r) = (c_b + c_d)\pi r^2 + c_w \dfrac{2V}{r}$, dus $M' = 0$ geeft $r^3 = \dfrac{c_w V}{(c_b + c_d)\pi}$ en $\dfrac{h}{d} = \dfrac{c_b + c_d}{2\,c_w}$.
3. (b) $c_b = 1{,}5$, $c_d = c_w = 1$: $\dfrac{h}{d} = 1{,}25$, $r = \left(\dfrac{0{,}5}{2{,}5\pi}\right)^{1/3}$, dus $d = 0{,}799\,\mathrm{m}$ en $h = 0{,}998\,\mathrm{m}$.
4. Open bak ($c_d = 0$): $h/d = \tfrac{1}{2}$, dus $h = r = 0{,}542\,\mathrm{m}$ en $A = 2{,}77\,\mathrm{m}^2$: 21 % minder materiaal, maar voor drinkwater onaanvaardbaar (stof, algen, hoofdstuk 5 van Intermediate).

ANTWOORD

(a) $d = h = 0{,}86\,\mathrm{m}$ met $3{,}49\,\mathrm{m}^2$ materiaal; (b) $d = 0{,}80\,\mathrm{m}$ en $h = 1{,}00\,\mathrm{m}$. Hoe duurder de bodem en het deksel tegenover de wand, hoe slanker de tank.

Klopt dit? Controleer (a): $\pi \cdot 0{,}430^2 \cdot 0{,}860 = 0{,}500\,\mathrm{m}^3$. Maar past een tank van 86 cm breed door de deur van de woonmodule? Dat is de vraag van het volgende blad.

Randvoorwaarden: als het optimum op de rand ligt

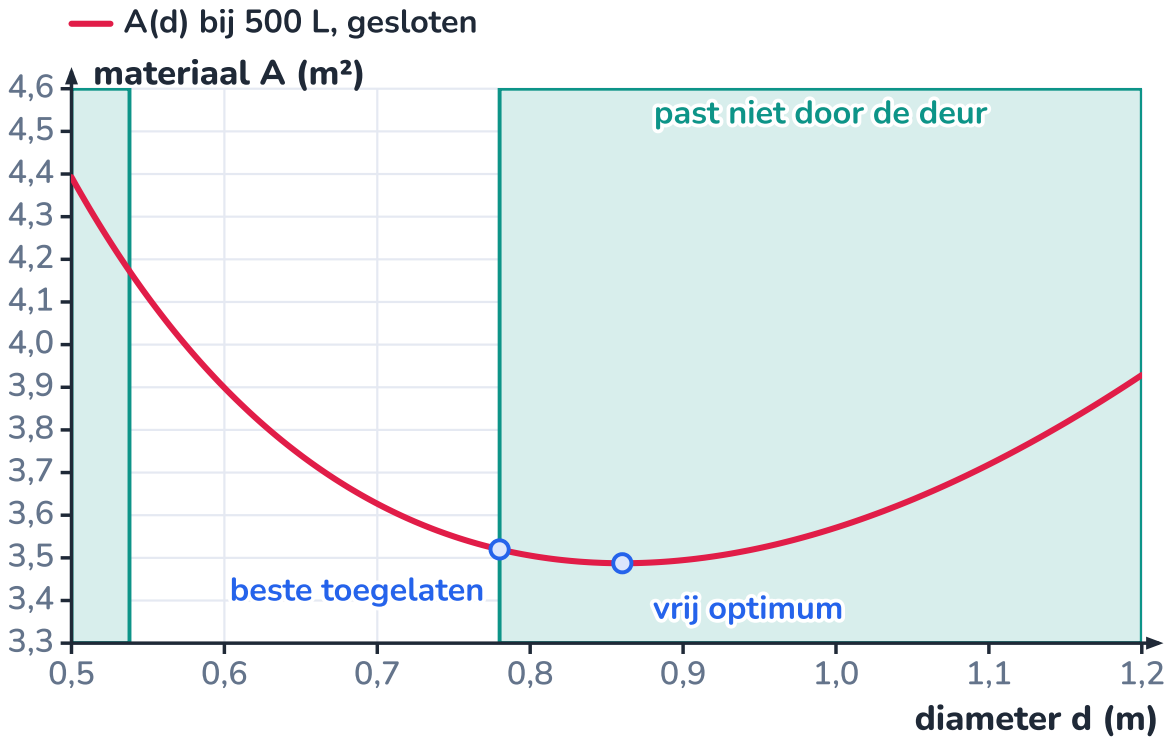
De tank moet door een deur met 0,80 m vrije doorgang: met een centimeter speling aan elke kant is $d \leq 0{,}78\,\text{m}$. En in de technische ruimte (2,6 m hoog) moet boven de tank ruimte blijven voor de vulopening en de leidingen: $h \leq 2{,}2\,\text{m}$, of $d \geq \sqrt{4V/(\pi h_{\max})} = 0{,}538\,\text{m}$. Het toegelaten domein is dus $0{,}54 \leq d \leq 0{,}78\,\text{m}$.

Het vrije optimum ($d = 0{,}86\,\text{m}$) ligt buiten dat domein. Binnen het domein daalt $A(d)$ overal, dus het beste toegelaten ontwerp ligt op de rand: $d = 0{,}78\,\text{m}$, $h = 1{,}046\,\text{m}$. De deurvoorwaarde is **actief**: ze bepaalt het ontwerp, en daar is $A'(d) \neq 0$. De prijs is klein, precies omdat het optimum vlak is: $3{,}520$ in plaats van $3{,}487\,\text{m}^2$, 0,9 % meer materiaal.

Een algemene les: los eerst het vrije probleem op, en kijk dan welke voorwaarden geschonden zijn. Die worden actief; vul ze in als gelijkheid en optimaliseer verder over wat overblijft. Bij meer variabelen wordt dat systematisch met de methode van Lagrange (hoger onderwijs): in het optimum wijst de gradiënt van de doelfunctie loodrecht op de grens.

Randvoorwaarden die je niet ziet

Een volle tank weegt ongeveer 530 kg. Op een voetafdruk van 0,48 m² is dat ongeveer 11 kN/m², terwijl een woningvloer ontworpen wordt op een verdeelde belasting in de orde van 2 kN/m². De tank hoort op een eigen sokkel die de last naar de fundering brengt (hoofdstuk 10 van Intermediate en hoofdstuk 12). Een optimum dat de vloer laat doorbuigen, is geen optimum.



De gekleurde stroken zijn verboden (links: hoger dan 2,2 m, rechts: past niet door de deur). Het vrije optimum (0,86 m) valt erin; het beste toegelaten ontwerp ligt op de grens van de deur, met minder dan 1 % extra materiaal.

UITLEG · 2.11

Meerdere doelen: gewogen som en Pareto-front

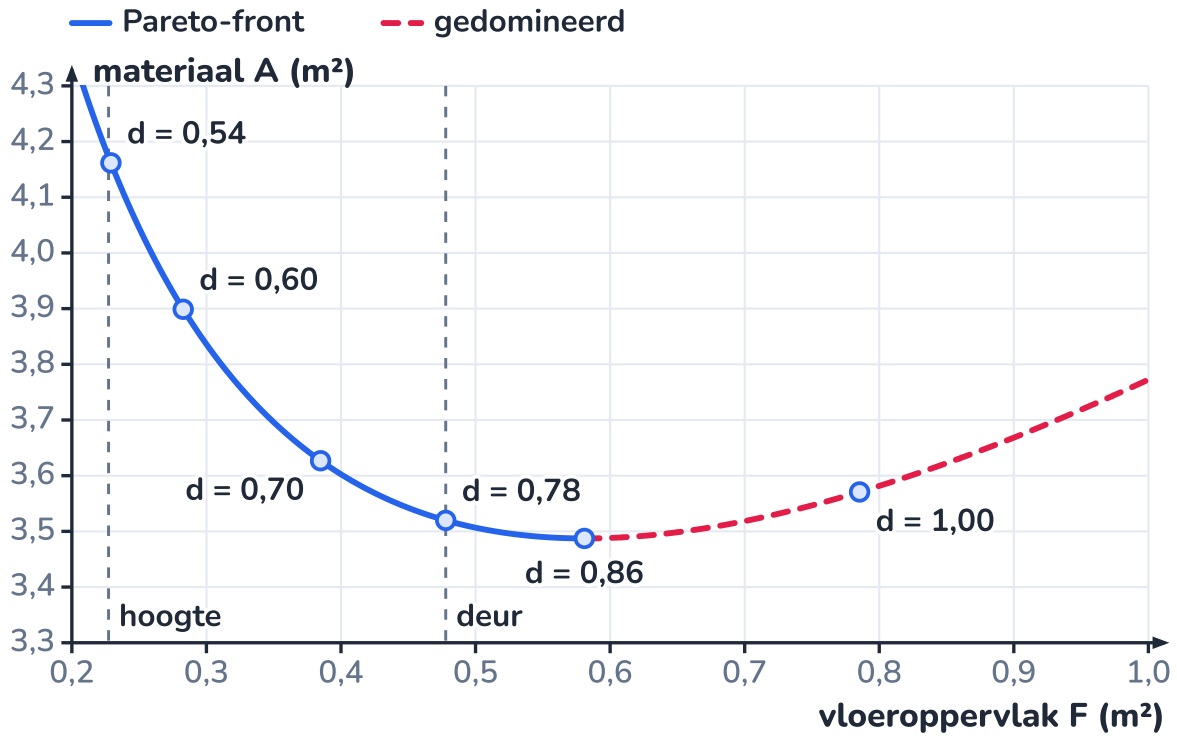
11/19

In een woonmodule van 24 m² is vloeroppervlak kostbaar. Een smallere tank neemt minder vloer in maar vraagt meer materiaal; een bredere tank (boven 0,86 m) vraagt meer van *beide*. Zet elke diameter uit als punt (vloeroppervlak, materiaal). Een ontwerp is **gedomineerd** als een ander ontwerp op beide doelen minstens even goed is en op één beter. De niet-gedomineerde ontwerpen vormen het **Pareto-front**: daar kan je alleen iets winnen door elders iets te verliezen.

De wiskunde kiest niet op het front; de ontwerper wel, met een van drie technieken:

- **Gewogen som**: minimaliseer $J = w_1 \frac{A}{A_{\text{ref}}} + w_2 \frac{F}{F_{\text{ref}}}$ (dimensieloos maken is nodig, anders tel je m² bij kilogram op). De gewichten zijn een waardeoordeel: zeg ze hardop.
- **Eén doel, de rest als voorwaarde** (ε-methode): minimaliseer het materiaal met $F \leq 0{,}40\,\text{m}^2$. Dat is wat ingenieurs het vaakst doen, omdat een grens makkelijker te verdedigen is dan een gewicht.
- **Kiezen op het front**: toon de opdrachtgever de hele kromme en laat de afweging zichtbaar.

Voor de tank (tabel bij het volgende blad): tussen 0,54 en 0,78 m ligt elk ontwerp op het front. 0,78 m spaart het meeste materiaal, 0,70 m spaart 0,09 m² vloer voor 3,0 % meer materiaal en een hogere waterdruk.



Links van d = 0,86 m ruil je materiaal tegen vloer (het front); rechts ervan verlies je op beide doelen (gedomineerd).

CODE · 2.12

Habitat: de tank doorrekenen

12/19

Het programma zet de doelen en voorwaarden naast elkaar voor zes diameters en zoekt met een rooster (stap 1 mm) de toegelaten diameter met het minste materiaal. Bij één variabele is een rooster snel genoeg en zeer robuust: het vindt

ook een optimum op de rand, en je ziet meteen hoe vlak het is.

Python **tank.py** 28 regels

```python
# tank.py - de drinkwatertank van 500 L: materiaal, vloeroppervlak en vloerdruk per diameter
import math

V = 0.50                    # m3
D_DEUR, H_MAX = 0.78, 2.2   # randvoorwaarden: door de deur, en niet te hoog (m)


def gegevens(d):
    r = d / 2
    h = V / (math.pi * r * r)
    A = 2 * math.pi * r * r + 2 * math.pi * r * h       # bodem + deksel + wand (m2)
    F = math.pi * r * r                                  # vloeroppervlak (m2)
    p = 1000 * 9.81 * h / 1000                           # waterdruk op de bodem (kPa)
    return h, A, F, p


A_min = gegevens(2 * (V / (2 * math.pi)) ** (1 / 3))[1]
print("  d (m)  h (m)  A (m2)  extra  F (m2)  p (kPa)  toegelaten")
for d in (0.54, 0.60, 0.70, 0.78, 0.86, 1.00):
    h, A, F, p = gegevens(d)
    ok = d <= D_DEUR and h <= H_MAX
    print("  %.2f   %.3f  %.3f   %4.1f%%  %.3f   %4.1f    %s" % (d, h, A, (A / A_min - 1) * 100, F, p, "ja"
if ok else "nee"))

# rooster: de toegelaten diameter met het minste materiaal (stap 1 mm)
beste = min((d / 1000 for d in range(500, 1201)
             if d / 1000 <= D_DEUR and gegevens(d / 1000)[0] <= H_MAX),
            key=lambda d: gegevens(d)[1])
print("beste toegelaten diameter: %.3f m (h = %.3f m)" % (beste, gegevens(beste)[0]))
```

Uitvoer:

```
  d (m)  h (m)  A (m2)  extra  F (m2)  p (kPa)  toegelaten
  0.54   2.183  4.162   19.3%  0.229   21.4    ja
  0.60   1.768  3.899   11.8%  0.283   17.3    ja
  0.70   1.299  3.627    4.0%  0.385   12.7    ja
  0.78   1.046  3.520    0.9%  0.478   10.3    ja
  0.86   0.861  3.487    0.0%  0.581    8.4    nee
  1.00   0.637  3.571    2.4%  0.785    6.2    nee
beste toegelaten diameter: 0.780 m (h = 1.046 m)
```

De kolom 'extra' toont het vlakke optimum: 0,70 tot 1,00 m blijft binnen 4 %. De vloerdruk van het water alleen gaat van 6 kPa (breed) tot ruim 20 kPa (smal); het gewicht van de tank en de sokkel komt erbij. Met een rooster van 701 punten is het antwoord tot op de millimeter bekend; nauwkeuriger is zinloos voor een tank die in standaardmaten verkocht wordt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 2.13

Habitat: de keuze van de tank

13/19

Kies een diameter voor de drinkwatertank en verdedig de keuze met de doelen (materiaal, vloer) en de voorwaarden (deur, hoogte, vloerbelasting). Gebruik een gewogen som met $w_1 = 0{,}7$ voor materiaal en $w_2 = 0{,}3$ voor vloer, met de waarden van het vrije optimum als referentie.

GEGEVEN

- $A_{\text{ref}} = 3{,}487\,\text{m}^2$, $F_{\text{ref}} = 0{,}581\,\text{m}^2$
- toegelaten: $0{,}54 \le d \le 0{,}78\,\text{m}$

GEVRAAGD

- de diameter met de kleinste $J = 0{,}7\,A/A_{\text{ref}} + 0{,}3\,F/F_{\text{ref}}$
- een verantwoorde keuze

OPLOSSING

1 $J(d) = 0{,}7\,\dfrac{A(d)}{3{,}487} + 0{,}3\,\dfrac{\pi d^2/4}{0{,}581}$. Afleiden (of een rooster) geeft het minimum van J bij $d \approx 0{,}65\,\text{m}$.

2 Die diameter ligt binnen het toegelaten domein. Met $w_2 = 0$ (alleen materiaal) zou je op de deurgrens 0,78 m uitkomen; hoe zwaarder de vloer weegt, hoe smaller de tank.

3 Controle vloerbelasting: bij $d = 0{,}78\,\text{m}$ drukt de volle tank ongeveer $11\,\text{kN/m}^2$, bij $d = 0{,}70\,\text{m}$ ongeveer $14\,\text{kN/m}^2$: in beide gevallen een eigen sokkel op de fundering.

4 Keuze: $d = 0{,}78\,\text{m}$, $h = 1{,}05\,\text{m}$ water plus een luchtruimte. Argumenten: minste materiaal binnen de voorwaarden, laagste druk op de sokkel, en een standaardmaat van die orde is in de handel. De gewogen som zou een smallere tank kiezen; dat verschil (een paar tienden van een vierkante meter vloer) is een beslissing voor de bewoners, niet voor de wiskunde.

ANTWOORD

Een gesloten cilinder van 0,78 m binnendiameter en 1,05 m waterhoogte, op een eigen sokkel in de technische ruimte. Nieuwe waarde voor het stationsdossier.

Klopt dit? Gevoeligheid: een tank van 0,70 m kost 3,0 % meer materiaal en spaart 0,09 m² vloer. Omdat het optimum vlak is, doen beide keuzes het goed; wat telt, is dat de afweging zichtbaar en onderbouwd is.

UITLEG · 2.14

Numeriek optimaliseren

14/19

Vaak kan je $f'(x) = 0$ niet exact oplossen. Het vermogen van een zonnepaneel is $P(U) = U \cdot I(U)$ met (in een eenvoudig diodemodel) $I(U) = I_{\text{sc}} - I_0\left(\text{e}^{U/a} - 1\right)$. Dan is $P'(U) = I(U) - \frac{UI_0}{a}\text{e}^{U/a}$, en $P' = 0$ heeft geen oplossing in gewone functies. Voor een paneel van 350 Wp ($I_{\text{sc}} = 10{,}9\,\text{A}$, $V_{\text{oc}} = 41{,}0\,\text{V}$, $a = 2{,}44\,\text{V}$) zoek je numeriek:

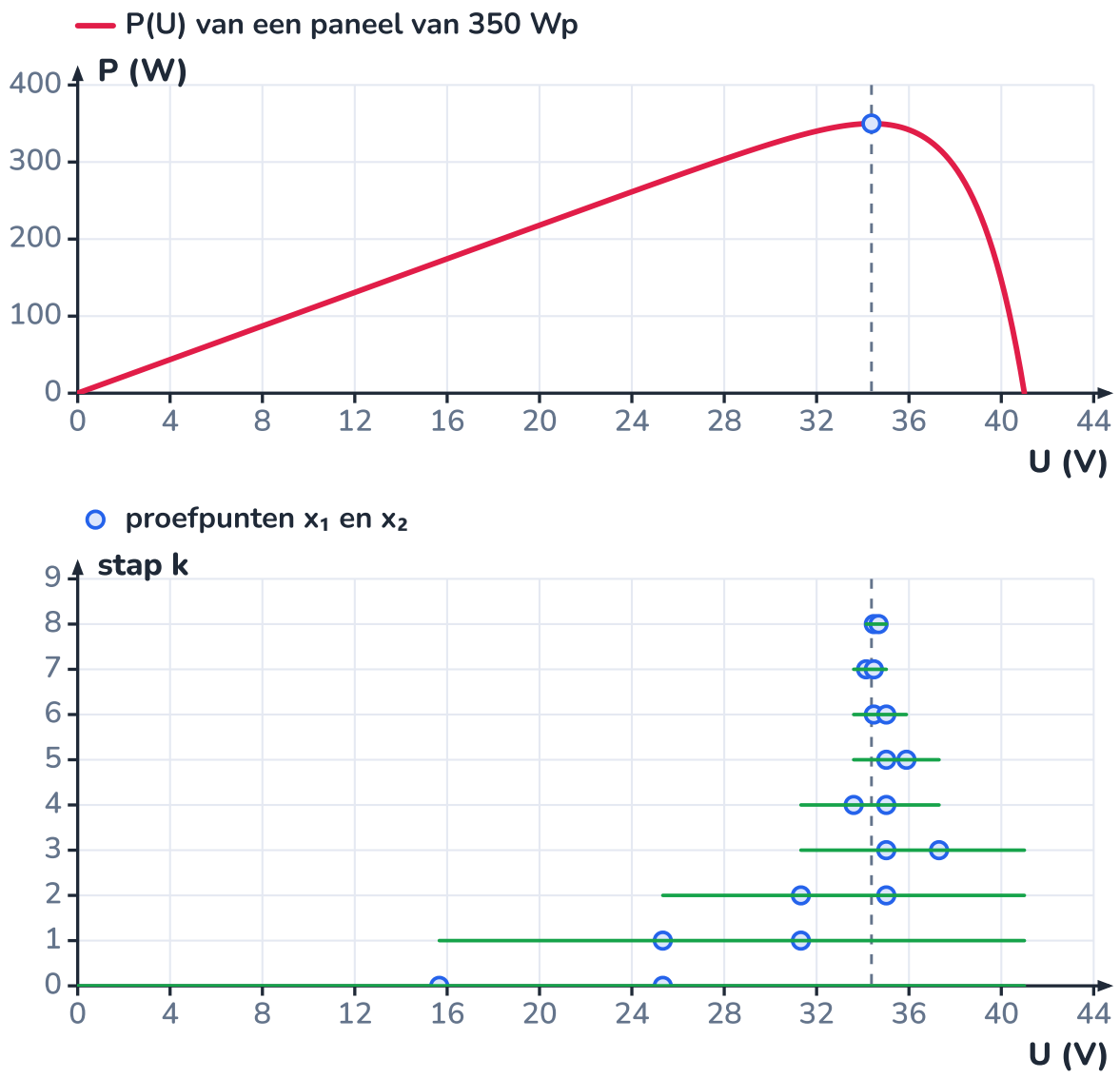
- **Rooster**: reken f uit in veel punten en neem het beste. Eenvoudig en robuust (ook bij meerdere toppen), maar duur bij veel variabelen.
- **Bisectie op f'**: $P' > 0$ links van het maximum en $P' < 0$ rechts. Halveer het interval en houd de helft met de tekenwissel. Na n stappen is het interval 2^{-n} keer zo klein.
- **Gulden snede**: zonder afgeleide. Kies twee proefpunten $x_1 < x_2$ in $[a, b]$. Is $f(x_1) > f(x_2)$, dan kan het maximum niet rechts van x_2 liggen (bij een functie met één top): schrap dat stuk, anders het stuk links van x_1. Leg je de proefpunten op de fractie $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, dan is één van de twee oude punten meteen een proefpunt van het nieuwe interval: één functiewaarde per stap, en het interval krimpt telkens met 0,618. (Uit die eis volgt $\varphi^2 = 1 - \varphi$.)

methode	wat ze nodig heeft	interval per stap	stappen voor 41 V → 0,01 V
rooster (alle punten)	alleen f	–	4100 evaluaties

methode	wat ze nodig heeft	interval per stap	stappen voor 41 V → 0,01 V
bisectie op f'	het teken van f'	× 0,5	13
gulden snede	alleen f, unimodaal	× 0,618	18
Newton op f' (hoofdstuk 36)	f' en f''	fout wordt kwadratisch kleiner	enkele
perturb and observe	metingen van f	vaste stap	volgt het maximum als het verschuift

Het resultaat: het MPP ligt bij $U = 34{,}38\,\mathrm{V}$ en $I = 10{,}18\,\mathrm{A}$, met $P = 349{,}9\,\mathrm{W}$. De gulden snede had er 18 stappen voor nodig om tot op 0,01 V te komen, bisectie 16 stappen tot op 0,001 V.

> ⚠ **Unimodaal**
>
> Bisectie op f' en de gulden snede vinden een maximum alleen als er in het interval precies één is. Een half beschaduwd paneel met bypassdiodes heeft er soms twee: dan vindt de methode misschien het kleinste. Een grof rooster vooraf lost dat op.



Onder: bij elke stap het zoekinterval (lijn) met zijn twee proefpunten; het interval trechtert naar het MPP.

CODE · 2.15

Het MPP berekenen, en volgen

15/19

Drie methoden op hetzelfde model. De afgeleide wordt numeriek berekend met een centrale differentie (hoofdstuk 1), zoals je doet als je geen formule voor P' hebt. De derde methode is die van een echte MPPT-regelaar: die kent geen model, maar meet. Hij verandert de spanning een beetje en kijkt of het vermogen stijgt; zo niet, dan keert hij om (*perturb and observe*).

Python `mpp.py` 55 regels

```python
# mpp.py - het punt van het grootste vermogen van een zonnepaneel, drie numerieke methoden
import math

ISC, VOC, A = 10.9, 41.0, 2.44              # kortsluitstroom (A), openklemspanning (V), diodeparameter (V)
I0 = ISC / (math.exp(VOC / A) - 1)          # verzadigingsstroom: I(VOC) = 0


def P(u):                                   # vermogen (W) bij spanning u (V)
    return u * (ISC - I0 * (math.exp(u / A) - 1))
```

```
10
11
12  def dP(u, h=1e-5):                          # afgeleide: centrale differentie (hoofdstuk 1)
13      return (P(u + h) - P(u - h)) / (2 * h)
14
15
16  # 1. bisectie op de afgeleide: dP > 0 links van het MPP, dP < 0 rechts
17  a, b, n = 0.0, VOC, 0
18  while b - a > 0.001:
19      m = (a + b) / 2
20      if dP(m) > 0:
21          a = m
22      else:
23          b = m
24      n += 1
25  print("bisectie op P':  U = %.3f V, P = %.2f W na %d stappen" % ((a + b) / 2, P((a + b) / 2), n))
26
27  # 2. gulden snede op P zelf (geen afgeleide nodig)
28  g = (math.sqrt(5) - 1) / 2
29  a, b, n = 0.0, VOC, 0
30  x1, x2 = b - g * (b - a), a + g * (b - a)
31  p1, p2 = P(x1), P(x2)
32  while b - a > 0.01:
33      if p1 > p2:
34          b, x2, p2 = x2, x1, p1
35          x1 = b - g * (b - a)
36          p1 = P(x1)
37      else:
38          a, x1, p1 = x1, x2, p2
39          x2 = a + g * (b - a)
40          p2 = P(x2)
41      n += 1
42  print("gulden snede:     U = %.3f V, P = %.2f W na %d stappen" % ((a + b) / 2, P((a + b) / 2), n))
43
44  # 3. perturb and observe, zoals een MPPT-regelaar: kleine stap, kijk of P stijgt
45  u, stap, richting = 30.0, 0.5, +1
46  vorig = P(u)
47  spoor = []
48  for k in range(14):
49      u += richting * stap
50      nu = P(u)
51      if nu < vorig:                          # slechter: keer om
52          richting = -richting
53      vorig = nu
54      spoor.append("%.1f" % u)
55  print("perturb and observe:", " ".join(spoor))
```

Uitvoer:

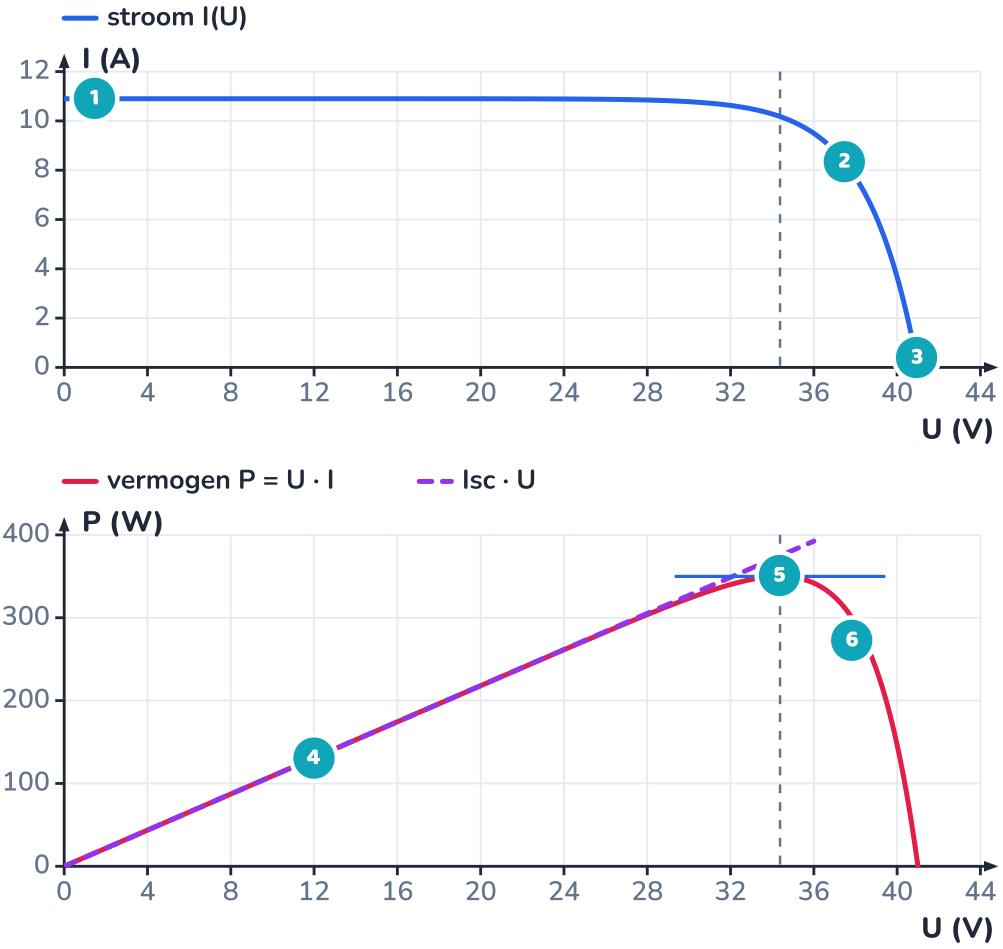
```
bisectie op P':  U = 34.378 V, P = 349.89 W na 16 stappen
gulden snede:     U = 34.378 V, P = 349.89 W na 18 stappen
perturb and observe: 30.5 31.0 31.5 32.0 32.5 33.0 33.5 34.0 34.5 35.0 34.5 34.0 34.5 35.0
```

Bisectie en gulden snede komen op hetzelfde punt uit. Perturb and observe klimt vanaf 30 V naar het MPP en blijft daarna heen en weer springen tussen drie spanningen rond de top: een regelaar die blijft zoeken, verliest een klein beetje, maar volgt het maximum wel als de zon of de temperatuur verandert. Een kleinere stap verkleint die schommeling maar maakt het volgen trager (opdracht 2.9).

ONTLEED · 2.16

Het werkpunt van een zonnepaneel

Stroom en vermogen van het paneel van 350 Wp bij standaardtestcondities (1000 W/m², cel op 25 °C), uit het diodemodel. De verticale lijn staat op het MPP.



Het MPP ligt op de knie van de stroomkromme, waar de rechthoek U × I onder de kromme het grootst is.

1 Kortsluitstroom
Bij U = 0 levert het paneel 10,9 A, maar geen vermogen. De stroom is evenredig met het zonlicht.

2 De knie
Boven ongeveer 35 V gaan de diodes in de cellen geleiden en valt de stroom snel weg: de exponentiële term wint.

3 Openklemspanning
Bij 41,0 V is de stroom nul: weer geen vermogen. Ze daalt als de cellen warm worden (hoofdstuk 20 van Intermediate).

4 Stroombron
Links van de knie is de stroom bijna constant: P stijgt bijna lineair met U, langs de stippellijn Isc · U.

5 Horizontale raaklijn
Het MPP: 349,9 W bij 34,4 V en 10,18 A. Hier is dP/dU = 0; de vulfactor P/(Voc · Isc) is 0,78.

6 Steil voorbij het MPP
Rechts van het MPP valt het vermogen veel sneller dan links: een regelaar werkt liever een tikje links van het MPP.

UITLEG · 2.17

Meer variabelen: de gradiënt

Een open bak in de vorm van een balk (lengte l, breedte b, hoogte h) moet 0,50 m³ water bevatten. Nu zijn er twee vrije variabelen: met $h = V/(lb)$ is het materiaal

$$A(l, b) = lb + \frac{2V}{b} + \frac{2V}{l}.$$

Een **partiële afgeleide** is een gewone afgeleide naar één variabele, met de andere vast: $\frac{\partial A}{\partial l} = b - \frac{2V}{l^2}$ en $\frac{\partial A}{\partial b} = l - \frac{2V}{b^2}$. In een minimum zijn ze allebei nul. Uit beide volgt $l = b$ en $l^3 = 2V$: $l = b = 1{,}00\,\mathrm{m}$, $h = 0{,}50\,\mathrm{m}$, $A = 3{,}00\,\mathrm{m}^2$. Een open bak is dus twee keer zo breed als hoog.

De twee partiële afgeleiden samen vormen de **gradiënt** $\nabla A = \left(\frac{\partial A}{\partial l}, \frac{\partial A}{\partial b}\right)$. Hij wijst in de richting waarin A het snelst stijgt, en staat loodrecht op de niveaulijnen. **Gradiëntafdaling** zet daarom kleine stappen tegen de gradiënt in:

GRADIËNTAFDALING

$$(l, b)_{k+1} = (l, b)_k - \eta\, \nabla A\big((l, b)_k\big)$$

η is de stapgrootte (in de AI: de *learning rate*).

In de figuur vertrekt de zoektocht in $(0{,}45;\ 1{,}80)$ met $\eta = 0{,}3$ en volgt de steilste helling naar beneden, eerst snel, dan steeds trager omdat de gradiënt kleiner wordt. Een te grote η schiet over het dal heen en divergeert. Het programma probeert vier stapgroottes:

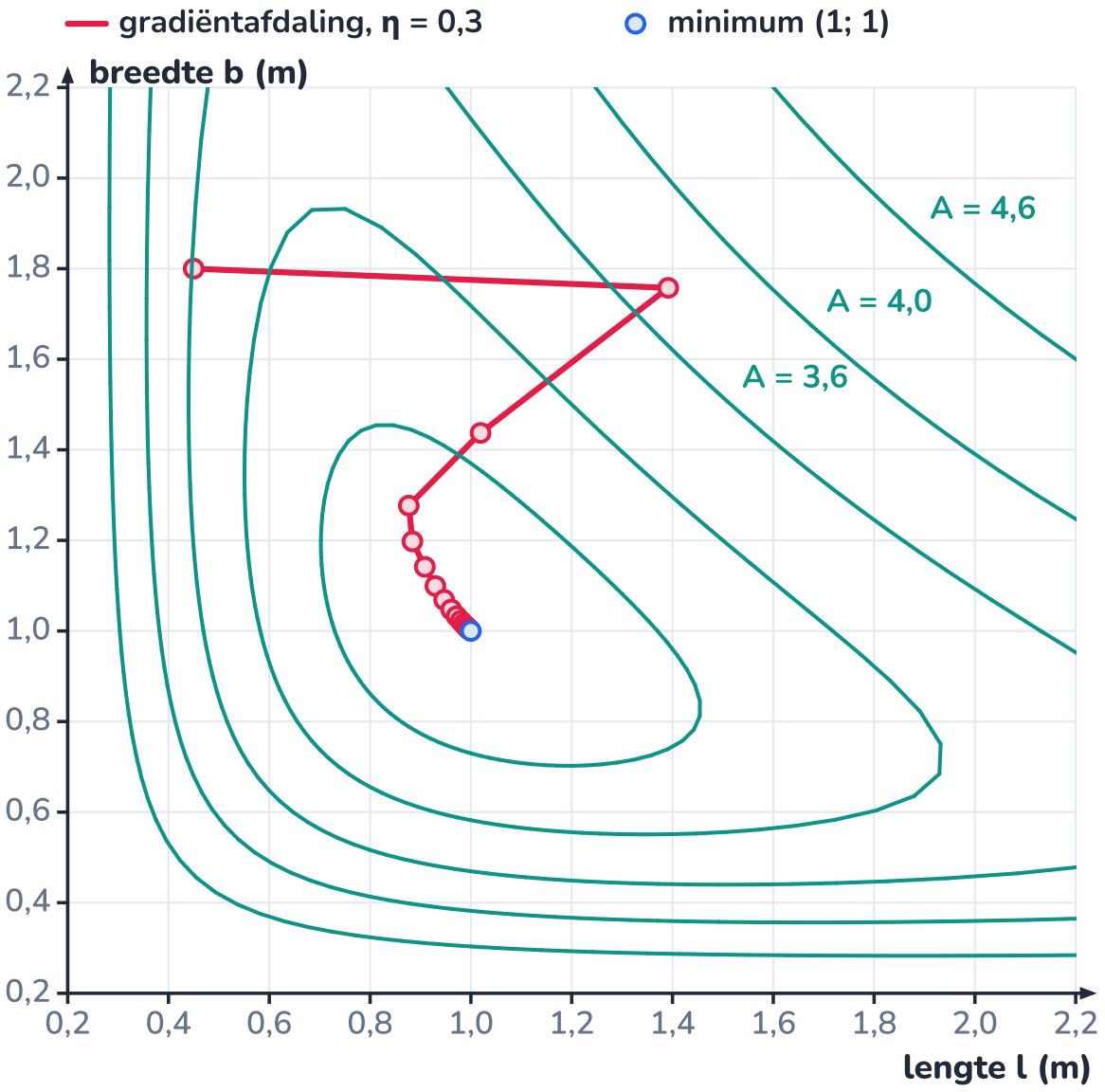
```
def A(l, b, V=0.5):                  # open bak: bodem l*b en vier wanden, hoogte V/(l*b)
    return l * b + 2 * V / b + 2 * V / l


def grad(l, b, V=0.5):
    return b - 2 * V / l ** 2, l - 2 * V / b ** 2


for eta in (0.1, 0.3, 0.6, 0.7):
    l, b = 0.45, 1.8
    for k in range(1, 301):
        gl, gb = grad(l, b)
        l, b = l - eta * gl, b - eta * gb
        if abs(gl) + abs(gb) < 1e-6 or not (0 < l < 10 and 0 < b < 10):
            break
    print("eta %.1f: na %3d stappen l = %.4f, b = %.4f" % (eta, k, l, b))
```

```
eta 0.1: na 142 stappen l = 1.0000, b = 1.0000
eta 0.3: na  41 stappen l = 1.0000, b = 1.0000
eta 0.6: na  71 stappen l = 1.0000, b = 1.0000
eta 0.7: na   3 stappen l = 1.7820, b = 85.0149
```

Een neuraal netwerk (hoofdstuk 43) doet precies dit, met miljoenen variabelen in plaats van twee.



Elke stap staat loodrecht op de niveaulijn waar hij vertrekt; de stappen worden korter naarmate het dal vlakker wordt.

NASLAG · 2.18

Optimaliseren: formules en werkwijze

Stappen: variabelen, doelfunctie, randvoorwaarden en domein, kandidaten (stationaire punten, randen, knikken), controle en gevoeligheid.

stationaire punten

$f'(c) = 0,\ f''(c) < 0 \Rightarrow \max$ $f'(c) = 0,\ f''(c) > 0 \Rightarrow \min$

cilinder met het minste materiaal

$$r^3 = \frac{V}{2\pi},\ h = 2r \qquad \frac{h}{d} = \frac{c_b + c_d}{2\,c_w}$$

symbool	betekenis	eenheid
c_b, c_d, c_w	kost of dikte van bodem, deksel, wand	per m²

maximale vermogensoverdracht

$$R = r, \quad P_{\max} = \frac{U^2}{4r}, \quad \eta = 50\,\%$$

symbool	betekenis	eenheid
r	inwendige weerstand van de bron	Ω

vlak optimum

$$f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + \tfrac{1}{2} f''(x^*)\,\Delta x^2$$

gulden snede

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618 \qquad L_n = \varphi^n L_0$$

symbool	betekenis	eenheid
L_n	lengte van het zoekinterval na n stappen	eenheid van x

gradiëntafdaling

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \eta\,\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

symbool	betekenis	eenheid
η	stapgrootte (learning rate)	–

methode	wat ze nodig heeft	interval per stap	stappen voor 41 V → 0,01 V
rooster (alle punten)	alleen f	–	4100 evaluaties
bisectie op f'	het teken van f'	× 0,5	13
gulden snede	alleen f, unimodaal	× 0,618	18
Newton op f' (hoofdstuk 36)	f' en f''	fout wordt kwadratisch kleiner	enkele
perturb and observe	metingen van f	vaste stap	volgt het maximum als het verschuift

HET GEHEEL · 2.19

Waar optimaliseren vandaan komt en waar het heen gaat

19/19

Optimaliseren verbindt wiskunde (W) met ontwerpen (D): het maakt van 'een goed idee' een verdedigbare keuze. Het raakt energie (MPP, rendement), elektronica (aanpassing), constructies (materiaal, sterkte) en data en AI (een model trainen is een fout minimaliseren).

F30 De ontwerpcyclus
Programma van eisen en criteriatabel: de eerste vorm van doelen en randvoorwaarden.

I4 Functies als modellen
De top van een parabool: het eerste optimum zonder afgeleide.

I20 Zonne-energie dimensioneren
De I-U-kromme en het MPP, hier berekend en gevolgd.

I38 Duurzaam ontwerpen
Een keuzematrix met gewichten: de gewogen som in de praktijk.

E1 Afgeleiden: verandering meten
De afgeleide en de numerieke differentie die hier nul gesteld of gebruikt worden.

E12 Sterkteleer
Wanddikte en spanning: waarom grote tanks breed en laag zijn (opdracht 2.13).

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines
De MPPT-lader van het zonnepark: perturb and observe in hardware.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen
Newton-Raphson en andere methoden om nulpunten en optima te vinden.

E41 Van data naar model: regressie
Kleinste kwadraten: de beste rechte is een optimum.

E43 Neurale netwerken

Gradiëntafdaling met miljoenen variabelen.

E45 Systems engineering en het V-model

Trade-offstudies: meerdere doelen afwegen in een groot project.

Habitat

Het stationsdossier krijgt een drinkwatertank van 500 L: gesloten HDPE-cilinder, 0,78 m binnendiameter, 1,05 m waterhoogte, op een eigen sokkel in de technische ruimte. Het brein van het station optimaliseert ook in bedrijf: de MPPT-regelaars zoeken het werkpunt van de panelen, en later (hoofdstuk 49) kiest het energiebeheer wanneer het laadt en welke lasten het uitstelt.

SAMENVATTING

In het kort

- Een lokaal extremum van een afleidbare functie binnen het domein ligt in een stationair punt ($f' = 0$); kandidaten zijn ook de randen en de knikken.
- Tekenschema van f' of het teken van f'' beslist: $+ \to -$ of $f'' < 0$ is een maximum, $- \to +$ of $f'' > 0$ een minimum; zonder tekenwissel geen extremum.
- Opstellen: variabelen met eenheden, één doelfunctie, gelijkheden elimineren, ongelijkheden in het domein, dan kandidaten vergelijken en controleren.
- Klassiekers: de cilinder met het minste materiaal heeft $h = d$ (algemeen $h/d = (c_b + c_d)/(2c_w)$); maximale vermogensoverdracht bij $R = r$, met 50 % rendement.
- Een glad optimum is vlak: een afwijking kost kwadratisch weinig. Een actieve randvoorwaarde duwt het optimum naar de rand.
- Meerdere doelen: gewogen som, één doel met de rest als voorwaarde, of kiezen op het Pareto-front; de gewichten zijn een keuze, geen wiskunde.
- Numeriek: rooster, bisectie op f', gulden snede (factor 0,618 per stap), perturb and observe; bij meer variabelen gradiëntafdaling.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

stationair punt

Punt waar de afgeleide nul is: de raaklijn is horizontaal. Kandidaat voor een extremum, maar het kan ook een buigpunt zijn.

lokaal extremum

Een maximum of minimum in vergelijking met de punten in de buurt; het globale extremum is het grootste of kleinste over het hele domein.

doelfunctie

De grootheid die je minimaal of maximaal wil maken, geschreven als functie van de ontwerpvariabelen.

randvoorwaarde

Een eis waaraan het ontwerp moet voldoen: een gelijkheid (bv. het volume) of een ongelijkheid (bv. past door de deur).

actieve randvoorwaarde

Een ongelijkheid die in het optimum precies gelijk wordt: het optimum ligt op de grens.

vlak optimum

Rond een glad extremum verandert de doelfunctie maar kwadratisch: een kleine afwijking kost bijna niets.

Pareto-optimaal

Een ontwerp dat je op geen enkel doel kan verbeteren zonder op een ander doel in te leveren; samen vormen ze het Pareto-front.

gulden snede (zoeken)

Numerieke methode die een maximum insluit in een interval dat elke stap met de factor 0,618 krimpt, met één nieuwe functiewaarde per stap.

MPP

Maximum power point: de spanning waarbij een zonnepaneel het grootste vermogen levert; een MPPT-regelaar zoekt en volgt dat punt.

gradiënt

De vector van de partiële afgeleiden; hij wijst in de richting waarin een functie van meer variabelen het snelst stijgt.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 3

Integralen: ophopen

Uit een vermogen de energie, uit een stroom de lading, uit een snelheid de weg

Wie weet hoe snel iets verandert, wil vaak weten hoeveel er in totaal bijkomt. Een zonnepaneel meldt watt, de bewoners betalen kilowattuur; een stroommeter meet ampère, de batterij bevat ampère-uur. Dat ophopen is de **integraal**: een oppervlakte onder een kromme, opgebouwd uit dunne strookjes. Je bouwt ze op met Riemann-sommen, rekent ze exact uit met primitieven dankzij de hoofdstelling, en numeriek met de trapeziumregel en Simpson. Voor Habitat haal je de dagopbrengst van de zonnepanelen uit een vermogensgrafiek.

7× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

W Wiskundig modelleren · E Energie · K Krachten, beweging en constructies



Een wolk die voorbijdrijft, is een dip in het vermogen en een klein gat in de energie van de dag.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een hoeveelheid die met een veranderlijke snelheid ophoopt, voorstellen als de oppervlakte onder een kromme, met de juiste eenheid.
- Je kan linker-, rechter- en middenpunt-Riemann-sommen berekenen en uitleggen hoe ze naar de bepaalde integraal gaan.
- Je kan de bepaalde integraal interpreteren als oppervlakte met teken en haar eigenschappen gebruiken.
- Je kan primitieve functies bepalen en de hoofdstelling uitleggen en gebruiken om integralen exact te berekenen.
- Je kan integralen toepassen: energie uit vermogen, lading uit stroom, verplaatsing uit snelheid, arbeid bij een veranderlijke kracht.
- Je kan een integraal numeriek benaderen met de trapeziumregel en Simpson, ook op meetdata, en de orde van de fout verklaren.
- Je kan de gemiddelde waarde en de effectieve waarde van een functie berekenen en interpreteren.
- Je kan de dagopbrengst van de zonnepanelen uit metingen berekenen en kritisch vergelijken met PVGIS en het energiebudget.

VERHAAL · 3.1

Archimedes en de uitgeputte parabool

In de derde eeuw voor Christus wilde Archimedes van Syracuse de oppervlakte kennen van een stuk parabool, afgesneden door een rechte. Er bestond geen formule, dus bouwde hij er een. Hij tekende in het stuk de grootste driehoek, daarna in de twee overblijvende randjes weer de grootste driehoeken, en zo verder. Elke nieuwe generatie driehoeken samen bleek precies een vierde van de vorige te zijn. De oppervlakte is dus

$$T\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\dots\right)=\tfrac{4}{3}T,$$

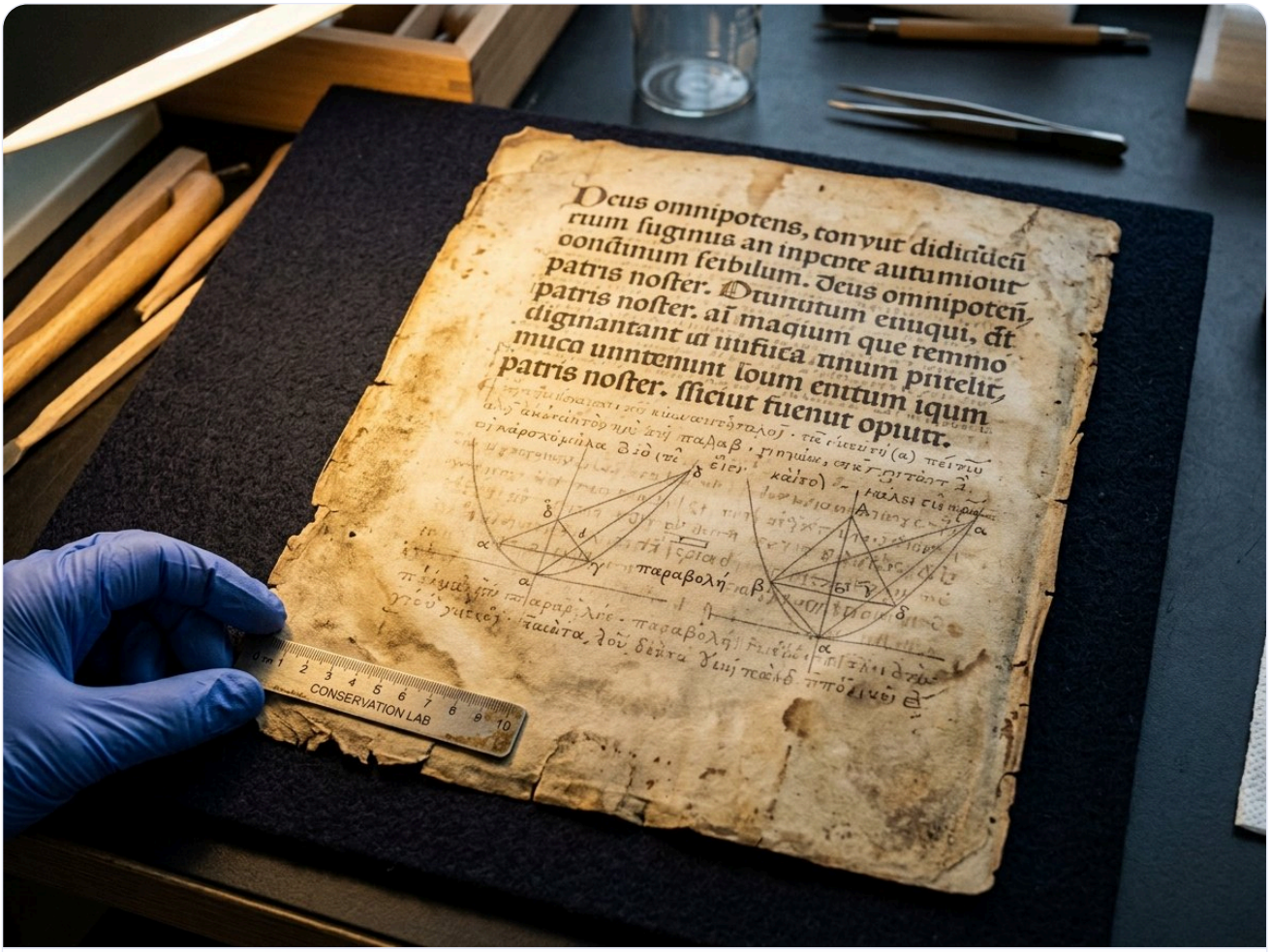
met T de eerste driehoek. Omdat de Grieken oneindige sommen wantrouwden, bewees hij het met de **methode van uitputting** (exhaustie, ouder dan hem, van Eudoxus): de oppervlakte kan niet groter en niet kleiner zijn dan $\tfrac{4}{3}T$, want elk verschil zou na genoeg stappen uitgeput raken.

Hoe Archimedes zulke resultaten eerst *vond*, bleef eeuwenlang een raadsel. Het antwoord stond in *De Methode*, een brief die alleen bewaard bleef in een tiende-eeuwse kopie. In de dertiende eeuw werd dat perkament afgeschraapt en overschreven als gebedenboek: een palimpsest. In 1906 herkende de Deense filoloog Johan Ludvig Heiberg er de tekst van Archimedes in; in 1998 werd het boek geveild en daarna in het Walters Art Museum in Baltimore met multispectrale beeldvorming gelezen. Archimedes 'woog' er figuren door ze op te delen in ontelbare dunne sneden: het idee van een integraal, bijna tweeduizend jaar voor Newton en Leibniz.

Leibniz gaf die sommen van dunne sneden een teken, $\int$, een uitgerekte s van *summa*. In 1854 maakte Bernhard Riemann er een strenge definitie van: de sommen van rechthoekjes die je in dit hoofdstuk leert.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het brein van het station telt voortdurend op: wattuur uit de zonnepanelen, ampère-uur in en uit de batterij, liter water, graaduren kou. Elke teller is een integraal, en elke numerieke integraal heeft een fout die afhangt van hoe vaak je meet. De I-actie van een PID-regelaar (hoofdstuk 39) en elke simulatie (hoofdstuk 4) zijn integralen.



Onder een gebedenboek bleef de tekst van Archimedes bewaard; pas met moderne beeldvorming werd ze helemaal leesbaar.

UITLEG · 3.2

Wat je al weet: ophopen

2/19

wat je al kan	wat nu komt
energie = vermogen × tijd, in kWh (hoofdstuk 21 van Fundamental)	energie als oppervlakte onder een veranderlijk vermogen
de oppervlakte onder een (v,t)-grafiek is de verplaatsing, voor rechte stukken (hoofdstuk 7 van Intermediate)	voor elke kromme, exact of numeriek
de dagopbrengst als som van uurwaarden, volle zonuren (hoofdstuk 20 van Intermediate)	de trapeziumregel, en hoe groot de fout is
afgeleiden en rekenregels (hoofdstuk 1)	primitieven: de afgeleide achterstevoren

Stroomt water met een constant debiet van 5,0 L/min, dan komt er in 12 minuten $5{,}0 \cdot 12 = 60\,\mathrm{L}$ bij: debiet maal tijd, de oppervlakte van een rechthoek onder de (Q,t)-grafiek. Levert een paneel 350 W gedurende 2 uur, dan is dat 700 Wh. Maar echte snelheden veranderen. Dan deel je de tijd op in stukjes waarin de snelheid bijna constant is, en tel je de rechthoekjes op: de **oppervlakte onder de kromme**.

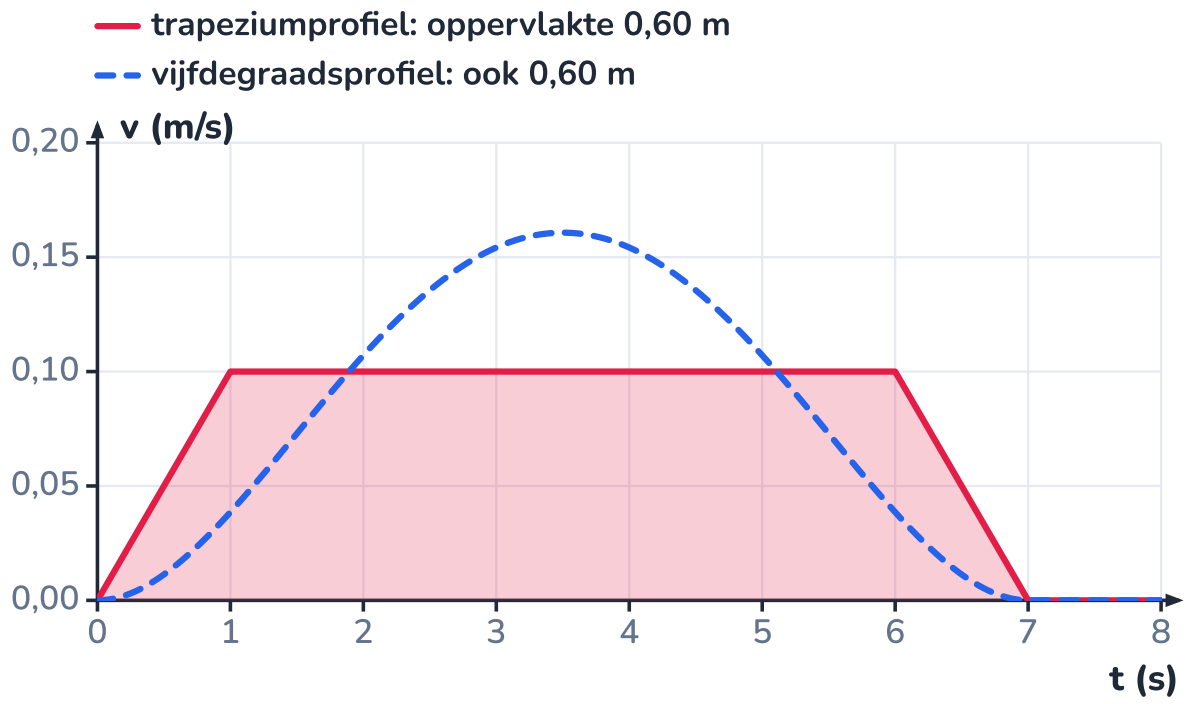
Het schuifpaneel van de kasmodule (hoofdstuk 7 van Intermediate) had een trapeziumprofiel: de oppervlakte onder zijn (v,t)-grafiek is $\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}10 + 5 \cdot 0{,}10 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}10 = 0{,}60\,\mathrm{m}$, precies de slag. Voor

het vijfdegraadsprofiel uit hoofdstuk 1 lukt dat niet meer met driehoekjes en rechthoeken; daarvoor is dit hoofdstuk.

OPHOPEN

$$\text{hoeveelheid} = \int \text{snelheid}\ \mathrm{d}t$$

Eenheid: de eenheid van de snelheid maal die van de tijd: W · h = Wh, A · h = Ah, (m/s) · s = m, (L/min) · min = L.



Twee bewegingen van het kasdak, dezelfde oppervlakte onder de snelheidskromme: 0,60 m.

UITLEG · 3.3

Riemann-sommen

3/19

Neem een geïdealiseerde heldere dag: $P(t) = 900\sin\big(\pi(t-6{,}5)/14\big)$ watt, van 6:30 tot 20:30. Hoeveel energie leveren de panelen in de ochtend, van 6:30 tot 13:30? Verdeel die 7 uur in $n = 7$ stroken van $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ en neem in elke strook een rechthoek met als hoogte het vermogen in één punt:

RIEMANN-SOM

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

x_i^* ligt in de i-de strook: links (*linkersom* L_n), rechts (R_n) of in het midden (M_n).

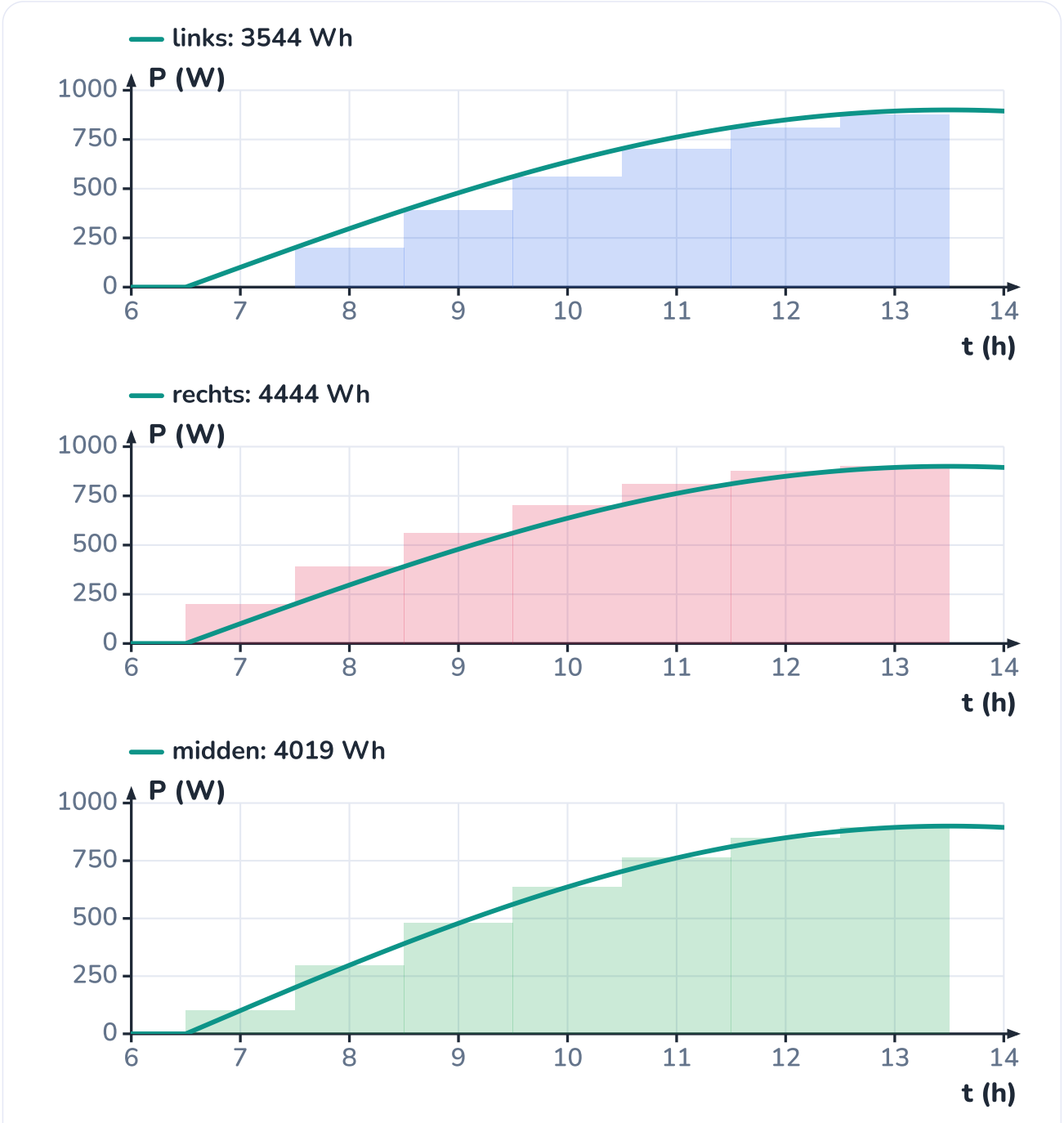
Het vermogen stijgt in de ochtend, dus de linkersom onderschat (3544 Wh) en de rechtersom overschat (4444 Wh). De middenpuntsom zit er dicht bij: 4019 Wh, tegen exact 4011 Wh (dat bereken je verder in dit hoofdstuk). Hoe smaller de stroken, hoe kleiner het verschil.

Voor $f(x) = x^2$ op $[0, 1]$ kan je de limiet zelfs exact volgen. Met n stroken is de rechtersom

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2},$$

en die gaat naar $\frac{1}{3}$ als $n \to \infty$. Zo werkte Archimedes ook, zonder algebra.

n	links L_n	rechts R_n	midden M_n
4	0,218750	0,468750	0,328125
10	0,285000	0,385000	0,332500
100	0,328350	0,338350	0,333325
1000	0,332834	0,333834	0,333333
limiet	$1/3 = 0{,}333333\ldots$		



Zeven stroken van een uur: links te weinig, rechts te veel, in het midden bijna exact (4011 Wh).

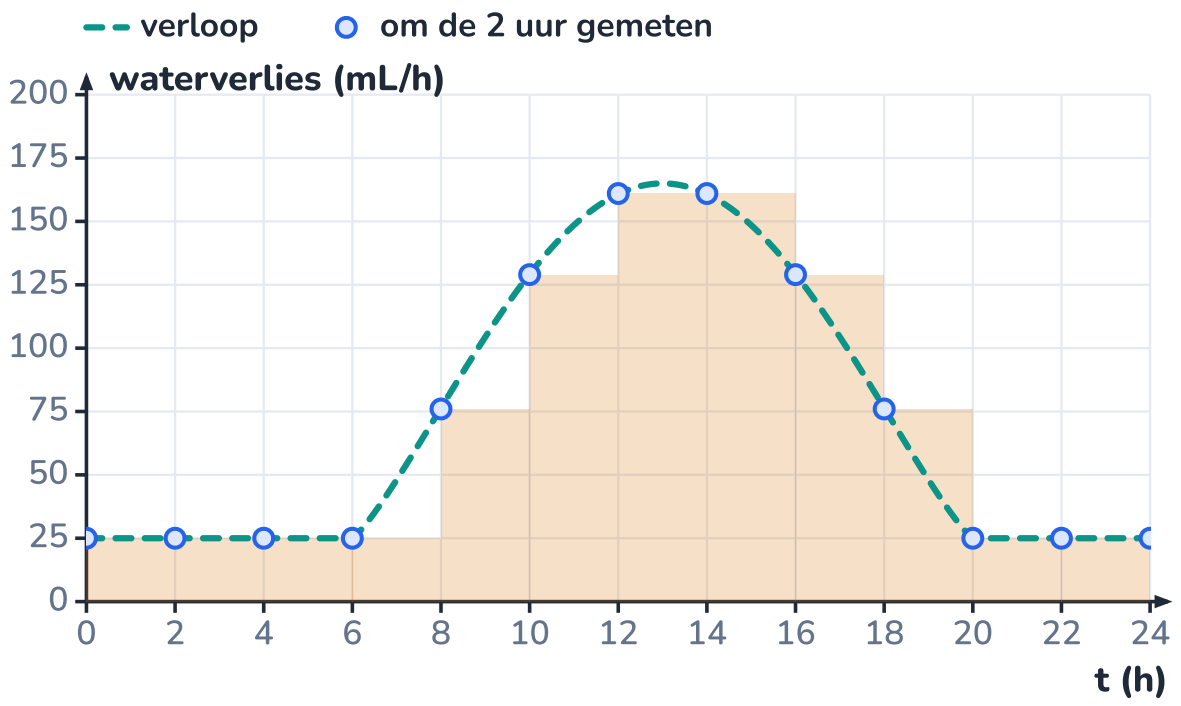
UITGEWERKT VOORBEELD · 3.4

Hoeveel water verliest de meetkas per dag?

De meetkas verliest water door verdamping en door de planten. Uit het gewicht van de plantenbakken schat het brein van het station elke 2 uur hoe snel dat gaat (voorbeeldreeks):

tijd (h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
mL/h	25	25	25	25	76	129	161	161	129	76	25	25	25

Bereken het verlies over de hele dag met de linker- en de rechtersom, en vergelijk met de 1,8 L per dag uit het dossier (150 mL per bakje, hoofdstuk 27 van Fundamental).



De linkersom: elke strook van 2 uur krijgt de hoogte van de meting aan zijn begin.

GEGEVEN

- snelheid $r(t)$ in mL/h om de 2 uur, van 0 tot 24 uur
- $\Delta t = 2\,\text{h}$

GEVRAAGD

- L_{12} en R_{12} in mL, en hun gemiddelde

OPLOSSING

1. Linkersom: elke strook krijgt de waarde aan het begin: $L_{12} = 2 \cdot (25 + 25 + 25 + 25 + 76 + 129 + 161 + 161 + 129 + 76 + 25 + 25) = 1764\,\text{mL}$.

2. Rechtersom: de waarde aan het eind: $R_{12} = 2 \cdot (25 + 25 + 25 + 76 + 129 + 161 + 161 + 129 + 76 + 25 + 25 + 25) = 1764\,\text{mL}$.

3. Hier zijn ze zelfs gelijk: $L_{12} - R_{12} = \Delta t\,(r_0 - r_{24}) = 0$, want de reeks begint en eindigt met 25 mL/h. Wat links te weinig is in de ochtend, is rechts te veel, en omgekeerd in de namiddag. Samen: $1764\,\text{mL}$.

4 Eenheid: mL/h maal h geeft mL. Omgerekend: $1{,}76\ \mathrm{L}$ per dag.

ANTWOORD

Ongeveer 1,76 L per dag, in overeenstemming met de 1,8 L van het dossier. Het gemiddelde van links en rechts is de trapeziumregel, verder in dit hoofdstuk.

Klopt dit? Het gladde verloop waaruit de reeks gemaakt is, geeft 1,777 L. Met metingen om de 2 uur mis je de vorm van de piek rond de middag, maar het totaal zit er op enkele procent na.

UITLEG · 3.5

De bepaalde integraal

5/19

Als de Riemann-sommen naar één getal gaan, welk punt je in de stroken ook kiest, dan is dat getal de **bepaalde integraal**. Voor continue functies is dat altijd zo.

BEPAALDE INTEGRAAL

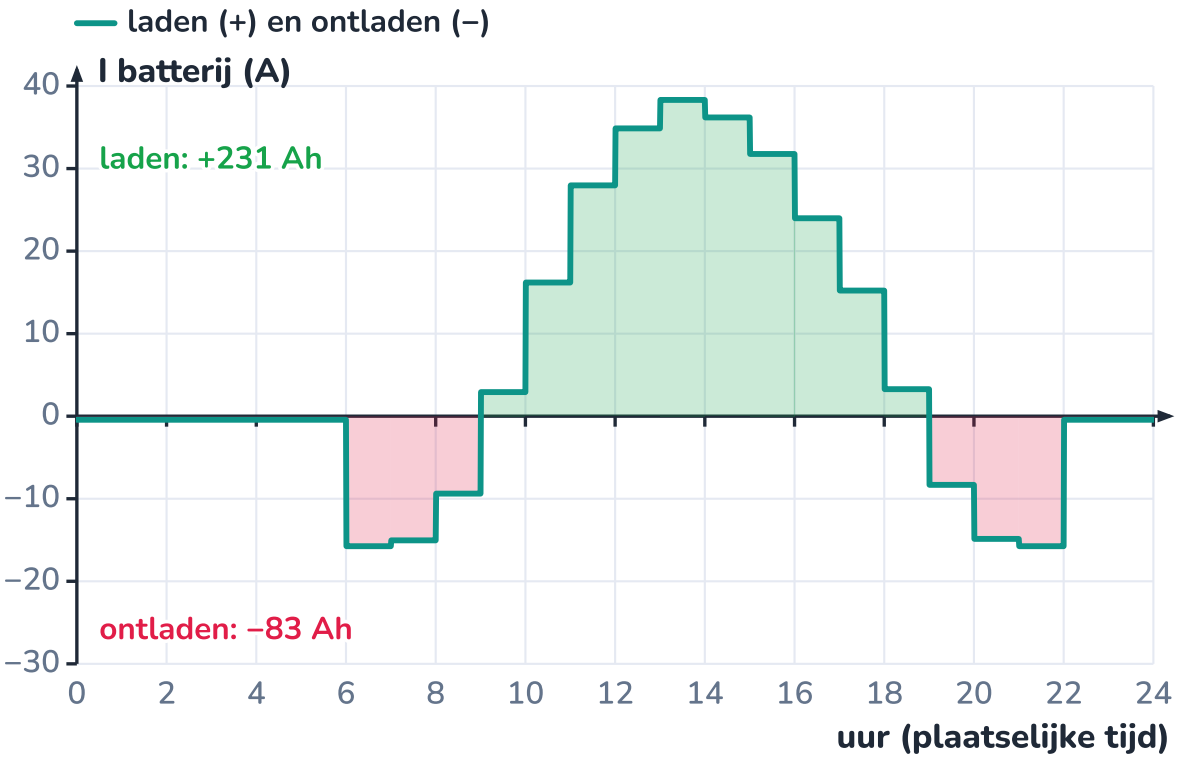
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Leibniz' notatie vertelt het verhaal: $\int$ is een som, $f(x)\,\mathrm{d}x$ een strookje met hoogte $f(x)$ en breedte $\mathrm{d}x$. Eenheid: die van f maal die van x. a en b zijn de grenzen.

Oppervlakte met teken. Waar f negatief is, zijn de strookjes negatief. De stroom van de batterij is positief bij laden en negatief bij ontladen: de integraal over een dag is de *netto* lading. De figuur toont een gemiddelde aprildag in de module (zonnestroom min verbruik per uur, uit hoofdstuk 20 van Intermediate): overdag gaat er 231 Ah in, 's avonds en 's nachts 83 Ah uit, netto $148\ \mathrm{Ah}$. Dat is meer dan de batterij (2 × 120 Ah) kan opnemen: in werkelijkheid stopt de regelaar met laden als ze vol is, het overschot uit hoofdstuk 20 van Intermediate. Wie de totale 'drukte' wil, integreert $|f|$.

Eigenschappen, rechtstreeks uit de sommen:

- lineair: $\int_a^b (cf+g) = c\int_a^b f + \int_a^b g$;
- opsplitsen: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ (energie van de ochtend plus die van de namiddag);
- grenzen omdraaien wisselt het teken: $\int_b^a f = -\int_a^b f$, en $\int_a^a f = 0$;
- als $f \le g$ op $[a,b]$, dan $\int_a^b f \le \int_a^b g$.



Groen telt positief (laden), rood negatief (ontladen); de integraal over de dag is het verschil.

UITGEWERKT VOORBEELD · 3.6

Een coulombteller voor de batterij

6/19

De batterij van de module (2 × 120 Ah) staat 's morgens om 7:00 op 55 %. Een stroomsensor meet elk uur (positief = laden). Bereken met de trapeziumregel per uur hoeveel ampère-uur er bijkomt en volg de laadtoestand (state of charge, SoC).

GEGEVEN

- I om 7:00, 8:00, …, 19:00: 2,0; 6,5; 12,0; 17,0; 19,0; 18,0; 13,5; 6,0; −3,5; −15,5; −15,8; −15,7; −15,8 A
- $Q_{\text{nom}} = 240\ \text{Ah}$, start 55 % = 132 Ah

GEVRAAGD

- laadtoestand na elk uur

OPLOSSING

1. In elk uur: $\Delta Q \approx \frac{I_i + I_{i+1}}{2} \cdot 1\ \text{h}$ (een trapezium). Eerste uur: $\frac{2{,}0+6{,}5}{2} = 4{,}25\ \text{Ah}$.

2. De teller telt die bijdragen op: $Q_k = Q_0 + \sum \Delta Q$. Dat is een Riemann-som die de integraal $\int I\,dt$ benadert.

3 Het programma hieronder doet het voor alle uren.

```
# coulombteller.py - laadtoestand van de batterij uit de gemeten stroom (trapeziumregel, cumulatief)
stroom = [2.0, 6.5, 12.0, 17.0, 19.0, 18.0, 13.5, 6.0, -3.5, -15.5, -15.8, -15.7, -15.8]   # A, om het uur
Q_nominaal = 240.0            # Ah (2 x 120 Ah)
soc = 0.55                    # laadtoestand bij de start (55 %)
q = soc * Q_nominaal
for i in range(len(stroom) - 1):
    q += (stroom[i] + stroom[i + 1]) / 2 * 1.0          # Ah in dit uur
    print("na uur %2d: %6.1f Ah  (%3.0f %%)" % (i + 1, q, 100 * q / Q_nominaal))
```

```
na uur  1:  136.2 Ah  ( 57 %)
na uur  2:  145.5 Ah  ( 61 %)
na uur  3:  160.0 Ah  ( 67 %)
na uur  4:  178.0 Ah  ( 74 %)
na uur  5:  196.5 Ah  ( 82 %)
na uur  6:  212.2 Ah  ( 88 %)
na uur  7:  222.0 Ah  ( 92 %)
na uur  8:  223.2 Ah  ( 93 %)
na uur  9:  213.8 Ah  ( 89 %)
na uur 10:  198.1 Ah  ( 83 %)
na uur 11:  182.3 Ah  ( 76 %)
na uur 12:  166.6 Ah  ( 69 %)
```

ANTWOORD

De batterij stijgt tot 93 % om 15:00 en zakt 's avonds weer als de lampen aangaan en de zon weg is: om 19:00 staat ze op 69 %.

Klopt dit? Een echte coulombteller telt veel vaker (elke seconde) en corrigeert zijn drift: een stroomsensor met een fout van 0,1 A telt er 2,4 Ah per dag bij, 1 % van de batterij. Daarom zet een BMS de teller opnieuw gelijk als de batterij vol is (hoofdstuk 16 van Intermediate).

UITLEG · 3.7

Primitieve functies

7/19

Een **primitieve functie** van f is een functie F waarvan de afgeleide f is: $F' = f$. Je zoekt dus de afgeleide 'achterstevoren'. Omdat de afgeleide van een constante nul is, heeft f niet één maar oneindig veel primitieven: $F(x) + C$. Een tabel volgt rechtstreeks uit de tabel van afgeleiden in hoofdstuk 1:

$f(x)$	primitieve $F(x)$	controle: $F'(x)$
k (constante)	kx	k
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$
e^{kx}	$\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$	e^{kx}
$\sin(\omega t)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$

Bij elke primitieve mag je een constante C optellen. Voor de bepaalde integraal valt die weg in $F(b) - F(a)$.

Voorbeelden: een primitieve van $3t^2 + 4t$ is $t^3 + 2t^2$; van $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ is $-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$; van $325\sin(100\pi t)$ is $-\frac{325}{100\pi}\cos(100\pi t)$. Controleer **altijd** door af te leiden: dat is eenvoudig, en de fouten zitten meestal in een factor ($\frac{1}{k}$, $\frac{1}{\omega}$) of een teken.

> ⚠ **Niet elke functie heeft een formule als primitieve**
>
> e^{-x^2} (de normale verdeling, hoofdstuk 6), $\sin(x)/x$ of het vermogen van een echte zonnedag hebben geen primitieve die je met gewone functies kan opschrijven. Afleiden kan altijd, integreren in formules niet. Daarom is numeriek integreren in de techniek geen noodgreep maar het gewone werk.

UITLEG · 3.8

De hoofdstelling: afleiden en integreren zijn elkaars omgekeerde

8/19

Definieer de **oppervlaktefunctie** $E(x) = \int_{6{,}5}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t$: de energie die de panelen sinds de ochtend geleverd hebben, tot tijdstip x. Hoe snel groeit E? Schuif x een beetje op, met h. Er komt een dun strookje bij met breedte h en hoogte ongeveer $P(x)$:

$$E(x+h) - E(x) \approx P(x)\cdot h \quad\Longrightarrow\quad \frac{E(x+h)-E(x)}{h} \approx P(x).$$

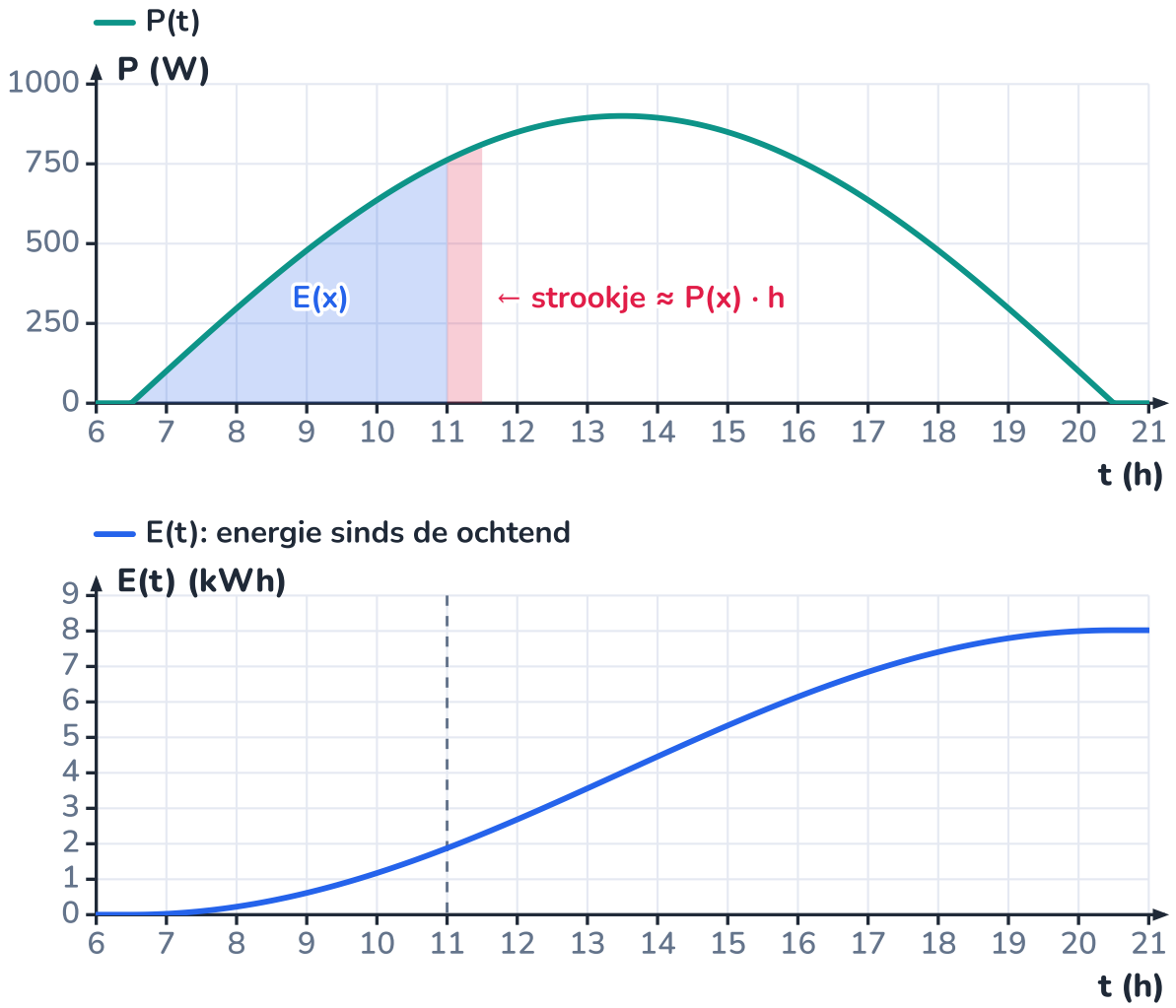
Hoe smaller het strookje, hoe beter (voor een continue P); in de limiet: $E'(x) = P(x)$. De energieteller groeit met precies het vermogen: dat wist je fysisch al, nu staat het wiskundig.

HOOFDSTELLING VAN DE INTEGRAALREKENING

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{als } F' = f$$

Eerste deel: de oppervlaktefunctie is een primitieve. Tweede deel: elke primitieve F verschilt daarvan maar een constante, en die valt weg in het verschil. Notatie: $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Terug naar x^2: $F(x) = x^3/3$ is een primitieve, dus $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$, de limiet waar de Riemann-sommen naartoe kropen, in één regel. Een oneindige som van strookjes wordt een verschil van twee functiewaarden: dat is de kracht van de stelling, en de reden waarom Newton en Leibniz de vaders van de analyse heten.



Boven: de oppervlakte tot x = 11 h (blauw) en een strookje van een half uur breed (rood). Onder: die oppervlakte als functie van x; haar helling is P(x).

UITGEWERKT VOORBEELD · 3.9

De energie van een ideale heldere dag

9/19

Bereken exact de energie van de geïdealiseerde dag $P(t) = 900\sin\big(\pi(t-6{,}5)/14\big)$ W van 6:30 tot 20:30, en die van de ochtend (tot 13:30). Vergelijk met de Riemann-sommen met zeven stroken.

GEGEVEN

- $P_{\max} = 900\,\text{W}$, $L = 14\,\text{h}$, $t_0 = 6{,}5\,\text{h}$

GEVRAAGD

- $E_{\text{dag}} = \int_{6{,}5}^{20{,}5} P\,\mathrm{d}t$ en E_{ochtend}

OPLOSSING

1. Substitueer $u = \pi(t-6{,}5)/14$; een primitieve van $\sin(\omega(t-t_0))$ is $-\frac{1}{\omega}\cos(\omega(t-t_0))$ met $\omega = \frac{\pi}{14}\,\text{h}^{-1}$.
2. $E_{\text{dag}} = 900\left[-\frac{14}{\pi}\cos\frac{\pi(t-6{,}5)}{14}\right]_{6{,}5}^{20{,}5} = 900\cdot\frac{14}{\pi}\left(-\cos\pi+\cos 0\right) = \frac{2\cdot 900\cdot 14}{\pi}$.
3. $E_{\text{dag}} = 8021\,\text{Wh} \approx 8{,}02\,\text{kWh}$. De ochtend is de helft (symmetrie): $\frac{900\cdot 14}{\pi} = 4011\,\text{Wh}$.

4 Riemann met zeven stroken: links 3544, rechts 4444, midden 4019 Wh. De middenpuntsom mist maar 0,2 %.

ANTWOORD

$E_{\text{dag}} = \frac{2P_{\max}L}{\pi} = 8{,}02\,\text{kWh}$: een sinus levert $\frac{2}{\pi} \approx 64\,\%$ van wat de piek over de hele dag zou geven.

Klopt dit? Eenheid: W · h = Wh. Orde van grootte: 5,7 Wh per Wp, vrijwel evenveel als de heldere hemel van 12 mei verder in dit hoofdstuk (5,7 Wh per Wp). De sinus is een ruw model: echte zonnedagen zijn smaller aan de voet (lage zon) en hebben een vlakkere top.

UITGEWERKT VOORBEELD · 3.10

Verplaatsing uit snelheid: het kasdak

10/19

In hoofdstuk 1 opende het schuifpaneel met het vijfdegraadsprofiel $v(t) = \frac{30s}{T}u^2(1-u)^2$, $u = t/T$, $s = 0{,}60\,\text{m}$, $T = 7{,}0\,\text{s}$. Toon aan dat het paneel echt 0,60 m aflegt, en bereken hoe ver het na 2,0 s is.

GEGEVEN

- $v(t) = \dfrac{30s}{T}u^2(1-u)^2$ met $u = t/T$

GEVRAAGD

- $\int_0^T v\,\text{d}t$ en $x(2{,}0\,\text{s})$

OPLOSSING

1 Substitueer $u = t/T$, dus $\text{d}t = T\,\text{d}u$: $\int_0^T v\,\text{d}t = 30s\int_0^1 u^2(1-u)^2\,\text{d}u$.

2 Werk uit: $u^2(1-u)^2 = u^2 - 2u^3 + u^4$, met primitieve $\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^5}{5}$.

3 Van 0 tot 1: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{10-15+6}{30} = \frac{1}{30}$. Dus $\int_0^T v\,\text{d}t = 30s \cdot \frac{1}{30} = s = 0{,}60\,\text{m}$.

4 Tot $t = 2{,}0\,\text{s}$ ($u = 2/7$): $x = 30s\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^5}{5}\right) = s\,(10u^3 - 15u^4 + 6u^5) = 0{,}0868\,\text{m}$.

ANTWOORD

Het paneel legt precies 0,60 m af; na 2,0 s is het 8,7 cm ver. De primitieve van de snelheid is de plaatsfunctie van hoofdstuk 1.

Klopt dit? De afgeleide van $s(10u^3 - 15u^4 + 6u^5)$ naar t geeft terug $v(t)$ (hoofdstuk 1). En de afstandssensor in opdracht 1.10 mat op 2,0 s 0,087 m.

UITGEWERKT VOORBEELD · 3.11

Arbeid bij een veranderlijke hoogte: de tank vullen

11/19

De drinkwatertank van het station (hoofdstuk 2: diameter 0,78 m, 500 L) staat met haar bodem 0,30 m boven de vloer op een sokkel. Stel dat ze gevuld wordt vanuit een put waarvan de waterspiegel 2,0 m onder de vloer ligt. Hoeveel arbeid kost het om de tank te vullen, en hoeveel elektrische energie met een pomp van 10 % rendement (hoofdstuk 9 van Intermediate)?

GEGEVEN

GEVRAAGD

- $A = \pi \cdot 0{,}39^2 = 0{,}4778\,\mathrm{m}^2$, waterhoogte $h = 1{,}046\,\mathrm{m}$
- elk laagje moet van −2,0 m naar $0{,}30 + y$ m

- $W = \int \mathrm{d}W$ en de elektrische energie

OPLOSSING

1 De kracht is niet het probleem, de hoogte wel: elk laagje water gaat anders ver omhoog. Een laagje op hoogte y in de tank met dikte $\mathrm{d}y$ heeft massa $\mathrm{d}m = \rho A\,\mathrm{d}y$ en gaat $2{,}3 + y$ meter omhoog.

2 $\mathrm{d}W = \rho g A\,(2{,}3 + y)\,\mathrm{d}y$, dus $W = \rho g A \int_0^h (2{,}3 + y)\,\mathrm{d}y = \rho g A \left[2{,}3\,y + \frac{y^2}{2}\right]_0^h$.

3 $W = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4778 \cdot \left(2{,}3 \cdot 1{,}046 + \frac{1{,}046^2}{2}\right) = 13{,}8\,\mathrm{kJ}$.

4 In wattuur: $3{,}85\,\mathrm{Wh}$; met 10 % rendement $38\,\mathrm{Wh}$ elektrisch.

ANTWOORD

Ongeveer 13,8 kJ arbeid, 38 Wh elektrisch: minder dan de groeilampen in een kwartier verbruiken.

Klopt dit? Het resultaat is $m\,g\,(2{,}3 + h/2)$: alsof alle 500 kg in één keer tot het zwaartepunt van de volle tank gaan. De integraal bewijst die vuistregel (een gemiddelde hoogte, verder in dit hoofdstuk).

NASLAG · 3.12

Integralen: formules en eenheden

12/19

Controleer een primitieve door af te leiden, een numerieke integraal door n te verdubbelen, en elk resultaat op eenheden.

hoofdstelling

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

ophopen in de techniek

$$E = \int P\,\mathrm{d}t \qquad Q = \int I\,\mathrm{d}t \qquad x = \int v\,\mathrm{d}t \qquad W = \int F\,\mathrm{d}x$$

symbool	betekenis	eenheid
E	energie	J of Wh
Q	lading	C of Ah
x	verplaatsing	m
W	arbeid	J

trapeziumregel

$$T_n = h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

symbool	betekenis	eenheid
h	breedte van een strook (b − a)/n	eenheid van x
f_i	f(a + i h)	eenheid van f

regel van Simpson (n even)

$$S_n = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

gemiddelde en effectieve waarde

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,\mathrm{d}x \qquad f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x}$$

$f(x)$	primitieve $F(x)$	controle: $F'(x)$
k (constante)	kx	k
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
e^{kx}	$\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$	e^{kx}
$\sin(\omega t)$	$-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$

Bij elke primitieve mag je een constante C optellen. Voor de bepaalde integraal valt die weg in $F(b) - F(a)$.

regel	fout bij h klein	n verdubbelen	exact voor
links of rechts	$\approx \frac{1}{2}(b-a)\,h\,\lvert f'\rvert$	fout / 2	constanten
midden	$\approx \frac{1}{24}(b-a)\,h^2\,\lvert f''\rvert$	fout / 4	rechten
trapezium	$\approx \frac{1}{12}(b-a)\,h^2\,\lvert f''\rvert$	fout / 4	rechten
Simpson	$\approx \frac{1}{180}(b-a)\,h^4\,\lvert f^{(4)}\rvert$	fout / 16	derdegraadsveeltermen

UITLEG · 3.13

Numeriek integreren: trapezium en Simpson

13/19

Trapeziumregel. Verbind opeenvolgende punten met rechte stukjes en tel de trapezia op. Elk trapezium heeft oppervlakte $h\,\frac{f_i+f_{i+1}}{2}$; samen tellen de binnenste punten twee keer half mee:

TRAPEZIUMREGEL

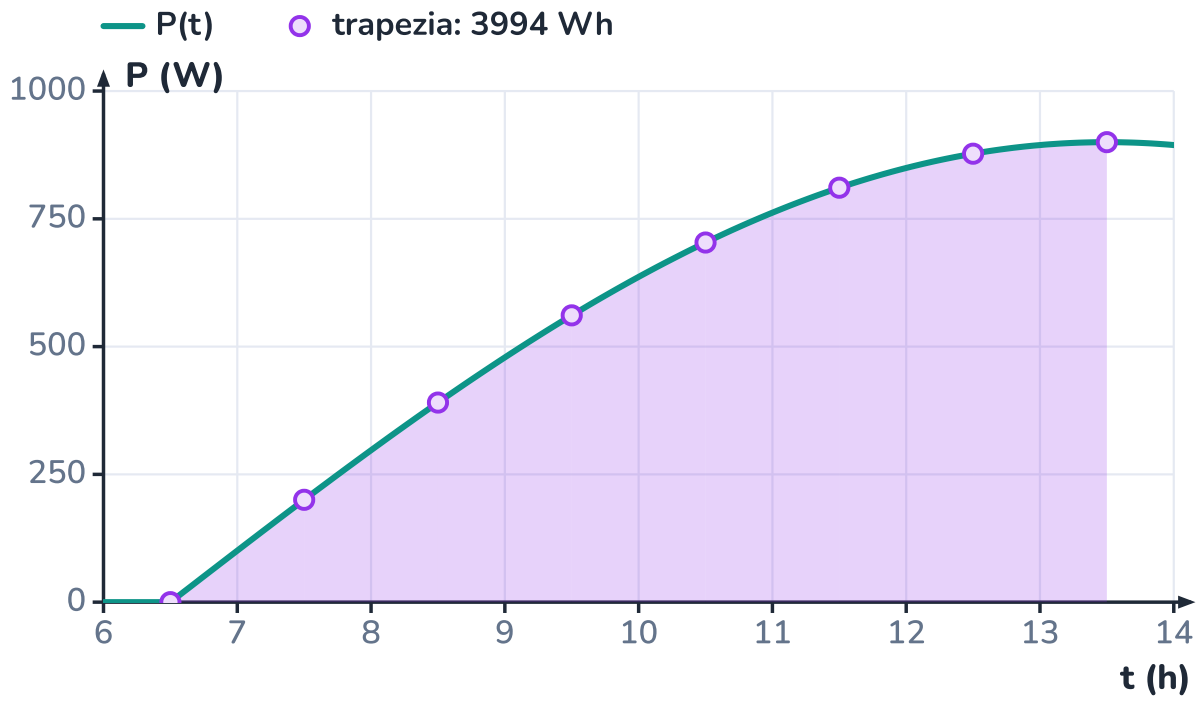
$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x \approx h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right]$$

$h = (b-a)/n$. Het is het gemiddelde van de linker- en de rechtersom.

Waar de kromme bol is ($f'' < 0$), ligt de koorde eronder en onderschat de trapeziumregel; waar ze hol is, overschat ze. Voor één trapezium is exact min benadering $-\frac{h^3}{12}f''$; over $n = (b-a)/h$ stroken samen is de fout van de orde $\frac{(b-a)h^2}{12}\lvert f''\rvert$: tweede orde. Voor meetdata met een vaste stap is het de natuurlijke keuze: je integreert precies wat je gemeten hebt, met rechte lijnen ertussen.

Simpson. Leg door telkens drie punten een parabool in plaats van een rechte. Voor twee stroken samen geeft dat $\frac{h}{3}\,(f_0 + 4f_1 + f_2)$; achter elkaar de gewichten 1, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 1 (met n even). De fout is van de orde h^4, en de regel is zelfs exact voor derdegraadsveeltermen. Nog een manier om hem te zien: $S_{2n} = T_{2n} + \frac{T_{2n}-T_n}{3}$, de trapeziumregel verbeterd met haar eigen foutschatting (extrapolatie van Richardson).

Voor de ochtend van de ideale dag met zeven trapezia: $3994\ \mathrm{Wh}$ tegen exact $4011\ \mathrm{Wh}$, −0,4 %: de sinus is bol, de koorden liggen eronder.



Zeven trapezia onder een bolle kromme: de koorden liggen er net onder, de fout is klein en negatief.

CODE · 3.14

Vier regels vergeleken

14/19

Een test met een integraal waarvan je de uitkomst kent, $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$, toont de orde van elke regel: verdubbel n en kijk hoeveel keer kleiner de fout wordt.

Python **integreer.py** 30 regels

```python
# integreer.py - vier regels voor een bepaalde integraal, getest op de integraal van e^x van 0 tot 1
import math


def links(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    return h * sum(f(a + i * h) for i in range(n))


def midden(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    return h * sum(f(a + (i + 0.5) * h) for i in range(n))


def trapezium(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    return h * (f(a) / 2 + sum(f(a + i * h) for i in range(1, n)) + f(b) / 2)


def simpson(f, a, b, n):                    # n moet even zijn
    h = (b - a) / n
    binnen = sum((4 if i % 2 else 2) * f(a + i * h) for i in range(1, n))
    return h / 3 * (f(a) + binnen + f(b))


exact = math.e - 1
```

```
print("  n     links      midden     trapezium  Simpson")
for n in (2, 4, 8, 16, 32):
    fouten = [abs(r(math.exp, 0, 1, n) - exact) for r in (links, midden, trapezium, simpson)]
    print("%3d   " % n + "  ".join("%9.2e" % x for x in fouten))
```

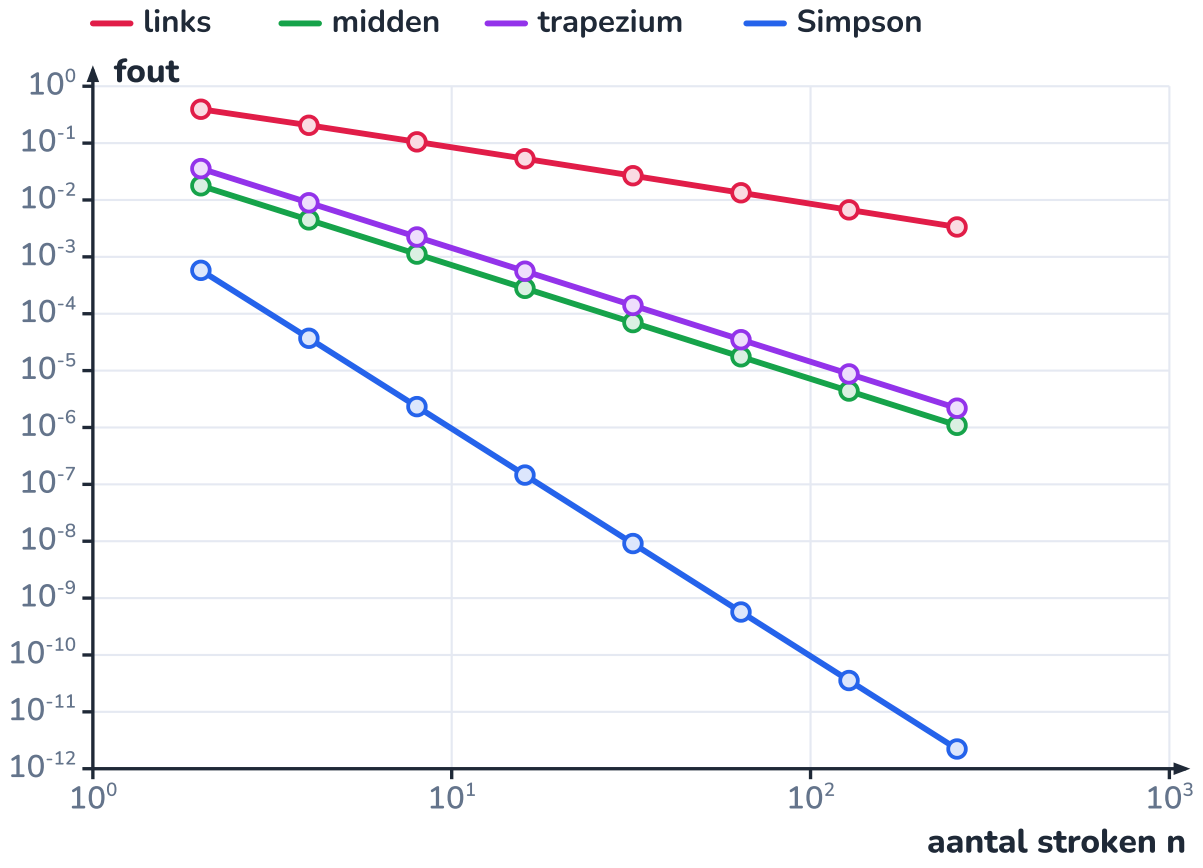
Uitvoer:

n	links	midden	trapezium	Simpson
2	3.94e-01	1.78e-02	3.56e-02	5.79e-04
4	2.06e-01	4.47e-03	8.94e-03	3.70e-05
8	1.05e-01	1.12e-03	2.24e-03	2.33e-06
16	5.31e-02	2.80e-04	5.59e-04	1.46e-07
32	2.67e-02	6.99e-05	1.40e-04	9.10e-09

Links: fout / 2 per verdubbeling (eerste orde). Midden en trapezium: fout / 4 (tweede orde), met de middenregel ongeveer twee keer nauwkeuriger en met het andere teken. Simpson: fout / 16 (vierde orde); bij 32 stroken is de fout al 10^{-8}. De log-loggrafiek (tot 256 stroken) toont de hellingen −1, −2 en −4; bij nog meer stroken zou Simpson op de bodem van de afrondingsfout botsen, zoals in hoofdstuk 1.

In numpy

`numpy.trapezoid(p, t)` doet de trapeziumregel op meetpunten, ook met ongelijke stappen (in oudere versies heette ze `numpy.trapz`); `scipy.integrate.simpson` doet Simpson. Voor een functie die je zelf kan uitrekenen, kiest `scipy.integrate.quad` de stroken zelf.



Hoe steiler de lijn, hoe hoger de orde: links −1, trapezium en midden −2, Simpson −4.

Gemiddelde en effectieve waarde

De **gemiddelde waarde** van een functie op $[a, b]$ is de hoogte van de rechthoek met dezelfde breedte en dezelfde oppervlakte:

GEMIDDELDE WAARDE VAN EEN FUNCTIE

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

De meetkas op de zonnige aprildag (hoofdstuk 4 van Fundamental): de trapeziumregel op de uurwaarden geeft $\int_0^{24} T\,\mathrm{d}t = 394\,^\circ\mathrm{C}\cdot\mathrm{h}$, dus $\bar{T} = 16{,}4\,^\circ\mathrm{C}$. Het gemiddelde van minimum en maximum, $19{,}9\,^\circ\mathrm{C}$, ligt veel hoger: de kas is maar enkele uren echt warm. Ook de gemiddelde hoogte van het water in de tankopdracht, en de 'gemiddelde snelheid' van hoofdstuk 7 van Intermediate, zijn zulke gemiddelden.

De **effectieve waarde** (RMS, root mean square) is de wortel uit het gemiddelde van het kwadraat. Ze telt voor vermogen, want $P = u^2/R$. Voor $u = \hat{U}\sin(\omega t)$ is het gemiddelde van $\sin^2$ over een periode $\frac{1}{2}$ (want $\sin^2 = \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$ en de cosinus middelt weg), dus

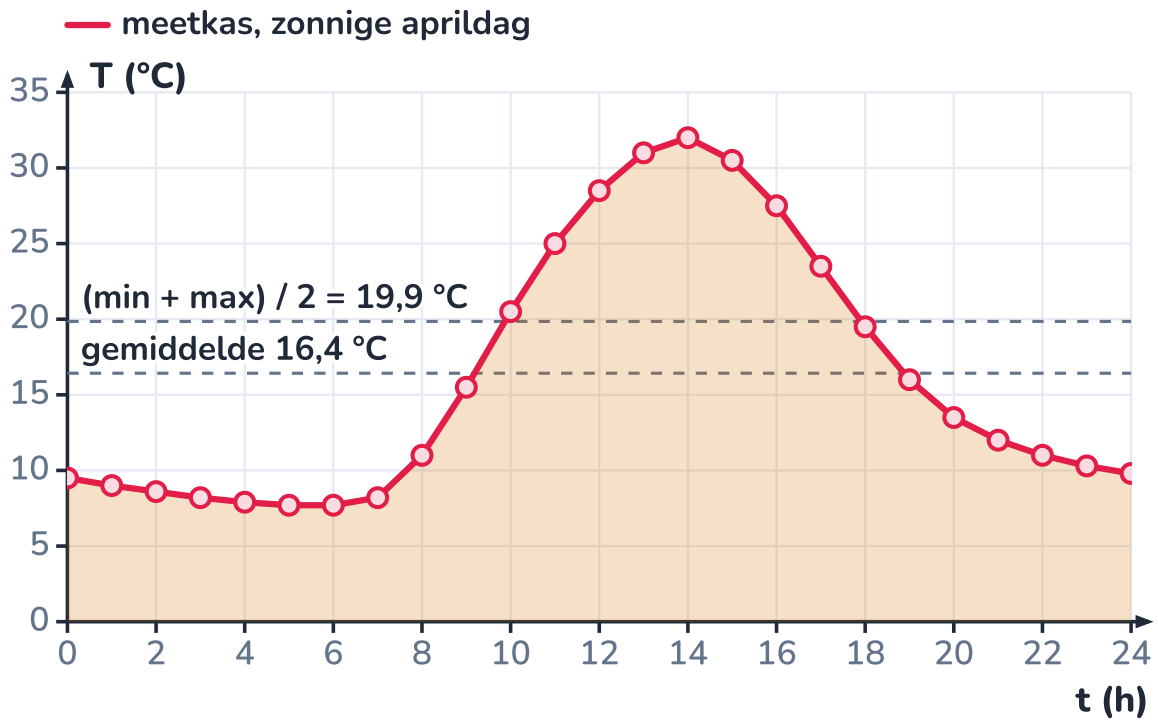
EFFECTIEVE WAARDE VAN EEN SINUS

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{u^2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Het net: $\hat{U} = 325\,\mathrm{V}$ geeft $230\,\mathrm{V}$. Een PWM-signaal met duty cycle D en amplitude U heeft gemiddelde $D\,U$ maar effectieve waarde $\sqrt{D}\,U$ (hoofdstuk 25 van Intermediate).

Het gemiddelde van de sinus is nul, dus doet ze niets

Het gemiddelde van de netspanning over een periode is nul, maar een waterkoker wordt er toch warm van: het vermogen hangt af van u^2, en dat is nooit negatief. Welk gemiddelde je nodig hebt, hangt af van de vraag: lading (gewoon gemiddelde van de stroom) of warmte (effectieve waarde).



Het oranje vlak onder de temperatuur heeft dezelfde oppervlakte als een rechthoek van 24 h breed en 16,4 °C hoog: het gemiddelde.

CODE · 3.16

Habitat: de dagopbrengst uit de logger

16/19

De MPPT-regelaar van de klimaatmodule meldt elk kwartier het vermogen dat hij naar de batterij stuurt. Het brein van het station krijgt een CSV-bestand. Hier: een zonnige dag, 12 mei 2026, met drie wolken (een voorbeeldreeks, gemaakt met een model voor de zonnestand in Brussel, zie het volgende blad). De eerste regels, en een stuk rond de middag:

```
tijdstip,vermogen_W
05:00,0
05:15,0
...
11:45,944
12:00,1006
12:15,1013
...
```

Python **dagopbrengst.py** 31 regels

```python
# dagopbrengst.py - de energie van de zonnepanelen uit het vermogen om het kwartier (trapeziumregel)
import csv

tijden, vermogen = [], []                  # uren, watt
with open("zonnestroom_12mei.csv", newline="") as f:
    for rij in csv.DictReader(f):
        uur, minuut = rij["tijdstip"].split(":")
        tijden.append(int(uur) + int(minuut) / 60)
        vermogen.append(float(rij["vermogen_W"]))


def trapezium(t, p):
```

```
    """Oppervlakte onder de punten (t, p): energie in Wh als t in uur en p in W."""
    return sum((p[i] + p[i + 1]) / 2 * (t[i + 1] - t[i]) for i in range(len(t) - 1))


E = trapezium(tijden, vermogen)
E_uur = trapezium(tijden[::4], vermogen[::4])      # alleen de volle uren
P_max = max(vermogen)
print("dagopbrengst:          %.0f Wh (%.2f volle zonuren voor 1400 Wp)" % (E, E / 1400))
print("met alleen uurwaarden: %.0f Wh (%+.1f %%)" % (E_uur, (E_uur / E - 1) * 100))
t_max = tijden[vermogen.index(P_max)]
print("grootste vermogen:     %.0f W om %d:%02d" % (P_max, *divmod(round(t_max * 60), 60)))
print("gemiddeld vermogen:    %.0f W over 24 uur" % (E / 24))

opgebouwd, helft = 0.0, None
for i in range(len(tijden) - 1):
    opgebouwd += (vermogen[i] + vermogen[i + 1]) / 2 * (tijden[i + 1] - tijden[i])
    if helft is None and opgebouwd >= E / 2:
        helft = tijden[i + 1]
print("de helft van de energie is binnen om %d:%02d" % divmod(round(helft * 60), 60))
```

Uitvoer:

```
dagopbrengst:          7197 Wh (5.14 volle zonuren voor 1400 Wp)
met alleen uurwaarden: 6787 Wh (-5.7 %)
grootste vermogen:     1102 W om 13:15
gemiddeld vermogen:    300 W over 24 uur
de helft van de energie is binnen om 13:30
```

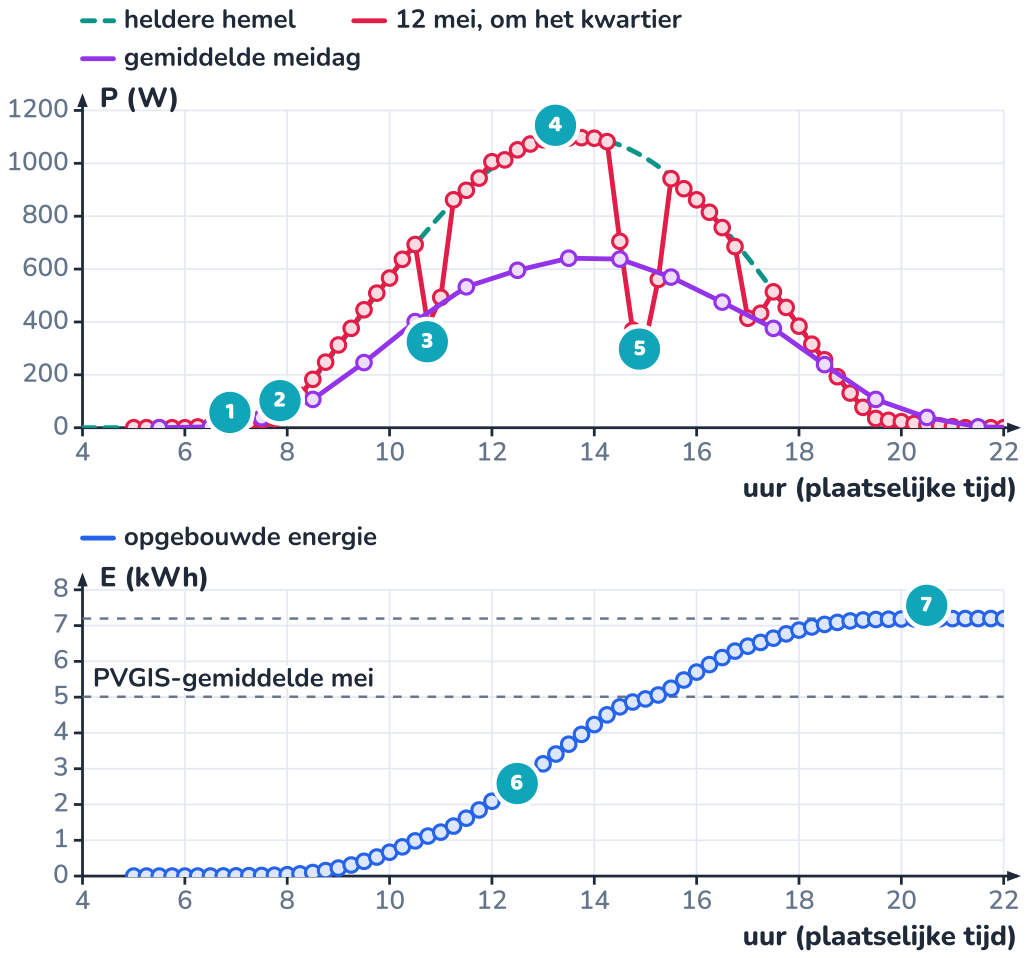
De trapeziumregel op 69 kwartierwaarden geeft 7,20 kWh. Met alleen de 18 uurwaarden kom je 5,7 % lager uit: toevallig vallen drie volle uren (11:00, 15:00 en 17:00) midden in een wolk, zodat elke wolk een heel uur lang lijkt te duren. Omdat de voorbeeldreeks uit een model komt, kennen we ook de energie met een meting per minuut: 7,23 kWh. Het kwartier zit er 0,5 % naast, het uur 6,1 %.

ONTLEED · 3.17

Habitat: een zonnedag lezen

17/19

Boven: het vermogen om het kwartier op 12 mei (voorbeeldreeks), het model voor een heldere hemel, en het gemiddelde uurprofiel van een meidag uit PVGIS (hoofdstuk 20 van Intermediate). Onder: de energie die sinds de ochtend is opgebouwd, met de trapeziumregel.



De onderste kromme is de integraal van de bovenste: waar het vermogen groot is, stijgt ze steil; in een wolk vlakt ze af. Tijden in zomertijd (UTC+2): de klok van het station loopt het hele jaar op UTC+1, een uur vroeger.

1 Alleen hemellicht
De zon komt op rond 6:10, maar staat in mei in het noordoosten, achter het steile paneel. Tot ongeveer 8 uur valt er alleen diffuus licht op: enkele tientallen watt.

2 De zon op het paneel
Rond 7:52 valt de directe zon voor het eerst op de voorkant van de panelen: het vermogen versnelt. Een paneel onder 60° is gemaakt voor de lage winterzon.

3 Een wolk, één meting
Om 10:45 meet de logger midden in een wolk (386 W). Met alleen uurwaarden zie je ze enkel omdat 11:00 er toevallig in valt, en dan lijkt ze een uur te duren; met een meting per minuut zie je haar echte vorm.

4 Middag
Het grootste vermogen, 1102 W om 13:15: 79 % van het piekvermogen. De zon staat in het zuiden, maar hoger dan loodrecht op het steile paneel.

5 Een lange wolk
Tussen 14:30 en 15:15 zakt het vermogen tot ongeveer een derde. De energiekromme onder vlakt daar zichtbaar af.

6 Helling = vermogen
De opgebouwde energie is de integraal van het vermogen; haar helling (kWh per uur) is dus het vermogen (hoofdstelling). Om 13:30 is de helft binnen.

7 De dagopbrengst
7,20 kWh, tegen gemiddeld 5,01 kWh voor een meidag (PVGIS, stippellijn): dit was een goede dag, geen gemiddelde.

UITGEWERKT VOORBEELD · 3.18

Habitat: de dagopbrengst beoordelen

18/19

Vergelijk de gemeten dagopbrengst van 12 mei met PVGIS, met de heldere hemel en met het energiebudget van de module (3,27 kWh per dag, hoofdstuk 20 van Intermediate). Hoeveel volle zonuren waren het? Hoeveel energie kan de batterij (2,46 kWh bruikbaar) opvangen, en welk besluit trek je voor de logger?

GEGEVEN

- $E_{12\ \text{mei}} = 7197\ \text{Wh}$ (trapezium, kwartier)
- PVGIS mei: 3,58 Wh per Wp per dag; heldere hemel (model): $7993\ \text{Wh}$

GEVRAAGD

- volle zonuren, verhoudingen, overschot, advies

OPLOSSING

1. Volle zonuren: $\frac{7197\ \text{Wh}}{1400\ \text{Wp}} = 5{,}14\ \text{h}$: evenveel energie als 5,1 uur bij 1000 W/m² en STC.
2. PVGIS-gemiddelde voor mei: $3{,}58 \cdot 1400 = 5012\ \text{Wh}$. Deze dag gaf 44 % meer; het gemiddelde bevat ook grijze dagen. Tegenover een volledig heldere hemel mist de dag 10 % door de wolken.
3. Het budget van de module is 3,27 kWh per dag. Overdag verbruikt de module zelf al een groot deel rechtstreeks; wat overblijft, gaat naar de batterij tot ze vol is. Van de 3,9 kWh verschil kan de batterij hoogstens 2,46 kWh opnemen: op zo'n dag is er een overschot (hoofdstuk 20 van Intermediate).
4. De logger: om het kwartier is de fout op de dagopbrengst ongeveer 0,5 %, om het uur 6 %. Voor een dagtotaal volstaat het kwartier; wie de wolken wil zien (voorspellen, hoofdstuk 43), logt elke minuut. Nog beter: de regelaar integreert zelf elke seconde en meldt wattuur.

ANTWOORD

7,2 kWh of 5,1 volle zonuren: 44 % boven het PVGIS-gemiddelde voor mei, 10 % onder een heldere dag. Ruim genoeg voor de module; het overschot is een reden om later lasten te verschuiven (hoofdstuk 49).

Klopt dit? Het gemiddelde vermogen over de dag is 300 W: minder dan een derde van de piek. Een energiebudget op basis van piekvermogen is dus altijd veel te optimistisch; op basis van integralen niet.

HET GEHEEL · 3.19

Waar integralen vandaan komen en waar ze heen gaan

19/19

Integreren is de tweede helft van de analyse: afleiden vraagt 'hoe snel?', integreren 'hoeveel in totaal?'. Samen vormen ze de taal van elk dynamisch model. Het raakt energie (E), mechanica (K), elektronica (L), regelen (R) en data (A): een teller, een gemiddelde, een effectieve waarde, een kans (de oppervlakte onder een verdeling, hoofdstuk 6).

F21 Elektrisch vermogen en energie

E = P · t en de kilowattuur: ophopen bij een constant vermogen.

I7 Beweging beschrijven

De oppervlakte onder de (v,t)-grafiek is de verplaatsing, voor rechte stukken.

I9 Arbeid, energie en vermogen

Arbeid W = F · s bij een constante kracht; hier bij een veranderlijke.

I20 Zonne-energie dimensioneren

PVGIS, volle zonuren en het energiebudget van de module.

I25 Van analoog naar digitaal

PWM: gemiddelde en effectieve waarde van een blokgolf.

E1 Afgeleiden: verandering meten

De afgeleide; de hoofdstelling maakt van integreren afleiden achterstevoren.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Een simulatie integreert een verandering stap voor stap (Euler).

E6 Statistiek en meetonzekerheid

Een kans is een oppervlakte onder een kansverdeling.

E20 Wisselstroom

Effectieve waarden en gemiddeld vermogen bij wisselstroom.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Runge-Kutta: de regel van Simpson voor differentiaalvergelijkingen.

E39 PID-regeling

De I-actie is een integraal van de fout, numeriek een som.

Habitat

Het brein van het station integreert voortdurend: het vermogen van de MPPT-regelaars tot wattuur (dagopbrengst 12 mei: 7,2 kWh), de batterijstroom tot ampère-uur (coulombteller), het debiet tot liter. Afspraak: de regelaars integreren zelf per seconde; de Pi logt per minuut en controleert met de trapeziumregel. Opdracht 3.11 doet dat voor een bewolkte oktoberdag, opdracht 3.15 ontwerpt de teller zelf.

SAMENVATTING

In het kort

- Ophopen met een veranderlijke snelheid is de oppervlakte onder de snelheidskromme: $E = \int P\,\mathrm{d}t$, $Q = \int I\,\mathrm{d}t$, $x = \int v\,\mathrm{d}t$, $W = \int F\,\mathrm{d}x$.
- Een Riemann-som $\sum f(x_i^*)\Delta x$ benadert die oppervlakte; de bepaalde integraal is haar limiet. Eenheid: die van f maal die van x.
- Stukken onder de as tellen negatief (oppervlakte met teken); integralen zijn lineair en je mag ze opsplitsen.
- Een primitieve F heeft $F' = f$; hoofdstelling: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f = f(x)$ en $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- Numeriek: trapeziumregel (fout $\sim h^2$, natuurlijk voor meetdata), Simpson (fout $\sim h^4$); controleer door n te verdubbelen.
- Gemiddelde waarde $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$; effectieve waarde $\sqrt{\overline{f^2}}$, bij een sinus $\hat{U}/\sqrt{2}$.
- De dagopbrengst van de panelen is de integraal van het vermogen: om het kwartier gemeten ongeveer 0,5 % nauwkeurig, om het uur enkele procent.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

Riemann-som

bepaalde integraal

Een som van rechthoekjes $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ die de oppervlakte onder een kromme benadert; links, rechts of in het midden van elke strook.

De limiet van de Riemann-sommen als de stroken oneindig smal worden: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Eenheid: die van f maal die van x.

primitieve functie

Een functie F met $F' = f$. Ze is bepaald op een constante na.

hoofdstelling van de integraalrekening

Afleiden en integreren zijn elkaars omgekeerde: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$ en $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

oppervlakte met teken

Stukken onder de x-as tellen negatief in een integraal: bv. ontladen tegenover laden.

trapeziumregel

Numerieke integratie met rechte lijnstukjes tussen de meetpunten; fout evenredig met h^2.

regel van Simpson

Numerieke integratie met parabolen door telkens drie punten; fout evenredig met h^4, exact voor derdegraadsveeltermen.

gemiddelde waarde

$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$: de hoogte van de rechthoek met dezelfde oppervlakte.

effectieve waarde (RMS)

De wortel uit het gemiddelde van het kwadraat: de gelijkspanning die hetzelfde vermogen in een weerstand geeft.

coulombteller

Meet de stroom van een batterij en telt (integreert) hem op tot lading, om de laadtoestand te kennen.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 4

Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Wie weet hoe snel iets verandert, kan uitrekenen hoe het verder gaat: exact of stap voor stap

Bijna elk natuurkundig of biologisch model zegt niet wat een grootheid *is*, maar hoe snel ze *verandert*: de kas warmt op met de zon en verliest warmte naar buiten, algen groeien tot hun licht op is, een condensator laadt tot de bron. Zo'n model is een **differentiaalvergelijking**. Je leert ze opstellen als balans, lezen in een richtingsveld, oplossen door veranderlijken te scheiden, en, als dat niet lukt, **simuleren** met de methode van Euler, met oog voor stapgrootte, fout en stabiliteit. Het hoofdstuk eindigt met de eerste simulatie van de meetkas, naast haar echte uurwaarden.

8× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 3× code · ± 12 lestijden

Wiskundig modelleren · Programmeren en computationeel denken · Energie · Leven en systemen



Wat de sensor in de meetkas meet, kan het brein van het station nu ook voorspellen: met een model van hoe snel de kas opwarmt en afkoelt.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een veranderingsproces vertalen in een differentiaalvergelijking dy/dt = f(y, t) met een beginwaarde, als balans van wat erin komt en eruit gaat, en de eenheden en evenwichten ervan interpreteren.
- Je kan een richtingsveld lezen en schetsen en er oplossingskrommen in tekenen.
- Je kan een oplossing controleren door ze in te vullen, en exponentiële groei en verval, de afkoelingswet van Newton, de RC-kring en de logistische vergelijking oplossen door scheiden van veranderlijken.
- Je kan tijdconstante, halverings- en verdubbelingstijd, groeisnelheid en draagkracht berekenen en uit metingen schatten.
- Je kan de methode van Euler afleiden uit de raaklijn en toepassen, met de hand en in Python, ook op een stelsel.
- Je kan de fout van Euler tegenover de stapgrootte verklaren (orde 1) en de stabiliteitsgrens $h < 2\tau$ afleiden en gebruiken.
- Je kan een simulatie vergelijken met metingen en uit de residuen afleiden of een parameter slecht gekozen is of een mechanisme ontbreekt.

- Je kan een eerste warmtemodel van de meetkas simuleren en er een onderbouwde ontwerpbeslissing mee nemen.

VERHAAL · 4.1

Rekenen in stapjes: van Euler tot het weerbericht

1/21

In 1768 verscheen in Sint-Petersburg het eerste deel van de *Institutiones calculi integralis*, het leerboek integraalrekening van Leonhard Euler. Euler wist dat de meeste vergelijkingen die zeggen hoe iets verandert, geen oplossing in een formule hebben. Hij beschreef een eenvoudige uitweg: zet een klein stapje langs de raaklijn, reken op de nieuwe plaats de nieuwe helling uit, zet het volgende stapje, en zo verder. Hoe kleiner de stapjes, hoe dichter de gebroken lijn bij de echte oplossing ligt. In de jaren 1820 bewees Augustin-Louis Cauchy in zijn lessen aan de École polytechnique in Parijs dat dat klopt als de stap naar nul gaat. Die gebroken lijn heet vandaag de **methode van Euler**.

Rekenen in stapjes was toen al ernst. In 1757 en 1758 rekenden de wiskundige Alexis Clairaut, de astronoom Joseph Jérôme Lalande en de rekenaarster Nicole-Reine Lepaute maandenlang met de hand uit hoe Jupiter en Saturnus de komeet van Halley zouden vertragen. In november 1758 kondigden ze aan dat de komeet rond half april 1759 het dichtst bij de zon zou komen, met een marge van een maand. Het werd 13 maart: net binnen de marge, en een triomf voor de mechanica van Newton.

Tijdens de Eerste Wereldoorlog probeerde de Britse natuurkundige Lewis Fry Richardson, als vrijwilliger bij een ambulancedienst in Frankrijk, het weer van zes uur verder uit te rekenen met de vergelijkingen van de atmosfeer, opgedeeld in cellen en tijdstappen. Na weken rekenwerk kwam er voor één punt een drukstijging van 145 hPa in zes uur uit: onmogelijk. Toch publiceerde hij zijn methode in 1922, met de droom van een zaal met 64 000 rekenaars die het weer sneller zouden uitrekenen dan het zelf veranderde. Veel later bleek uit een reconstructie dat niet zijn methode de schuldige was, maar de begintoestand: kleine onevenwichten in de gemeten wind en druk. In 1928 toonden Richard Courant, Kurt Friedrichs en Hans Lewy aan dat een tijdstap ook te groot *kan* zijn: dan explodeert de berekening, hoe goed de vergelijkingen ook zijn. In 1950 lukte de eerste weersvoorspelling met een computer, op de ENIAC, door Jule Charney, Ragnar Fjørtoft en John von Neumann.

Beginwaarde, stapgrootte, stabiliteit: de drie struikelblokken uit dit verhaal zijn precies de onderwerpen van dit hoofdstuk.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het brein van het station moet vooruitkijken: hoe warm wordt de kas vanmiddag, hoe lang houdt de batterij het, wanneer wordt het reservoir groen? Dat kan alleen met een model dat zegt hoe snel iets verandert, en een computer die dat stap voor stap uitrekent. De digitale tweeling van hoofdstuk 49 is een groot stelsel zulke vergelijkingen, opgelost met de methoden van dit hoofdstuk en hoofdstuk 36.



Clairaut, Lalande en Lepaute rekenden de baan van de komeet van Halley stap voor stap met de hand uit.

UITLEG · 4.2

Wat je al weet: veranderingen die van de toestand afhangen

2/21

wat je al kan	wat nu komt
groei en verval met een groeifactor per tijdstap, verdubbelings- en halveringstijd (hoofdstuk 5 van I)	dezelfde processen met een verandering per ogenblik: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = k\,y$
RC-kring: per stapje een vaste fractie van wat ontbreekt; $\tau = RC$ (hoofdstuk 24 van I)	de RC-vergelijking uit de wetten van Kirchhoff, exact en stap voor stap
de afgeleide als helling, de raaklijn als benadering (hoofdstuk 1)	een vergelijking die de helling geeft; stappen langs de raaklijn (Euler)
integreren als ophopen, de linker Riemann-som (hoofdstuk 3)	een simulatie telt de veranderingen op, stap na stap
warmtecapaciteit C en warmteverlies $UA \cdot \Delta T$ (hoofdstuk 18 en 19 van I)	de warmtebalans als differentiaalvergelijking: het eerste model van de meetkas

In al die voorbeelden hangt de verandering af van de toestand zelf: hoe meer algen, hoe meer er bijkomen; hoe warmer de kas, hoe meer warmte ze verliest. Zo'n verband tussen een grootheid en haar afgeleide is een **differentiaalvergelijking**. Hier gaat het over de eenvoudigste soort, van de **eerste orde**: alleen de eerste afgeleide komt voor.

BEGINWAARDEPROBLEEM

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t), \qquad y(t_0) = y_0$$

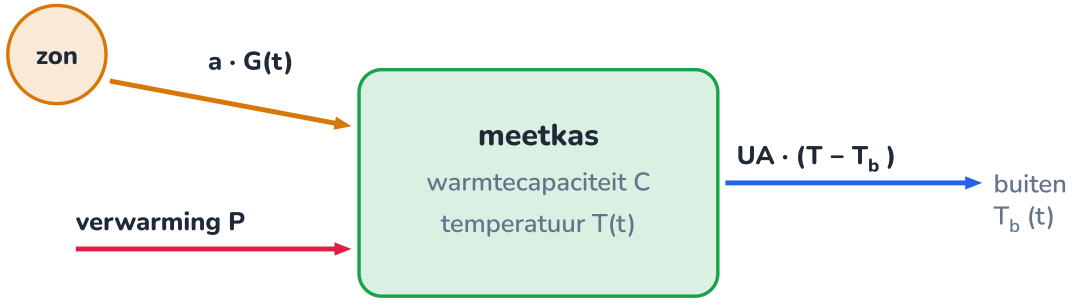
f geeft in elk punt (t, y) de helling van de onbekende functie $y(t)$. Een differentiaalvergelijking heeft een hele familie oplossingen; de **beginwaarde** kiest er één uit.

Een model opstellen is bijna altijd een **balans**: verandering = wat erin komt – wat eruit gaat. Voor de warmte in de meetkas: de zon brengt warmte binnen, een eventuele verwarming ook, en door de wanden lekt er $UA\,(T - T_\mathrm{b})$ weg (hoofdstuk 19 van I). Wat overblijft, warmt de kas op met $C\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ (hoofdstuk 18 van I):

$$C\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a\,G(t) + P - UA\,\big(T - T_\mathrm{b}(t)\big).$$

Controleer altijd de eenheden: links J/K maal K/s = W, rechts drie vermogens. Twee woorden die terugkomen: een vergelijking is **lineair** als y er alleen in de eerste macht in staat (zoals hierboven), en **autonoom** als f niet expliciet van t afhangt. De kas is niet autonoom: de zon en de buitentemperatuur veranderen met de klok. Een **evenwicht** is een waarde y^* waar $f(y^*) = 0$: daar staat alles stil.

model	vergelijking	evenwicht	in Habitat
exponentiële groei	$\dot N = r\,N$	$N = 0$ (onstabiel)	algen in de eerste dagen
exponentieel verval	$\dot y = -y/\tau$	$y = 0$ (stabiel)	condensator die ontlaadt
afkoelen (Newton)	$\dot T = -(T - T_\mathrm{b})/\tau$	$T = T_\mathrm{b}$	station na een stroomuitval
RC laden	$RC\,\dot u = U_0 - u$	$u = U_0$	ontdenderfilter, filter op de batterijmeting
logistische groei	$\dot N = r\,N\,(1 - N/K)$	0 en K	algen in het reservoir
warmtebalans	$C\,\dot T = a\,G(t) + P - UA\,(T - T_\mathrm{b}(t))$	verschuift met t	meetkas, station



verandering = in – uit: C · dT/dt = a · G(t) + P – UA · (T – T_b)

De warmtebalans van de meetkas: wat de zon en een verwarming binnenbrengen, min wat door de wanden weglekt, warmt de kas op.

UITLEG · 4.3

Het richtingsveld: de vergelijking tekent haar eigen oplossingen

Een differentiaalvergelijking geeft in elk punt (t, y) een helling. Teken in een rooster van punten een kort lijnstukje met die helling: dat is het **richtingsveld**. Een oplossing is een kromme die overal aan de lijnstukjes raakt, zoals een blad dat met de stroming meedrijft.

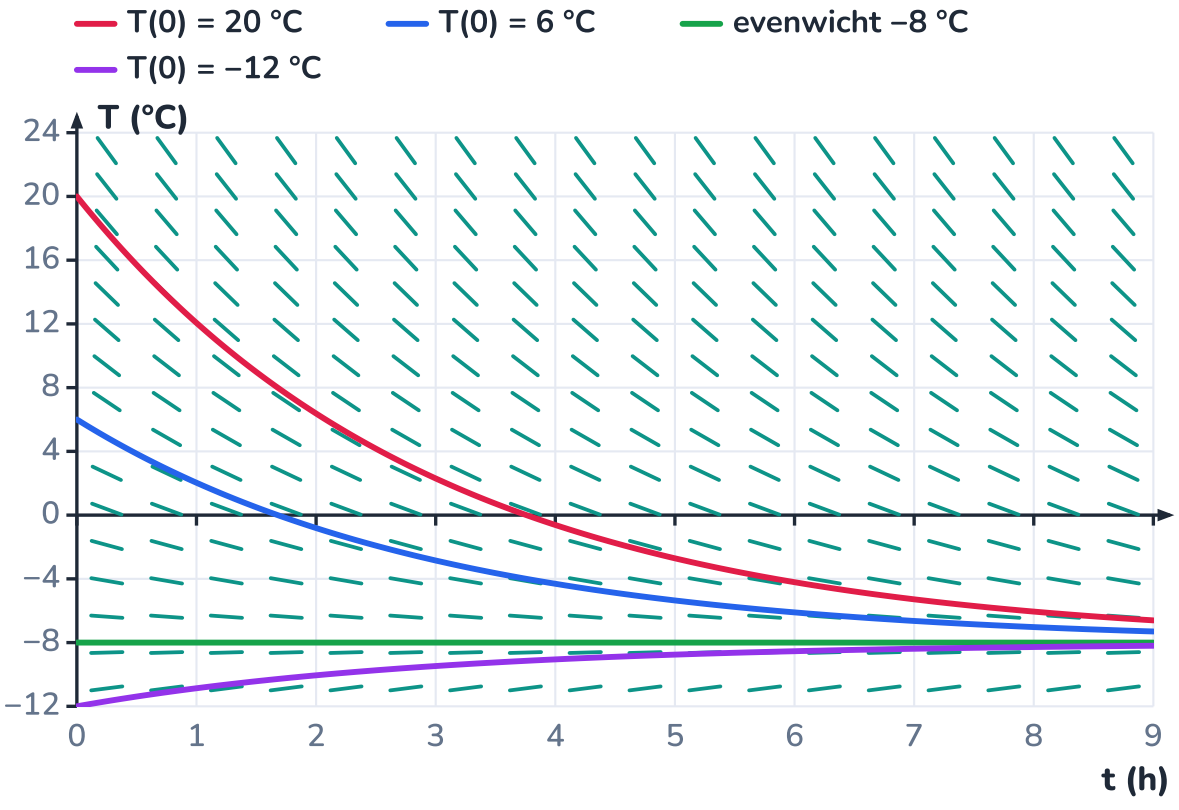
Het voorbeeld is het station na een stroomuitval (hoofdstuk 39): buiten is het −8 °C, de tijdconstante is $\tau = C/UA = 540\,\mathrm{kJ/K}/50\,\mathrm{W/K} = 3\,\mathrm{h}$:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{T+8}{3} \qquad (T \text{ in } ^\circ\mathrm{C},\ t \text{ in h}).$$

- De helling hangt alleen van T af (autonoom): op elke horizontale lijn staan de lijnstukjes evenwijdig.
- Op $T = -8$ °C zijn ze horizontaal: het **evenwicht**. Erboven dalen ze, eronder stijgen ze, en hoe verder van −8 °C, hoe steiler. Alle oplossingen lopen naar −8 °C: een **stabiel** evenwicht.
- De oplossing door $(0; 20)$ is het station dat op 20 °C stond; door $(0; 6)$ een station dat al kouder was; door $(0; -12)$ een doos die kouder was dan buiten (wiskundig mag dat) en opwarmt naar −8 °C.
- Twee oplossingen kruisen elkaar nooit. Als f netjes is (afleidbaar), gaat door elk punt precies één oplossing: de beginwaarde bepaalt alles wat volgt. Dat is de stelling van Picard en Lindelöf, en de reden dat een simulatie een betrouwbare voorspelling kan zijn.

Een differentiaalvergelijking heeft één oplossing

Ze heeft er oneindig veel: één door elk beginpunt. Wie een model opstelt maar de beginwaarde vergeet (hoe warm was het station toen de stroom uitviel?), kan niets voorspellen.



Het richtingsveld van dT/dt = −(T + 8)/3: de lijnstukjes wijzen de weg, de oplossingen volgen ze en lopen allemaal naar −8 °C.

UITGEWERKT VOORBEELD · 4.4

Klopt deze oplossing?

Toon aan dat $T(t) = -8 + 28\,\mathrm{e}^{-t/3}$ de oplossing is van $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{T+8}{3}$ met $T(0) = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Geef ook de algemene oplossing en bereken wanneer het station 10 °C bereikt.

GEGEVEN

- $\dot{T} = -(T+8)/3$, $T(0) = 20\,^\circ\mathrm{C}$
- voorstel: $T(t) = -8 + 28\,\mathrm{e}^{-t/3}$ (t in h)

GEVRAAGD

- controle van vergelijking en beginwaarde
- de algemene oplossing
- het tijdstip waarop T = 10 °C

OPLOSSING

1 Linkerlid: afleiden met de kettingregel (hoofdstuk 1): $\dot{T}(t) = 28 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) \mathrm{e}^{-t/3} = -\tfrac{28}{3}\,\mathrm{e}^{-t/3}$.

2 Rechterlid: $-\dfrac{T+8}{3} = -\dfrac{28\,\mathrm{e}^{-t/3}}{3}$. Beide zijn gelijk voor elke t: de functie voldoet aan de vergelijking. En $T(0) = -8 + 28 = 20$: ook de beginwaarde klopt.

3 Algemeen: $T(t) = -8 + A\,\mathrm{e}^{-t/3}$ voldoet voor elke constante A (dezelfde rekening). De beginwaarde geeft $A = T(0) + 8$. Dat is de familie krommen in het richtingsveld.

4 10 °C: $-8 + 28\,\mathrm{e}^{-t/3} = 10$ geeft $\mathrm{e}^{-t/3} = \tfrac{18}{28}$, dus $t = 3\ln\tfrac{28}{18} = 1{,}325\,\mathrm{h}$, ongeveer 80 minuten.

ANTWOORD

$T(t) = -8 + 28\,\mathrm{e}^{-t/3}$ voldoet aan vergelijking en beginwaarde; algemeen $T = -8 + A\,\mathrm{e}^{-t/3}$. Na ongeveer 80 minuten is het nog 10 °C in het station.

Klopt dit? In het richtingsveld zakt de kromme door $(0;20)$ door 10 °C net na $t = 1{,}3\,\mathrm{h}$. Het verschil met buiten halveert elke $3\ln 2 = 2{,}08\,\mathrm{h}$: van 28 naar 14 °C (station op 6 °C) na 2,1 h. Invullen is de snelste controle van elke oplossing, ook van een simulatie: reken $\dot{T}$ numeriek uit en vergelijk met f.

UITLEG · 4.5

Scheiden van veranderlijken: groei en verval

Waar komt zo'n oplossing vandaan? Neem de eenvoudigste vergelijking, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = k\,y$: de verandering is evenredig met wat er is. Breng alle y naar links en alle t naar rechts, alsof $\mathrm{d}y$ en $\mathrm{d}t$ kleine getallen zijn (Leibniz, hoofdstuk 1), en integreer beide kanten (hoofdstuk 3):

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = k\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int k\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \ln|y| = k\,t + c \quad\Rightarrow\quad y = y_0\,\mathrm{e}^{kt}.$$

Streng genomen deel je door y (dus $y \neq 0$; $y = 0$ is apart een oplossing, het evenwicht) en gebruik je de kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|y| = \dot{y}/y = k$. De constante c volgt uit de beginwaarde: $\mathrm{e}^{c} = |y_0|$.

EXPONENTIËLE GROEI (K > 0) EN VERVAL (K < 0)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k\,y \;\Rightarrow\; y = y_0\,\mathrm{e}^{kt} \qquad \tau = \frac{1}{|k|} \qquad t_{1/2} = \tau \ln 2 \qquad t_2 = \frac{\ln 2}{k}$$

De **tijdconstante** τ is de tijd waarin een verval tot $1/\mathrm{e} = 37\,\%$ zakt; de halveringstijd is $0{,}693\,\tau$. Verband met de groeifactor per tijdstap Δt van hoofdstuk 5 van I: $g = \mathrm{e}^{k\,\Delta t}$, dus $k = \ln g / \Delta t$. Algen die elke dag verdubbelen, hebben $k = \ln 2 = 0{,}693$ per dag.

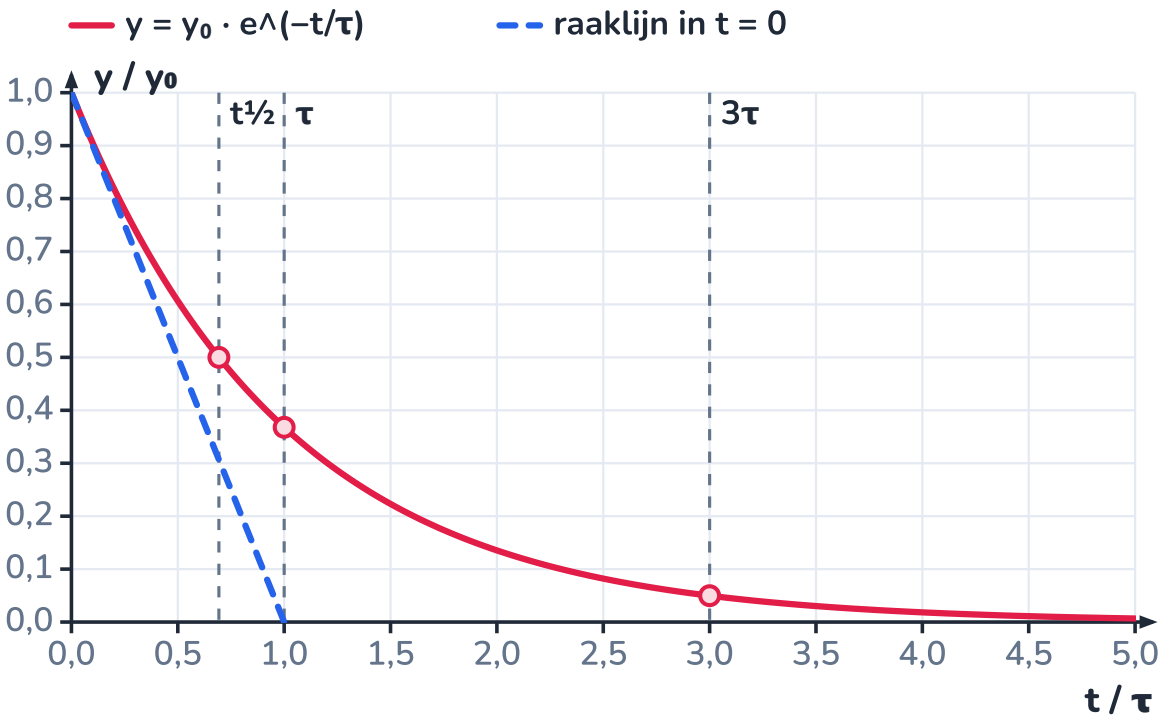
Met één substitutie los je meteen alle modellen met een evenwicht op. Staat er $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -(y - y_\infty)/\tau$, noem dan $u = y - y_\infty$: omdat y_∞ constant is, is $\dot{u} = \dot{y} = -u/\tau$, en dus $u = u_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$:

NAAR EEN EVENWICHT, MET TIJDCONSTANTE τ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y_\infty - y}{\tau} \;\Rightarrow\; y(t) = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Het afkoelende station ($y_\infty = -8$ °C, $\tau = 3$ h), de thee, de condensator die laadt ($y_\infty = U_0$, $\tau = RC$): dezelfde formule. Na τ is 63 % van de weg afgelegd, na 3τ 95 %, na 5τ meer dan 99 %.

Scheiden lukt voor elke vergelijking van de vorm $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = g(t)\,h(y)$, als je de twee integralen kan uitrekenen. Dat is minder vaak dan je zou willen; daarom de tweede helft van dit hoofdstuk.



Na t½ = 0,69 τ is nog de helft over, na τ 37 %, na 3τ 5 %; de raaklijn in t = 0 bereikt nul na precies τ (hoofdstuk 1).

UITGEWERKT VOORBEELD · 4.6

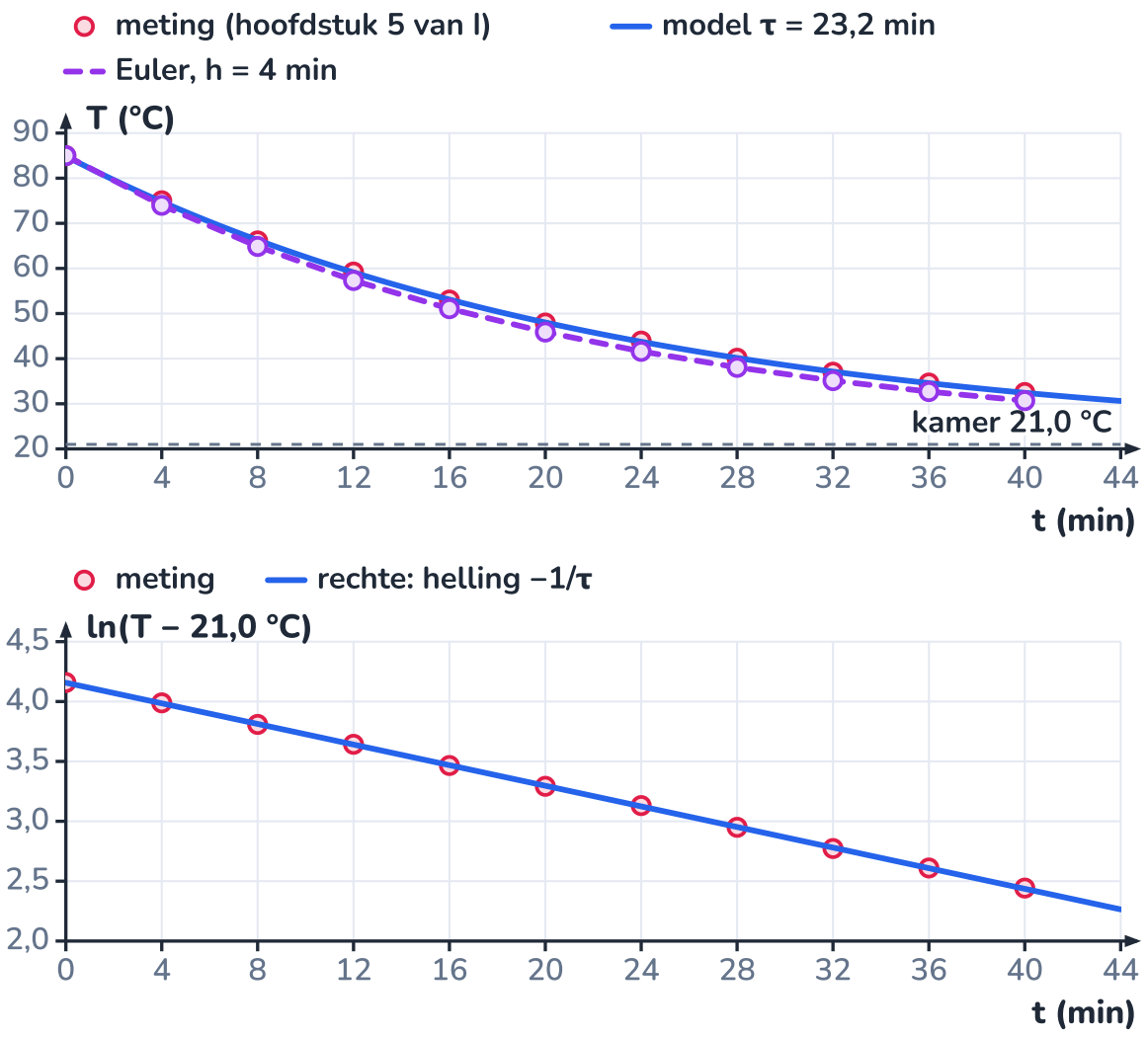
De afkoelingswet van Newton, getoetst aan een beker thee

6/21

In hoofdstuk 5 van Intermediate koelde een beker thee af in een kamer van 21,0 °C:

t (min)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
T (°C)	85,0	75,0	66,1	59,2	53,0	47,9	43,9	40,1	37,0	34,6	32,5

Stel een differentiaalvergelijking op vanuit een warmtebalans, los ze op, bepaal τ uit alle metingen en schat hoeveel watt de beker per graad verschil verliest (thee en beker samen $C \approx 1{,}3\,\mathrm{kJ/K}$, een schatting). Hoe goed doet Euler het met een stap van 4 minuten, de stap van de meting?



Boven: meting, model en Euler met de meetstap. Onder: ln(T − 21 °C) ligt op een rechte met helling −1/τ.

GEGEVEN

- metingen om de 4 min, $T_\mathrm{k} = 21{,}0\,^\circ\mathrm{C}$
- $C \approx 1{,}3\,\mathrm{kJ/K}$

GEVRAAGD

- de vergelijking en haar oplossing
- τ en hA
- Euler met h = 4 min

OPLOSSING

1 Balans: de enige warmtestroom gaat naar de kamer, evenredig met het verschil: $C\,\dot{T} = -hA\,(T - T_\mathrm{k})$. Dat is de afkoelingswet van Newton (1701). Dus $\dot{T} = -(T - T_\mathrm{k})/\tau$ met $\tau = C/(hA)$.

2 Oplossing (vorige blad): $T(t) = T_\mathrm{k} + (T_0 - T_\mathrm{k})\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

3 Lineariseren: $\ln(T - T_\mathrm{k}) = \ln(T_0 - T_\mathrm{k}) - t/\tau$ is een rechte in t. De kleinste-kwadratenrechte door de elf punten (hoofdstuk 3 van I, onder in de figuur) heeft helling $-0{,}0430$ per minuut, dus $\tau = 23{,}2\,\mathrm{min}$, en snijpunt $T_0 - T_\mathrm{k} = 63{,}9$ °C (gemeten 64,0).

4 $hA = C/\tau = 1300\,\mathrm{J/K}/(23{,}2 \cdot 60\,\mathrm{s}) = 0{,}93\,\mathrm{W/K}$: bij 50 °C verschil verliest de beker ongeveer 47 W.

5 Euler met $h = 4\,\mathrm{min}$: $T_{n+1} = T_n - \frac{4}{23{,}2}(T_n - 21)$. Per stap blijft $1 - 4/\tau = 0{,}828$ van het verschil over, in plaats van $\mathrm{e}^{-4/\tau} = 0{,}842$. Na 40 minuten geeft dat 30,7 °C tegenover 32,4 °C exact (gemeten 32,5 °C).

ANTWOORD

$\tau \approx 23\,\mathrm{min}$ (het verschil met de kamer halveert elke 16 minuten), $hA \approx 0{,}9\,\mathrm{W/K}$. Euler met de meetstap zit na 40 minuten 1,7 °C te laag: de stap is te groot tegenover τ.

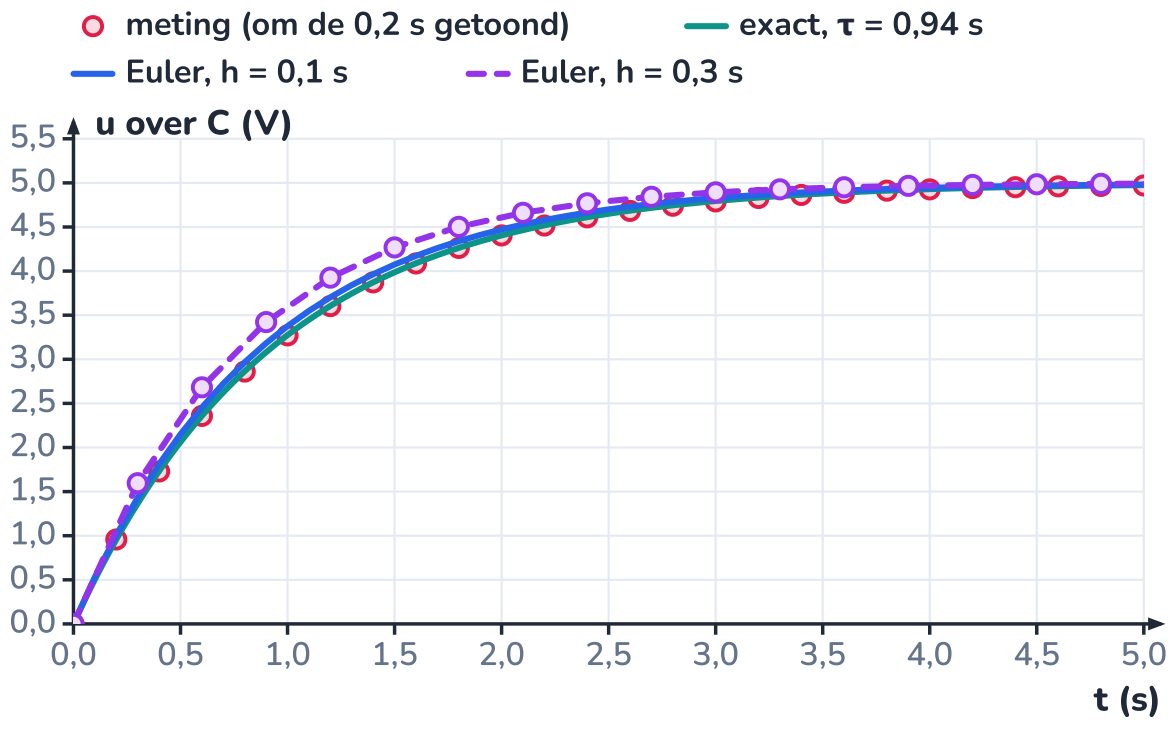
Klopt dit? De residuen van het model zijn hoogstens 0,22 °C en wisselen van teken zonder patroon: het model van Newton past. Bij een open beker is het begin meestal iets sneller dan het model (verdamping); hier zie je dat niet.

UITGEWERKT VOORBEELD · 4.7

De RC-kring: een vergelijking uit Kirchhoff, getoetst aan een meting

7/21

In hoofdstuk 24 van Intermediate laadde een Arduino een condensator (opdruk 100 µF, echt 94 µF) via 10 kΩ op tot 5,0 V en mat om de 0,1 s met de 10-bits ADC. Stel de differentiaalvergelijking op met de wetten van Kirchhoff, los ze op, en simuleer met Euler met de meetstap van 0,1 s. Is die simulatie goed genoeg om met de meting te vergelijken?



De meetpunten liggen op de exacte laadcurve; Euler met h = 0,1 s ligt er zichtbaar boven, met h = 0,3 s nog meer.

GEGEVEN

- $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 94\,\mu\mathrm{F}$, $U_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$, $u(0) = 0$
- ADC-stap $5/1024 = 4{,}9\,\mathrm{mV}$

GEVRAAGD

- de vergelijking en $u(t)$
- Euler met h = 0,1 s en de fout

OPLOSSING

1 Maaswet (hoofdstuk 21 van I): $U_0 = R\,i + u$. Stroom in een condensator (hoofdstuk 1): $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Samen: $RC\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = U_0 - u$.

2 Dezelfde vorm als bij Newton, met $u_\infty = U_0$ en $\tau = RC = 10^4 \cdot 94 \cdot 10^{-6} = 0{,}94\,\mathrm{s}$: $u(t) = U_0\,(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$. De meetpunten liggen op die kromme, op de afronding van de ADC na (minder dan één stap).

3 Euler: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{\tau}(U_0 - u_n)$. Met $h = 0{,}1\,\mathrm{s}$ blijft per stap $1 - h/\tau = 0{,}894$ van wat ontbreekt over, exact is dat $\mathrm{e}^{-h/\tau} = 0{,}899$. Euler laadt dus te snel.

4 Na 1,0 s: Euler $3{,}376\,\mathrm{V}$, exact $3{,}274\,\mathrm{V}$: 102 mV te hoog, 21 ADC-stappen. De grootste afwijking is 102 mV (bij $t \approx 0{,}9\,\mathrm{s}$). Met $h = 0{,}01\,\mathrm{s}$ wordt het 10 mV: tien keer kleiner (orde 1, verderop).

ANTWOORD

$RC\,\dot{u} = U_0 - u$, dus $u = U_0(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})$ met $\tau = 0{,}94\,\mathrm{s}$. Euler met de meetstap zit tot 102 mV naast de exacte kromme, 21 keer de meetresolutie: te grof om met deze meting te vergelijken.

Klopt dit? Vuistregel: de fout van een simulatie moet veel kleiner zijn dan de meetfout, anders vergelijk je je rekenfout met de werkelijkheid. De stap van de meting (0,1 s) heeft niets te maken met de stap die de simulatie nodig heeft; die volgt uit τ en de gewenste nauwkeurigheid.

UITLEG · 4.8

Logistische groei: groeien tot een plafond

8/21

Geen groei is eeuwig exponentieel: algen nemen elkaar het licht af, een voedingsstof raakt op (hoofdstuk 5 van I). In 1838 stelde de Brusselse wiskundige Pierre-François Verhulst een eenvoudige correctie voor, om de groei van een bevolking te beschrijven: laat de **relatieve** groeisnelheid lineair dalen tot nul bij een grens K, de **draagkracht**. In 1845 noemde hij de kromme *logistique*.

LOGISTISCHE VERGELIJKING EN HAAR OPLOSSING

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad N(t) = \frac{K}{1 + \dfrac{K - N_0}{N_0}\,\mathrm{e}^{-rt}}$$

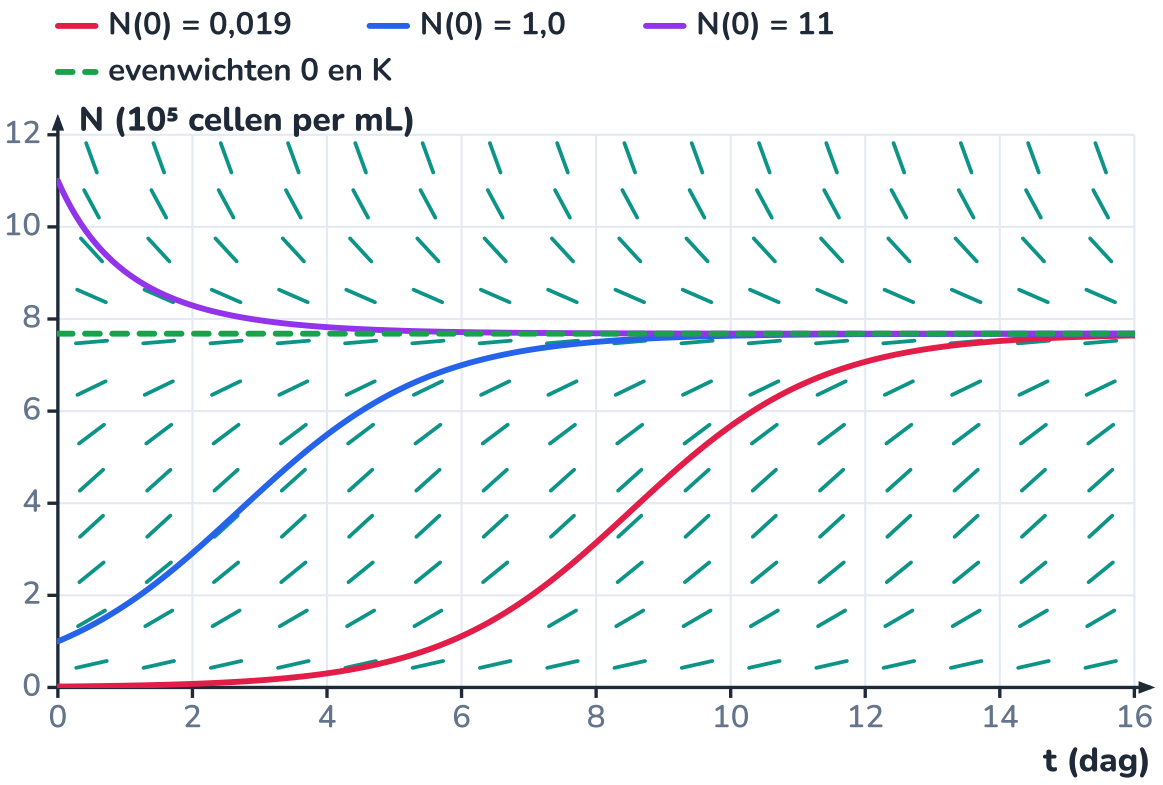
r: groeisnelheid bij kleine N (per dag); K: draagkracht (zelfde eenheid als N). Voor $N \ll K$ is $\dot{N} \approx rN$: exponentieel. Evenwichten: $N = 0$ (onstabiel) en $N = K$ (stabiel).

Afleiding. Scheiden: $\dfrac{\mathrm{d}N}{N(1 - N/K)} = r\,\mathrm{d}t$. Splits de breuk in **partiële breuken**: $\dfrac{1}{N(1 - N/K)} = \dfrac{K}{N(K - N)} = \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{K - N}$ (tel maar op). Integreren geeft $\ln N - \ln(K - N) = rt + c$, dus $\dfrac{N}{K - N} = \dfrac{N_0}{K - N_0}\,\mathrm{e}^{rt}$. Los op naar N: de formule in het kader.

Het snelste punt. De groeisnelheid $f(N) = rN - rN^2/K$ is een bergparabool in N met top waar $f'(N) = r - 2rN/K = 0$: bij $N = K/2$, met $\dot{N}_{\max} = rK/4$. Daar heeft $N(t)$ een buigpunt: de S-kromme gaat van hol naar bol. De **relatieve** groeisnelheid $\dot{N}/N = r\,(1 - N/K)$ is een dalende rechte in N: dat is de sleutel om r en K uit metingen te halen (volgend blad).

In het richtingsveld: onder K stijgen de lijnstukjes, boven K dalen ze (te veel algen voor het licht: ze sterven af tot K). Van heel dicht bij 0 duurt het lang voor er iets te zien is; dan gaat het snel, en bij K

vlakt het af.



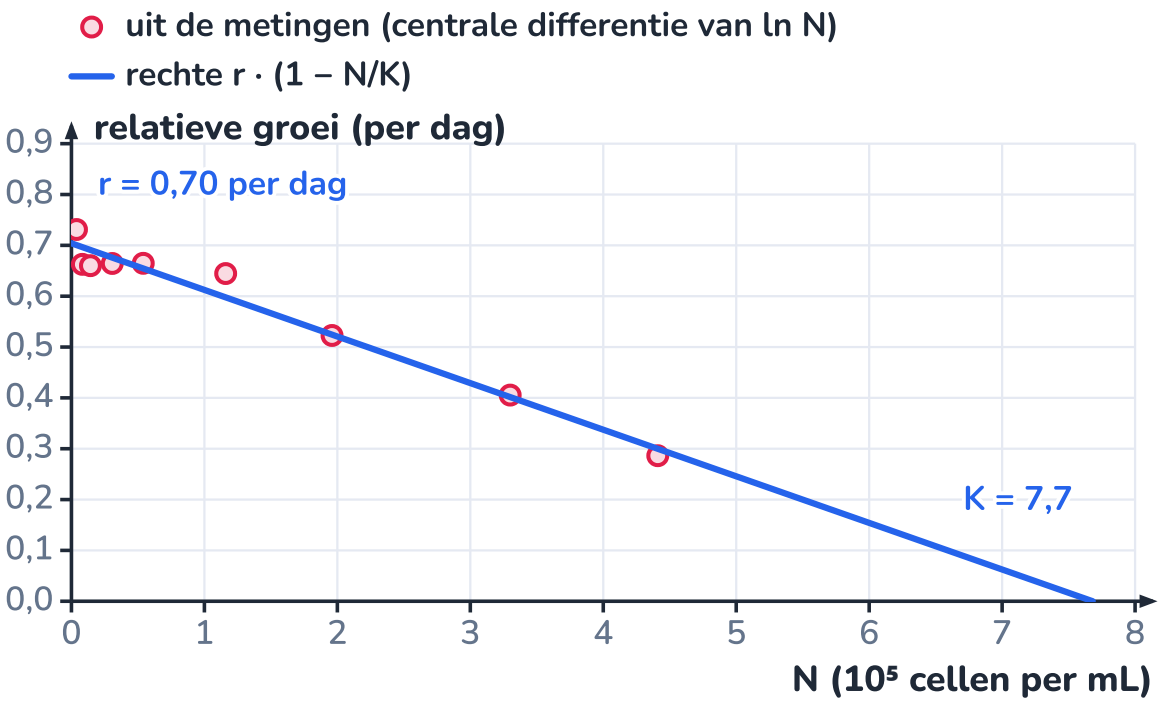
Alle oplossingen met N(0) > 0 lopen naar K; de onderste start met de algen van het testreservoir en is S-vormig.

UITGEWERKT VOORBEELD · 4.9

Habitat: de draagkracht van het testreservoir

9/21

In het doorzichtige testreservoir (hoofdstuk 5 van I, opdracht 5.13) groeiden de algen tot dag 6 exponentieel en daarna trager. Bepaal r en K uit de relatieve groeisnelheid, vergelijk het logistische model met de metingen, en bereken wanneer het alarm ($5 \cdot 10^5$ cellen per mL) afgaat volgens het exponentiële en volgens het logistische model. Hoe goed doet Euler het met een stap van één dag?



De relatieve groeisnelheid tegen N: waar de rechte de horizontale as snijdt, ligt de draagkracht K.

GEGEVEN

- N per dag: 0,019; 0,038; 0,082; 0,143; 0,307; 0,540; 1,160; 1,960; 3,300; 4,410; 5,850 ($\times 10^5$ per mL, dag 0 tot 10)
- alarm bij $5 \cdot 10^5$ per mL

GEVRAAGD

- r en K
- model tegenover meting
- tijdstip van het alarm
- Euler met h = 1 dag

OPLOSSING

1 Relatieve groeisnelheid: $\dot{N}/N = \mathrm{d}(\ln N)/\mathrm{d}t$, met een centrale differentie over twee dagen (hoofdstuk 1): $(\ln N_{i+1} - \ln N_{i-1})/2$.

DAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N (10^5 /mL)	0,038	0,082	0,143	0,307	0,540	1,16	1,96	3,30	4,41
groei (/dag)	0,73	0,66	0,66	0,66	0,66	0,64	0,52	0,41	0,29

2 Tot $N \approx 10^5$ blijft ze rond 0,66 per dag, daarna daalt ze. Een rechte $\dot{N}/N = r - (r/K)\,N$ door de negen punten (kleinste kwadraten) geeft $r = 0{,}704$ per dag en snijdt de N-as in $K = 7{,}68 \cdot 10^5$ per mL.

3 Model: $N(t) = \dfrac{7{,}68 \cdot 10^5}{1 + 403\,\mathrm{e}^{-0{,}704\,t}}$. Het ligt hoogstens 10 % naast elke meting, over een factor 300 in N.

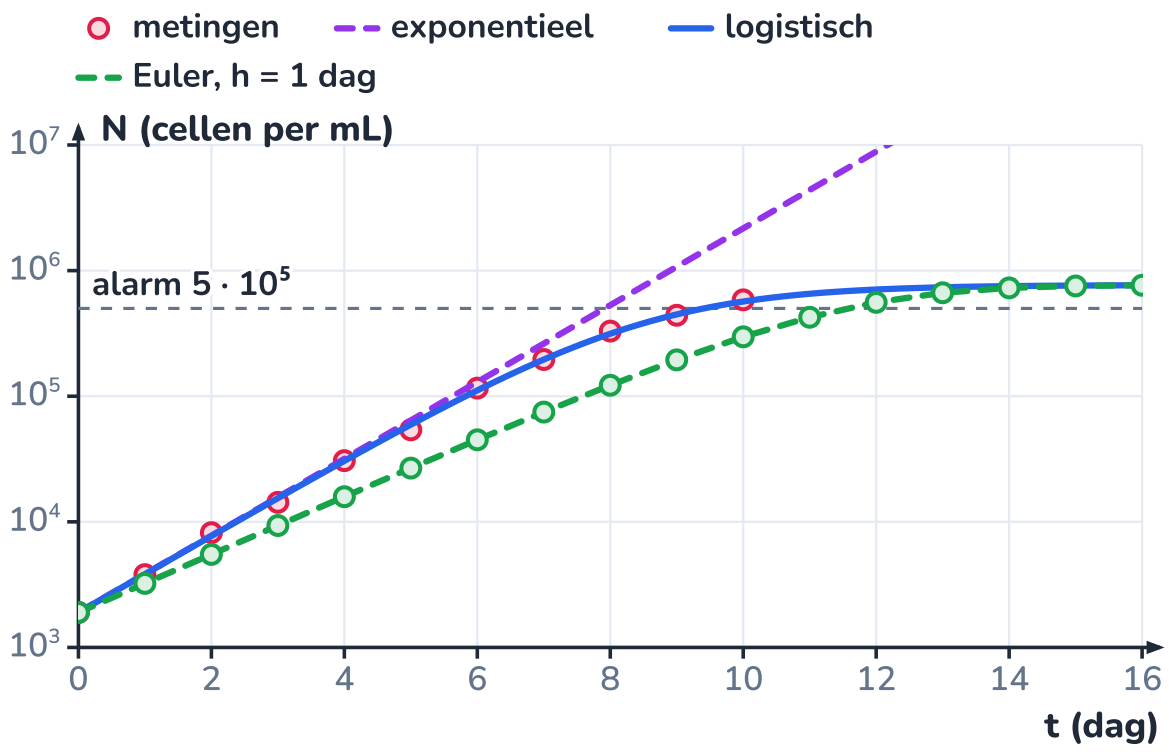
4 Alarm: $N(t) = 5 \cdot 10^5$ geeft $t = \dfrac{1}{r}\ln\left(\dfrac{K - N_0}{N_0} \cdot \dfrac{5 \cdot 10^5}{K - 5 \cdot 10^5}\right) = 9{,}4$ dagen. Het exponentiële model met dezelfde r zegt $\ln(5 \cdot 10^5/1900)/r = 7{,}9$ dagen. Gemeten: tussen dag 9 en 10.

5 Euler met $h = 1$ dag: in het begin groeit N per stap met de factor $1 + r = 1{,}70$ in plaats van $\mathrm{e}^r = 2{,}02$. Op dag 10 geeft Euler $2{,}97 \cdot 10^5$ in plaats van $5{,}68 \cdot 10^5$; met $h = 0{,}1$ dag $5{,}44 \cdot 10^5$.

ANTWOORD

$r \approx 0{,}70$ per dag (verdubbeling per dag), $K \approx 7{,}7 \cdot 10^5$ per mL. Het logistische model voorspelt het alarm na 9,4 dagen, zoals gemeten; het exponentiële 1,5 dagen te vroeg.

Klopt dit? De draagkracht ligt maar 1,5 keer boven de alarmgrens: in dit reservoir begrenst het licht de algen al vroeg. Een lichtdicht reservoir (het besluit van hoofdstuk 5 van I) zet r bijna op nul, en dan komt geen enkele grens in zicht. Het buigpunt ($N = K/2$) valt volgens het model op dag 8,5.



Exponentieel past tot dag 6; het logistische model volgt ook de afvlakking. Euler met h = 1 dag blijft achter.

UITLEG · 4.10

De methode van Euler

10/21

De meeste vergelijkingen uit de praktijk, zoals die van de meetkas met haar zon en buitentemperatuur die met de klok veranderen, kan je niet scheiden. Dan rekent een computer de oplossing stap voor stap uit. Het idee komt uit hoofdstuk 1: dicht bij een punt valt een kromme bijna samen met haar raaklijn, $y(t+h) \approx y(t) + h\,\dot{y}(t)$. En de helling $\dot{y}$ ken je in elk punt: dat is precies wat de differentiaalvergelijking zegt.

METHODE VAN EULER

$$t_{n+1} = t_n + h \qquad y_{n+1} = y_n + h\,f(y_n, t_n)$$

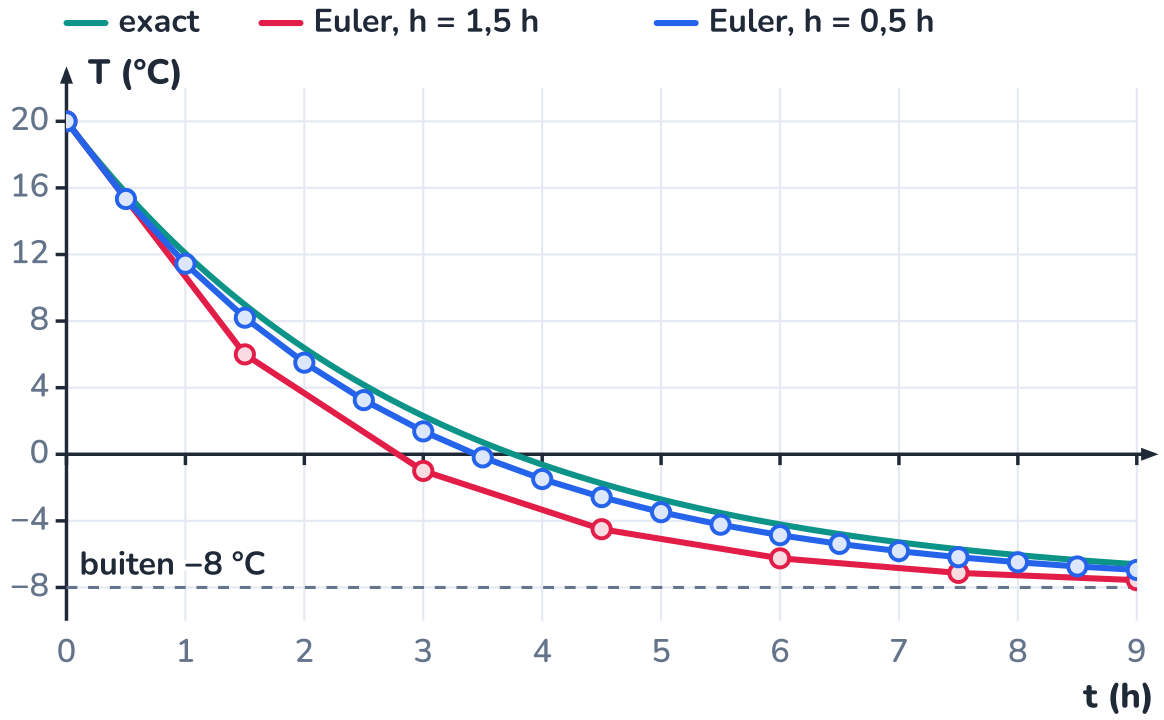
Vertrek in (t_0, y_0), zet een stap h langs de raaklijn, reken in het nieuwe punt de nieuwe helling uit, en herhaal. Het resultaat is een gebroken lijn die de oplossing benadert.

In de figuur koelt het station af met stappen van 1,5 h en van 0,5 h. Elk lijnstuk heeft de helling van het richtingsveld in zijn beginpunt. Omdat de kromme bol (naar boven gekromd) daalt, schiet elke stap

onder de echte oplossing door: Euler koelt het station te snel af. Met een kleinere stap ligt de gebroken lijn dichter bij de kromme.

Twee manieren om Euler te begrijpen die je al kent:

- **Als integraal.** $y(t_n) = y_0 + \int_{t_0}^{t_n} f\,\mathrm{d}t$, en Euler benadert die integraal met de **linker Riemann-som** (hoofdstuk 3): in elke strook de hoogte van het beginpunt.
- **Als vaste fractie per stap.** Voor $\dot{y} = -y/\tau$ geeft Euler $y_{n+1} = (1 - h/\tau)\,y_n$: per stapje gaat er een vaste fractie h/τ af, zoals bij de condensator van hoofdstuk 24 van I. Na $n = t/h$ stappen is $y_n = (1 - \frac{t}{n\tau})^n y_0$, en voor $n \to \infty$ is dat precies $\mathrm{e}^{-t/\tau} y_0$.



Elk lijnstuk van Euler volgt de helling in zijn beginpunt; met h = 1,5 h schiet de simulatie ver onder de echte afkoeling.

UITGEWERKT VOORBEELD · 4.11

Euler met de hand

11/21

Simuleer het afkoelende station, $\dot{T} = -(T + 8)/3$ met $T(0) = 20$ °C, met de methode van Euler en een stap van een half uur tot $t = 2\,\mathrm{h}$. Vergelijk met de exacte oplossing en verklaar het teken van de fout.

GEGEVEN

- $f(T, t) = -(T + 8)/3$ (°C/h)
- $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, $h = 0{,}5\,\mathrm{h}$

GEVRAAGD

- T_1 tot T_4 en de fout

OPLOSSING

1 Stap 1: $f(T_0) = -(20 + 8)/3 = -9{,}333$ °C/h, dus $T_1 = 20 + 0{,}5 \cdot (-9{,}333) = 15{,}333$ °C.

2 Stap 2: $f(T_1) = -(15{,}333 + 8)/3 = -7{,}778$, dus $T_2 = 11{,}444$ °C. Zo verder:

N	T_N (H)	T_N (°C)	$F(T_N) = -(T_N + 8)/3$ (°C/H)	EXACT (°C)	FOUT (°C)
0	0,0	20,000	−9,333	20,000	0,000
1	0,5	15,333	−7,778	15,701	−0,368
2	1,0	11,444	−6,481	12,063	−0,618
3	1,5	8,204	−5,401	8,983	−0,779
4	2,0	5,503	−4,501	6,376	−0,873

3 Handig: elke stap vermenigvuldigt het verschil met buiten met $1 - h/\tau = 1 - 0{,}5/3 = \frac{5}{6}$. Na vier stappen: $28 \cdot (5/6)^4 = 13{,}503$, dus $T_4 = 5{,}503$ °C. Exact: $28\,\mathrm{e}^{-2/3} = 14{,}376$.

4 De fout is negatief en groeit: elke stap gebruikt de helling aan het begin van de stap, en die is steiler dan gemiddeld over de stap (de afkoeling vertraagt).

ANTWOORD

$T_4 = 5{,}50$ °C tegenover $6{,}38$ °C exact: 0,87 °C te koud na vier stappen.

Klopt dit? De verhouding $5/6 = 0{,}833$ tegenover $\mathrm{e}^{-1/6} = 0{,}846$ per stap verklaart alles. Met een half zo grote stap wordt de fout ongeveer half zo groot: dat bekijkt het volgende blad.

CODE · 4.12

Euler in Python

12/21

Een functie `euler(f, y0, t0, t1, h)` werkt voor elke vergelijking: je geeft f mee als Python-functie. Ernaast de **verbeterde Euler** of methode van **Heun**: zet eerst een proefstap met Euler, reken ook daar de helling uit, en gebruik het gemiddelde van beide hellingen (de trapeziumregel van hoofdstuk 3 in plaats van de linker Riemann-som). Het programma rekent het station uit tot $t = 3\,\mathrm{h}$ en deelt de fout door h en door h^2.

Python **euler.py** 38 regels

```python
# euler.py - de methode van Euler, en de verbeterde Euler (Heun) als voorsmaakje van hoofdstuk 36
import numpy as np


def euler(f, y0, t0, t1, h):
    """Lost dy/dt = f(y, t) op van t0 tot t1 met stap h; geeft de tijden en de waarden terug."""
    n = round((t1 - t0) / h)
    t = t0 + h * np.arange(n + 1)
    y = np.empty(n + 1)
    y[0] = y0
    for k in range(n):
        y[k + 1] = y[k] + h * f(y[k], t[k])                # een stap langs de raaklijn
    return t, y


def heun(f, y0, t0, t1, h):
    """Gemiddelde van de helling aan het begin en (geschat) aan het eind van elke stap."""
    n = round((t1 - t0) / h)
    t = t0 + h * np.arange(n + 1)
    y = np.empty(n + 1)
    y[0] = y0
    for k in range(n):
```

```
        k1 = f(y[k], t[k])
        k2 = f(y[k] + h * k1, t[k] + h)
        y[k + 1] = y[k] + h / 2 * (k1 + k2)
    return t, y


def station(T, t):                    # het station na een stroomuitval: dT/dt in graden per uur
    return -(T + 8) / 3


exact = -8 + 28 * np.exp(-1)          # T(3 h) exact
print("    h     Euler T(3)    fout    fout/h   Heun: fout   fout/h²")
for h in (1.0, 0.5, 0.25, 0.1, 0.01):
    fe = euler(station, 20, 0, 3, h)[1][-1] - exact
    fh = heun(station, 20, 0, 3, h)[1][-1] - exact
    print(f"{h:6.2f} {exact + fe:12.4f} {fe:8.4f} {fe / h:8.3f} {fh:12.2e} {fh / h**2:8.3f}")
```

Uitvoer:

h	Euler T(3)	fout	fout/h	Heun: fout	fout/h²
1.00	0.2963	-2.0043	-2.004	2.47e-01	0.247
0.50	1.3771	-0.9235	-1.847	5.42e-02	0.217
0.25	1.8559	-0.4447	-1.779	1.27e-02	0.203
0.10	2.1265	-0.1741	-1.741	1.96e-03	0.196
0.01	2.2834	-0.0172	-1.719	1.91e-05	0.191

Bij Euler is `fout/h` vrijwel constant: de fout is evenredig met h. Die constante kan je zelfs voorspellen: per stap is de fout ongeveer $\frac{1}{2}h^2\ddot{T}$, en opgeteld over t/h stappen geeft dat voor dit model $-\frac{h}{2}\cdot\frac{t}{\tau^2}\cdot 28\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = -1{,}717\,h$ (opdracht 4.13). Bij Heun is `fout/h²` constant: tien keer kleinere stap, honderd keer kleinere fout. Heun rekent twee hellingen per stap, maar dat loont: met $h = 0{,}1$ (60 hellingen) is de fout 0,0020 °C, kleiner dan die van Euler met $h = 0{,}01$ (300 hellingen, 0,017 °C).

> **numpy en scipy**
>
> In de praktijk schrijf je Euler zelden zelf. `scipy.integrate.solve_ivp` kiest de methode (standaard een Runge-Kutta van orde 4-5) én de stap zelf, zodat de fout onder een tolerantie blijft. Wie begrijpt wat Euler doet, weet wat zo'n functie moet bewaken: de fout per stap en de stabiliteit (hoofdstuk 36).

UITLEG · 4.13

Stapgrootte en fout: Euler is van orde 1

13/21

Waarom halveert de fout als je de stap halveert? De reeks van Taylor (hoofdstuk 1) geeft de echte oplossing over één stap:

$$y(t+h) = y(t) + h\,\dot{y}(t) + \tfrac{1}{2}h^2\,\ddot{y}(t) + \dots$$

Euler houdt alleen de eerste twee termen. De **lokale fout** per stap is dus ongeveer $\frac{1}{2}h^2\ddot{y}$. Over een vast interval T zet je T/h stappen, en die fouten tellen op (en planten zich voort):

EULER: ORDE 1

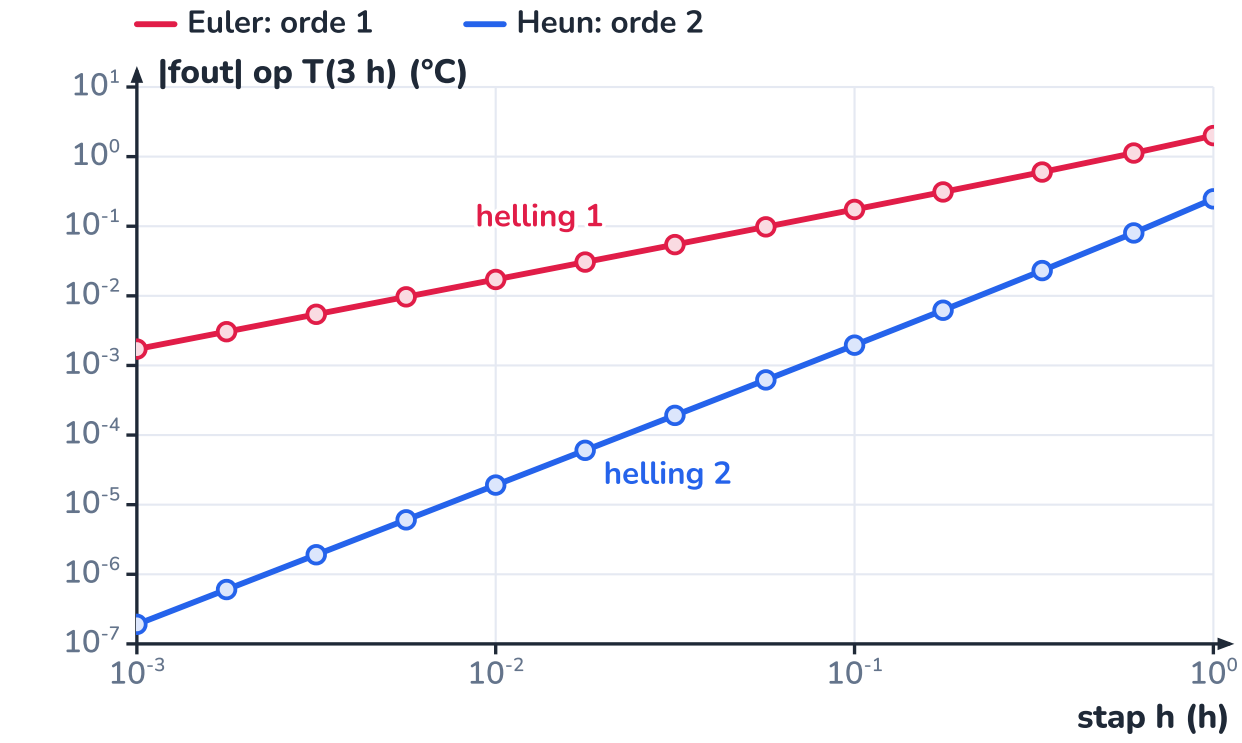
$$\text{globale fout} \approx \frac{T}{h} \cdot \tfrac{1}{2} h^2 \, |\ddot{y}| \sim h$$

Halveer h: de fout halveert, het rekenwerk verdubbelt. Tien keer nauwkeuriger kost tien keer zoveel stappen. Heun heeft een lokale fout $\sim h^3$ en een globale fout $\sim h^2$ (orde 2); de klassieke Runge-Kutta van hoofdstuk 36 is van orde 4.

Op een log-loggrafiek is een fout $\sim h^p$ een rechte met helling p (hoofdstuk 1 deed hetzelfde voor differenties). Euler en Heun op het afkoelende station tonen hellingen 1 en 2. Anders dan bij numeriek differentiëren speelt de afronding hier bijna geen rol: pas bij miljarden stappen tellen de afrondingsfouten van 10^{-16} merkbaar op.

Een kleine stap maakt een simulatie juist

Een kleine stap maakt de *numerieke* fout klein: het verschil tussen de simulatie en de exacte oplossing van het model. Is het model zelf fout (een ontbrekende warmtestroom, een verkeerde τ), dan reken je heel precies het verkeerde uit. Beide fouten schat je apart: de numerieke door de stap te halveren, de modelfout door te vergelijken met metingen.



Euler: tien keer kleinere stap, tien keer kleinere fout (helling 1). Heun: honderd keer kleinere fout (helling 2).

UITLEG · 4.14

Instabiliteit: als de stap te groot is

14/21

Neem opnieuw $\dot{y} = -y/\tau$. Euler geeft $y_{n+1} = (1 - h/\tau)\, y_n$, dus $y_n = (1 - h/\tau)^n \, y_0$. Wat er gebeurt, hangt volledig af van de factor $q = 1 - h/\tau$:

- $0 < h < \tau$: $0 < q < 1$, een dalende rij zonder tekenwissel (te snel, maar redelijk);

- $h = \tau$: $q = 0$, na één stap is alles weg;
- $\tau < h < 2\tau$: $-1 < q < 0$, de rij springt om beurten boven en onder nul, maar dempt uit: een afkoelend station dat afwisselend kouder en warmer wordt dan buiten;
- $h > 2\tau$: $|q| > 1$, de rij **explodeert**, terwijl de echte oplossing naar nul gaat.

STABILITEIT VAN EULER BIJ VERVAL

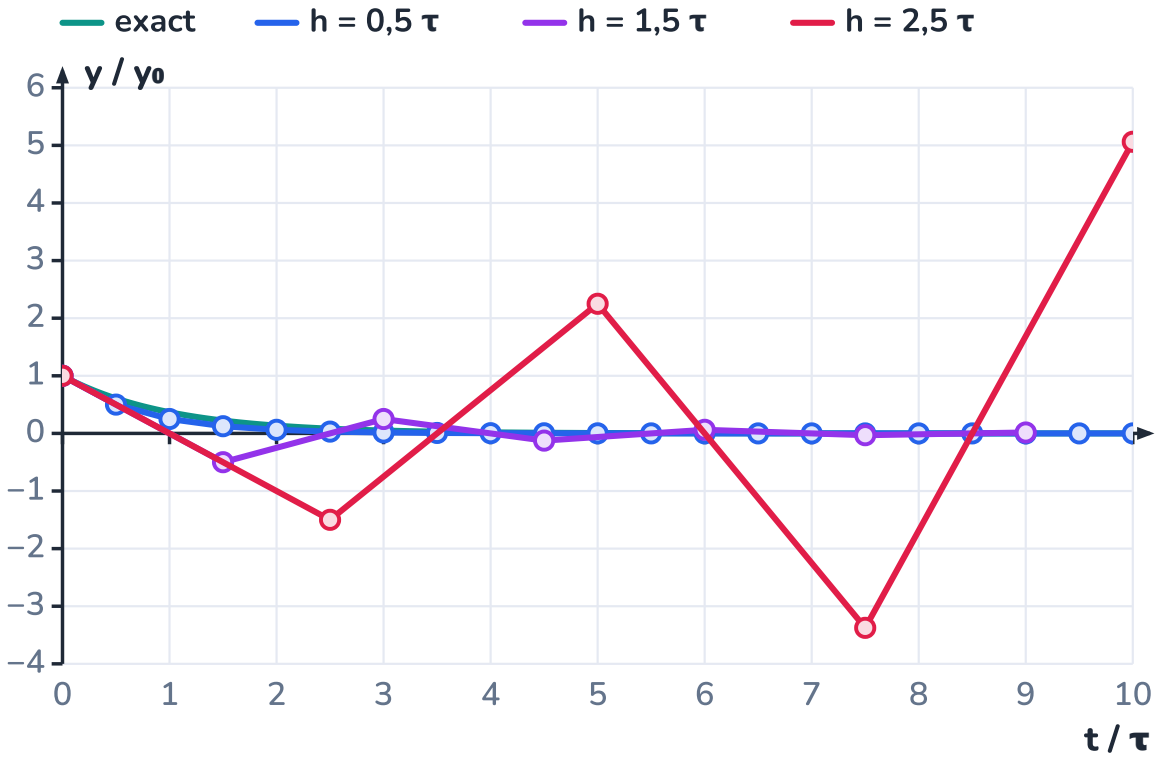
$$|1 - h/\tau| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < h < 2\tau$$

Voor een systeem met meer tijdconstanten beslist de **kleinste**. Nauwkeurig wordt het pas bij $h \ll \tau$; $h < 2\tau$ is alleen de grens waaronder het niet ontploft.

Een Habitat-voorbeeld: het station heeft $\tau = 3\,\mathrm{h}$, maar zijn temperatuursensor heeft een tijdconstante van 60 s (hoofdstuk 39). Wie station en sensor samen simuleert met Euler, moet een stap onder 120 s nemen, hoewel het station zelf uren nodig heeft om te veranderen. Zo'n stelsel met sterk verschillende tijdconstanten heet **stijf**. De simulatie van hoofdstuk 39 rekent daarom met stappen van 10 s. Hoofdstuk 36 toont **impliciete** methoden die voor stijve stelsels veel grotere stappen toelaten (opdracht 4.14).

Een simulatie die ontploft, heeft een fout model

Niet noodzakelijk: het model kan perfect zijn en de *methode* met die stap onstabiel. Halveer de stap: verdwijnt het probleem, dan was het numeriek. Hetzelfde geldt op een microcontroller: het exponentiële filter $y \leftarrow y + \alpha\,(x - y)$ van hoofdstuk 21 is een Euler-stap met $\alpha = \Delta t/\tau$, en is alleen stabiel voor $0 < \alpha < 2$.



Met h = 0,5 τ daalt Euler netjes, met 1,5 τ springt hij van teken maar dempt uit, met 2,5 τ explodeert hij.

CODE · 4.15

Tweede orde en stelsels: dezelfde Euler met vectoren

De tweede wet van Newton is een vergelijking van de **tweede orde**: $m\,\ddot{x} = F(x, \dot{x})$. Voer de snelheid in als tweede onbekende, dan heb je twee vergelijkingen van de eerste orde:

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = F(x, v)/m.$$

Schrijf de toestand als vector $\mathbf{y} = (x, v)$; dan is het stelsel weer $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ en is Euler letterlijk dezelfde regel: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n)$. Met numpy werkt dezelfde code voor vectoren.

Voorbeeld. Een pakket van 2,0 kg (een doos van 30 cm) valt uit een bevoorradingsdrone van 40 m hoogte (hoofdstuk 9). De luchtweerstand is $F = \tfrac{1}{2}\rho\, c_d A\, v^2 = k\, v^2$ met $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_d \approx 1{,}05$ en $A = 0{,}09\,\mathrm{m^2}$: $k = 0{,}0567\,\mathrm{kg/m}$. Naar beneden positief:

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = g - \frac{k}{m}\, v\,|v|.$$

De snelheid stopt met stijgen als de weerstand het gewicht opheft: de eindsnelheid $v_\mathrm{e} = \sqrt{mg/k} = 18{,}6\,\mathrm{m/s}$. (De vergelijking voor v alleen is scheidbaar: $v = v_\mathrm{e}\tanh(gt/v_\mathrm{e})$, zie de naslag.)

Python **pakket.py** 15 regels

```python
import numpy as np

m, g, k = 2.0, 9.81, 0.0567          # massa (kg), zwaarteveld (N/kg), k = ½ · ρ · cd · A (kg/m)

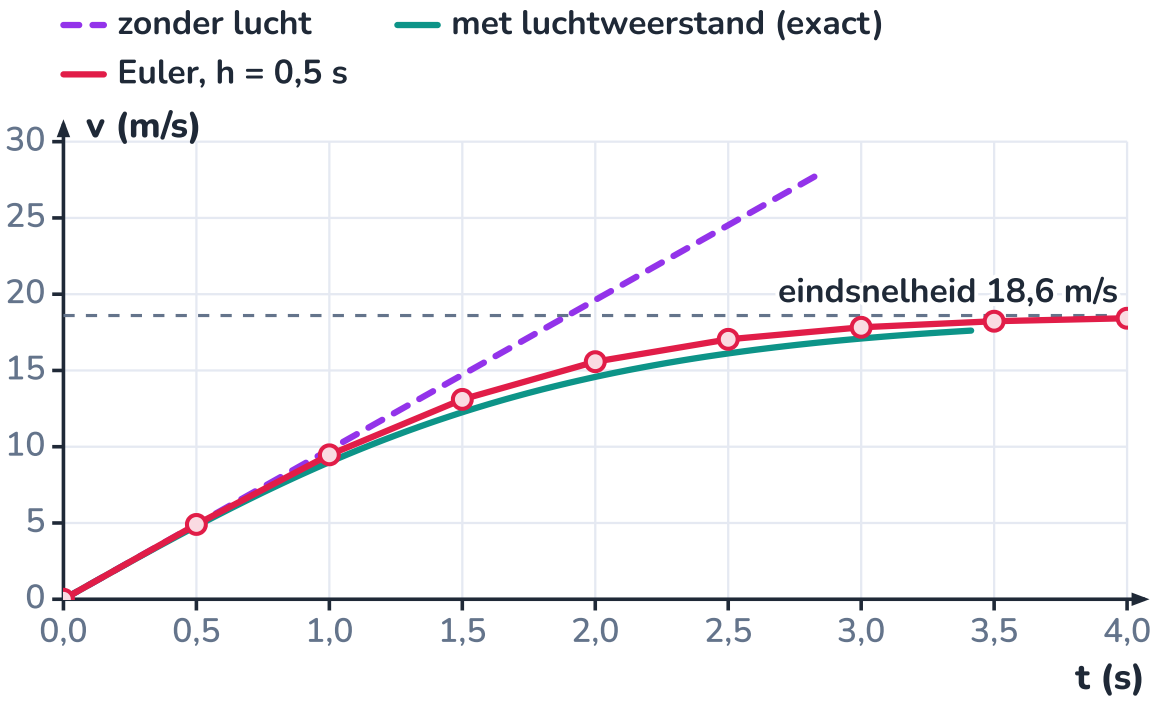

def f(y, t):                         # y = [gevallen afstand x (m), snelheid v (m/s)], naar beneden positief
    x, v = y
    return np.array([v, g - k / m * v * abs(v)])


y, t, h = np.array([0.0, 0.0]), 0.0, 0.1
while y[0] < 40.0:                   # tot het pakket 40 m gevallen is
    y = y + h * f(y, t)              # dezelfde Euler-stap, nu met een vector
    t = t + h
print(f"na {t:.1f} s: {y[0]:.1f} m gevallen, v = {y[1]:.1f} m/s")
```

Uitvoer:

```
na 3.5 s: 41.1 m gevallen, v = 17.8 m/s
```

Exact valt het pakket 3,41 s en raakt het de grond met 17,6 m/s; zonder lucht zou het na 2,86 s met 28,0 m/s neerkomen. Euler met $h = 0{,}1\,\mathrm{s}$ zit er een tiende van een seconde naast (de simulatie stopt aan de eerste stap voorbij 40 m). Zo simuleer je in hoofdstuk 8 banen, in hoofdstuk 17 twee warmteknopen en in hoofdstuk 32 prooien en predatoren: telkens een vector en dezelfde stap.



Zonder lucht stijgt v rechtlijnig; met luchtweerstand buigt ze af naar de eindsnelheid. Euler met h = 0,5 s volgt grof.

NASLAG · 4.16

Differentiaalvergelijkingen: formules en werkwijze

16/21

Werkwijze: (1) balans opstellen, eenheden controleren; (2) evenwichten zoeken ($f = 0$) en het richtingsveld schetsen; (3) exact oplossen als het kan (scheiden), anders simuleren; (4) numerieke fout controleren door de stap te halveren; (5) vergelijken met metingen.

beginwaardeprobleem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t), \quad y(t_0) = y_0$$

scheiden van veranderlijken

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t)\,h(y) \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

lineair met evenwicht

$$y(t) = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

symbool	betekenis	eenheid
τ	tijdconstante: C/(UA), RC, V/Q	s
y_∞	evenwichtswaarde	eenheid van y

halverings- en verdubbelingstijd

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 \qquad t_2 = \frac{\ln 2}{r} \qquad g = \mathrm{e}^{k\,\Delta t}$$

logistisch

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N_0}{N_0}\mathrm{e}^{-rt}} \qquad \dot{N}_{\max} = \frac{rK}{4} \text{ bij } N = \frac{K}{2}$$

symbool	betekenis	eenheid
r	groeisnelheid	1/s, 1/dag
K	draagkracht	eenheid van N

val met kwadratische weerstand

$$v(t) = v_\mathrm{e}\tanh\frac{gt}{v_\mathrm{e}}, \quad v_\mathrm{e} = \sqrt{mg/k}$$

Euler (orde 1)

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(y_n, t_n)$$

symbool	betekenis	eenheid
h	tijdstap	s

Heun (orde 2)

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}\big(f(y_n, t_n) + f(y_n + h f_n, t_{n+1})\big)$$

stabiliteit van Euler

$$0 < h < 2\tau_{\min}$$

systeem	tijdconstante	waarde in Habitat
station (één knoop)	$\tau = C/UA$	540 kJ/K / 50 W/K = 3 h
meetkas (snelle knoop)	$\tau = C/UA$	30 kJ/K / 16,7 W/K ≈ 30 min
klimaatmodule 's nachts	$\tau = C/UA$	1,1 MJ/K / 20,2 W/K ≈ 15 h
RC-meting (hoofdstuk 24 van I)	$\tau = RC$	10 kΩ · 94 µF = 0,94 s
filter op de batterijmeting	$\tau = (R_1 \parallel R_2)\,C$	24,8 kΩ · 100 nF = 2,5 ms
temperatuursensor (hoofdstuk 39)	τ_s	60 s
CO_2 in de woonmodule	$\tau = V/Q$	62 m³ / 50 m³/h ≈ 1,2 h

CODE · 4.17

Habitat: de kastemperatuur simuleren

17/21

Nu het echte werk: het brein van het station moet kunnen voorspellen hoe warm de meetkas wordt. Het model is de warmtebalans van het tweede blad, met één temperatuur voor de hele kas (één **knoop**):

$$C\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a\,G(t) + P - UA\,\big(T - T_{\mathrm{b}}(t)\big).$$

- $UA = 16{,}7\ \mathrm{W/K}$: het warmteverlies van de meetkas, nagerekend in hoofdstuk 19 van I.
- $T_{\mathrm{b}}(t)$: de gemeten buitentemperatuur van de zonnige aprildag (hoofdstuk 4 van F), lineair geïnterpoleerd tussen de uurwaarden.
- $G(t)$: de instraling op een horizontaal vlak bij heldere hemel, met het eenvoudige zonnemodel van hoofdstuk 3 (20 april, Brussel). De klok van het station staat het hele jaar op wintertijd (hoofdstuk 30 van I): de zon staat om 12:42 in het zuiden.
- a (m²): de **effectieve zonnewinst**, alsof a m² zonlicht volledig in kaswarmte omgezet wordt. Bovengrens: het dak (0,72 m²) maal de doorlaat van de platen (80 %) is 0,58 m².
- C: de warmtecapaciteit. Alles samen (tabel) is ongeveer 248 kJ/K, maar het water onder de tafel en de diepere grond volgen de dag niet. De **snelle** massa (lucht, platen, frame, bakjes, planten en de bovenste centimeter grond) is ongeveer 29 kJ/K.

deel van de meetkas	$C = m\,c$ (kJ/K)
water in het reservoir (24 kg)	100,5
vochtige potgrond (21 kg water, 22 kg droog)	109,9

deel van de meetkas	$C = m\,c$ (kJ/K)
tafel, hout (15,1 kg)	24,2
12 bakjes, PP (3,6 kg)	6,8
platen, PC (2,9 kg)	3,5
frame, aluminium (3,1 kg)	2,8
lucht (0,69 kg)	0,7
samen	**248**

Het programma simuleert eerst drie keuzes voor C en a en zoekt daarna in een raster welke combinatie de uurwaarden het best volgt, met de **rms-fout** (de wortel uit het gemiddelde kwadraat van de verschillen) als maat.

Python **kas.py** 53 regels

```python
# kas.py - eerste simulatie van de meetkas op de zonnige aprildag (klok in wintertijd, UTC+1)
import math
import numpy as np

# uurwaarden van 0:00 tot 24:00 (hoofdstuk 4 van Fundamental)
KAS = [9.5, 9.0, 8.6, 8.2, 7.9, 7.7, 7.7, 8.2, 11.0, 15.5, 20.5, 25.0, 28.5, 31.0, 32.0, 30.5, 27.5, 23.5,
       19.5, 16.0, 13.5, 12.0, 11.0, 10.3, 9.8]
BUITEN = [8.5, 8.0, 7.6, 7.2, 6.9, 6.7, 6.6, 7.2, 8.6, 10.4, 12.3, 14.0, 15.4, 16.5, 17.3, 17.8, 17.9, 17.3,
          16.0, 14.3, 12.6, 11.3, 10.3, 9.5, 8.8]
UA = 16.7                               # warmteverlies van de meetkas (W/K)


def zon(t, dag=110, lat=50.8, lon=4.35):
    """Instraling op een horizontaal vlak bij heldere hemel (W/m²); t = kloktijd in wintertijd (h)."""
    d = math.radians(23.44 * math.sin(math.radians(360 / 365 * (284 + dag))))           # declinatie
    B = math.radians(360 / 365 * (dag - 81))
    tv = 9.87 * math.sin(2 * B) - 7.53 * math.cos(B) - 1.5 * math.sin(B)                # tijdvereffening (min)
    w = math.radians(15 * (t - 1 + lon / 15 + tv / 60 - 12))                            # uurhoek
    s = (math.sin(math.radians(lat)) * math.sin(d)
         + math.cos(math.radians(lat)) * math.cos(d) * math.cos(w))                     # sinus van de zonnehoogte
    if s <= 0:
        return 0.0
    direct = 1361 * 0.7 ** ((1 / max(s, 0.02)) ** 0.678)                               # loodrecht op de stralen
    return direct * s + 0.12 * direct * s + 20 * math.sqrt(s)                           # direct + diffuus


def simuleer(C, a, dt=60.0, T0=KAS[0], P_verw=0.0):
    """Euler voor C dT/dt = a G(t) + P - UA (T - T_buiten(t)), een dag lang."""
    n = round(24 * 3600 / dt)
    t = np.arange(n + 1) * dt / 3600                        # tijd in uren
    T = np.empty(n + 1)
    T[0] = T0
    for k in range(n):
        T_buiten = np.interp(t[k], range(25), BUITEN)
        P = a * zon(t[k]) + P_verw - UA * (T[k] - T_buiten)    # netto warmtestroom (W)
        T[k + 1] = T[k] + dt * P / C                           # Euler-stap
    return t, T


def rms(T, dt=60.0):
    """Wortel uit het gemiddelde kwadraat van (model - meting) op de hele uren."""
    return math.sqrt(np.mean((T[::round(3600 / dt)] - np.array(KAS)) ** 2))
```

```python

for naam, C, a in (("alle massa, heel het dak ", 248e3, 0.58), ("snelle massa, heel het dak", 30e3, 0.58),
                   ("snelle massa, a = 0,30   ", 30e3, 0.30)):
    t, T = simuleer(C, a)
    print(f"{naam}: max {T.max():5.1f} °C om {t[T.argmax()]:5.2f} h, min {T.min():4.1f} °C, rms {rms(T):4.2f} °C")

print("\nrms (°C)   a = " + "  ".join(f"{a:.2f}" for a in (0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40)))
for C in (20e3, 30e3, 40e3, 60e3, 100e3, 150e3, 250e3):
    fouten = [rms(simuleer(C, a, dt=120.0)[1], dt=120.0) for a in (0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40)]
    print(f"C = {C / 1000:3.0f} kJ/K  " + "  ".join(f"{f:4.2f}" for f in fouten))
```

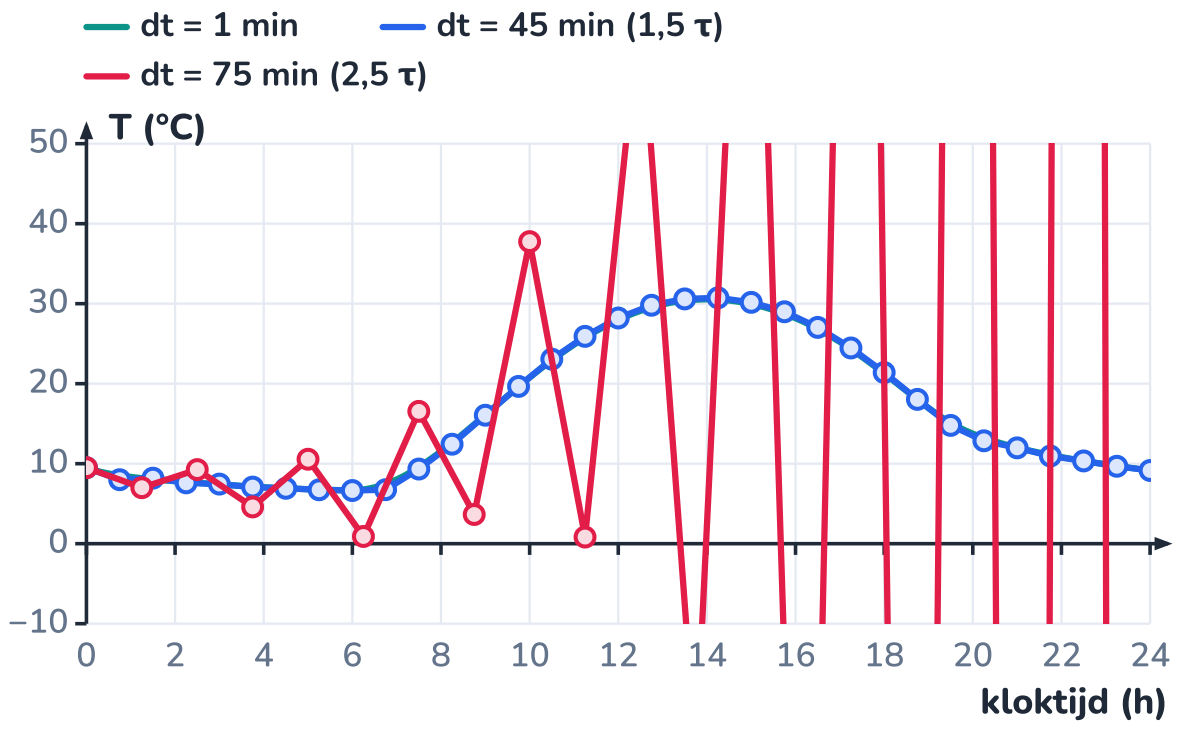
Uitvoer:

```
alle massa, heel het dak : max  34.8 °C om 16.13 h, min  7.6 °C, rms 6.56 °C
snelle massa, heel het dak: max  43.4 °C om 13.67 h, min  6.7 °C, rms 6.42 °C
snelle massa, a = 0,30   : max  30.5 °C om 14.03 h, min  6.7 °C, rms 0.82 °C

rms (°C)   a = 0.20  0.25  0.30  0.35  0.40
C =  20 kJ/K  2.39  1.36  0.81  1.45  2.50
C =  30 kJ/K  2.50  1.47  0.82  1.36  2.38
C =  40 kJ/K  2.67  1.66  1.01  1.38  2.33
C =  60 kJ/K  3.08  2.19  1.61  1.72  2.43
C = 100 kJ/K  4.03  3.31  2.85  2.77  3.09
C = 150 kJ/K  5.06  4.49  4.10  3.95  4.07
C = 250 kJ/K  6.46  6.02  5.70  5.51  5.48
```

Met alle massa is de kas veel te traag: de top valt om 16:08 in plaats van 14:00 en de fout is 6,5 °C. Met de snelle massa en het hele dak wordt ze 43 °C: veel te warm. Met $C = 30\,\mathrm{kJ/K}$ en $a = 0{,}30\,\mathrm{m^2}$ zakt de fout onder 1 °C. Het raster toont een lang dal: voor elke C tussen 20 en 40 kJ/K is $a \approx 0{,}30\,\mathrm{m^2}$ het best, en de fout verandert er nauwelijks. Maar zodra C groter wordt, helpt geen enkele a nog. We kiezen $C = 30\,\mathrm{kJ/K}$ (de schatting van de snelle massa) en $a = 0{,}30\,\mathrm{m^2}$: de tijdconstante van de kas is dan $\tau = C/UA = 30\,\mathrm{min}$.

> ⚠ **Waarom een stap van een minuut?**
>
> Met $\tau \approx 30\,\mathrm{min}$ is Euler stabiel voor stappen onder een uur. Met 45 minuten ($h = 1{,}5\,\tau$) schommelt de simulatie al; met 75 minuten ($2{,}5\,\tau$) explodeert ze, tot 1010 °C en −1495 °C (figuur). Een minuut is ruim veilig en kost de Pi niets: 1440 stappen per dag.



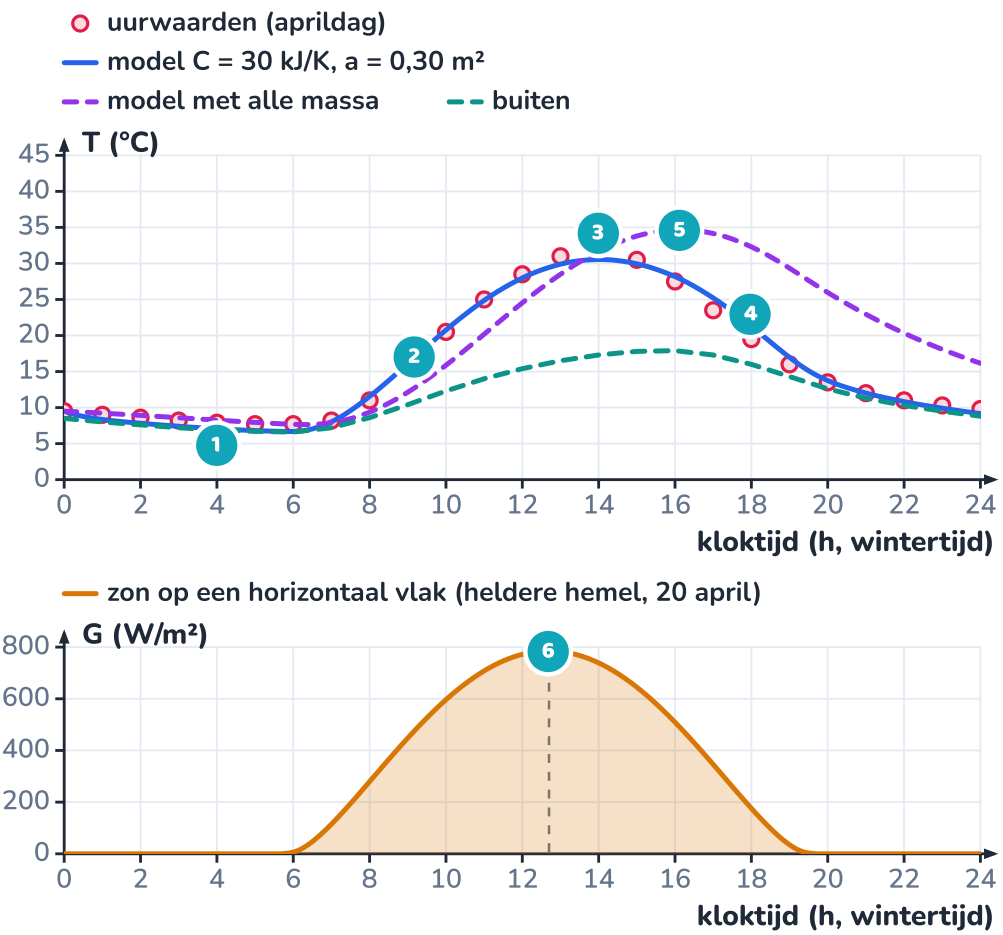
Hetzelfde model, drie stappen: met 1 min glad, met 45 min schokkerig, met 75 min onstabiel.

ONTLEED · 4.18

Habitat: model en meting naast elkaar

18/21

Boven: de uurwaarden van de aprildag, de simulatie met $C = 30\,\mathrm{kJ/K}$ en $a = 0{,}30\,\mathrm{m^2}$, de simulatie met alle massa en het hele dak, en de buitentemperatuur. Onder: de instraling waarmee het model rekent.



Het eenvoudige model volgt de dag op ongeveer een graad; waar het afwijkt, vertelt het wat er nog ontbreekt.

1 De nacht
Zonder zon zakt het model tot op de buitentemperatuur (gemiddeld 0,8 °C te koud tussen 1 en 6 uur). De echte kas blijft ongeveer 1 °C warmer: de grond en het water geven 's nachts warmte af, en die trage massa zit niet in het model.

2 Opwarmen
Het model warmt het snelst op om 9:11: 4,7 °C/h. Hoofdstuk 1 haalde uit de uurwaarden 5,0 °C/h om 9:27. De ochtend klopt goed.

3 De top
Model 30,5 °C om 14:02, meting 32,0 °C om 14:00: het model blijft 1,5 °C onder de top. Mogelijk meet de sensor in de zon iets te hoog (stralingsfout), of krijgt de kas rond de middag meer zon dan een horizontaal vlak.

4 De avond
Om 18 uur is het model 1,8 °C te warm: de echte kas koelt sneller af. Kandidaten: de verdamping van ongeveer 1,8 L water per dag (gemiddeld 89 W overdag) en de trage massa die 's middags warmte opneemt.

5 Alle massa: te traag
Met C = 248 kJ/K (τ = 4,1 h) en het hele dak piekt het model pas om 16:08 op 34,7 °C: een kas die de hele massa in één keer moet opwarmen, loopt uren achter.

6 De zon
Om 12:42 staat de zon in het zuiden: 785 W/m². Zonsopgang 5:46, zonsondergang 19:37 (wintertijd); samen 6,2 kWh per m² op een horizontaal vlak.

UITLEG · 4.19

Simulatie tegenover meting: wat vertellen de verschillen?

19/21

Een model vergelijk je niet op het oog. Drie gereedschappen:

1. Eén getal: de rms-fout. $\sqrt{\frac{1}{n}\sum(T_{\text{model}} - T_{\text{meting}})^2}$ vat de afwijking samen. De niveaulijnen tonen haar over alle combinaties van C en a (uit dezelfde simulatie). De kleinste fout, 0,80 °C, ligt in een lang, smal dal: een grotere C met een iets grotere a doet het bijna even goed. Deze meting kan C en a dus niet goed **scheiden**. Wie C echt wil kennen, meet een avond zonder zon: dan geldt $\dot{T} = -(T - T_{\text{b}})/\tau$ en geeft de afkoeling rechtstreeks $\tau = C/UA$ (opdracht 4.8).

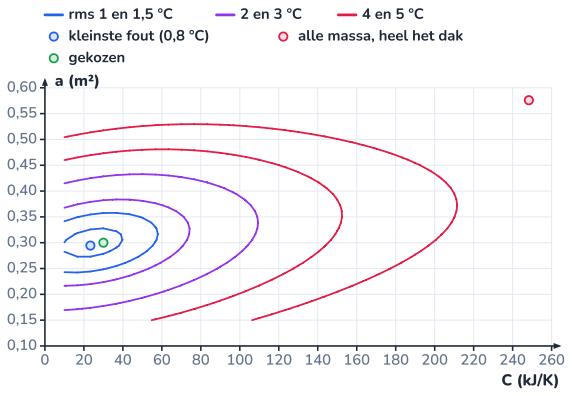
2. De residuen: model min meting, uur per uur. Ze vertellen meer dan hun rms. Hier hebben ze een **patroon**: 's nachts te koud, rond de middag te koud, 's avonds te warm. Toevallige meetfouten wisselen willekeurig van teken; een patroon betekent dat er iets in het model ontbreekt, en geen enkele keuze van C en a haalt het weg (de rms zakt nergens onder 0,8 °C).

3. Fysische verklaringen. Wat ontbreekt er?

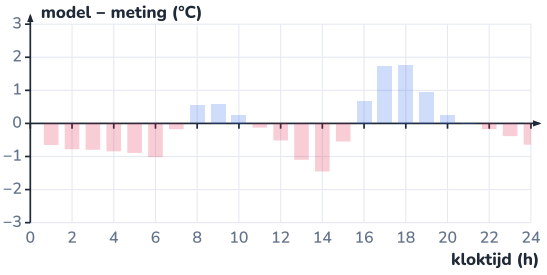
- **Trage massa.** Grond en water nemen overdag warmte op en geven ze 's nachts af: warmere nachten, een koelere namiddag. Dat vraagt een tweede knoop met zijn eigen temperatuur (hoofdstuk 17).
- **Verdamping.** 1,8 L water per dag kost $1{,}8\,\text{kg} \cdot 2454\,\text{kJ/kg} = 4{,}4\,\text{MJ}$, overdag gemiddeld 89 W: een flinke extra warmtestroom naar buiten, vooral als het warm is.
- **De zon op de wanden.** Laag in de ochtend en de avond valt de zon door de zijwanden, rond de middag door het dak; een horizontaal vlak is maar een benadering.
- **De sensor.** Een temperatuursensor in de zon meet te hoog; de houder van hoofdstuk 32 van F heeft daarom een dakje.

Fitten en testen op verschillende dagen

We hebben C en a gekozen op dezelfde dag waarop we het model beoordelen. Eerlijker is: parameters schatten op één dag en het model testen op een andere (een bewolkte dag, een warme dag). Dat is de kern van hoofdstuk 36 (curve fitting) en hoofdstuk 41 (train en test). De statisticus George Box vatte het samen: alle modellen zijn fout, maar sommige zijn nuttig.



De rms-fout over C en a: een lang dal met de kleinste fout bij kleine C en a ≈ 0,30 m²; alle massa met het hele dak ligt ver buiten het dal.



Residuen met een patroon: 's nachts en rond de middag te koud, 's avonds te warm. Dat is geen ruis.

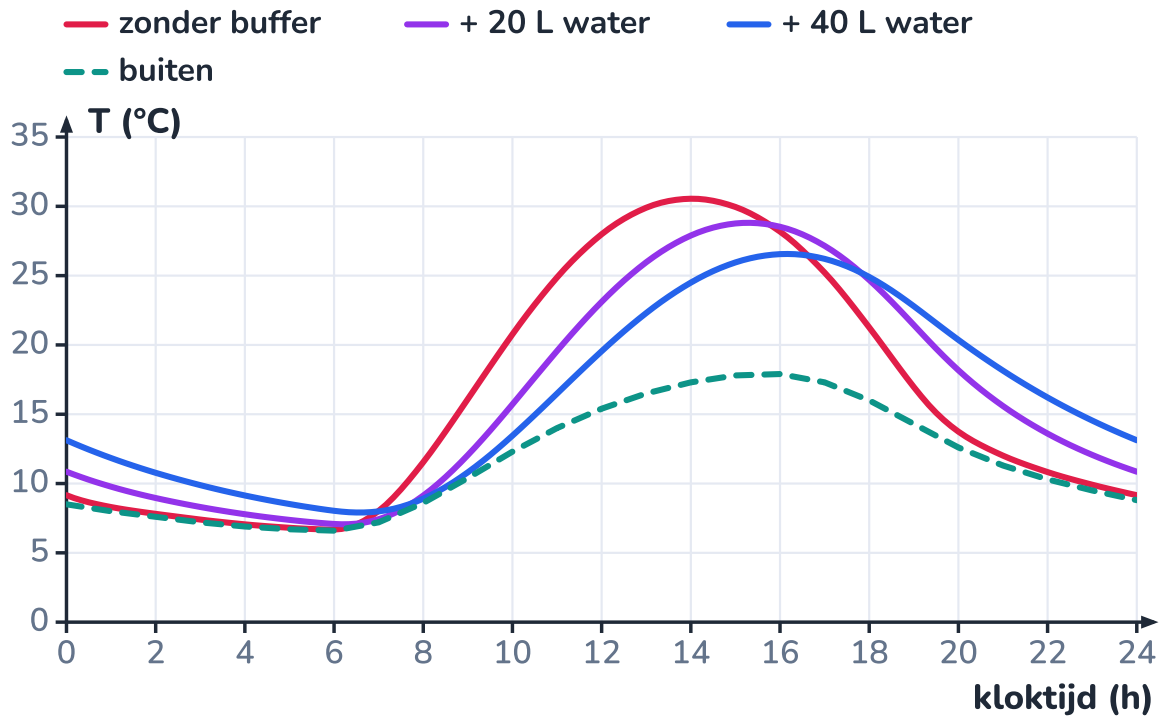
UITGEWERKT VOORBEELD · 4.20

Habitat: halen we eis K7 met watt of met water?

20/21

Eis K7 van de meetkas (wens, hoofdstuk 30 van F) vraagt dat de kas 's nachts minstens 1 °C warmer blijft dan buiten. Het model met $C = 30\,\text{kJ/K}$ en $a = 0{,}30\,\text{m}^2$ haalt dat niet. Vergelijk twee oplossingen:

(a) een verwarming die van 21:00 tot 6:00 werkt, (b) extra water in donkere jerrycans in de zon, 20 L of 40 L. Simuleer drie keer dezelfde dag na elkaar en beoordeel de nacht van 22:00 tot 6:00 op de derde dag (dan is de begintoestand vergeten).



Hoe meer water in de zon, hoe vlakker de dag: minder warm overdag, warmer 's nachts (model met één knoop).

GEGEVEN

- $UA = 16{,}7\,\mathrm{W/K}$, $C = 30\,\mathrm{kJ/K}$, $a = 0{,}30\,\mathrm{m^2}$
- water: 4,19 kJ/K per liter
- energie meetkas: 44 tot 63 Wh per dag, batterij ±250 Wh (hoofdstuk 21 en 33 van F)

GEVRAAGD

- verwarming: vermogen en energie
- water: effect volgens het model
- een onderbouwde keuze

OPLOSSING

1 Verwarming: 1 °C extra vraagt in evenwicht $P = UA \cdot 1\,\mathrm{K} = 16{,}7\,\mathrm{W}$, negen uur lang: $150\,\mathrm{Wh}$ per nacht. Dat is twee à drie keer het hele dagbudget van de meetkas en meer dan de helft van de batterij. Elektrisch verwarmen valt af.

2 Water: 20 L voegt $20 \cdot 4{,}19 = 84\,\mathrm{kJ/K}$ toe, 40 L $167\,\mathrm{kJ/K}$. Het model met die grotere C:

VARIANT (MODEL)	HOOGSTE T OVERDAG	22-6 UUR: KLEINSTE T – T_B	22-6 UUR: GEMIDDELD T – T_B
zonder buffer	30,5 °C	0,1 °C	0,3 °C
17 W verwarming 's nachts	30,5 °C	1,1 °C	1,3 °C
+ 20 L water	28,8 °C	0,5 °C	1,5 °C
+ 40 L water	26,6 °C	1,4 °C	3,4 °C

3 Het water neemt overdag warmte op (de top zakt tot 27 °C met 40 L) en geeft ze 's nachts af: met 40 L blijft de kas de hele nacht minstens 1,4 °C warmer dan buiten. Bonus: minder oververhitting, dus minder raambewegingen.

4 Maar dit is een bovengrens. Het model met één knoop veronderstelt dat water en lucht altijd dezelfde temperatuur hebben; in werkelijkheid geeft een jerrycan zijn warmte maar traag af (twee knopen, hoofdstuk 17). Het water moet overdag in de zon staan en 's nachts aan de lucht: tussen de plantenbakjes is geen plaats, dus bv. zwarte flessen langs de achterwand.

ANTWOORD

Watt: 17 W en ongeveer 150 Wh per nacht, onhaalbaar met een zonnepaneel van 50 Wp. Water: volgens het model haalt ongeveer 40 L in de zon K7 ruim, en de kas wordt overdag minder heet. Advies: een proef met 20 tot 40 L in donkere flessen, gemeten met de logger, en een model met twee knopen.

Klopt dit? Hoofdstuk 16 van F schatte met een ruwe rekening dat 24 L die 's nachts 5 °C afkoelt, de kas ongeveer 0,8 °C warmer houdt; het model geeft met 20 L gemiddeld 1,5 °C over de hele nacht: dezelfde orde. Opdracht 4.11 werkt de keuze uit.



Donkere flessen water langs de achterwand: overdag vangen ze zon, 's nachts geven ze warmte af.

HET GEHEEL · 4.21

Waar differentiaalvergelijkingen vandaan komen en waar ze heen gaan

21/21

Een differentiaalvergelijking verbindt de afgeleide (hoofdstuk 1) met het integreren (hoofdstuk 3): ze zegt hoe snel iets verandert, en de oplossing telt die veranderingen op. Ze is de taal van elk dynamisch model, van warmte (E) en elektronica (L) tot groei in de biologie (B) en regelen (R). Simuleren is programmeren (P) in dienst van die modellen.

I5 Groei en verval: exponentiële modellen

Groeifactor, verdubbelings- en halveringstijd, de thee en de algen: hier als dy/dt = ky.

I18 Warmte berekenen

Warmtecapaciteit C = m · c en de nachtbuffer van de module.

I19 Warmtetransport en isolatie

UA van de meetkas (16,7 W/K) en de module (20,2 W/K).

I24 Condensatoren en de RC-tijd

De RC-meting en de vaste fractie per stapje: de voorloper van Euler.

E1 Afgeleiden: verandering meten

De raaklijn als benadering is de Euler-stap; centrale differenties schatten r uit de algen.

E3 Integralen: ophopen

Scheiden van veranderlijken is integreren; Euler is een linker Riemann-som, Heun een trapeziumregel.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief

Het warmtemodel met twee knopen: de trage massa die hier ontbrak.

E32 Ecologische modellen

Logistische groei en Lotka-Volterra: stelsels van groeivergelijkingen.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Runge-Kutta, stapgrootteregeling, impliciete methoden voor stijve stelsels, parameters fitten.

E38 Dynamische systemen modelleren

Eerste- en tweedeordesystemen, tijdconstante en stapresponsie.

E39 PID-regeling

De PID-simulatie van het station is een Euler-simulatie met τ = 3 h.

E49 Integratieproject: het brein van het station

De digitale tweeling: een stelsel differentiaalvergelijkingen dat meeloopt met de metingen.

Habitat

Het brein van het station heeft nu een eerste model van de meetkas: $C\,\dot{T} = a\,G(t) + P - UA\,(T - T_{\mathrm{b}})$ met $UA = 16{,}7\,\mathrm{W/K}$, $C \approx 30\,\mathrm{kJ/K}$ (snelle massa) en $a \approx 0{,}30\,\mathrm{m^2}$, gesimuleerd met Euler in stappen van een minuut; het volgt de aprildag op ongeveer een graad. Het toont dat eis K7 met water haalbaar is en niet met elektriciteit. Hoofdstuk 17 voegt de trage knoop toe, hoofdstuk 36 fit de parameters op echte logs. Opdracht 4.11 werkt de buffer uit.

SAMENVATTING

In het kort

- Een differentiaalvergelijking $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f(y,t)$ met een beginwaarde beschrijft een verandering; je stelt ze op als balans (in − uit) en controleert de eenheden.
- Het richtingsveld toont in elk punt de helling; oplossingen raken eraan en kruisen elkaar niet. Evenwichten liggen waar $f = 0$.
- Scheiden van veranderlijken geeft $y = y_0 \mathrm{e}^{kt}$ en $y = y_\infty + (y_0 - y_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ (Newton, RC, station); $t_{1/2} = \tau \ln 2$.
- Logistische groei $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ vlakt af naar de draagkracht K; de relatieve groei $\dot{N}/N$ is lineair in N, zo vind je r en K uit metingen.
- Euler: $y_{n+1} = y_n + h\,f(y_n, t_n)$, stappen langs de raaklijn; werkt ook voor stelsels (vectoren).
- De globale fout van Euler is evenredig met h (orde 1), die van Heun met h^2. Euler op verval is alleen stabiel voor $h < 2\tau$; de kleinste tijdconstante beslist.

- Een simulatie vergelijk je met metingen via de rms-fout én de residuen: een patroon in de residuen wijst op een ontbrekend mechanisme.
- De meetkas volgt $C\dot{T} = aG + P - UA(T - T_\mathrm{b})$ met $C \approx 30\,\mathrm{kJ/K}$, $a \approx 0{,}30\,\mathrm{m^2}$ en $\tau \approx 30\,\mathrm{min}$; eis K7 haal je met water, niet met watt.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

differentiaalvergelijking
Een vergelijking tussen een onbekende functie en haar afgeleide(n), bv. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f(y,t)$: ze zegt hoe snel y verandert in elke toestand.

beginwaardeprobleem
Een differentiaalvergelijking samen met een beginwaarde $y(t_0) = y_0$; als f netjes is, ligt de oplossing daarmee vast.

evenwicht
Een constante oplossing y^* met $f(y^*) = 0$. Stabiel als oplossingen in de buurt ernaartoe gaan, onstabiel als ze ervan weglopen.

richtingsveld
Een tekening met in elk punt (t, y) een kort lijnstuk met helling $f(y,t)$; oplossingen raken overal aan die lijnstukjes.

scheiden van veranderlijken
Oplossingsmethode voor $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = g(t)\,h(y)$: alle y naar één kant, alle t naar de andere, en beide kanten integreren.

tijdconstante
De tijd τ waarin een exponentieel proces $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -(y - y_\infty)/\tau$ nog 37 % $(1/\mathrm{e})$ van zijn afstand tot het evenwicht over heeft.

logistische groei
Groei volgens $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = r\,N\,(1 - N/K)$: eerst exponentieel, daarna afremmend naar de draagkracht K (Verhulst, 1838).

methode van Euler
Numerieke oplossing met stappen langs de raaklijn: $y_{n+1} = y_n + h\,f(y_n, t_n)$.

orde van een methode
De macht van h waarmee de globale fout daalt: Euler orde 1 (fout $\sim h$), Heun orde 2 (fout $\sim h^2$).

numerieke stabiliteit
Een methode is stabiel als fouten niet aangroeien. Euler op $\dot{y} = -y/\tau$ is stabiel voor $h < 2\tau$.

stijf stelsel
Een stelsel met sterk verschillende tijdconstanten: de snelste bepaalt de toegelaten stap, ook als ze niet interessant is.

residu
Het verschil tussen model en meting in één punt. Een patroon in de residuen wijst op een ontbrekend mechanisme.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 5

Vectoren en matrices

Richtingen in de ruimte en veel vergelijkingen tegelijk: het rekenwerk achter krachten, netwerken en constructies

Krachten, snelheden en zonnestralen hebben een richting in drie dimensies: je rekent ermee als **vectoren**. Met het scalair product vind je een hoek, een projectie of een arbeid; met het vectorproduct een normaal, een oppervlakte of een moment. Een **matrix** bundelt veel getallen tot één object: een transformatie die een figuur draait of rekt, of een stelsel met tientallen onbekenden. Je lost zulke stelsels op met de methode van **Gauss**, met de hand en in Python, en je gebruikt ze voor Kirchhoff-netwerken en vakwerken. Voor Habitat reken je het 12,8 V-net van de klimaatmodule door als één matrixvergelijking.

9× uitleg · 7× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

W Wiskundig modelleren · K Krachten, beweging en constructies · L Elektriciteit en elektronica



Drie tuidraden, drie krachten in drie richtingen: samen duwen ze de mast recht naar beneden.

Na dit hoofdstuk

- Je kan vectoren in 2D en 3D noteren, optellen, met een getal vermenigvuldigen, hun lengte en eenheidsvector berekenen, en krachten in de ruimte ontbinden en samenstellen.
- Je kan het scalair product berekenen en gebruiken voor hoeken, projecties, loodrechte stand, arbeid en de invalshoek van zonlicht, en de formule $|a||b| \cos \theta$ afleiden.
- Je kan het vectorproduct berekenen en gebruiken voor een normaal, een oppervlakte en een moment $r \times F$, met de juiste draaizin.
- Je kan een matrix interpreteren als lineaire transformatie (rotatie, schaal, afschuiving), haar determinant als oppervlaktefactor lezen, en matrices vermenigvuldigen en inverteren.
- Je kan een stelsel lineaire vergelijkingen als matrixvergelijking schrijven en oplossen met de methode van Gauss, met de hand, in eigen code en met numpy.
- Je kan het conditiegetal van een stelsel interpreteren en slecht geconditioneerde situaties herkennen, zoals een ijking met twee dicht bij elkaar liggende punten.

- Je kan een elektrisch netwerk opstellen en oplossen met de knooppuntenmethode (G v = i), en de uitkomst toetsen met Kirchhoff en een vermogensbalans.
- Je kan het evenwicht van een vakwerk als stelsel opstellen, oplossen en interpreteren (trek, druk, reacties), en een voedingsnet van Habitat doorrekenen en beoordelen.

VERHAAL · 5.1

Rekenstokjes, planetoïden en de snelste computers

1/22

Ruim tweeduizend jaar geleden werd in China een handboek samengesteld met 246 rekenproblemen uit de praktijk: landmeten, belastingen, graan, bouwwerken. *Jiuzhang suanshu*, *De negen hoofdstukken over de rekenkunst*, kreeg zijn vorm rond het begin van onze jaartelling; Liu Hui schreef er in 263 een commentaar bij. Het achtste hoofdstuk heet *fangcheng*, 'rechthoekige schikking'. Het eerste probleem: drie bundels graan van de beste soort, twee van de middelste en één van de slechtste leveren samen 39 dou (een inhoudsmaat); twee, drie en één leveren 34 dou; één, twee en drie leveren 26 dou. Hoeveel levert één bundel van elke soort? De rekenaars legden de getallen met bamboestokjes in kolommen op een rekenbord en trokken veelvouden van kolommen van elkaar af tot er één onbekende overbleef: de eliminatie die je in dit hoofdstuk leert. Onderweg verschenen negatieve getallen, en het boek gaf er gewoon rekenregels voor.

In Europa kreeg de methode de naam van Carl Friedrich Gauss. Op 1 januari 1801 ontdekte Giuseppe Piazzi in Palermo Ceres, vandaag een dwergplaneet, maar na enkele weken verdween ze in het licht van de zon. De 24-jarige Gauss berekende uit de weinige waarnemingen haar baan, en op 31 december 1801 vond Franz Xaver von Zach Ceres terug, dicht bij de plaats die Gauss voorspeld had. Om een baan zo goed mogelijk aan veel metingen aan te passen, gebruikte Gauss de methode van de kleinste kwadraten (hoofdstuk 41; Adrien-Marie Legendre publiceerde ze in 1805, Gauss in 1809), en de stelsels die daaruit volgen, loste hij systematisch op door eliminatie.

Het woord **matrix** (Latijn: 'dat waaruit iets voortkomt') gebruikte James Joseph Sylvester in 1850 voor een rechthoekige tabel getallen; in 1858 legde Arthur Cayley vast hoe je matrices vermenigvuldigt en inverteert. Het woord **vector** komt van William Rowan Hamilton, die op 16 oktober 1843 tijdens een wandeling langs een kanaal in Dublin zijn quaternionen bedacht en de formule in een brug kraste. De notatie met scalair product en vectorproduct die ingenieurs vandaag gebruiken, is van Josiah Willard Gibbs en Oliver Heaviside, rond 1880.

En de snelste computers ter wereld? Sinds 1993 verschijnt twee keer per jaar de TOP500-lijst van supercomputers. De rangschikking steunt op één test: hoe snel een machine een enorm stelsel lineaire vergelijkingen oplost met de methode van Gauss.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Een net van kabels, een vakwerk van staven, een model met honderd parameters: telkens staan er veel onbekenden in veel vergelijkingen tegelijk. Vectoren beschrijven krachten en richtingen in de ruimte; matrices bundelen stelsels en transformaties tot één object waarmee een computer rekent. Het brein van het station lost zo zijn voedingsnet op, berekent de stand van de zon op elk paneel en fit zijn modellen (hoofdstuk 36 en 41).



Met stokjes in kolommen losten Chinese rekenaars al stelsels op: kolommen van elkaar aftrekken tot er één onbekende overbleef.

UITLEG · 5.2

Wat je al weet: vectoren, nu in drie dimensies

2/22

wat je al kan	wat nu komt
een vector heeft grootte en richting; kop-staart optellen, ontbinden in componenten (hoofdstuk 6 van I)	vectoren als rijtjes getallen, in 2D en 3D; rekenen per component
arbeid $W = F \cdot s$ met de kracht langs de weg (hoofdstuk 9 van I)	$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ bij elke hoek: het scalair product
moment $M = F \cdot d$ met de loodrechte arm (hoofdstuk 10 van I)	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, ook in 3D: het vectorproduct
de hoek van de zon op een paneel (hoofdstuk 6 van I)	de invalshoek voor elke stand van de zon, met één scalair product
een stelsel van drie vergelijkingen met `np.linalg.solve` (hoofdstuk 21 van I)	wat een matrix is, en hoe Gauss het stelsel oplost

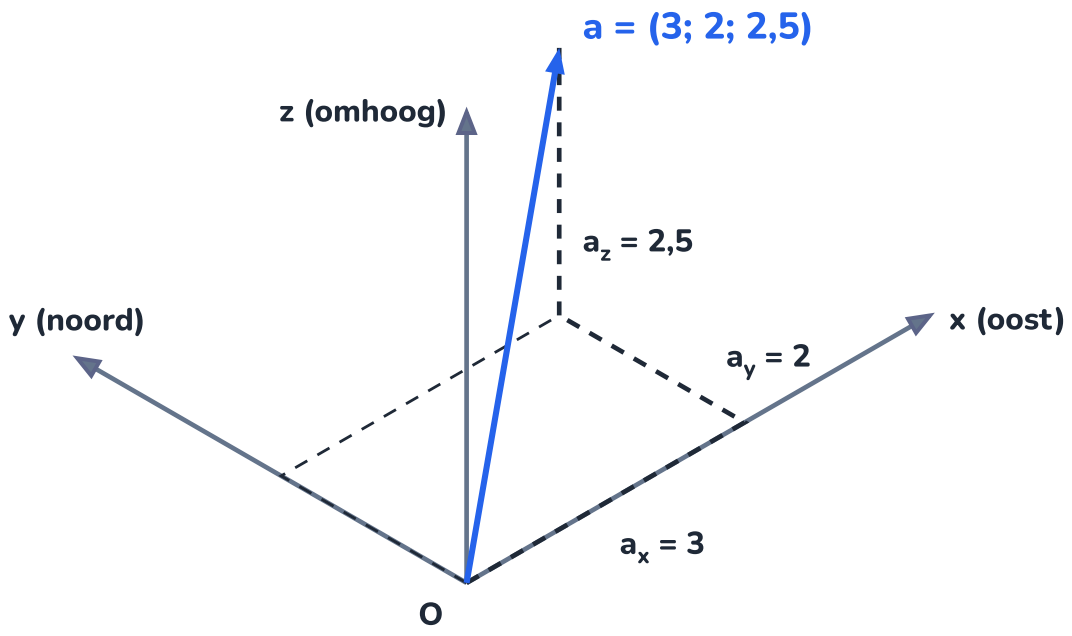
Kies drie loodrechte assen: x naar het oosten, y naar het noorden, z omhoog. Dat is een **rechtshandig** assenstelsel: duim, wijsvinger en middelvinger van je rechterhand wijzen langs x, y en z. Een vector noteer je met zijn componenten, $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, of als $a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$ met de eenheidsvectoren langs de assen. Optellen en met een getal vermenigvuldigen gaat per component, precies zoals je in hoofdstuk 6 van I krachten optelde door hun componenten op te tellen.

LENGTE, EENHEIDSVECTOR, VECTOR TUSSEN TWEE PUNTEN

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad \vec{PQ} = Q - P$$

De lengte volgt uit Pythagoras, twee keer: eerst in het grondvlak, dan omhoog. Een eenheidsvector heeft lengte 1 en draagt alleen de richting: een kracht van 400 N langs een draad is $400\,\hat{e}$.

Voorbeeld: $\vec{a} = (3;\ 2;\ 2{,}5)$ heeft lengte $\sqrt{9 + 4 + 6{,}25} = 4{,}387$ en eenheidsvector $(0{,}684;\ 0{,}456;\ 0{,}570)$. De drie componenten van een eenheidsvector zijn de cosinussen van de hoeken met de assen: $\hat{a}$ maakt een hoek van $\cos^{-1} 0{,}570 = 55{,}3°$ met de verticaal.



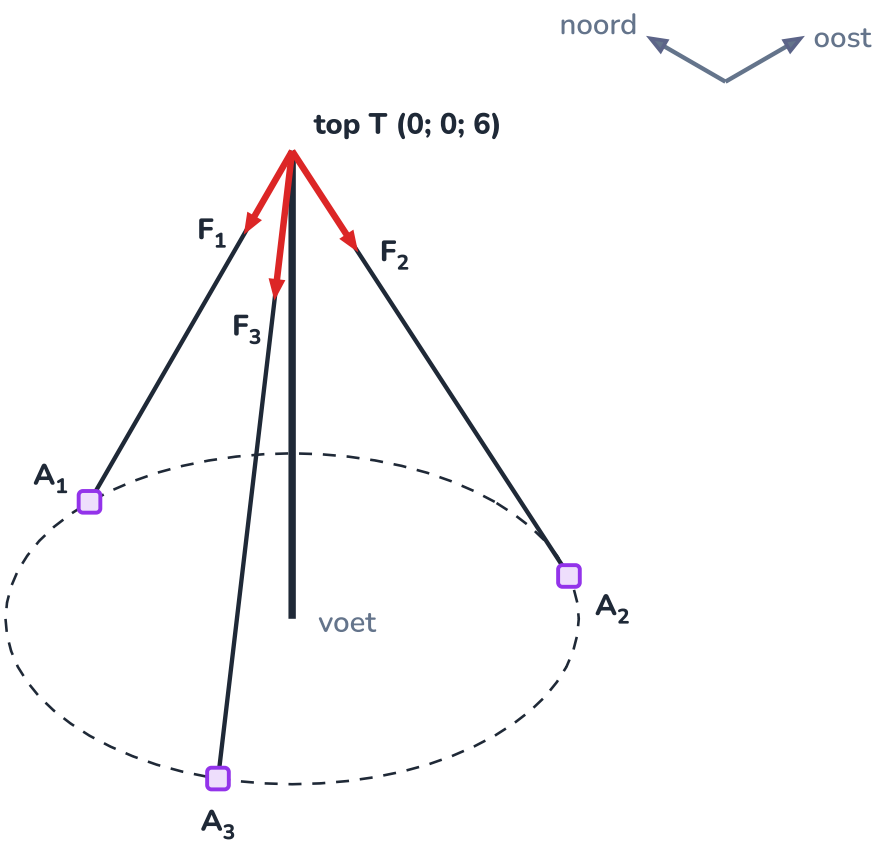
In isometrie: de vector a is de diagonaal van een doos met ribben a_x, a_y en a_z.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.3

Drie tuidraden aan een weermast

3/22

De weermast van het station (6,0 m, met windmeter en zonnestralingsmeter) wordt rechtgehouden door drie tuidraden naar ankers op 3,0 m van de voet, onder 120° van elkaar: naar het noorden, het oostzuidoosten en het westzuidwesten. Elke draad staat op 400 N. Bereken de kracht van elke draad op de top als vector, de hoek van de draden met de grond en de totale kracht op de mast.



De drie draadkrachten wijzen van de top naar de ankers; horizontaal heffen ze elkaar op.

GEGEVEN

- top $T = (0;\ 0;\ 6{,}0)$ m, ankers op 3,0 m onder 0°, 120° en 240° (vanaf het noorden, met de klok mee)
- spanning 400 N per draad

GEVRAAGD

- $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ en hun som
- de hoek met de grond

OPLOSSING

1 Ankers: $A_1 = (0;\ 3{,}0;\ 0)$, $A_2 = (3{,}0\sin 120°;\ 3{,}0\cos 120°;\ 0) = (2{,}598;\ -1{,}500;\ 0)$, $A_3 = (-2{,}598;\ -1{,}500;\ 0)$.

2 Richting van draad 1: $\vec{TA}_1 = A_1 - T = (0;\ 3{,}0;\ -6{,}0)$, lengte $\sqrt{45} = 6{,}708\,\text{m}$, eenheidsvector $(0;\ 0{,}447;\ -0{,}894)$.

3 Kracht: $\vec{F}_1 = 400 \cdot (0;\ 0{,}447;\ -0{,}894) = (0;\ 178{,}9;\ -357{,}8)$ N. Zo ook $\vec{F}_2 = (154{,}9;\ -89{,}4;\ -357{,}8)$ N en $\vec{F}_3 = (-154{,}9;\ -89{,}4;\ -357{,}8)$ N.

4 Som: $(0;\ 0;\ -1073{,}3)$ N. De horizontale componenten heffen elkaar op (de mast staat recht); de verticale tellen op tot 1073 N naar beneden.

5 Hoek met de grond: $\tan^{-1}(6{,}0/3{,}0) = 63{,}4°$. Controle: de verticale component van één draad is $400\sin 63{,}4° = 357{,}8\,\text{N}$.

ANTWOORD

Elke draad trekt met $358\,\text{N}$ omlaag en $179\,\text{N}$ opzij; samen duwen de draden de mast met 1073 N in de grond, zonder zijdelingse kracht.

Klopt dit? Symmetrie: drie gelijke horizontale componenten van 179 N onder 120° vormen een gesloten driehoek (kop-staart, hoofdstuk 6 van I). Waait het, dan verandert de spanning in de draden; met drie draden en een mast zijn er dan meer onbekenden dan vergelijkingen in de top (hoofdstuk 13).

UITLEG · 5.4

Het scalair product

Twee vectoren geven samen een getal (een scalair): vermenigvuldig de componenten twee aan twee en tel op.

SCALAIR PRODUCT (INPRODUCT)

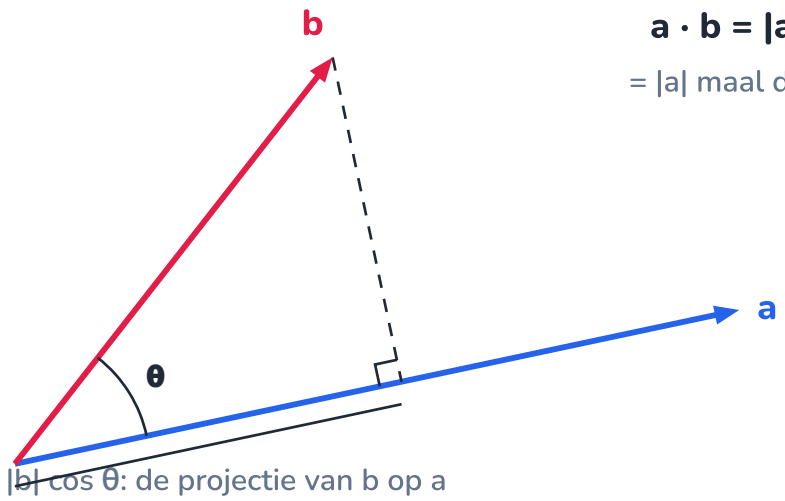
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

θ: de hoek tussen de vectoren (0° tot 180°). Positief bij een scherpe hoek, nul bij een rechte hoek, negatief bij een stompe. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Waarom de cosinus? Neem de driehoek met zijden $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} - \vec{b}$. De cosinusregel zegt $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$. Werk je het linkerlid per component uit, dan krijg je $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$. Vergelijk: de som van de producten ís $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$.

Wat je ermee doet.

- **Een hoek:** $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$, in 3D net zo eenvoudig als in 2D.
- **Loodrecht:** $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Een snelle test, zonder hoeken.
- **Projectie:** $\vec{b} \cdot \hat{a} = |\vec{b}|\cos\theta$ is het stuk van $\vec{b}$ langs $\vec{a}$; de projectievector is $(\vec{b} \cdot \hat{a})\,\hat{a}$.
- **Arbeid en vermogen:** alleen de component van de kracht langs de verplaatsing doet arbeid: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (hoofdstuk 9 van I).
- **Zonlicht op een vlak:** per m² vangt een vlak met normaal $\hat{n}$ de instraling $G\,\hat{s} \cdot \hat{n}$, met $\hat{s}$ de richting naar de zon.



$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$$

= |a| maal de projectie van b

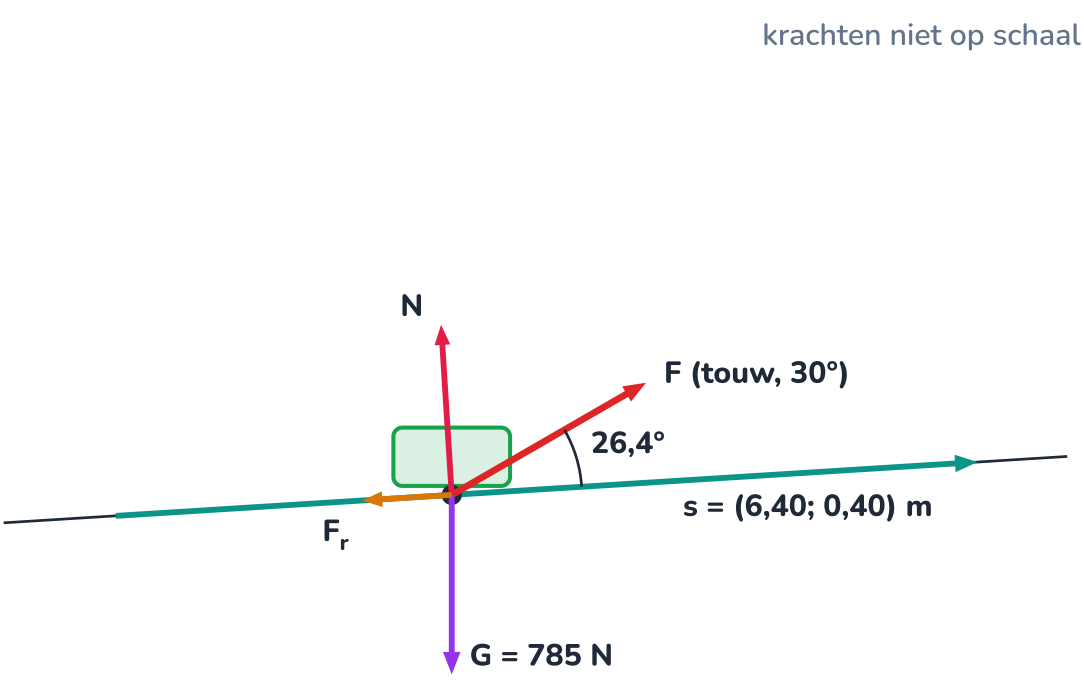
Het scalair product is |a| maal het stuk van b dat langs a ligt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.5

Arbeid als scalair product: de batterijkar op de oprit

5/22

De batterijkar van 80 kg (hoofdstuk 8 van I) moet de oprit naar de module op: 6,40 m horizontaal en 0,40 m hoog (6,25 %). Je trekt aan een touw onder 30° met de horizontaal. De rolweerstand is 2,5 % van de normaalkracht. Bereken de touwkracht voor een constante snelheid en de arbeid van elke kracht als scalair product. Controleer met de energie.



Alleen het stuk van elke kracht langs s telt voor de arbeid; N staat loodrecht op s en doet niets.

GEGEVEN

- $\vec{s} = (6{,}40;\ 0{,}40)$ m, $m = 80\,\text{kg}$, $\mu_r = 0{,}025$
- touw onder 30° met de horizontaal

GEVRAAGD

- F
- W_F, W_G, W_{rol} en hun som

OPLOSSING

1. Hellingshoek $\alpha = \tan^{-1} 0{,}0625 = 3{,}58°$; het touw maakt $30° - 3{,}58° = 26{,}42°$ met de oprit.
2. Evenwicht langs de oprit: $F\cos 26{,}42° = mg\sin\alpha + \mu_r\,(mg\cos\alpha - F\sin 26{,}42°)$, want het touw tilt de kar een beetje op. Dus $F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu_r\cos\alpha)}{\cos 26{,}42° + \mu_r \sin 26{,}42°} = 75{,}6\,\text{N}$.
3. Touw: $\vec{F} = 75{,}6\,(\cos 30°;\ \sin 30°) = (65{,}5;\ 37{,}8)$ N, dus $W_F = \vec{F}\cdot\vec{s} = 65{,}5\cdot 6{,}40 + 37{,}8\cdot 0{,}40 = 434\,\text{J}$.
4. Zwaartekracht: $\vec{G} = (0;\ -785)$ N, $W_G = \vec{G}\cdot\vec{s} = -785\cdot 0{,}40 = -314\,\text{J} = -mgh$. De normaalkracht staat loodrecht op $\vec{s}$: $\vec{N}\cdot\vec{s} = 0$, geen arbeid.
5. Rolweerstand: $N = mg\cos\alpha - F\sin 26{,}42° = 750\,\text{N}$, de weerstand is $18{,}7\,\text{N}$ tegen de beweging in, over $|\vec{s}| = 6{,}412\,\text{m}$: $W_{\text{rol}} = -120\,\text{J}$.

ANTWOORD

$F = 75{,}6\,\text{N}$; $W_F = 434\,\text{J}$, $W_G = -314\,\text{J}$, $W_{\text{rol}} = -120\,\text{J}$. **Som:** $0\,\text{J}$.

Klopt dit? De som is nul: bij constante snelheid verandert de kinetische energie niet (hoofdstuk 9 van I). Evenwijdig met de oprit duwen kost 68,5 N (hoofdstuk 8 van I: 69 N) maal 6,41 m $= 439\,\text{J}$: iets meer, want dan drukt de kar harder op de oprit en is de rolweerstand groter. Met het touw moet je harder trekken (75,6 N), maar je doet minder arbeid.

Het vectorproduct

In drie dimensies kan je twee vectoren ook tot een nieuwe **vector** vermenigvuldigen:

VECTORPRODUCT (UITPRODUCT)

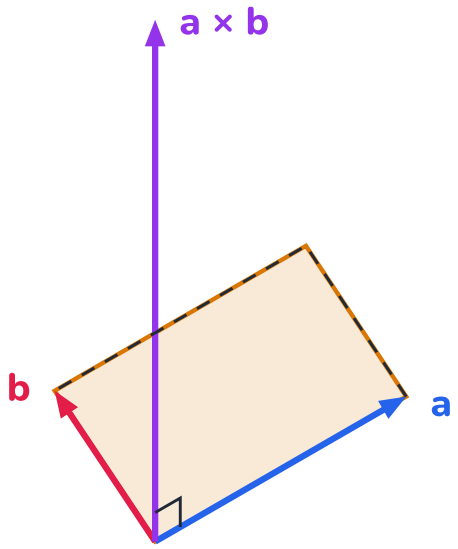
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$$

Ezelsbruggetje voor de componenten: $x \to y \to z \to x$. De x-component gebruikt alleen y en z, en begint met $a_y b_z$; de volgende krijg je door de letters één plaats door te schuiven.

Eigenschappen.

- $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$: reken maar na dat $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.
- Zijn lengte is de **oppervlakte** van het parallellogram op $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (basis $|\vec{a}|$, hoogte $|\vec{b}| \sin\theta$). De helft is de oppervlakte van de driehoek.
- Zijn richting volgt de **rechterhandregel**: krul de vingers van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$, de duim wijst langs $\vec{a} \times \vec{b}$. Zo is $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$.
- De volgorde telt: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. En $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$: evenwijdige vectoren spannen geen oppervlakte op.

In het vlak ($a_z = b_z = 0$) blijft alleen de z-component over, $a_x b_y - a_y b_x$: positief als $\vec{b}$ tegen de klok in van $\vec{a}$ ligt. In de figuur: $\vec{a} = (2{,}5;\ 0;\ 0)$ en $\vec{b} = (0{,}8;\ 1{,}8;\ 0)$ geven $\vec{a} \times \vec{b} = (0;\ 0;\ 4{,}5)$: recht omhoog, met als lengte de oppervlakte 4,5.



a = (2,5; 0; 0)
b = (0,8; 1,8; 0)
a × b = (0; 0; 4,5)

rechterhand: vingers van a naar b, de duim wijst langs a × b

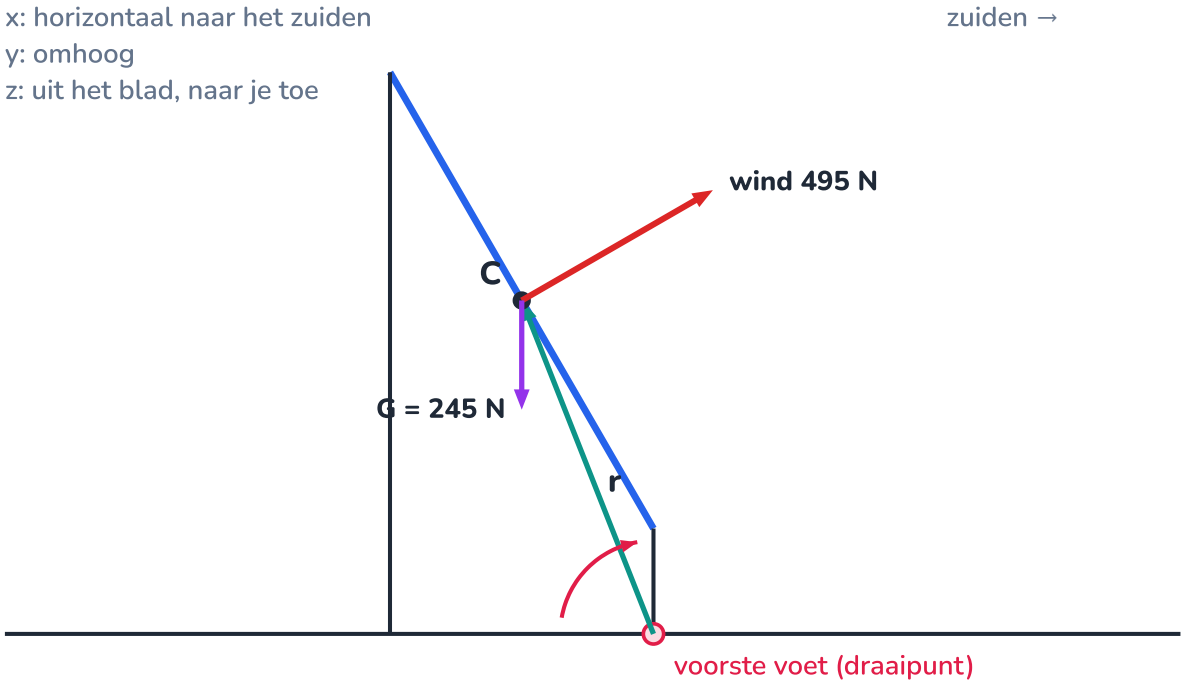
oppervlakte van het parallellogram = |a × b| = 4,5

a en b spannen een parallellogram op; a × b staat er loodrecht op en is even lang als zijn oppervlakte.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.7

Het moment als vectorproduct: wind op het zonnepaneel

In hoofdstuk 10 van I zocht je de armen van de wind en het gewicht op de steun van het zonnepaneel (60°, 1,00 m in de hellingsrichting, onderrand 0,20 m boven het dak). Bereken nu de momenten om de voorste voet met $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$: (a) van de wind, 495 N loodrecht op het paneel in het midden C, bij storm uit het noorden; (b) van het gewicht van paneel en steun, 25 kg in C.



De wind grijpt aan in C; r loopt van de voorste voet naar C. Het moment van de wind draait met de klok mee.

GEGEVEN

- x horizontaal naar het zuiden, y omhoog, z uit het blad
- C ligt 0,25 m achter de voet en $0{,}20 + 0{,}50 \sin 60° = 0{,}633\ \text{m}$ hoog

GEVRAAGD

- $\vec{M}_{\text{wind}}$ en $\vec{M}_G$ en hun draaizin

OPLOSSING

1. Arm: $\vec{r} = C - A = (-0{,}250;\ 0{,}633;\ 0)$ m.
2. Wind: loodrecht op het paneel, naar het zuiden en omhoog: $\vec{F} = 495\,(\cos 30°;\ \sin 30°;\ 0) = (428{,}7;\ 247{,}5;\ 0)$ N.
3. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$: alleen de z-component is niet nul: $M_z = r_x F_y - r_y F_x = (-0{,}25)(247{,}5) - 0{,}633 \cdot 428{,}7 = -333{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$.
4. Negatief: met de klok mee in de figuur. De wind wil de steun voorover over de voorste voet kantelen.
5. Gewicht: $\vec{G} = (0;\ -245{,}2;\ 0)$ N, $M_z = (-0{,}25)(-245{,}2) - 0{,}633 \cdot 0 = +61{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}$: tegen de klok in, het houdt de steun op zijn plaats.

ANTWOORD

$\vec{M}_{\text{wind}} = (0;\ 0;\ -333)\ \text{N}\cdot\text{m}$ **(kantelend),** $\vec{M}_G = (0;\ 0;\ 61{,}3)\ \text{N}\cdot\text{m}$ **(stabiliserend): dezelfde 333 en 61,3 N·m als in hoofdstuk 10 van I.**

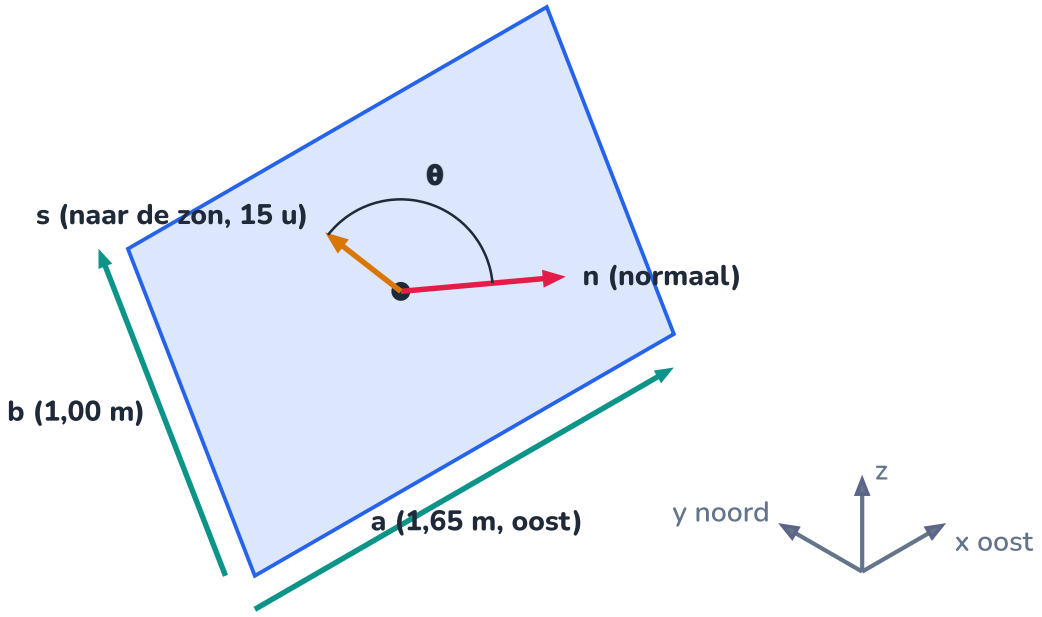
Klopt dit? Geen armen zoeken, geen loodlijnen tekenen: de vector $\vec{r}$ en de componenten van de kracht volstaan, en het teken geeft de draaizin. Blaast de wind schuin op het paneel, dan krijgt $\vec{F}$ een z-component en $\vec{M}$ ook een x- en y-component: momenten om de andere assen, die de steun doen wringen. De formule blijft dezelfde.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.8

De zon op het paneel: normaal, oppervlakte en invalshoek

8/22

Het zonnepaneel is 1,65 m breed (oost-west) en 1,00 m lang in de hellingsrichting, onder 60° op het zuiden. Bereken met een vectorproduct de normaal en de oppervlakte, en met een scalair product de invalshoek van het zonlicht op 21 juni om 12:00 en om 15:00 zonnetijd. Hoeveel W/m² vangt het paneel als de directe straling loodrecht op de stralen 900 W/m² is (rekenwaarde)?



De normaal n volgt uit a × b; de hoek θ tussen n en de richting van de zon bepaalt hoeveel licht het paneel vangt.

GEGEVEN

- x oost, y noord, z omhoog; breedtegraad 50,8°, declinatie op 21 juni 23,44°
- zonnestand om 15:00: hoogte $45{,}9°$, azimut $248{,}8°$ (vanaf het noorden, met de klok mee)

GEVRAAGD

- $\hat{n}$, oppervlakte, θ om 12:00 en 15:00, instraling

OPLOSSING

1 Randen: langs de onderrand $\vec{a} = (1{,}65;\ 0;\ 0)$, de helling op $\vec{b} = (0;\ 1{,}00\cos 60°;\ 1{,}00\sin 60°) = (0;\ 0{,}500;\ 0{,}866)$.

2 $\vec{a} \times \vec{b} = (0 \cdot 0{,}866 - 0 \cdot 0{,}5;\ 0 \cdot 0 - 1{,}65 \cdot 0{,}866;\ 1{,}65 \cdot 0{,}5 - 0) = (0;\ -1{,}429;\ 0{,}825)$. Lengte 1,65: de oppervlakte in m². Normaal $\hat{n} = (0;\ -0{,}866;\ 0{,}500)$: naar het zuiden en omhoog, 60° uit de verticaal.

3 Middag: de zon staat in het zuiden op $h = 90° - 50{,}8° + 23{,}44° = 62{,}64°$: $\hat{s} = (0;\ -\cos h;\ \sin h) = (0;\ -0{,}460;\ 0{,}888)$. $\cos\theta = \hat{s} \cdot \hat{n} = 0{,}842$, $\theta = 32{,}6°$.

4 15:00: $\hat{s} = (\cos h \sin A;\ \cos h \cos A;\ \sin h) = (-0{,}649;\ -0{,}251;\ 0{,}718)$. $\cos\theta = 0{,}577$, $\theta = 54{,}8°$.

5 Instraling op het paneel: $900 \cos\theta$: om 12:00 758 W/m², om 15:00 519 W/m².

ANTWOORD

$\hat{n} = (0;\ -0{,}866;\ 0{,}500)$**, oppervlakte 1,65 m²; invalshoek 32,6° om 12:00 (758 W/m²) en 54,8° om 15:00 (519 W/m²).**

Klopt dit? Middag: $\theta = h + 60° - 90° = 32{,}6°$, zoals in hoofdstuk 6 van I. Om 15:00 werkt die eenvoudige formule niet meer (de zon staat niet in het zuiden), het scalair product wel. Neem je $\vec{b} \times \vec{a}$, dan wijst de normaal het dak in: de volgorde telt.

UITLEG · 5.9

Matrices: tabellen die vectoren transformeren

9/22

Een **matrix** is een rechthoekige tabel getallen. Een 2×2-matrix maal een vector geeft een nieuwe vector: elke component is het scalair product van een rij met de vector.

MATRIX MAAL VECTOR

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Rechts de sleutel: $A\vec{x}$ is een combinatie van de **kolommen**. De eerste kolom is het beeld van $\vec{e}_x = (1;\ 0)$, de tweede dat van $\vec{e}_y$. Wie weet waar de basisvectoren heen gaan, kent de hele transformatie.

Zo'n transformatie is **lineair**: $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ en $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$. Rechten blijven recht, de oorsprong blijft liggen, een rooster van parallellogrammen wordt een rooster van parallellogrammen. Drie bouwstenen:

ROTATIE, SCHAAL EN AFSCHUIVING

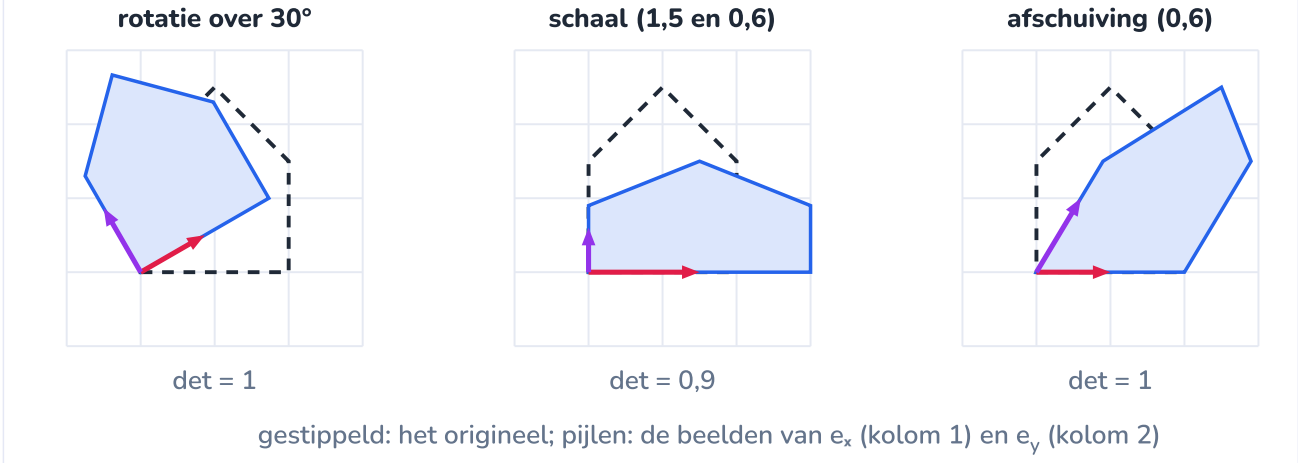
$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotatie tegen de klok in over φ: de kolommen zijn $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$, zelf gedraaid. Een spiegeling in de y-as is $\mathrm{diag}(-1, 1)$.

DETERMINANT

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

De factor waarmee elke oppervlakte verandert (het eenheidsvierkant wordt het parallellogram van de kolommen, met oppervlakte $|ad - bc|$). Negatief: de figuur is gespiegeld. Nul: alles valt op een rechte, en de transformatie is niet omkeerbaar.



Het huisje gedraaid, geschaald en afgeschoven; de pijlen zijn de kolommen van de matrix. Draaien en afschuiven bewaren de oppervlakte (det = 1).

UITLEG · 5.10

Matrixvermenigvuldiging: transformaties na elkaar

Eerst B toepassen en dan A is ook een lineaire transformatie: $A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$. Het product AB bereken je rij maal kolom:

MATRIXPRODUCT

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}\, b_{kj} \qquad (m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$$

Element (i, j) is het scalair product van rij i van A met kolom j van B. Het aantal kolommen van A moet gelijk zijn aan het aantal rijen van B.

Drie gevolgen:

- **De volgorde telt.** In het algemeen is $AB \neq BA$. In de figuur liggen beide huisjes na de draaiing op hun zij, maar links (eerst draaien, dan in de x-richting uitrekken) is het huisje twee keer zo hoog geworden, van vloer tot nok, en rechts (eerst uitrekken, dan draaien) twee keer zo breed, langs de vloer. De matrix die je het laatst toepast, staat links.
- **De eenheidsmatrix** I (enen op de diagonaal) verandert niets: $AI = IA = A$. De **inverse** A^{-1} maakt A ongedaan: $AA^{-1} = I$. Voor een 2×2-matrix is

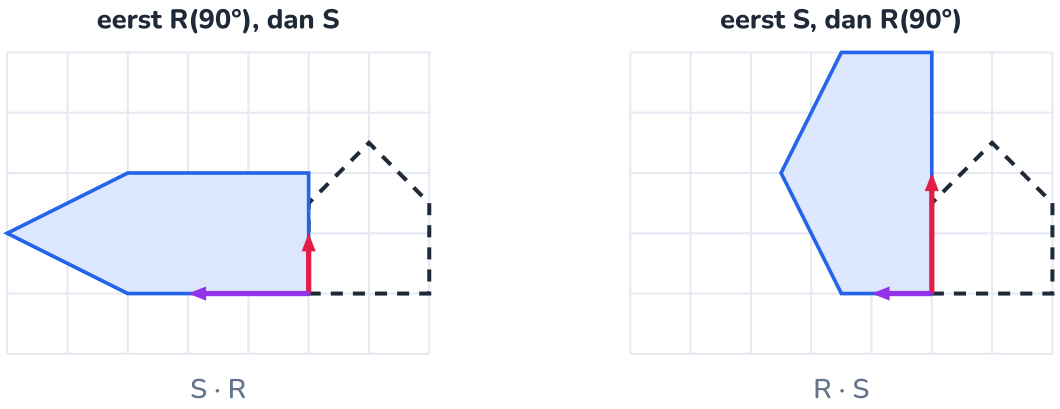
INVERSE VAN EEN 2 × 2-MATRIX

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Alleen als $\det \neq 0$. Voor een rotatie is de inverse de rotatie terug: $R(\varphi)^{-1} = R(-\varphi) = R(\varphi)^T$ (de **getransponeerde**: rijen en kolommen verwisseld).

- **Determinanten vermenigvuldigen:** $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, logisch: oppervlaktefactoren na elkaar vermenigvuldigen.

Een mooie toepassing: twee keer draaien is één keer draaien over de som, $R(\alpha)\, R(\beta) = R(\alpha + \beta)$. Werk je het product links uit, dan staan daar de somformules voor $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$ (opdracht 5.16).



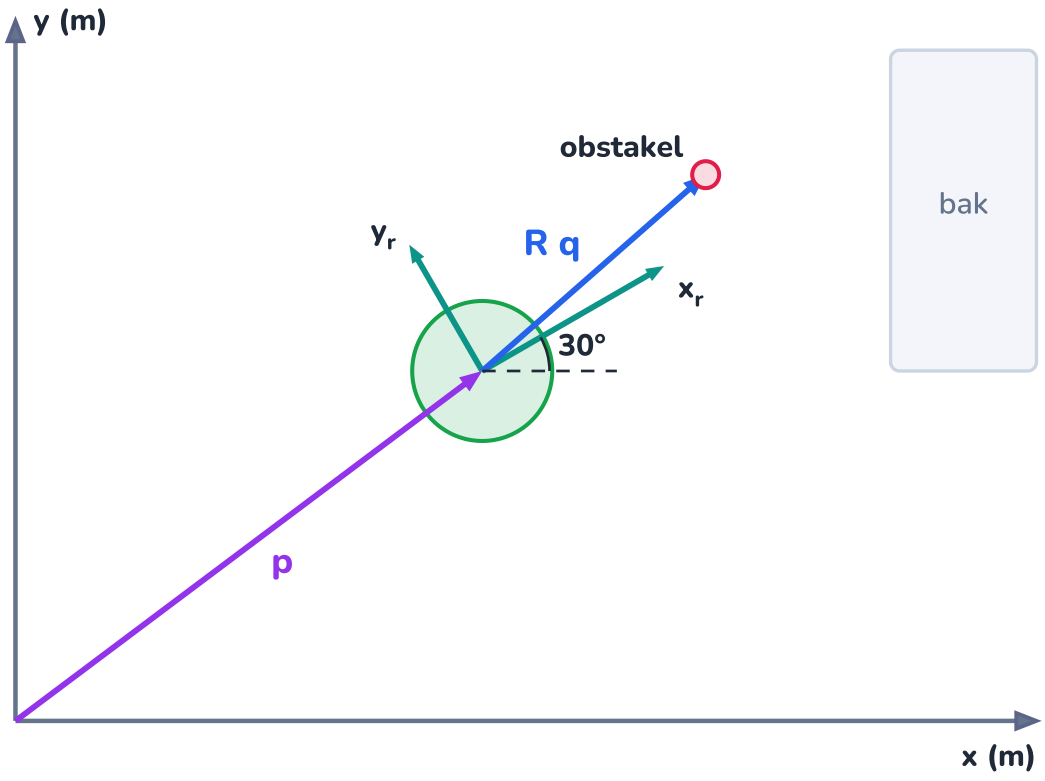
Links S · R (eerst draaien, dan in x uitrekken), rechts R · S: dezelfde twee matrices, een ander resultaat.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.11

Van robot naar wereld: coördinaten omrekenen

11/22

Het inspectierobotje (hoofdstuk 33 van I) staat in de kweekruimte op $\vec{p} = (0{,}80;\ 0{,}60)$ m, met zijn neus onder 30° met de x-as van de ruimte. Zijn ultrasone sensor ziet een obstakel 0,50 m recht vooruit en 0,10 m naar links (robotassen: x_r vooruit, y_r naar links). Waar ligt het obstakel in de ruimte? Het robotje rijdt daarna 0,30 m vooruit en draait 45° naar links. Geef zijn nieuwe stand als één matrix, en waar het obstakel dan voor het robotje ligt.



De robot kent het obstakel in zijn eigen assen (q); de draaimatrix en de plaats p brengen het naar de assen van de ruimte.

GEGEVEN

- $\vec{p} = (0{,}80;\ 0{,}60)$ m, $\varphi = 30°$

GEVRAAGD

- het obstakel in wereldcoördinaten

- obstakel in robotcoördinaten $\vec{q} = (0{,}50;\ 0{,}10)$ m

- de nieuwe stand
- het obstakel voor het robotje na de beweging

OPLOSSING

1 Een vector in de robotassen draai je over 30° naar de wereldassen en je telt de plaats van de robot erbij: $\vec{w} = R(30°)\,\vec{q} + \vec{p}$.

2 $R(30°)\,\vec{q} = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}10 \end{pmatrix} = (0{,}383;\ 0{,}337)$, dus $\vec{w} = (1{,}183;\ 0{,}937)$ m.

3 Met **homogene coördinaten** (een derde component 1) wordt rotatie plus verschuiving één matrix: $T = \begin{pmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en $T\,(0{,}50;\ 0{,}10;\ 1) = (1{,}183;\ 0{,}937;\ 1)$.

4 Bewegen is vermenigvuldigen: $T_2 = T_1 \cdot T(0{,}30;\ 0;\ 45°) = \begin{pmatrix} 0{,}259 & -0{,}966 & 1{,}060 \\ 0{,}966 & 0{,}259 & 0{,}750 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{pmatrix}$. Nieuwe plaats $(1{,}060;\ 0{,}750)$ m, neus onder 75°.

5 Terug naar het robotje: $\vec{q}_2 = R(75°)^T(\vec{w} - \vec{p}_2) = (0{,}212;\ -0{,}071)$ m: 0,21 m vooruit en 0,07 m naar rechts.

ANTWOORD

Het obstakel ligt op $(1{,}18;\ 0{,}94)$ m in de ruimte. Na de beweging staat het robotje op $(1{,}06;\ 0{,}75)$ m onder 75°, en ziet het het obstakel 0,21 m vooruit en 0,07 m rechts.

Klopt dit? Een rotatie bewaart lengtes: $|\vec{q}| = \sqrt{0{,}25 + 0{,}01} = 0{,}510$ m en $|\vec{w} - \vec{p}| = 0{,}510$ m. Robotarmen, drones en computerspelletjes rekenen zo: elke schakel of camera heeft zijn eigen matrix, en een keten van bewegingen is een product van matrices.

UITLEG · 5.12

Stelsels als matrixvergelijking; de methode van Gauss

Een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden is één matrixvergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$: rij i van A bevat de coëfficiënten van vergelijking i. De methode van **Gauss** lost ze op in twee fasen.

1. Heen: elimineren. Drie bewerkingen veranderen de oplossingen niet: twee rijen verwisselen, een rij met een getal (niet nul) vermenigvuldigen, en een veelvoud van een rij bij een andere optellen. Gebruik ze om onder de diagonaal nullen te maken, kolom na kolom. Het diagonaalelement waarmee je werkt, heet de **spil**. Is de spil nul, verwissel dan rijen; in een computer kies je altijd het grootste element in de kolom als spil (**rijverwisseling**), anders kunnen afrondingsfouten ontploffen (opdracht 5.12).

2. Terug: invullen. De laatste rij heeft nog één onbekende; vul die in de rij erboven in, enzovoort.

Drie mogelijke uitkomsten. Blijft er op de diagonaal nergens een nul, dan is er precies één oplossing ($\det A \neq 0$). Krijg je een rij $0 = c$ met $c \neq 0$, dan is er geen oplossing; een rij $0 = 0$ geeft er oneindig veel. Meetkundig, bij drie onbekenden: drie vlakken die elkaar in één punt snijden, die geen gemeenschappelijk punt hebben, of die een hele rechte gemeen hebben.

KOST VAN GAUSS

$$\text{rekenwerk} \approx \tfrac{1}{3}n^3 \text{ vermenigvuldigingen}$$

1000 onbekenden: $3 \cdot 10^8$, een fractie van een seconde. Een miljoen onbekenden (een eindige-elementenmodel, hoofdstuk 13): $3 \cdot 10^{17}$. Gelukkig staan in zulke matrices bijna alleen nullen, en slimme methoden rekenen daar niet mee.

$R_2 \leftarrow 3R_2 + R_1$ $\qquad$ $R_3 \leftarrow 11R_3 + 5R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 10 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 10 \\ \mathbf{0} & 11 & -5 & 10 \\ \mathbf{0} & -5 & 8 & 20 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & 10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 63 & 270 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow 3R_3 + 2R_1$ $\qquad$ **terug: 63 I_3 = 270**

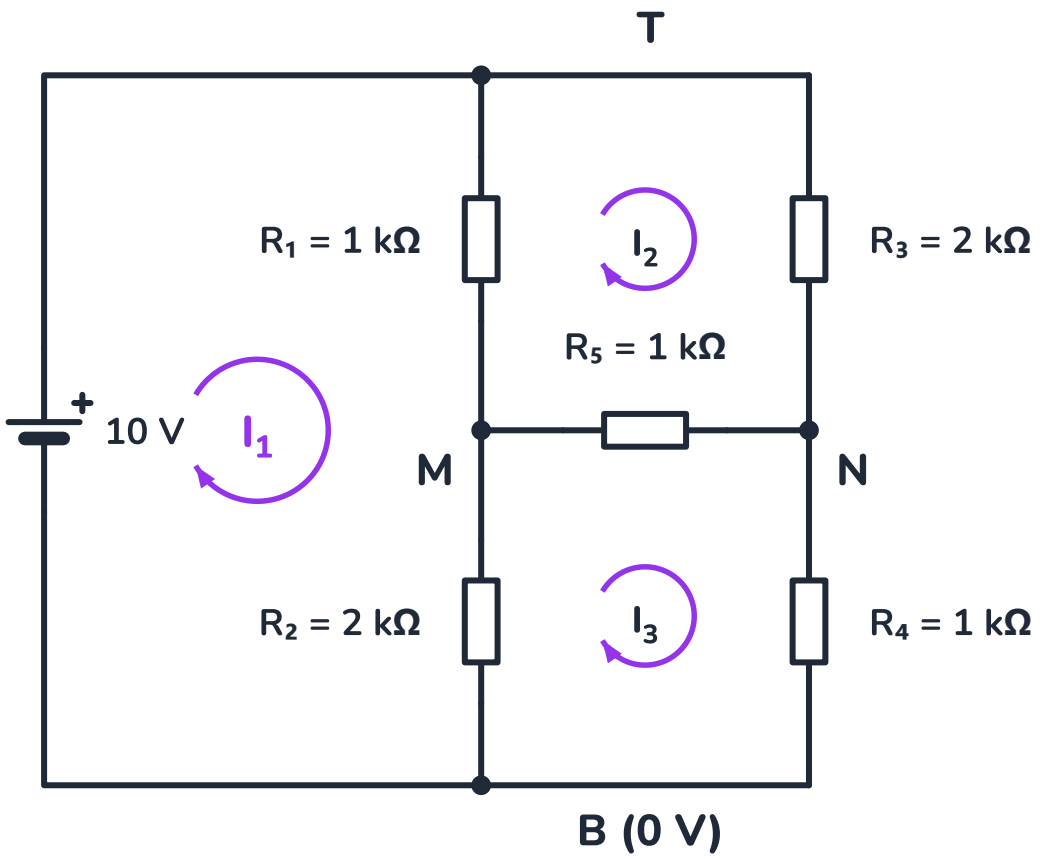
Kolom per kolom nullen maken onder de diagonaal: na twee stappen staat onderaan één vergelijking met één onbekende.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.13

Gauss met de hand: de mazen van een brug

13/22

Een brugschakeling zoals in hoofdstuk 21 van I, met ronde waarden: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 2$, $R_4 = 1$ en $R_5 = 1\,\text{k}\Omega$ op 10 V. Stel de vergelijkingen op voor de drie **maasstromen** (een stroom die rond een venster loopt, met de klok mee), los ze op met Gauss, bereken de stroom door R_5 en controleer met de potentialen van M en N.



Drie vensters, drie maasstromen met de klok mee; R_1, R_2 en R_5 worden elk door twee mazen gedeeld.

GEGEVEN

- R in kΩ, stromen in mA, spanning in V
- maas 1: bron, R_1, R_2; maas 2: R_1, R_3, R_5; maas 3: R_2, R_4, R_5

GEVRAAGD

- I_1, I_2, I_3
- de stroom door R_5

OPLOSSING

1 Maaswet per venster. Een weerstand die twee mazen delen, draagt het verschil van hun maasstromen. Maas 1: $R_1(I_1-I_2)+R_2(I_1-I_3)=10$. Maas 2: $R_1(I_2-I_1)+R_3I_2+R_5(I_2-I_3)=0$. Maas 3: $R_2(I_3-I_1)+R_5(I_3-I_2)+R_4I_3=0$. Als aangevulde matrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 10 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$.

2 Elimineer I_1: $R_2 \leftarrow 3R_2+R_1$ geeft $(0\ \ 11\ \ -5 \mid 10)$; $R_3 \leftarrow 3R_3+2R_1$ geeft $(0\ \ -5\ \ 8 \mid 20)$.

3 Elimineer I_2: $R_3 \leftarrow 11R_3+5R_2$ geeft $(0\ \ 0\ \ 63 \mid 270)$.

4 Terug: $I_3=\frac{270}{63}=\frac{30}{7}=4{,}286\,\text{mA}$; $I_2=\frac{10+5I_3}{11}=\frac{20}{7}=2{,}857\,\text{mA}$; $I_1=\frac{10+I_2+2I_3}{3}=\frac{50}{7}=7{,}143\,\text{mA}$.

5 Door R_5 loopt $I_3-I_2=\frac{10}{7}=1{,}429\,\text{mA}$ van M naar N. Controle met potentialen: $V_M=10-R_1(I_1-I_2)=\frac{40}{7}\,\text{V}$, $V_N=10-R_3I_2=\frac{30}{7}\,\text{V}$, en $(V_M-V_N)/R_5=\frac{10}{7}\,\text{mA}$.

ANTWOORD

$I_1 = 50/7 = 7{,}14\,\text{mA}$ **uit de bron,** $I_2 = 20/7$, $I_3 = 30/7\,\text{mA}$; **door** R_5 $10/7 = 1{,}43\,\text{mA}$. **De vervangingsweerstand is** $10\,\text{V}/(50/7)\,\text{mA} = 1{,}4\,\text{k}\Omega$.

Klopt dit? Vermogensbalans: de bron levert $10 \cdot \frac{50}{7} = 71{,}4\,\text{mW}$; de weerstanden nemen $\frac{900+800+800+900+100}{49} = 71{,}4\,\text{mW}$ op. De matrix is symmetrisch: dat is altijd zo bij maasvergelijkingen met weerstanden, en een eerste controle van je opstelling.

CODE · 5.14

Gauss in Python, en numpy

14/22

Met de hand stop je bij drie of vier onbekenden. Een eigen functie `gauss(A, b)` doet precies wat je op het vorige blad deed, met rijverwisseling, en telt de vermenigvuldigingen en delingen. Ze lost de twee bruggen op en vergelijkt daarna met `np.linalg.solve` op willekeurige stelsels van 10 tot 160 onbekenden.

Python **gauss.py** 40 regels

```python
# gauss.py - een stelsel oplossen met de methode van Gauss (met rijverwisseling), en vergelijken met numpy
import numpy as np


def gauss(A, b):
    """Lost A x = b op. Geeft x en het aantal vermenigvuldigingen en delingen terug."""
    A, b = np.array(A, float), np.array(b, float)
    n = len(b)
    bewerkingen = 0
    for k in range(n - 1):                          # heen: nullen onder de diagonaal
        p = k + np.argmax(abs(A[k:, k]))            # grootste spil in kolom k
        if A[p, k] == 0:
            raise ValueError("de matrix is singulier")
        A[[k, p]], b[[k, p]] = A[[p, k]], b[[p, k]]  # rijen verwisselen
        for i in range(k + 1, n):
            m = A[i, k] / A[k, k]
            A[i, k:] -= m * A[k, k:]
            b[i] -= m * b[k]
            bewerkingen += (n - k) + 2
    x = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1, -1, -1):                  # terug: van onder naar boven invullen
        x[i] = (b[i] - A[i, i + 1:] @ x[i + 1:]) / A[i, i]
        bewerkingen += n - i
    return x, bewerkingen


x, ops = gauss([[3, -1, -2], [-1, 4, -1], [-2, -1, 4]], [10, 0, 0])
print("brug met ronde waarden (mA):", np.round(x, 4), " maal 7:", np.round(7 * x, 6))

R1, R2, R3, R4, R5 = 1.0, 2.2, 1.5, 2.2, 1.0          # de brug van hoofdstuk 21 van Intermediate (kΩ)
M = [[R1 + R2, -R1, -R2], [-R1, R1 + R3 + R5, -R5], [-R2, -R5, R2 + R4 + R5]]
I, _ = gauss(M, [10, 0, 0])
print(f"brug van hoofdstuk 21: stroom door R5 = {I[2] - I[1]:.4f} mA")

rng = np.random.default_rng(5)                      # hoe groeit het werk met het aantal onbekenden?
for n in (10, 20, 40, 80, 160):
    A, b = rng.normal(size=(n, n)), rng.normal(size=n)
    x, ops = gauss(A, b)
    verschil = np.max(np.abs(x - np.linalg.solve(A, b)))
    print(f"n = {n:3d}: {ops:8d} bewerkingen = {ops / n**3:.3f} n³, verschil met numpy {verschil:.0e}")
```

Uitvoer:

```
brug met ronde waarden (mA): [7.1429 2.8571 4.2857]  maal 7: [50. 20. 30.]
brug van hoofdstuk 21: stroom door R5 = 0.3602 mA
n =  10:      475 bewerkingen = 0.475 n³, verschil met numpy 2e-13
n =  20:     3250 bewerkingen = 0.406 n³, verschil met numpy 4e-15
n =  40:    23700 bewerkingen = 0.370 n³, verschil met numpy 2e-14
n =  80:   180200 bewerkingen = 0.352 n³, verschil met numpy 6e-14
n = 160:  1403600 bewerkingen = 0.343 n³, verschil met numpy 2e-13
```

De brug met ronde waarden geeft de zevenden van de handberekening. De brug van hoofdstuk 21 van I: 0,3602 mA door R_5, zoals in opdracht 21.14 daar (met de knooppuntenmethode, een 2×2-stelsel: zie opdracht 5.10). Het aantal bewerkingen groeit met n^3 en de verhouding nadert $\frac{1}{3}$: twee keer zoveel onbekenden is acht keer zoveel werk. De verschillen met numpy zijn afrondingsfouten van de orde 10^{-15}.

In de praktijk

Gebruik `np.linalg.solve(A, b)`: dat is Gauss met rijverwisseling (een LU-ontbinding), in geoptimaliseerde code. Bereken nooit `np.linalg.inv(A) @ b`: dat is trager en minder nauwkeurig. Voor grote matrices met vooral nullen bestaat `scipy.sparse.linalg.spsolve`.

UITLEG · 5.15

Conditie: als kleine fouten grote gevolgen hebben

15/22

Niet elk stelsel is even betrouwbaar. Neem $x + y = 2$ en $x + 1{,}001\,y = 2{,}001$: twee bijna evenwijdige rechten, met snijpunt $(1;\ 1)$. Verander het rechterlid met 0,05 %:

```python
import numpy as np

A = np.array([[1.0, 1.0], [1.0, 1.001]])
for b in ([2.0, 2.001], [2.0, 2.002]):
    print("b =", b, "  x =", np.linalg.solve(A, b).round(3))
print(f"conditiegetal: {np.linalg.cond(A):.0f}")
```

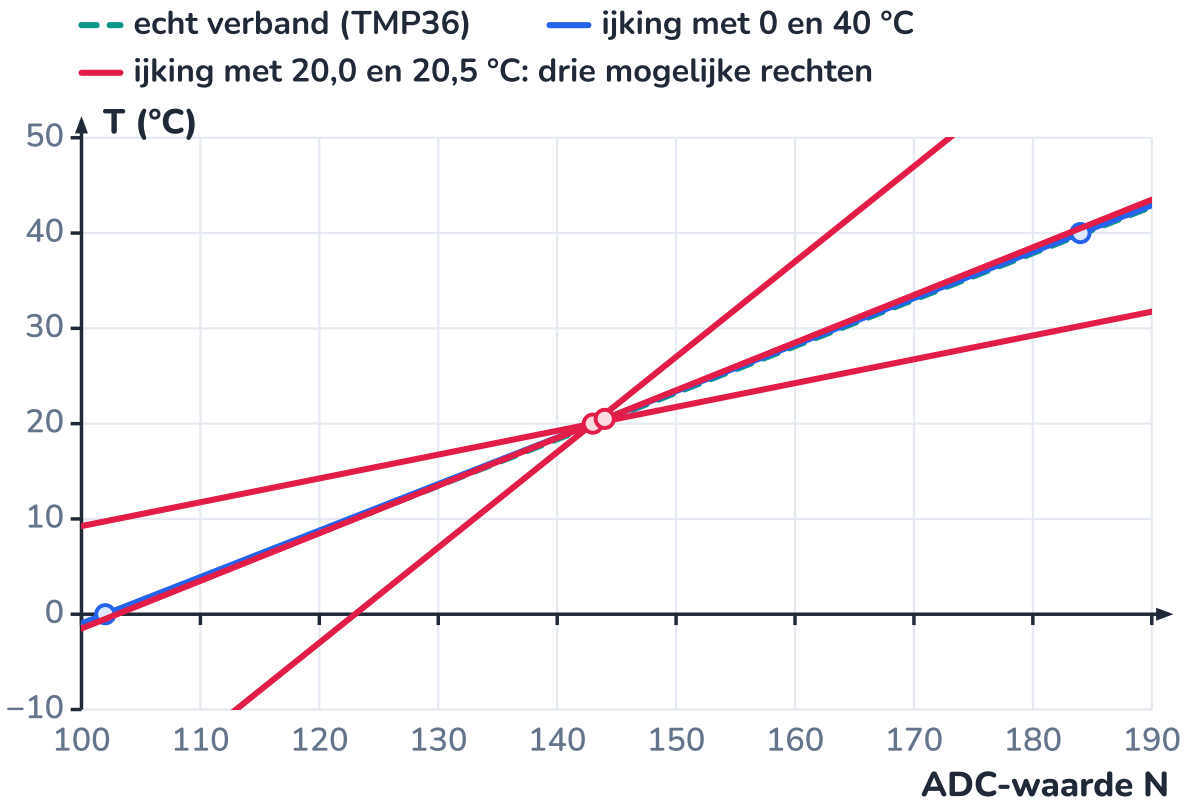
```
b = [2.0, 2.001]   x = [1. 1.]
b = [2.0, 2.002]   x = [0. 2.]
conditiegetal: 4002
```

Een verandering van 0,001 in de gegevens verplaatst de oplossing van $(1;\ 1)$ naar $(0;\ 2)$. Het **conditiegetal** $\kappa(A)$ meet die gevoeligheid: de relatieve fout in $\vec{x}$ kan tot κ keer de relatieve fout in $\vec{b}$ zijn. Vuistregel: je verliest ongeveer $\log_{10}\kappa$ juiste cijfers. Hier is $\kappa \approx 4002$: van de drie cijfers in de gegevens blijft niets over. Het net van de module verderop heeft $\kappa \approx 37$: geen probleem.

Een ijking. Een TMP36 op de 10-bits ADC van de meetkas geeft $N \approx 102{,}4 + 2{,}048\,T$. Je ijkt met twee referentiepunten: $T = a\,N + b$ door (N_1, T_1) en (N_2, T_2), een stelsel van twee vergelijkingen. Met ijswater (0 °C) en 40 °C is $\kappa \approx 543$. Met 20,0 en 20,5 °C liggen de punten maar één ADC-stap uit elkaar en is $\kappa \approx 40\,430$: een halve stap afrondingsfout laat de helling alle kanten op gaan (figuur), en bij 40 °C zit je er tot twintig graden naast.

numpy geeft een antwoord, dus het klopt

`np.linalg.solve` geeft ook voor een slecht geconditioneerd stelsel een antwoord, met zestien cijfers. Controleer `np.linalg.cond(A)`, en bekijk de oorzaak: meestal zijn twee vergelijkingen (twee ijkpunten, twee sensoren) bijna hetzelfde. De remedie is betere gegevens, geen betere rekenmachine: ijkpunten ver uit elkaar, over het hele meetbereik (hoofdstuk 3 van I).



Ver uit elkaar liggende ijkpunten leggen de rechte vast; twee punten die bijna samenvallen laten elke helling toe.

UITLEG · 5.16

De knooppuntenmethode: Kirchhoff als matrix

16/22

In hoofdstuk 21 van I schreef je voor elk netwerk knooppunt- en maasvergelijkingen met takstromen. Voor een computer is er een systematischere weg, met minder onbekenden: de **knooppuntenmethode**.

1. Kies een referentieknoop (de massa, 0 V). De onbekenden zijn de **potentialen** v_i van de andere knopen.
2. De stroom door een weerstand tussen knoop i en j is $(v_i - v_j)/R$: de wet van Ohm.
3. Knooppuntwet in elke knoop: wat er via de weerstanden uitstroomt, is gelijk aan wat er door bronnen wordt ingespoten en door verbruikers wordt weggenomen.

KNOOPPUNTENMETHODE

$$G\,\vec{v} = \vec{i} \qquad G_{ii} = \sum \frac{1}{R}\ (\text{alles aan knoop } i) \qquad G_{ij} = -\frac{1}{R_{ij}}$$

G is de **conductantiematrix** (in siemens, $1\,\mathrm{S} = 1/\Omega$). Een bron U met weerstand R aan knoop i telt als $1/R$ op de diagonaal en U/R in het rechterlid. Een verbruiker die stroom I trekt, zet $-I$ in het rechterlid.

Zo bouw je G op door elke weerstand één keer te **stempelen** (figuur). Het resultaat is altijd symmetrisch ($G_{ij} = G_{ji}$), met een grote diagonaal en veel nullen: goed geconditioneerd en snel op te lossen. Zo werkt ook het simulatieprogramma SPICE, sinds 1973 van de universiteit van Berkeley, dat elke chipontwerper gebruikt.

De brug van hoofdstuk 21 van I heeft maar twee onbekende knopen, M en N (T ligt vast op 10 V, B op 0): een 2×2-stelsel in plaats van drie maasvergelijkingen. Met de waarden van daar: $V_M = 6{,}627\ \mathrm{V}$ en $V_N = 6{,}267\ \mathrm{V}$ (opdracht 5.10).



Elke weerstand voegt +1/R toe op de diagonaal bij zijn twee knopen en −1/R op de twee kruisplaatsen.

CODE · 5.17

Habitat: het 12,8 V-net van de klimaatmodule

17/22

De klimaatmodule draait op 12,8 V (hoofdstuk 20 en 21 van I). Twee batterijen hangen aan een verdeelrail V in de technische kast; zoals in hoofdstuk 21 van I staat A op 13,30 V met 20 mΩ (inwendige weerstand en kabel) en B op 13,10 V met 25 mΩ. Van de rail vertrekken kabels met een plus- en een minader naar de verbruikers. De groeilampen (2 × 95 W) hangen aan een lamprail van 1,2 m die van **twee kanten** gevoed wordt: een ring. Nieuwe waarden voor het dossier:

kabel	lengte	doorsnede (2 aders)	R heen en terug	$1/R$
V–L1	4,0 m	6,0 mm²	22,9 mΩ	43,6 S
L1–L2	1,2 m	6,0 mm²	6,9 mΩ	145,3 S
L2–V	5,0 m	6,0 mm²	28,7 mΩ	34,9 S
V–P	3,0 m	1,5 mm²	68,8 mΩ	14,5 S
V–D	6,0 m	2,5 mm²	82,6 mΩ	12,1 S

Verbruikers (als vaste stromen): lampen 2 × 7,42 A, pomp 1,00 A, dakmotor 1,84 A (tijdens een beweging, hoofdstuk 26 van I), en in de kast de 5 V-omvormer en de ventilatoren samen 0,62 A. Ontwerpregel: hoogstens **3 % spanningsval** (0,38 V) in de kabel naar een verbruiker.

Python `netwerk.py` 46 regels

```python
# netwerk.py - het 12,8 V-net van de klimaatmodule met de knooppuntenmethode
import numpy as np

RHO = 0.0172                                  # koper, Ω·mm²/m


```

```python
def kabel(lengte, doorsnede):
    """Weerstand van een kabel met plus- en minader (heen en terug), in Ω."""
    return 2 * RHO * lengte / doorsnede


knopen = ["V", "L1", "L2", "P", "D"]            # verdeelrail, lampen 1 en 2, pomp, dakmotor
takken = [("V", "L1", kabel(4.0, 6)), ("L1", "L2", kabel(1.2, 6)), ("L2", "V", kabel(5.0, 6)),
          ("V", "P", kabel(3.0, 1.5)), ("V", "D", kabel(6.0, 2.5))]
bronnen = [("V", 13.30, 0.020), ("V", 13.10, 0.025)]             # batterij A en B: U (V), R met kabel (Ω)
lasten = {"L1": 7.42, "L2": 7.42, "P": 1.00, "D": 1.84, "V": 0.62}  # stroom per verbruiker (A)


def los_op(takken):
    k = {naam: i for i, naam in enumerate(knopen)}
    G = np.zeros((len(knopen), len(knopen)))
    i = np.zeros(len(knopen))
    for a, b, R in takken:                        # elke weerstand stempelt vier plaatsen
        G[k[a], k[a]] += 1 / R
        G[k[b], k[b]] += 1 / R
        G[k[a], k[b]] -= 1 / R
        G[k[b], k[a]] -= 1 / R
    for a, U, R in bronnen:                       # bron met weerstand: 1/R op de diagonaal, U/R rechts
        G[k[a], k[a]] += 1 / R
        i[k[a]] += U / R
    for a, I in lasten.items():                   # een verbruiker trekt stroom uit zijn knoop
        i[k[a]] -= I
    return np.linalg.solve(G, i)


v = los_op(takken)
for naam, V in zip(knopen, v):
    print(f"knoop {naam:2s}: {V:7.3f} V")
for a, b, R in takken:
    I = (v[knopen.index(a)] - v[knopen.index(b)]) / R
    print(f"kabel {a:2s}-{b:2s}: {I:6.2f} A, val {abs(I) * R:.3f} V = {abs(I) * R / 12.8 * 100:.1f} % van 12,8 V")
IA, IB = [(U - v[knopen.index(a)]) / R for a, U, R in bronnen]
print(f"batterijen: {IA:.2f} A + {IB:.2f} A = {IA + IB:.2f} A; verbruikers samen {sum(lasten.values()):.2f} A")

v2 = los_op([t for t in takken if t[:2] != ("L2", "V")])    # de ringkabel L2-V breekt
print(f"zonder ring: L1 {v2[1]:.3f} V, L2 {v2[2]:.3f} V (val tot L2: {(v2[0] - v2[2]) / 12.8 * 100:.1f} %)")
```

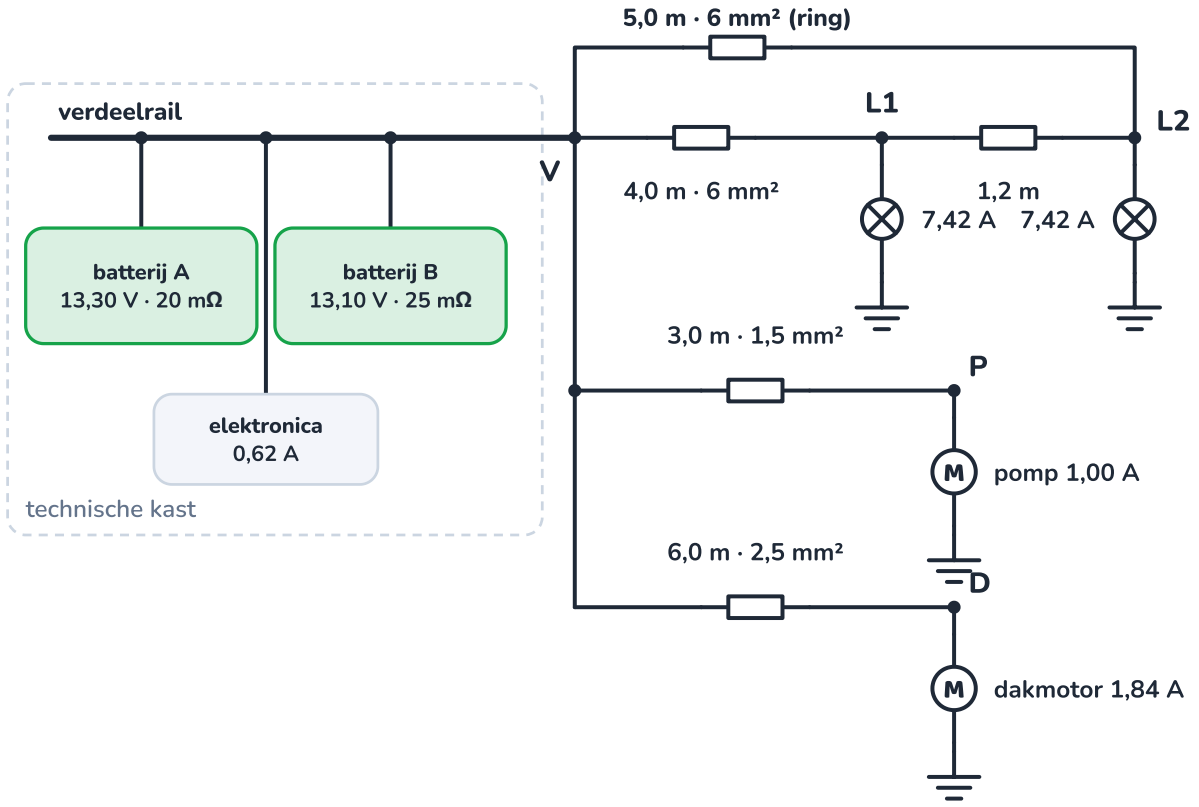
Uitvoer:

```
knoop V :  13.008 V
knoop L1:  12.821 V
knoop L2:  12.816 V
knoop P :  12.939 V
knoop D :  12.856 V
kabel V -L1:   8.15 A, val 0.187 V = 1.5 % van 12,8 V
kabel L1-L2:   0.73 A, val 0.005 V = 0.0 % van 12,8 V
kabel L2-V :  -6.69 A, val 0.192 V = 1.5 % van 12,8 V
kabel V -P :   1.00 A, val 0.069 V = 0.5 % van 12,8 V
kabel V -D :   1.84 A, val 0.152 V = 1.2 % van 12,8 V
batterijen: 14.61 A + 3.69 A = 18.30 A; verbruikers samen 18.30 A
zonder ring: L1 12.667 V, L2 12.616 V (val tot L2: 3.1 %)
```

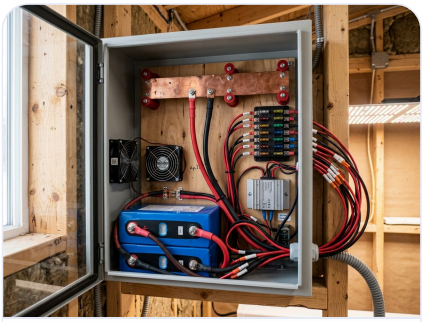
De batterijen leveren samen evenveel als de verbruikers vragen (knooppuntwet); de vollere batterij A levert het meest. De lampen krijgen stroom langs twee wegen: 8,15 A via de korte kabel en 6,69 A via de lange; door de lamprail zelf loopt maar 0,73 A. De grootste spanningsval, naar L2, is 0,192 V (1,5 %). Breekt de ringkabel, dan loopt alles over één kabel en valt er 0,391 V (3,1 %) tot L2: net boven de grens. De kabels verliezen samen 3,2 W (zonder ring 5,8 W).

⚠ Een kabel die niet zwaar genoeg is

Blokkeert de dakmotor (10 A, hoofdstuk 26 van I), dan valt er over zijn kabel van 2,5 mm² 0,83 V: de motor krijgt nog 12,09 V, en ook de rail zakt naar 12,92 V. Met 4 mm² wordt de val 0,52 V. De zekering (5 A traag) moet de motor dan wel snel genoeg afschakelen.



Twee batterijen aan de verdeelrail V; de lampen L1 en L2 in een ring; pomp P en dakmotor D elk aan een eigen kabel.



De verdeelrail is één knoop van het net: alles wat erin komt en eruit gaat, staat in één rij van de matrix.

ONTLEED · 5.18

Habitat: de matrix van het voedingsnet ontleed

Dit is het stelsel dat `netwerk.py` oplost: de conductantiematrix G (siemens) maal de potentialen, gelijk aan de ingespoten stromen (ampère). De oplossing: $v_{\mathrm{V}} = 13{,}008\,\mathrm{V}$, $v_{\mathrm{L1}} = 12{,}821\,\mathrm{V}$, $v_{\mathrm{L2}} = 12{,}816\,\mathrm{V}$, $v_{\mathrm{P}} = 12{,}939\,\mathrm{V}$, $v_{\mathrm{D}} = 12{,}856\,\mathrm{V}$.

	V	L1	L2	P	D
V	1	2	−34,9	−14,5	−12,1
L1	−43,6	189,0	−3	0	0
L2	−34,9	−145,3	180,2	0	0
P	−14,5	0	0	14,5	4
D	−12,1	0	0	0	5

G (siemens)

$\cdot$ $\begin{bmatrix} v_V \\ v_{L1} \\ v_{L2} \\ v_P \\ v_D \end{bmatrix}$ $=$ $\begin{bmatrix} 1\,6\,8 \\ -7{,}42 \\ -7{,}42 \\ -1{,}00 \\ -1{,}84 \end{bmatrix}$

i (ampère)

Vijf knopen, vijf vergelijkingen; elke rij is de knooppuntwet van één knoop.

1 De diagonaal van de rail
195,1 S: alles wat aan V hangt. De batterijen (1/0,020 + 1/0,025 = 90 S) wegen het zwaarst, daarna de vier kabels (105,1 S).

2 Een kabel tussen twee knopen
−43,6 S = −1/R van de kabel V–L1 (22,9 mΩ). Dezelfde waarde staat gespiegeld op plaats (L1, V): G is symmetrisch.

3 De lamprail
−145,3 S: de korte, dikke lamprail tussen L1 en L2 (1,2 m, 6 mm²) is de sterkste verbinding van het net.

4 Geen verbinding: nul
Pomp en dakmotor hangen niet rechtstreeks aan elkaar. Grote netten bestaan bijna volledig uit zulke nullen: de matrix is ijl.

5 Een uiteinde
De dakmotor hangt alleen aan zijn eigen kabel: diagonaal en buitendiagonaal zijn even groot (12,1 S). Zijn rij zegt: (v_D − v_V)/R = −1,84 A.

6 De bronnen
13,30/0,020 + 13,10/0,025 − 0,62 = 1188,38 A: de batterijen als stroombronnen, min de elektronica in de kast. De andere knopen hebben alleen hun verbruik (negatief).

UITLEG · 5.19

Vakwerken: evenwicht per knoop als stelsel

Een **vakwerk** bestaat uit rechte staven die in knopen scharnierend verbonden zijn, met de lasten alleen in de knopen. Dan draagt elke staaf alleen een kracht langs zichzelf: trek (positief) of druk (negatief). In elke knoop moet de som van de krachten nul zijn: in het vlak twee vergelijkingen per knoop.

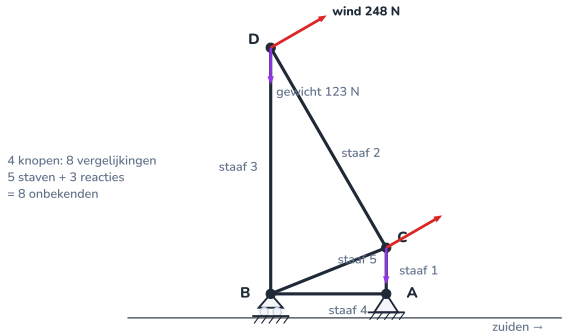
EVENWICHT VAN EEN VAKWERK

$$\sum_{\text{staven}} s_b\,\hat{e}_b + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{per knoop} \qquad \Longrightarrow \qquad A\,\vec{s} = -\vec{F}$$

$\hat{e}_b$: eenheidsvector van de knoop langs staaf b; s_b: staafkracht (trek positief); $\vec{R}$: reacties van de steunpunten; $\vec{F}$: lasten. De **kolommen** van A bevatten de eenheidsvectoren van de staven: $+\hat{e}$ in de ene knoop, $-\hat{e}$ in de andere.

Met k knopen, m staven en r reacties heb je $2k$ vergelijkingen en $m + r$ onbekenden. Is $2k = m + r$ en $\det A \neq 0$, dan is het vakwerk **statisch bepaald**: evenwicht alleen legt alle krachten vast. Is A singulier, dan kan het vakwerk vervormen zonder dat een staaf rekt (een mechanisme, zoals een vierkant zonder diagonaal). Heeft het meer staven dan nodig, dan zijn er meer onbekenden dan vergelijkingen, en beslist de stijfheid van de staven (hoofdstuk 12). De technieken om een vakwerk knoop per knoop of met een snede met de hand op te lossen, zijn voor hoofdstuk 13.

De steun van het zonnepaneel (hoofdstuk 10 van I) als vakwerk: vier knopen (voeten A en B, onderrand C, bovenrand D), vijf staven (voorpaal, paneelregel, achterpaal, grondregel en een diagonaal van B naar C), een scharnier in A en een rol in B. Acht vergelijkingen, $5 + 3 = 8$ onbekenden, en $\det A = -0{,}464 \neq 0$: statisch bepaald.



Vier knopen, vijf staven, drie reacties: acht vergelijkingen voor acht onbekenden.



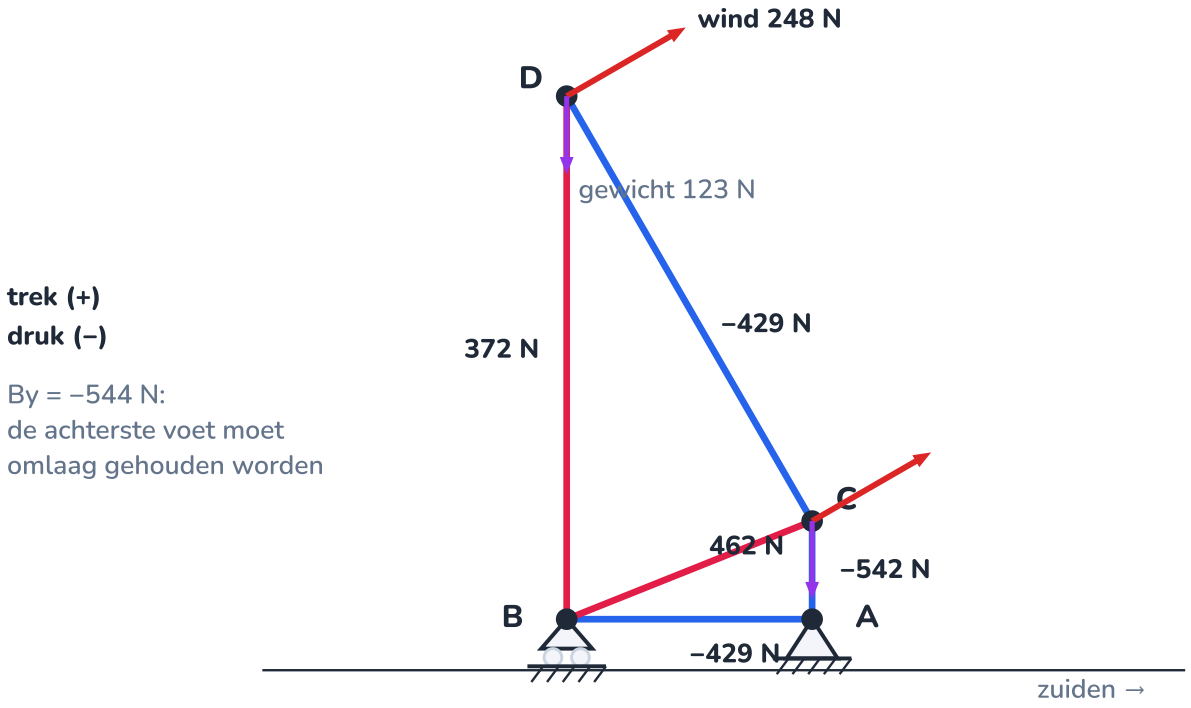
Een steun uit rechte profielen met bouten in de knopen: bijna een ideaal vakwerk.

UITGEWERKT VOORBEELD · 5.20

De steun van het zonnepaneel als vakwerk

20/22

Bereken de staafkrachten en de reacties van de steun bij (a) alleen het gewicht (25 kg, verdeeld over C en D), (b) alleen de wind (495 N loodrecht op het paneel, de helft in C en de helft in D) en (c) beide samen. Welke staven moeten druk kunnen dragen? Vergelijk de reactie in B met de ballast van hoofdstuk 10 van I.



Bij storm: trek in achterpaal en diagonaal, druk in de rest (kleuren zoals linksboven); de achterste voet wil loskomen.

GEGEVEN

- knopen A (0; 0), B (–0,50; 0), C (0; 0,20), D (–0,50; 1,066) m, x naar het zuiden
- per knoop: gewicht $(0;\ -122{,}6)$ N, wind $247{,}5\,(\cos 30^\circ;\ \sin 30^\circ) = (214{,}3;\ 123{,}7)$ N

GEVRAAGD

- staafkrachten en reacties in drie lastgevallen

OPLOSSING

1 Eenheidsvectoren (van de eerste naar de tweede knoop): AC $(0;\ 1)$, CD $(-0{,}5;\ 0{,}866)$, BD $(0;\ 1)$, AB $(-1;\ 0)$, BC $(0{,}928;\ 0{,}371)$. Ze vormen de kolommen van de 8×8-matrix A.

2 In numpy (dezelfde opbouw als de knooppuntenmethode):

```python
import numpy as np

knopen = {"A": (0.0, 0.0), "B": (-0.50, 0.0), "C": (0.0, 0.20), "D": (-0.50, 1.066)}   # x naar het zuiden, y omhoog (m)
staven = [("A", "C"), ("C", "D"), ("B", "D"), ("A", "B"), ("B", "C")]
reacties = [("A", (1, 0)), ("A", (0, 1)), ("B", (0, 1))]      # scharnier in A, rol in B
rij = {k: 2 * i for i, k in enumerate(["A", "B", "C", "D"])}  # rij 2i: evenwicht in x, rij 2i+1: in y

A = np.zeros((8, 8))
for j, (p, q) in enumerate(staven):                           # kolom j: de eenheidsvector van staaf j
    e = np.subtract(knopen[q], knopen[p])
    e = e / np.linalg.norm(e)
    A[rij[p]:rij[p] + 2, j] += e                              # een trekkracht trekt p naar q ...
    A[rij[q]:rij[q] + 2, j] -= e                              # ... en q naar p
for j, (k, r) in enumerate(reacties):
    A[rij[k]:rij[k] + 2, 5 + j] += r

wind = 495 / 2 * np.array([np.cos(np.radians(30)), np.sin(np.radians(30))])     # per knoop (N)
gewicht = np.array([0.0, -25 * 9.81 / 2])
F = np.zeros(8)
for k in ("C", "D"):
    F[rij[k]:rij[k] + 2] = wind + gewicht
s = np.linalg.solve(A, -F)
for (p, q), kracht in zip(staven, s[:5]):
    print(f"staaf {p}{q}: {kracht:7.1f} N  {'trek' if kracht > 0 else 'druk'}")
print(f"reacties: Ax = {s[5]:.1f} N, Ay = {s[6]:.1f} N, By = {s[7]:.1f} N")
```

```
staaf AC:  -541.6 N  druk
staaf CD:  -428.7 N  druk
staaf BD:   372.4 N  trek
staaf AB:  -428.7 N  druk
staaf BC:   461.7 N  trek
reacties: Ax = -428.7 N, Ay = 541.6 N, By = -543.8 N
```

3 Alle drie de lastgevallen:

STAAF	LENGTE (M)	GEWICHT (N)	WIND (N)	SAMEN (N)
AC	0,200	−122,6	−419,0	−541,6
CD	1,000	0,0	−428,7	−428,7
BD	1,066	−122,6	495,0	372,4
AB	0,500	0,0	−428,7	−428,7
BC	0,539	0,0	461,7	461,7
reactie A (x)		0,0	−428,7	−428,7
reactie A (y)		122,6	419,0	541,6
reactie B (y)		122,6	−666,5	−543,8

4 Onder het gewicht alleen dragen de palen alles (elk 122,6 N druk); de schuine staven doen niets. Onder de wind werkt het hele vakwerk: paneelregel, grondregel en voorpaal op druk, achterpaal en diagonaal op trek.

5 Reactie in B bij storm: $B_y = -544\,\mathrm{N}$, negatief: de achterste voet moet met 544 N omlaag gehouden worden, dus ongeveer 55 kg ballast zonder veiligheidsmarge. Hoofdstuk 10 van I vond met een kantelveiligheid van 1,5: 877 N (89 kg). En $A_x = -429\,\mathrm{N}$: de voorste voet moet 429 N wrijving leveren, ook zoals daar.

ANTWOORD

Bij storm: paneelregel CD 429 N druk, grondregel AB 429 N druk, voorpaal 542 N druk, achterpaal 372 N trek, diagonaal 462 N trek. De achterste voet moet 544 N omlaag gehouden worden.

Klopt dit? Globaal evenwicht: $A_y + B_y = 541{,}6 + (-543{,}8) = -2{,}2\,\mathrm{N}$: precies het tegengestelde van wat wind en gewicht samen verticaal doen, $2 \cdot (123{,}8 - 122{,}6) = 2{,}2\,\mathrm{N}$ omhoog. De staven op druk moeten stijf genoeg zijn tegen knik (hoofdstuk 12).

NASLAG · 5.21

Vectoren en matrices: formules en werkwijze

21/22

Controleer elke berekening: een vectorproduct staat loodrecht op beide factoren, een rotatie bewaart lengtes, een oplossing van $A\vec{x} = \vec{b}$ vul je in ($A\vec{x} - \vec{b} \approx \vec{0}$), een netwerk voldoet aan de vermogensbalans, een vakwerk aan het globale evenwicht.

lengte en eenheidsvector

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \hat{a} = \vec{a}/|\vec{a}|$$

scalair product

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

symbool	betekenis	eenheid
θ	hoek tussen de vectoren	°

vectorproduct

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y;\ a_z b_x - a_x b_z;\ a_x b_y - a_y b_x), \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

arbeid, vermogen, moment

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

symbool	betekenis	eenheid
W	arbeid	J
M	moment	N·m

rotatiematrix

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = R^T$$

matrixproduct

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad (AB)\vec{x} = A(B\vec{x}) \qquad AB \neq BA$$

determinant en inverse (2 × 2)

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

knooppuntenmethode

$$G\vec{v} = \vec{i}, \quad G_{ii} = \sum 1/R, \quad G_{ij} = -1/R_{ij}$$

vakwerk (statisch bepaald)

$$A\vec{s} = -\vec{F} \qquad 2k = m + r$$

symbool	betekenis	eenheid
k, m, r	knopen, staven, reacties	–

stap	Gauss-eliminatie
1	schrijf de aangevulde matrix $(A \mid \vec{b})$
2	kolom k: kies de grootste spil (rijverwisseling), maak nullen onder de spil met $R_i \leftarrow R_i - m\,R_k$

stap	Gauss-eliminatie
3	herhaal tot een driehoeksmatrix; een rij $0 = c \neq 0$: geen oplossing; $0 = 0$: oneindig veel
4	vul van onder naar boven in; controleer door in te vullen
5	kijk naar het conditiegetal: $\log_{10} \kappa$ cijfers gaan verloren

HET GEHEEL · 5.22

Waar vectoren en matrices vandaan komen en waar ze heen gaan

22/22

Vectoren zijn de taal van krachten en bewegingen (K), velden en stromen (L, E) en richtingen in de ruimte (de zon, een robot). Matrices zijn de taal van alles wat uit veel gekoppelde lineaire vergelijkingen bestaat: netwerken, constructies, modellen met veel parameters, data (A). Een computer rekent bijna uitsluitend met matrices.

I6 Goniometrie en vectoren

Vectoren optellen en ontbinden, de hoek van de zon op het paneel.

I9 Arbeid, energie en vermogen

Arbeid als kracht maal weg; hier als scalair product bij elke hoek.

I10 Moment en evenwicht

Moment en evenwicht, de steun van het zonnepaneel: hier als r × F en als vakwerk.

I21 De wetten van Kirchhoff

Knooppunt- en maaswet, de brug, het eerste stelsel met numpy.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Stelsels van differentiaalvergelijkingen: de toestand als vector, impliciete Euler vraagt een matrixstelsel.

E8 Beweging in twee dimensies

Plaats, snelheid en versnelling als vectoren.

E10 Rotatie

Impulsmoment en moment als vectorproducten.

E13 Vakwerken en constructieanalyse

De knooppunten- en snedemethode, en het idee van de eindige-elementenmethode.

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie

De Lorentzkracht q v × B en het veld van een stroomdraad.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

LU-ontbinding, stabiliteit en ijle matrices.

E41 Van data naar model: regressie

De kleinste kwadraten van Gauss: normaalvergelijkingen en conditie.

E43 Neurale netwerken

Een laag van een neuraal netwerk is een matrix maal een vector.

Habitat

Het brein van het station rekent het voedingsnet door als $G\vec{v} = \vec{i}$: het 12,8 V-net van de module met de lampen in een ring (grootste val 1,5 %, zonder ring 3,1 %). Het berekent met scalaire producten hoeveel zon er op elk paneel valt en met matrices waar het robotje is. De steun van het zonnepaneel is als vakwerk nagerekend. Opdracht 5.13 toetst het voedingsnet onder zwaardere omstandigheden; hoofdstuk 13 en 24 bouwen verder op dezelfde matrices.

SAMENVATTING

In het kort

- Een vector in 3D is een rijtje componenten $(a_x;\ a_y;\ a_z)$; je rekent per component. Lengte $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, eenheidsvector $\vec{a}/|\vec{a}|$.
- Scalair product $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$: hoeken, projecties, loodrechte stand, arbeid $\vec{F} \cdot \vec{s}$, zon op een vlak $G\,\hat{s} \cdot \hat{n}$.
- Vectorproduct $\vec{a} \times \vec{b}$: loodrecht op beide, lengte = oppervlakte van het parallellogram, richting volgens de rechterhand; moment $\vec{r} \times \vec{F}$.
- Een matrix is een lineaire transformatie; haar kolommen zijn de beelden van de basisvectoren. $\det$ is de oppervlaktefactor. AB: eerst B, dan A; $AB \neq BA$.
- Gauss: elimineren tot een driehoeksvorm (met rijverwisseling), dan terug invullen; ongeveer $n^3/3$ bewerkingen. In Python: np.linalg.solve.
- Het conditiegetal meet hoe gevoelig een stelsel is: je verliest ongeveer $\log_{10}\kappa$ cijfers. Oorzaak is meestal twee bijna gelijke vergelijkingen.
- Knooppuntenmethode: $G\vec{v} = \vec{i}$, symmetrisch en ijl; vakwerk: $A\vec{s} = -\vec{F}$ met de eenheidsvectoren van de staven als kolommen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

vector
Een grootheid met grootte en richting, genoteerd als rijtje componenten, bv. $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$.

eenheidsvector
Een vector met lengte 1: $\hat{a} = \vec{a}/|\vec{a}|$. Hij geeft alleen een richting.

scalair product
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$: een getal; nul als de vectoren loodrecht staan.

vectorproduct
$\vec{a} \times \vec{b}$: een vector loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (rechterhandregel), met grootte $|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$, de oppervlakte van hun parallellogram.

moment (vector)
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$: de draaiwerking van een kracht om een punt; de richting is de draai-as, het teken de draaizin.

matrix
Een rechthoekige tabel getallen; als transformatie stuurt ze elke vector naar een nieuwe vector, lineair.

determinant
Voor een 2 × 2-matrix $ad - bc$: de factor waarmee oppervlakten veranderen (negatief: gespiegeld). Nul betekent: niet omkeerbaar.

inverse matrix
A^{-1} met $A\,A^{-1} = I$; bestaat alleen als $\det A \neq 0$.

methode van Gauss
Een stelsel oplossen door rijen te combineren tot een driehoeksvorm (eliminatie) en dan van onder naar boven in te vullen.

conditiegetal
Maat voor hoe gevoelig de oplossing van een stelsel is voor kleine fouten in de gegevens; groot betekent slecht geconditioneerd.

knooppuntenmethode

vakwerk

Kirchhoffs knooppuntwet voor elke knoop, met de potentialen als onbekenden: $G\,\vec{v} = \vec{i}$.

Een constructie van rechte staven, in knopen scharnierend verbonden, die alleen trek of druk dragen.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 6

Statistiek en meetonzekerheid

Van ruis op één meting tot een onderbouwd besluit: hoe zeker weet je wat je gemeten hebt?

Elke meting in Habitat heeft ruis, elke proef heeft planten die toevallig groter of kleiner uitvallen. Wie daarover beslist (een alarm, een ijking, een nieuwe lamp), moet het toeval kunnen meten. Je leert het toeval beschrijven met kansverdelingen, uitrekenen hoe precies een gemiddelde is, onzekerheden door formules heen rekenen en toetsen of een verschil echt is. Je leert ook wat een p-waarde níet zegt, en waarom zoveel gepubliceerd onderzoek niet standhield. Aan het eind beslist het brein van het station of de nieuwe groeilamp echt beter is.

10× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 2× verhaal · 1× het geheel · 4× code · ± 12 lestijden

W Wiskundig modelleren · O Onderzoeken en meten · A Data en AI



Twaalf vakjes, twee lamptypes, één vraag: is de nieuwe lamp echt beter, of was het toeval?

Na dit hoofdstuk

- Je kan een kansverdeling (discreet of continu) gebruiken om kansen, verwachting en standaardafwijking te berekenen, en een kans als oppervlakte onder een kansdichtheid lezen.
- Je kan met de normale verdeling kansen berekenen (z-waarde, de 68-95-99,7-regel) en uitleggen waarom een zeldzame gebeurtenis bij veel metingen toch geregeld optreedt.
- Je kan de standaardfout s/√n afleiden uit de variantie van een som, de centrale limietstelling met een simulatie tonen en beslissen hoeveel metingen je middelt.
- Je kan een betrouwbaarheidsinterval met de z- en de t-verdeling berekenen en juist interpreteren.
- Je kan onzekerheden door een formule heen rekenen met partiële afgeleiden (kwadratisch optellen, type A en B, uitgebreide onzekerheid) en het resultaat met een Monte Carlo-simulatie controleren.
- Je kan een Welch-t-toets met de hand en in Python uitvoeren en de p-waarde, de fouten van type I en II en het onderscheidingsvermogen juist uitleggen.
- Je kan uitleggen wat een p-waarde niet zegt, en effectgrootte, meervoudig toetsen, optional stopping, pseudoreplicatie en voorregistratie in een oordeel over onderzoek betrekken.

- Je kan een vergelijkende proef ontwerpen (proefeenheid, steekproefgrootte, loting in blokken, blind meten) en uit de resultaten een onderbouwd besluit nemen.

VERHAAL · 6.1

Een brouwer die Student heette

1/28

In 1899 ging de jonge scheikundige William Sealy Gosset aan de slag bij de brouwerij van Guinness in Dublin. Guinness wilde bier van altijd dezelfde kwaliteit en liet zijn brouwers proeven doen met gerst, hop en het brouwproces. Gosset botste op een probleem dat je in dit hoofdstuk vaak tegenkomt: hij had maar een handvol metingen per proef, soms vier of vijf. De statistiek van zijn tijd was gemaakt voor honderden metingen, en gaf bij zulke kleine reeksen te grote zekerheid.

Gosset studeerde een jaar bij de statisticus Karl Pearson in Londen en rekende uit hoe het gemiddelde van een kleine steekproef schommelt als je de spreiding zelf ook uit die steekproef moet schatten. Hij controleerde zijn formule met een simulatie avant la lettre: de lichaamslengtes van 3000 gedetineerden op kaartjes, geschud en getrokken in 750 groepjes van vier. De verdeling die hij vond, heeft bredere staarten dan de normale: wie weinig metingen heeft, moet voorzichtiger zijn.

Guinness liet zijn medewerkers niet onder eigen naam publiceren. Het artikel *The probable error of a mean* verscheen in 1908 in het tijdschrift *Biometrika*, ondertekend met 'Student'. Ronald Fisher gaf de grootheid later de naam t, en zo heet ze vandaag nog: de **t-verdeling van Student**. Elke keer dat een rekenblad of Python een betrouwbaarheidsinterval uit een handvol metingen berekent, gebruikt het de rekensom van een bierbrouwer.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het brein van het station neemt voortdurend beslissingen op metingen met ruis: gaat het CO_2-alarm af, klopt de ijking van een sensor nog, is de nieuwe groeilamp beter dan de oude? Zonder statistiek beslist het toeval mee zonder dat iemand het merkt. Met statistiek weet je hoe groot de kans is dat je je vergist, en hoeveel metingen je nodig hebt om dat klein te maken. Dezelfde ideeën dragen de Kalman-filter (hoofdstuk 40), de regressie (41) en de evaluatie van een AI-model (42).



Kleine steekproeven van gerst en hop: het probleem waarvoor de t-verdeling werd uitgevonden.

UITLEG · 6.2

Wat je al weet, en de vraag van dit hoofdstuk

wat je al kan	wat nu komt
gemiddelde en standaardafwijking s (delen door $n-1$), systematische en toevallige fouten (hoofdstuk 1 van I)	kansverdelingen als model van het toeval; waarom s zo gedefinieerd is
fouten doorrekenen met de uitersten: de absolute of relatieve fouten optellen (hoofdstuk 1 van I)	kwadratisch optellen met partiële afgeleiden, en controleren met Monte Carlo
controlegroep, loting, blind meten, de vuistregel $n \approx 16\,(s/\delta)^2$ (hoofdstuk 2 van I)	standaardfout, betrouwbaarheidsinterval, toets, p-waarde en waar die 16 vandaan komt
lineariseren $f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x$; ruis op een afgeleide (hoofdstuk 1)	foutenpropagatie als lineariseren; de variantie van een verschil
een kans als oppervlakte onder een kromme (hoofdstuk 3)	kansdichtheid, normale en t-verdeling

In hoofdstuk 1 van Intermediate noteerde je een herhaalde meting als $\bar{x} \pm s$ en telde je fouten op om een veilige bovengrens te krijgen. Dat was eerlijk, maar ruw. Drie vragen bleven open. Hoe precies is een *gemiddelde* van tien metingen, tegenover één meting? Waarom tellen toevallige fouten niet gewoon op? En hoe beslis je of een verschil tussen twee groepen echt is, of toeval?

Dit hoofdstuk beantwoordt ze in vier stappen: het toeval **beschrijven** (kansverdelingen, de normale verdeling), een schatting **omringen** met haar onzekerheid (standaardfout, betrouwbaarheidsinterval, foutenpropagatie), een verschil **toetsen** (t-toets, p-waarde) en **beslissen**, met alles wat daarbij mis kan gaan. De rode draad is een vraag uit de klimaatmodule: een leverancier biedt een groeilamp aan met extra verrood licht en belooft 15 % meer sla. Is de nieuwe lamp echt beter?

> ⚠ **Toevallig en systematisch**
>
> Statistiek gaat over de **toevallige** fout: die verandert van meting tot meting en wordt kleiner als je middelt. Een **systematische** fout (een verkeerd geijkte sensor, een lamp die altijd op de warmste plank staat) verdwijnt niet door te middelen; ze verstopt zich zelfs achter een klein foutje. Tegen systematische fouten helpen ijken, loten en blind meten.

UITLEG · 6.3

Kansverdelingen: het toeval als model

Een grootheid waarvan de waarde van het toeval afhangt, heet een **toevalsvariabele**: de volgende ADC-waarde van een sensor, het versgewicht van een slaplant, de zonnestroom van morgen. Een **kansverdeling** zegt welke waarden mogelijk zijn en hoe waarschijnlijk.

Discreet. Een ADC geeft gehele getallen. De verdeling is een lijst kansen $p_k = P(X = x_k)$ met $\sum p_k = 1$. De **verwachting** en de **variantie** zijn

$$\mu = \sum_k x_k\, p_k, \qquad \sigma^2 = \sum_k (x_k - \mu)^2\, p_k.$$

Continu. Een lengte of een energie kan elke waarde aannemen. De kans op precies 5,000… kWh is nul; zinvol is de kans op een *interval*. Die geeft een **kansdichtheid** $f(x)$: de kans is de oppervlakte eronder (hoofdstuk 3).

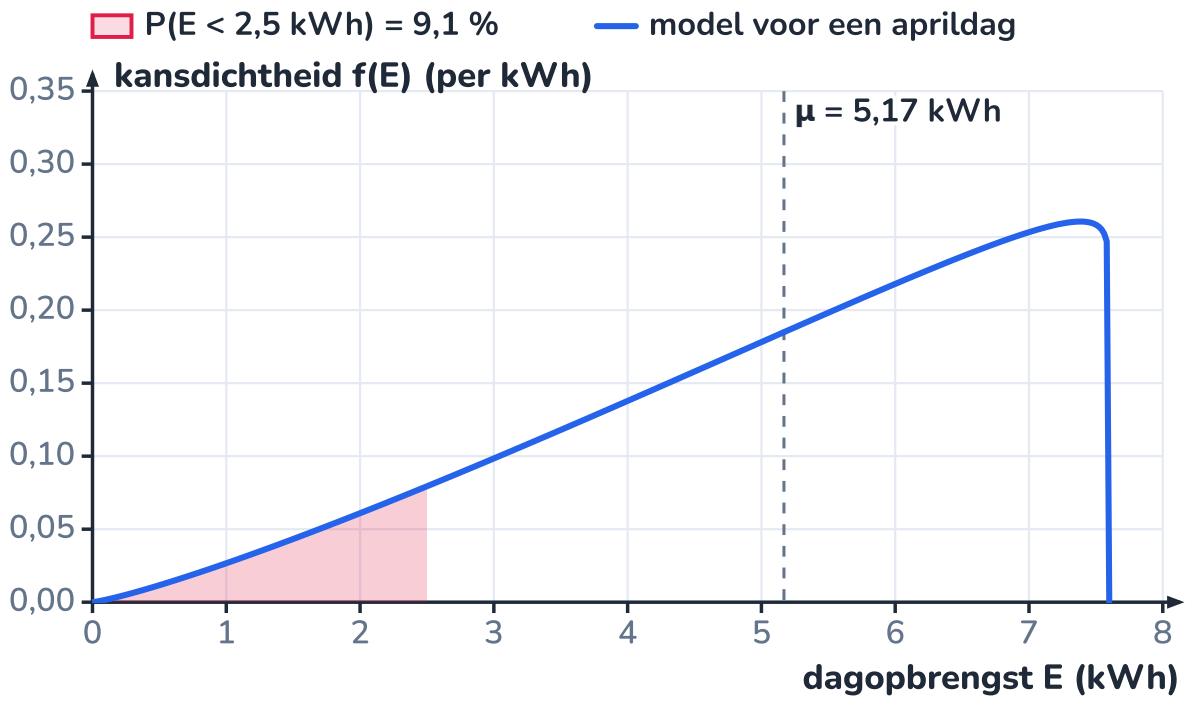
KANS ALS OPPERVLAKTE

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Verwachting $\mu = \int x\, f(x)\,\mathrm{d}x$, variantie $\sigma^2 = \int (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. De eenheid van f is 'per eenheid van x' (hier per kWh), zodat $f\,\mathrm{d}x$ een getal is.

De figuur toont een model voor de dagopbrengst van de 1,40 kWp zonnepanelen van de klimaatmodule in april (hoofdstuk 20 van I). Een heldere dag geeft ongeveer 7,6 kWh, maar de meeste dagen hebben wat wolken, en af en toe is het grauw. De verwachting is 5,17 kWh (het PVGIS-gemiddelde), de standaardafwijking 1,72 kWh. De kans op een slechte dag, minder dan 2,5 kWh, is de gekleurde oppervlakte: 9,1 %, ongeveer drie dagen per maand. De verdeling is **scheef**: de staart naar links is lang, want een dag kan veel slechter maar niet veel beter dan gemiddeld zijn.

> ⓘ **σ en s**
>
> μ en σ zijn eigenschappen van de verdeling (het 'echte' toeval). $\bar{x}$ en s bereken je uit metingen en zijn **schattingen** ervan. Omdat $\bar{x}$ uit dezelfde metingen komt, liggen de metingen er gemiddeld iets dichter bij dan bij μ; delen door $n-1$ in plaats van n maakt s^2 gemiddeld precies gelijk aan σ^2 (hoofdstuk 1 van I).



Een scheve verdeling: veel goede dagen, een lange staart naar grauwe dagen. De gekleurde oppervlakte is de kans op minder dan 2,5 kWh.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.4

De afrondingsfout van een ADC

4/28

Een 10-bits ADC op 5 V rondt elke spanning af op een veelvoud van $q = 5/1024\,\mathrm{V} = 4{,}88\,\mathrm{mV}$. Verandert het signaal genoeg (of is er wat ruis), dan is de afrondingsfout e even waarschijnlijk overal tussen $-q/2$ en $q/2$: een **uniforme verdeling**. Bereken de verwachting en de standaardafwijking van e, en pas toe op de TMP36 van de meetkas (10 mV/°C), op de logger van hoofdstuk 1 (afgerond op 0,1 °C) en op de NTC van het reservoir (0,087 K per ADC-stap bij 20 °C).

GEGEVEN

- $f(e) = 1/q$ voor $-q/2 \le e \le q/2$, anders 0
- $q = 4{,}88\,\mathrm{mV}$

GEVRAAGD

- μ_e en σ_e
- de afrondingsruis van drie sensoren in °C

OPLOSSING

1. Controle: de totale oppervlakte is $\frac{1}{q} \cdot q = 1$. Verwachting: $\mu_e = \int_{-q/2}^{q/2} e\,\frac{1}{q}\,\mathrm{d}e = 0$ (symmetrisch).
2. Variantie: $\sigma_e^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2\,\frac{1}{q}\,\mathrm{d}e = \frac{1}{q}\left[\frac{e^3}{3}\right]_{-q/2}^{q/2} = \frac{1}{q} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{q^3}{8} = \frac{q^2}{12}$, dus $\sigma_e = \dfrac{q}{\sqrt{12}} \approx 0{,}29\,q$.
3. TMP36: één stap is $4{,}88\,\mathrm{mV}/(10\,\mathrm{mV}/^\circ\mathrm{C}) = 0{,}488\,^\circ\mathrm{C}$, dus $\sigma = 0{,}141\,^\circ\mathrm{C}$.
4. Logger op 0,1 °C: $\sigma = 0{,}1/\sqrt{12} = 0{,}029\,^\circ\mathrm{C}$. Samen met ruis van 0,08 °C (hoofdstuk 1): $\sqrt{0{,}08^2 + 0{,}029^2} = 0{,}085\,^\circ\mathrm{C}$. Onafhankelijke fouten tellen kwadratisch op; waarom, zie je verderop.
5. NTC: $\sigma = 0{,}0873/\sqrt{12} = 0{,}025\,\mathrm{K}$: veel kleiner dan de ruis van ongeveer één ADC-stap die je in de proef verderop meet.

ANTWOORD

$\mu_e = 0$ **en** $\sigma_e = q/\sqrt{12}$**. Afrondingsruis: TMP36 0,14 °C, logger 0,029 °C, NTC 0,025 K.**

Klopt dit? Een uniforme verdeling op een interval van breedte w heeft altijd $\sigma = w/\sqrt{12}$; een tolerantie $\pm a$ (breedte $2a$) geeft dus $a/\sqrt{3}$. Die regel gebruik je verderop voor een maatbeker en een weerstand. Let op: is het signaal constant en ruisvrij, dan is de afrondingsfout elke keer *dezelfde*. Dan is ze systematisch en helpt middelen niet; een beetje ruis maakt haar toevallig.

UITLEG · 6.5

De normale verdeling

Tel veel kleine, onafhankelijke toevallige effecten op (thermische ruis, een trillende referentiespanning, een plant die net iets meer licht kreeg) en je krijgt bijna altijd dezelfde klokvorm. Abraham de Moivre vond ze in 1733 als benadering voor het aantal kop bij veel muntworpen, Carl Friedrich Gauss gebruikte ze in 1809 voor meetfouten in de sterrenkunde: de **normale verdeling**.

NORMALE VERDELING EN Z-WAARDE

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Twee parameters: μ (plaats) en σ (breedte). De **z-waarde** telt hoeveel standaardafwijkingen x van μ ligt; z is standaardnormaal ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).

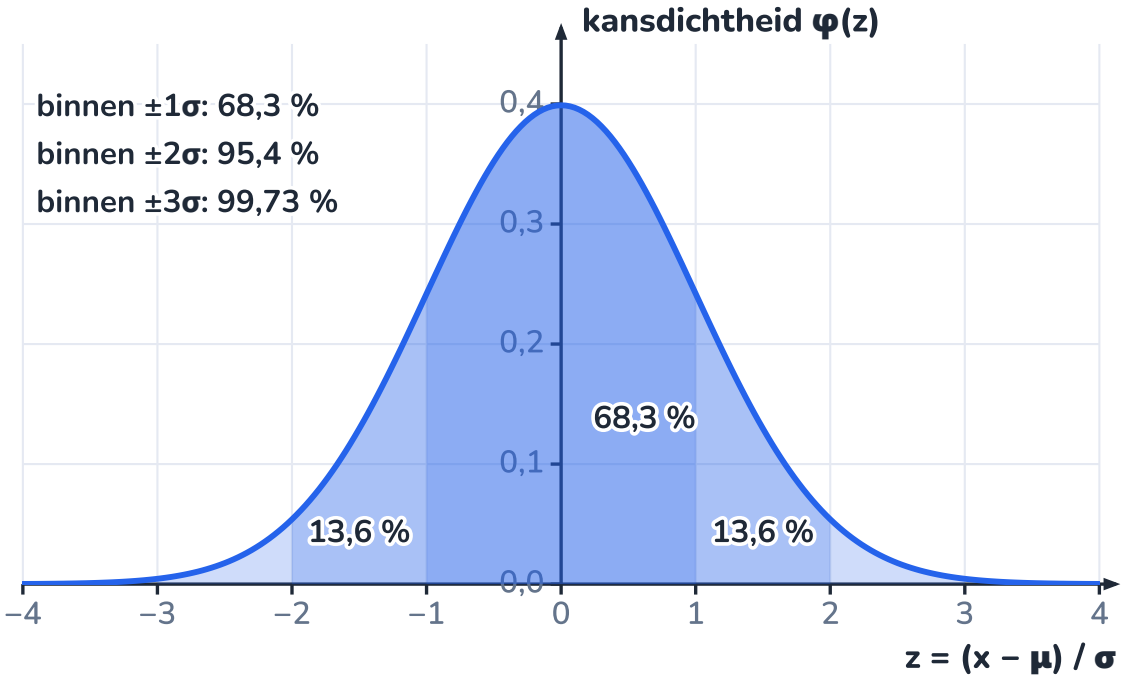
De functie $\mathrm{e}^{-z^2/2}$ heeft geen primitieve in gewone functies (hoofdstuk 3). De kans $\Phi(z) = P(Z \le z)$ haal je uit een tabel, een rekenblad (`NORM.S.DIST`) of de foutfunctie: $\Phi(z) = \tfrac{1}{2}\big(1 + \mathrm{erf}(z/\sqrt{2})\big)$, in Python `math.erf`. Zo volgt de **68-95-99,7-regel**:

$$P(|Z| \le 1) = 0{,}6827, \quad P(|Z| \le 2) = 0{,}9545, \quad P(|Z| \le 3) = 0{,}9973.$$

Handige grenzen: 90 % ligt binnen $\pm 1{,}645\,\sigma$, 95 % binnen $\pm 1{,}960\,\sigma$ en 99 % binnen $\pm 2{,}576\,\sigma$. Buiten $\pm 4\sigma$ valt nog 6,3 op de 100 000.

Alles is normaal verdeeld

Niet de zonnestroom van één dag (scheef, begrensd), niet de tijd tot een pomp faalt, niet een reeks met uitschieters. De normale verdeling is een goed model voor een *som of gemiddelde* van veel onafhankelijke bijdragen, en daardoor voor veel meetruis. Kijk altijd eerst naar een histogram voor je met $\pm 2\sigma$ rekent.



Binnen één σ van het gemiddelde valt 68,3 %, binnen twee σ 95,4 %, binnen drie σ 99,73 %; de laatste 0,27 % zit in de twee staarten.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.6

Waarom gaat het CO_2-alarm elke dag vals af?

6/28

In de woonmodule meet een CO_2-sensor om de 2 s (het ritme van hoofdstuk 29 van I). De waarschuwing staat op 1000 ppm (hoofdstuk 14 van I). Op een rustige dag is de echte waarde 900 ppm; de sensor ruist met $\sigma = 25\,\text{ppm}$ per meting (rekenwaarde). Toch klagen de bewoners over een vals alarm per dag. Verklaar dat, en vergelijk twee remedies: het gemiddelde van 30 metingen (één minuut) of 'drie metingen op rij boven de grens'.

GEGEVEN

- $\mu = 900\,\text{ppm}$, $\sigma = 25\,\text{ppm}$, grens $1000\,\text{ppm}$
- $43\,200$ metingen per dag

GEVRAAGD

- kans op een vals alarm per meting en per dag
- hetzelfde met de twee remedies

OPLOSSING

1. $z = \dfrac{1000 - 900}{25} = 4{,}0$: de grens ligt vier standaardafwijkingen boven de echte waarde. $P(Z > 4) = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$.
2. Per dag: $43\,200 \cdot 3{,}17 \cdot 10^{-5} = 1{,}37$ valse alarmen. Een kans van 1 op 30 000 per meting, maar met 43 200 metingen per dag gebeurt het gemiddeld meer dan eens per dag.
3. Minuutgemiddelde: $\sigma_{\bar{x}} = 25/\sqrt{30} = 4{,}56\,\text{ppm}$ (standaardfout, verderop afgeleid). Nu is $z = 100/4{,}56 = 21{,}9$ en $P \approx 10^{-106}$: nooit.
4. Drie op rij (als de metingen onafhankelijk zijn): $P^3 = (3{,}17 \cdot 10^{-5})^3 \approx 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ per meting: ook praktisch nooit, en het alarm reageert al na 6 s.
5. Een echte stijging naar 1050 ppm wordt met het minuutgemiddelde binnen een minuut gezien, met drie-op-rij bijna meteen. Het minuutgemiddelde is ook eerlijker bij een waarde vlak onder de grens: bij 980 ppm zouden losse metingen het alarm nog ongeveer 9152 keer per dag laten afgaan, het minuutgemiddelde bijna nooit.

ANTWOORD

Met losse metingen: ongeveer 1,4 vals alarm per dag. Met een minuutgemiddelde of drie-op-rij praktisch nul. Het station waarschuwt voortaan op het minuutgemiddelde; het alarm van 5000 ppm blijft op losse metingen (veiligheid gaat voor rust).

Klopt dit? Zeldzaam maal vaak is geregeld: een kans van $3 \cdot 10^{-5}$ lijkt verwaarloosbaar tot je ze 43 200 keer per dag neemt. De berekening veronderstelt onafhankelijke, normale ruis. Een sensor die intern filtert, geeft opeenvolgende metingen die op elkaar lijken; dan wint middelen minder dan $\sqrt{30}$. Controleer dat met een opgenomen reeks (hoofdstuk 21 en 40).

PROEF · 6.7

Hoe ruist een sensor?

7/28

ONDERZOEKSVRAAG

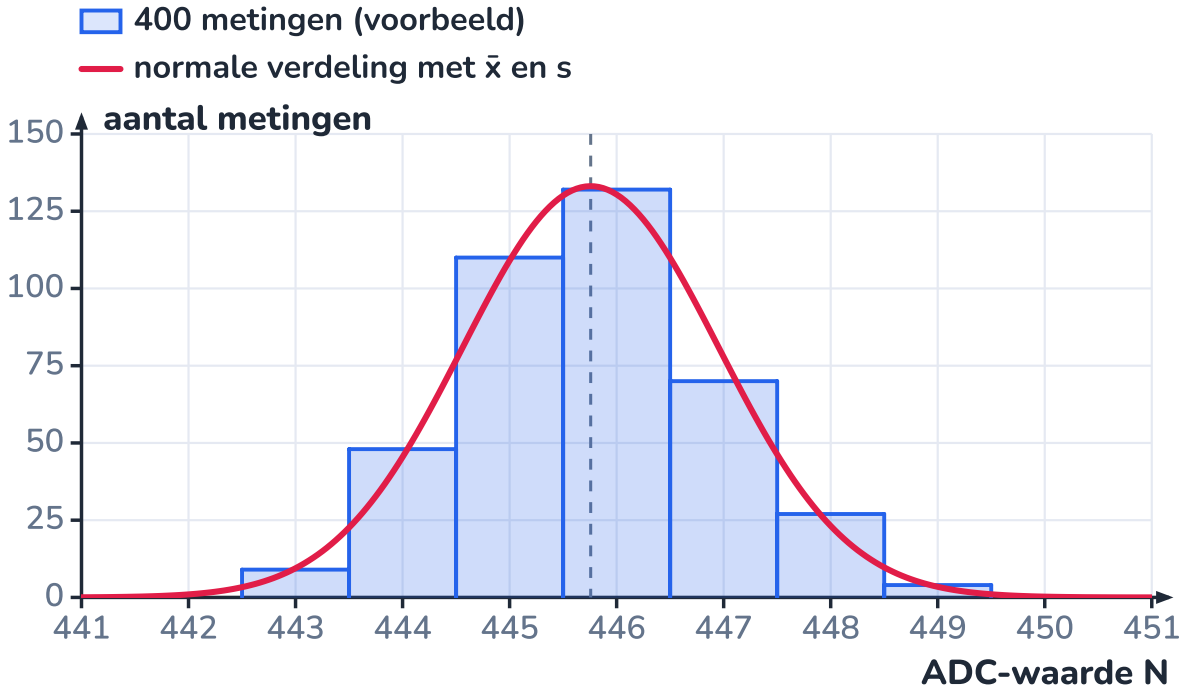
Is de ruis op de NTC-meting van het reservoir normaal verdeeld, en hoe groot is ze in kelvin?

MATERIAAL

- Arduino met de NTC-deler van het reservoir (10 kΩ, A0, hoofdstuk 22 van I)
- thermosfles met water op kamertemperatuur en een referentiethermometer
- computer met Python (seriële poort uitlezen, hoofdstuk 30 van I)

Veiligheid

Alleen 5 V; houd de Arduino en de computer uit de buurt van het water.



Elke staaf is één ADC-waarde. De normale kromme met hetzelfde gemiddelde en dezelfde s past goed: de ruis is ongeveer één ADC-stap, 0,1 K.

WERKWIJZE

1. Hang de NTC en de referentiethermometer naast elkaar in het water. Sluit de thermosfles en wacht tien minuten.
2. Lees 400 keer analogRead(A0), één keer per seconde, en stuur elke waarde naar de computer.
3. Noteer de referentietemperatuur bij het begin en het eind: blijft ze gelijk, dan is elke spreiding ruis van de meting.
4. Tel hoe vaak elke ADC-waarde voorkomt (elke waarde is een klasse) en teken het histogram.
5. Bereken x̄ en s, teken de normale verdeling met die parameters over het histogram, en tel hoeveel metingen binnen x̄ ± s en x̄ ± 2s liggen.

WAARNEMING

ADC-waarde	443	444	445	446	447	448	449
aantal	9	48	110	132	70	27	
normaal verwacht	10,6	46,9	107,1	126,9	77,9	24,8	

Voorbeeldmeting (water op 20,0 °C, begin en eind gelijk): $\bar{N} = 445{,}76$, $s = 1{,}20$ ADC-stap. Binnen $\bar{N} \pm s$ liggen 60,5 % van de metingen, binnen $\pm 2s$ 96,8 %. Eerste 200 metingen: $445{,}76$, laatste 200: $445{,}75$.

VERKLARING

Het histogram volgt de normale kromme goed: de ruis is de som van veel kleine bijdragen (thermische ruis van weerstanden, schommelingen van de 5 V-referentie, storing). Dat 'binnen $\pm s$' 60 % geeft in plaats van 68 %, komt door de gehele getallen: de grenzen $\bar{N} \pm s$ vallen tussen twee klassen in, zodat een klasse helemaal mee- of niet meetelt. Vergelijk daarom liever klasse per klasse met de verwachte aantallen in de tabel.

Omrekenen: rond 20 °C is één ADC-stap $0{,}0873\,\mathrm{K}$ (de helling van $T(N)$, hoofdstuk 1). De ruis op één meting is dus $1{,}20 \cdot 0{,}0873 = 0{,}105\,\mathrm{K}$, en het gemiddelde van 400 metingen is $20{,}00$ °C. De twee helften verschillen maar 0,00 stap: geen drift van betekenis.

UITLEG · 6.8

Het gemiddelde van n metingen: de standaardfout

8/28

Waarom is een gemiddelde preciezer dan één meting? Voor twee onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y is $E[X+Y] = \mu_X + \mu_Y$ en

$$\mathrm{Var}(X+Y) = E\big[(X-\mu_X+Y-\mu_Y)^2\big] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\,E\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big].$$

De laatste term, de **covariantie**, is nul als X en Y onafhankelijk zijn: een positieve afwijking van X komt even vaak samen met een positieve als met een negatieve afwijking van Y. Dus **varianties tellen op**, niet standaardafwijkingen. Voor een verschil geldt hetzelfde: $\mathrm{Var}(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ (daarom was de ruis op een centrale differentie in hoofdstuk 1 $\sqrt{2}\,\sigma$). Met $\mathrm{Var}(cX) = c^2\sigma^2$ volgt voor het gemiddelde van n onafhankelijke metingen met dezelfde σ:

STANDAARDFOUT VAN HET GEMIDDELDE

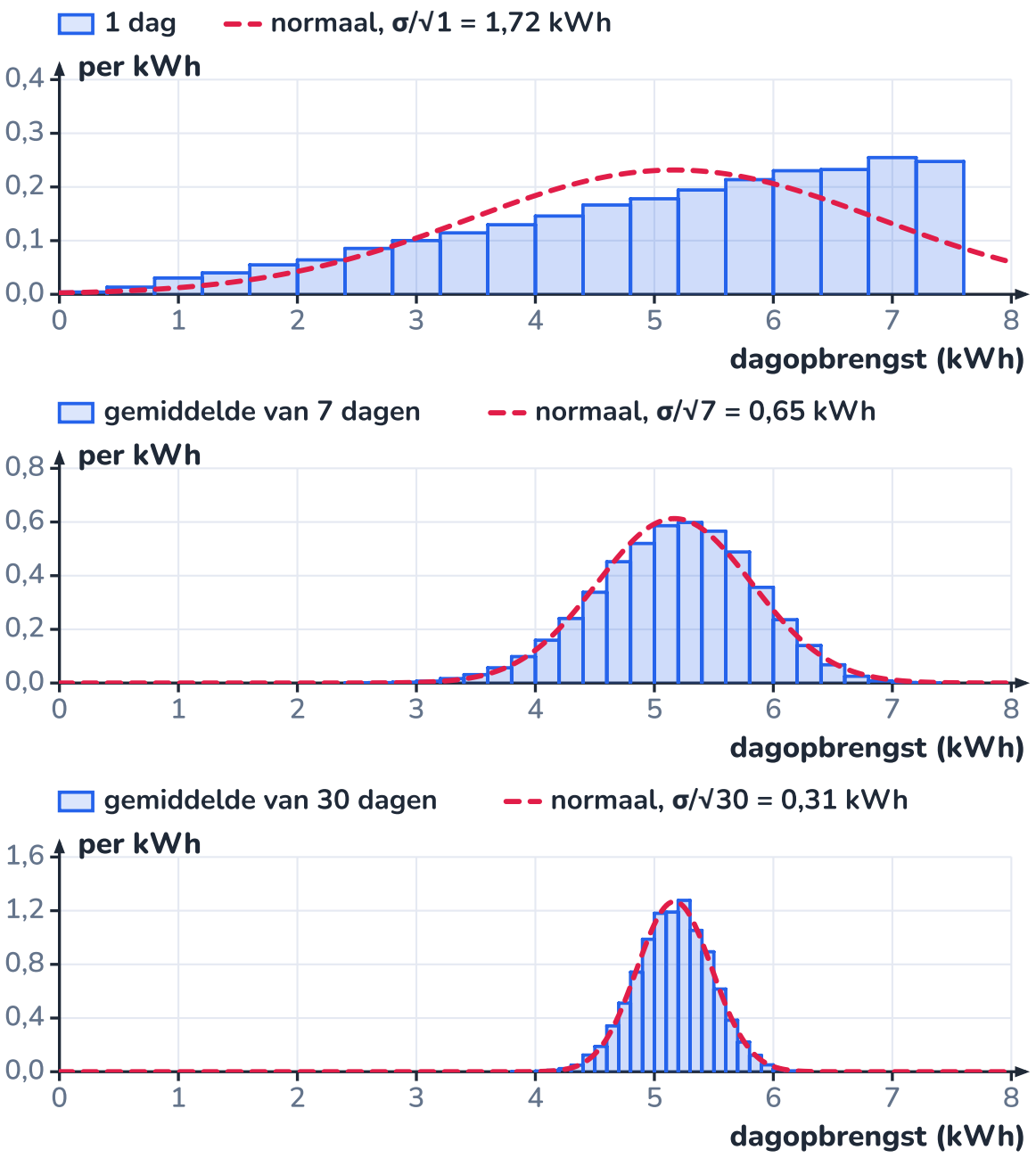
$$\mathrm{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \cdot n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Vier keer zoveel metingen maakt het gemiddelde twee keer preciezer; honderd keer zoveel, tien keer. s zegt hoe ver één meting van μ valt, $s/\sqrt{n}$ hoe ver het gemiddelde.

Er is meer: het gemiddelde wordt ook steeds **normaler** verdeeld, welke verdeling de metingen zelf ook hebben (als ze maar een eindige σ hebben). Dat is de **centrale limietstelling**. De figuur toont het met het scheve model van de zonnestroom in april: één dag is scheef en breed; het gemiddelde van een week is smaller ($\sigma/\sqrt{7}$) en bijna klokvormig; het gemiddelde van een maand is een smalle klok. Daarom werkt de normale verdeling zo vaak: veel meetwaarden zijn zelf al een gemiddelde of een som.

⚠ **Onafhankelijk is een voorwaarde**

Het weer van vandaag lijkt op dat van gisteren: grauwe dagen komen in reeksen. Echte weekgemiddelden spreiden daarom meer dan $\sigma/\sqrt{7}$, en een batterij (hoofdstuk 20 van I) dimensioneer je op een slechte *reeks* dagen. Hetzelfde geldt voor een sensor die langzaam verloopt: middelen verkleint de ruis, niet de drift.



Histogrammen van 20 000 gesimuleerde dagen, weken en maanden (model); de stippellijn is de normale verdeling met σ/√n. Met elke factor vier in n halveert de breedte.

CODE · 6.9

De centrale limietstelling in numpy

9/28

Een simulatie maakt de stelling tastbaar. Het programma trekt 20 000 maanden van 30 dagen uit het model van de zonnestroom en berekent voor $n = 1, 2, 7$ en 30 het gemiddelde van de eerste n dagen. Het vergelijkt de spreiding van die gemiddelden met $\sigma/\sqrt{n}$ en schat de kans op een slechte week (gemiddeld minder dan 4 kWh per dag).

Python **clt.py** 15 regels

```python
# clt.py - hoe goed voorspelt het gemiddelde van n dagen? (model voor de zonnestroom in april)
import numpy as np

rng = np.random.default_rng(1)
EMAX, A, B = 7.6, 2.2, 1.035              # heldere dag 7,6 kWh; vorm van de verdeling (scheef)
```

```python
mu = EMAX * A / (A + B)                  # verwachting: 5,17 kWh (PVGIS voor april)
sigma = EMAX * np.sqrt(A * B / ((A + B) ** 2 * (A + B + 1)))
dagen = EMAX * rng.beta(A, B, size=(20000, 30))   # 20 000 keer een maand van 30 dagen

print("mu = %.2f kWh, sigma = %.2f kWh" % (mu, sigma))
print(" n   gemiddelde   s van de gemiddelden   sigma/sqrt(n)   P(gem < 4 kWh)")
for n in (1, 2, 7, 30):
    gem = dagen[:, :n].mean(axis=1)       # het gemiddelde van de eerste n dagen van elke maand
    print("%2d   %8.3f   %14.3f   %18.3f   %11.4f"
          % (n, gem.mean(), gem.std(ddof=1), sigma / np.sqrt(n), np.mean(gem < 4.0)))
```

Uitvoer:

```
mu = 5.17 kWh, sigma = 1.72 kWh
 n   gemiddelde   s van de gemiddelden   sigma/sqrt(n)   P(gem < 4 kWh)
 1      5.152              1.720               1.723        0.2547
 2      5.159              1.221               1.218        0.1757
 7      5.168              0.651               0.651        0.0431
30      5.164              0.316               0.315        0.0001
```

De spreiding van de gemiddelden volgt $\sigma/\sqrt{n}$ tot op enkele duizendsten. De staart is gevoeliger: volgens de normale verdeling heeft een week $3{,}6\,\%$ kans om onder 4 kWh per dag te blijven, in de simulatie is dat $4{,}3\,\%$. Bij $n = 7$ zit er nog scheefheid in het gemiddelde: de lange linkerstaart van één dag sijpelt door. Voor het midden van een verdeling is de normale benadering snel goed, voor de staarten (en daar gaan alarmen en tekorten over) pas bij grotere n.

Simuleren als controle

`rng = np.random.default_rng(seed)` geeft een reproduceerbare reeks: met dezelfde seed krijg je dezelfde getallen, zodat iemand anders je resultaat kan nagaan. Een formule die je afleidt, controleer je voortaan zo: simuleer het experiment duizenden keren en vergelijk.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.10

Hoeveel metingen middelt de klimaatmodule?

10/28

De Mega leest de NTC van het reservoir om de 2 s. Eén meting ruist 0,10 K (de proef). Voor de warmtebalans van het reservoir wil het brein de temperatuur met een standaardfout van 0,02 K. Hoeveel ADC-metingen moet de Mega per keer middelen, hoe lang duurt dat, en wat is de grens van die aanpak?

GEGEVEN

- $\sigma_1 = 0{,}105\,\mathrm{K}$ per meting
- doel $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}02\,\mathrm{K}$
- analogRead duurt ongeveer 0,11 ms

GEVRAAGD

- n
- de meettijd
- wat middelen niet oplost

OPLOSSING

1. $\sigma_1/\sqrt{n} \le 0{,}02 \Rightarrow n \ge (0{,}105/0{,}02)^2 = 27{,}4$, dus $n = 28$ metingen.
2. Meettijd: $28 \cdot 0{,}11\,\mathrm{ms} \approx 3{,}1\,\mathrm{ms}$, niets tegenover de 2 s tussen twee rondes. Zo werkte hoofdstuk 25 van I ook: 100 metingen in 20,4 ms tegen de PWM-flikkering.

3 Periodieke storing (50 Hz van het net, 490 Hz van de PWM) is geen onafhankelijke ruis: middel over een hele periode (20 ms voor 50 Hz), dan valt ze weg; middel je over een willekeurige halve periode, dan blijft er een rest die $\sqrt{n}$ niet wegneemt.

4 De ijking: de geijkte R_{25} en B hebben elk een onzekerheid die voor élke meting dezelfde is (verderop: samen ongeveer 0,07 K). Die blijft, hoe vaak je ook middelt.

ANTWOORD

Middel 28 metingen (een paar milliseconden). Veranderingen van de temperatuur ken je dan tot op 0,02 K; de absolute temperatuur tot op ongeveer 0,07 K, door de ijking.

Klopt dit? Uit de proef: 400 metingen gaven een standaardfout van $1{,}20/\sqrt{400} = 0{,}060$ stap $= 0{,}0052\,\mathrm{K}$, precies wat $\sigma/\sqrt{n}$ voorspelt. Wie meer wil, verbetert eerst de grootste bron: daar gaat foutenpropagatie verderop over.

UITLEG · 6.11

Betrouwbaarheidsintervallen

Een gemiddelde zonder onzekerheid is een half antwoord. Is σ bekend, dan ligt $\bar{x}$ in 95 % van de proeven binnen $1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}$ van μ. Draai de ongelijkheid om:

95 %-BETROUWBAARHEIDSINTERVAL (Σ GEKEND)

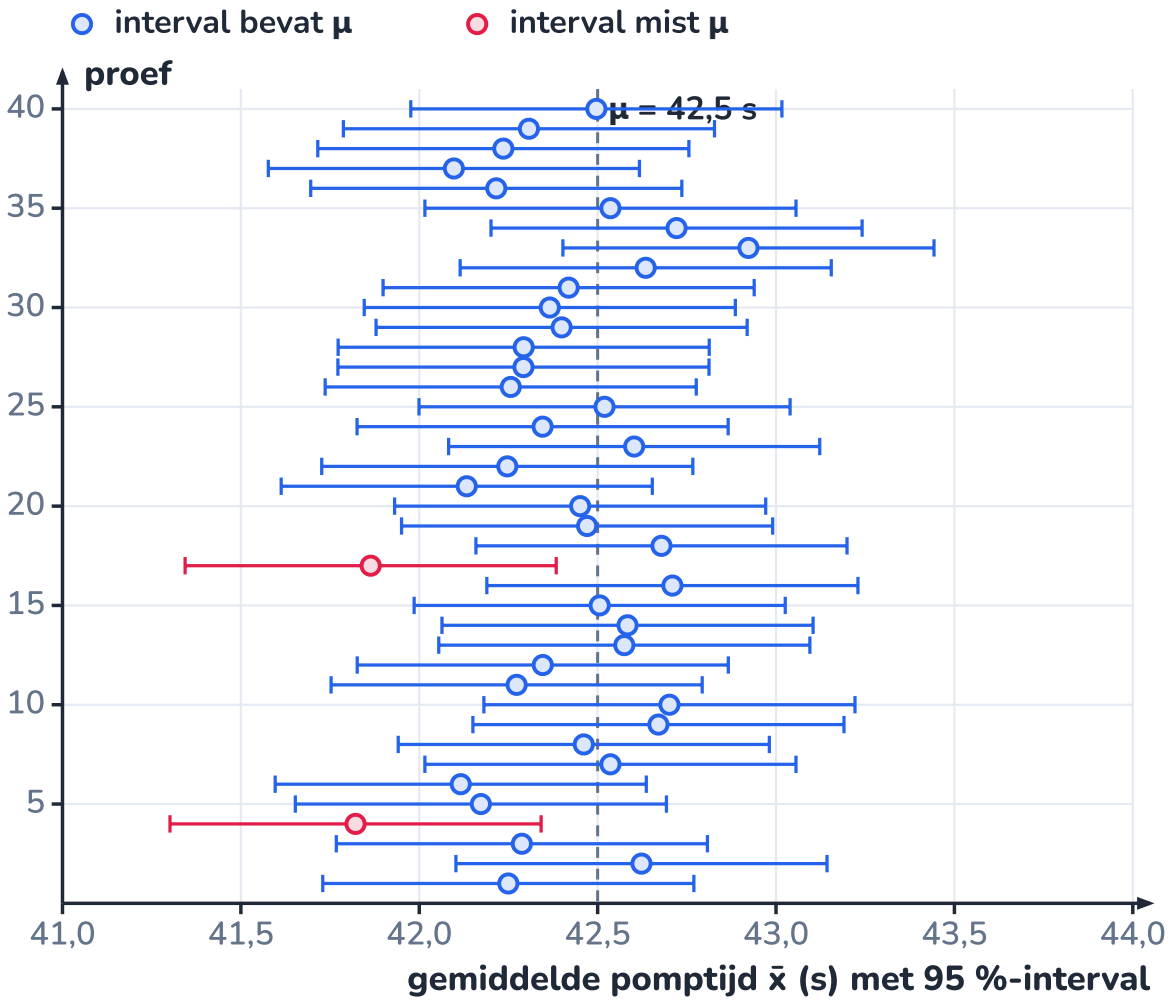
$$\bar{x} - 1{,}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\le\; \mu \;\le\; \bar{x} + 1{,}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Voor 90 % of 99 %: 1,645 of 2,576 in plaats van 1,96. Een smaller interval vraagt meer metingen: halveren kost een factor vier.

Wat betekent '95 %'? Niet dat μ met 95 % kans in *dit* interval ligt: μ is een vast getal, het ligt erin of niet. De 95 % gaat over de **methode**: herhaal de proef vaak, en 95 % van de intervallen die je zo maakt, bevat μ. De figuur simuleert dat met het pompje uit hoofdstuk 1 van I: veertig klassen meten elk zes keer de vultijd ($\mu = 42{,}5\,\mathrm{s}$, $\sigma = 0{,}65\,\mathrm{s}$). Elk interval is $\bar{x} \pm 0{,}52\,\mathrm{s}$. 38 van de 40 bevatten μ, 2 missen: gemiddeld verwacht je er twee.

Overlappende intervallen betekenen 'geen verschil'

Liggen de 95 %-intervallen van twee groepen uit elkaar, dan is het verschil zeker significant. Overlappen ze een beetje, dan kan het verschil toch significant zijn: het interval van een *verschil* is $\sqrt{2}$ keer (niet 2 keer) zo breed als dat van één groep, omdat varianties optellen. Bereken bij een vergelijking altijd het interval van het verschil.



Elke lijn is het 95 %-interval van een proef met zes metingen. De methode vangt μ in ongeveer 38 van de 40 proeven; welke twee missen, weet je vooraf niet.

UITLEG · 6.12

De t-verdeling: weinig metingen, meer voorzichtigheid

12/28

Meestal ken je σ niet en schat je ze met s uit dezelfde metingen. Bij weinig metingen is s zelf onzeker: soms toevallig te klein, en dan wordt het interval te smal. Gosset toonde dat $T = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ bij normale metingen een **t-verdeling** volgt met $\nu = n - 1$ **vrijheidsgraden** (van de n afwijkingen $x_i - \bar{x}$ zijn er maar $n - 1$ vrij, want hun som is nul).

T-VERDELING EN HET INTERVAL MET S

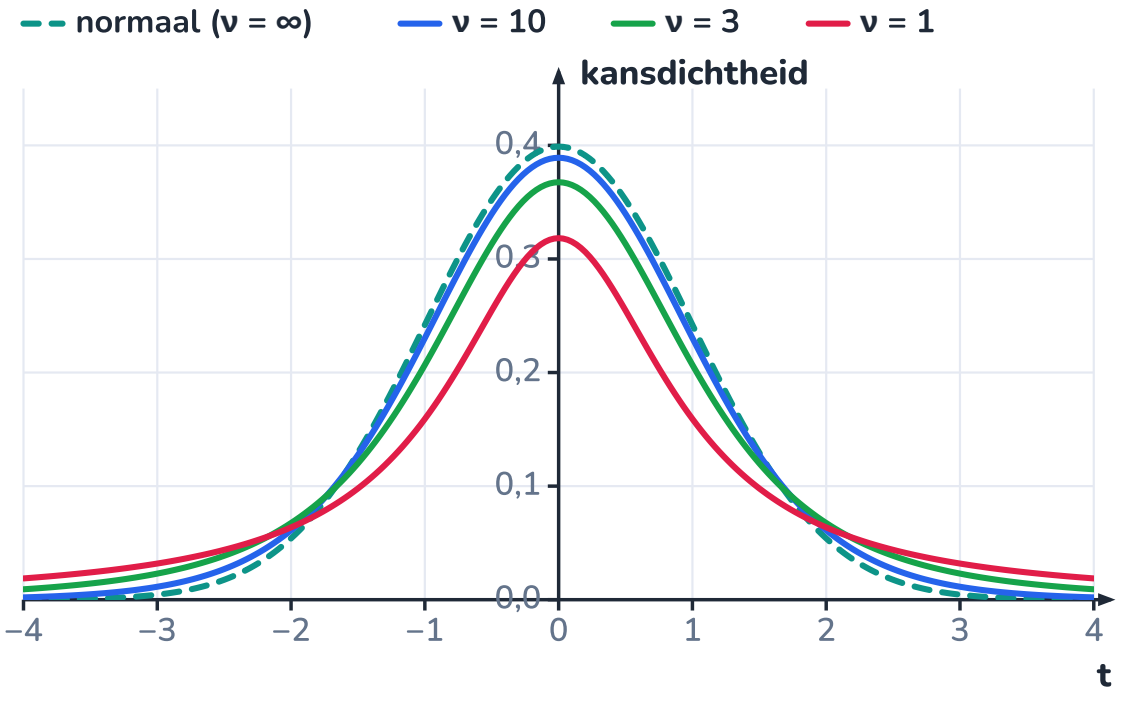
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \bar{x} \pm t^*_\nu \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Γ is de gammafunctie ($\Gamma(k) = (k-1)!$ voor gehele k). Voor grote ν nadert f de normale verdeling en t^* de waarde 1,96.

ν	90 % ($t_{0,95}$)	95 % ($t_{0,975}$)	99 % ($t_{0,995}$)
1	6,314	12,706	63,657
2	2,920	4,303	9,925

ν	90 % ($t_{0,95}$)	95 % ($t_{0,975}$)	99 % ($t_{0,995}$)
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
8	1,860	2,306	3,355
10	1,812	2,228	3,169
15	1,753	2,131	2,947
20	1,725	2,086	2,845
30	1,697	2,042	2,750
60	1,671	2,000	2,660
∞ (normaal, z)	1,645	1,960	2,576

Met twee metingen ($\nu = 1$) moet je $12{,}7$ keer de standaardfout nemen in plaats van 1,96 keer; met drie ($\nu = 2$) nog 4,3 keer. Vanaf ongeveer 30 metingen maakt het weinig uit. Een rekenblad geeft t^* met `T.INV.2T(0,05; ν)`, Python met `scipy.stats.t.ppf(0.975, ν)`.



Hoe minder vrijheidsgraden, hoe meer kans in de staarten; bij ν = 10 ligt de t-verdeling al dicht bij de normale.

CODE · 6.13

De t-waarden zelf berekenen

13/28

Een tabel geloof je beter als je hem zelf kan maken. De kritieke waarde t^* voor 95 % is de t waarvoor de oppervlakte links 0,975 is. Het programma integreert de dichtheid met de regel van Simpson (een verfijning van de trapeziumregel

uit hoofdstuk 3) en zoekt t^* door bisectie: halveer telkens het interval waarin de oplossing ligt (hoofdstuk 36 werkt dat uit).

Python **twaarden.py** 36 regels

```python
# twaarden.py - de kritieke t-waarden zelf berekenen, en controleren met scipy
import math
from scipy import stats


def t_dichtheid(t, nu):
    """Kansdichtheid van Student-t met nu vrijheidsgraden."""
    c = math.exp(math.lgamma((nu + 1) / 2) - math.lgamma(nu / 2)) / math.sqrt(nu * math.pi)
    return c * (1 + t * t / nu) ** (-(nu + 1) / 2)


def kans_tot(t, nu, n=2000):
    """P(T <= t) voor t >= 0: de helft plus de oppervlakte van 0 tot t (regel van Simpson, n even)."""
    h = t / n
    som = t_dichtheid(0, nu) + t_dichtheid(t, nu)
    for i in range(1, n):
        som += (4 if i % 2 else 2) * t_dichtheid(i * h, nu)
    return 0.5 + som * h / 3


def t_kritiek(p, nu):
    """Zoek t met P(T <= t) = p door bisectie (p > 0,5)."""
    a, b = 0.0, 100.0
    for _ in range(60):
        m = (a + b) / 2
        if kans_tot(m, nu) < p:
            a = m
        else:
            b = m
    return (a + b) / 2


print(" nu   t(95 %)  scipy     verschil")
for nu in (1, 2, 5, 10, 30):
    eigen = t_kritiek(0.975, nu)
    print("%3d   %7.4f  %7.4f   %.1e" % (nu, eigen, stats.t.ppf(0.975, nu), abs(eigen - stats.t.ppf(0.975, nu))))
```

Uitvoer:

```
 nu   t(95 %)  scipy     verschil
  1   12.7062  12.7062   2.6e-10
  2    4.3027   4.3027   5.3e-11
  5    2.5706   2.5706   2.1e-14
 10    2.2281   2.2281   2.1e-11
 30    2.0423   2.0423   6.6e-14
```

Eigen rekenwerk en scipy verschillen pas in de achtste decimaal of verder: de tabel klopt. Twee details. `math.lgamma` geeft de logaritme van Γ; zo loopt de berekening voor grote ν niet over. En voor $\nu = 1$ zijn de staarten zo zwaar dat de bisectie tot $t = 12{,}7$ moet gaan: daarom begint ze met het interval $[0, 100]$.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.14

De groeiproef van Fundamental: hoe zeker zijn drie bakjes?

In de groeiproef van hoofdstuk 27 van F woog de klas per bakje: bij 100 % licht 98, 106 en 101 g, bij 70 % licht 74, 69 en 78 g. Bereken voor beide groepen het 95 %-betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde. Wat zou een naïeve berekening met 1,96 geven?

GEGEVEN

- 100 %: 98, 106, 101 g
- 70 %: 74, 69, 78 g
- $t_2^* = 4{,}303$

GEVRAAGD

- $\bar{x} \pm t^* \, s/\sqrt{3}$ voor beide groepen

OPLOSSING

1. 100 %: $\bar{x} = 101{,}67$ g; afwijkingen $-3{,}67$, $4{,}33$, $-0{,}67$; $s = \sqrt{(13{,}44 + 18{,}78 + 0{,}44)/2} = 4{,}04$ g.
2. Standaardfout $4{,}04/\sqrt{3} = 2{,}33$ g; halve breedte $4{,}303 \cdot 2{,}33 = 10{,}0$ g: interval $[91{,}6;\ 111{,}7]$ g.
3. 70 %: $\bar{x} = 73{,}67$ g, $s = 4{,}51$ g, halve breedte $11{,}2$ g: $[62{,}5;\ 84{,}9]$ g.
4. Met 1,96 in plaats van 4,303 zou het eerste interval maar $\pm 4{,}6$ g zijn: meer dan twee keer te smal. Met drie metingen is de schatting s zelf te onzeker om er 1,96 op te bouwen.

ANTWOORD

100 % licht: $(101{,}7 \pm 10{,}0)$ g**; 70 % licht:** $(73{,}7 \pm 11{,}2)$ g **(95 %). De intervallen liggen ver uit elkaar: het verschil is geen toeval. Dat toets je verderop.**

Klopt dit? Het interval is breed (± 10 g op 100 g) omdat $n = 3$ klein is, niet omdat de bakjes slordig gewogen zijn: s is maar 4 g. Met zes bakjes per groep zou $t^* = 2{,}571$ en $\sqrt{n} = 2{,}45$ het interval ruim twee keer smaller maken.

UITLEG · 6.15

Foutenpropagatie: onzekerheden door een formule heen

Een resultaat $y = f(x_1, x_2, \dots)$ uit gemeten grootheden, elk met een **standaardonzekerheid** $u(x_i)$ (een standaardafwijking). Lineariseer (hoofdstuk 1) met partiële afgeleiden (hoofdstuk 2):

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots$$

Dat is een som van onafhankelijke toevalsgrootheden, elk met een factor. Varianties tellen op, dus:

FOUTENPROPAGATIE (ONAFHANKELIJKE GROOTHEDEN)

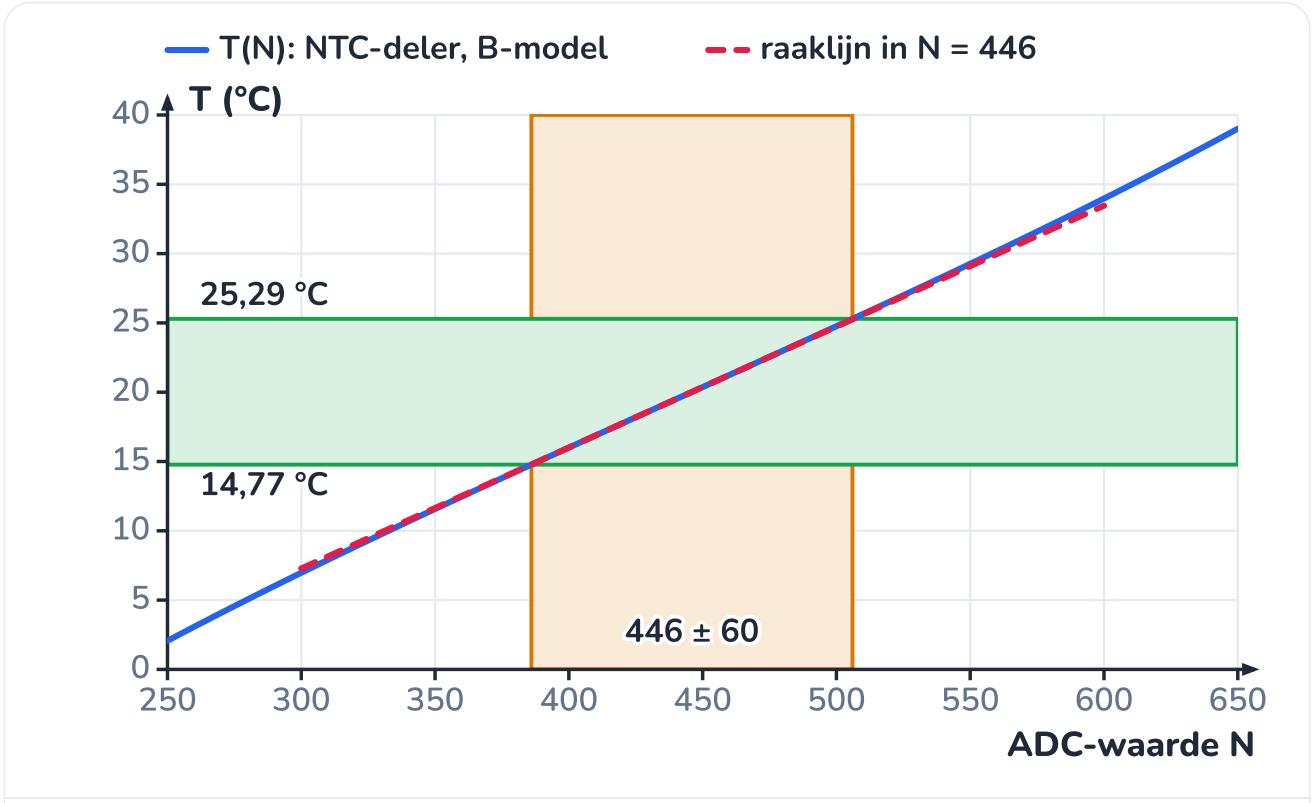
$$u(y)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2$$

Som of verschil: $u^2 = u_1^2 + u_2^2$. Product of quotiënt: $\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \sum \left(\frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2$. Macht x^n: relatieve onzekerheid maal $|n|$.

In hoofdstuk 1 van I telde je de relatieve fouten van het reservoir gewoon op: 0,24 + 0,35 + 1,32 = 1,9 %. Dat is de bovengrens, als alle fouten tegelijk maximaal en in dezelfde richting uitvallen. Kwadratisch: $\sqrt{0{,}24^2 + 0{,}35^2 + 1{,}32^2} = 1{,}38\,\%$, dus $V = (18{,}19 \pm 0{,}25)\,\mathrm{L}$. De grootste bron domineert: de hoogte alleen al geeft 1,32 %.

Waar komen de $u(x_i)$ vandaan? De GUM, de internationale gids voor meetonzekerheid, onderscheidt **type A** (statistisch, uit een reeks: $s/\sqrt{n}$) en **type B** (uit andere kennis): een tolerantie $\pm a$ zonder verdere informatie wordt een uniforme verdeling, $u = a/\sqrt{3}$; een resolutie q geeft $q/\sqrt{12}$; een ijkcertificaat geeft u meestal zelf. Het eindresultaat noteer je met een **uitgebreide onzekerheid** $U = k\,u$, met $k = 2$ voor ongeveer 95 %.

> ⚠ **Afhankelijke fouten tellen lineair**
>
> Meet je lengte én breedte met dezelfde rolmeter die 0,3 % te lang is, dan zijn die fouten niet onafhankelijk: ze gaan samen. Dan tellen ze lineair op (de covariantie is niet nul). Kwadratisch optellen mag alleen voor onafhankelijke bronnen.



Een spreiding op N (verticale band, overdreven: ±60 stappen) wordt via de helling een spreiding op T (horizontale band). Zelfs over ±60 stappen wijkt de kromme maar enkele honderdsten van een graad af van de raaklijn: lineariseren is hier ruim goed genoeg.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.16

Het pompdebiet opnieuw, nu met onzekerheid

16/28

In hoofdstuk 1 van I vulde het pompje zes keer een maatbeker tot de streep van 1,00 L: 41,8; 43,1; 42,4; 42,0; 43,5 en 42,6 s. De streep heeft een tolerantie van $\pm 0{,}02\,\mathrm{L}$. Toen kwam er $Q = (1{,}41 \pm 0{,}05)\,\mathrm{L/min}$ uit. Reken het opnieuw met standaardonzekerheden, en geef ook het 95 %-interval van de gemiddelde vultijd.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- $\bar{t} = 42{,}567\,\mathrm{s}$, $s = 0{,}647\,\mathrm{s}$, $n = 6$
- $V = 1{,}00\,\mathrm{L} \pm 0{,}02\,\mathrm{L}$ (tolerantie)

- interval voor $\bar{t}$
- $Q \pm U$ met $k = 2$

OPLOSSING

1. Type A: $u(\bar{t}) = s/\sqrt{6} = 0{,}264\,\mathrm{s}$. 95 %-interval: $42{,}57 \pm 2{,}571 \cdot 0{,}264 = 42{,}57 \pm 0{,}68\,\mathrm{s}$.

2. Type B: $u(V) = 0{,}02/\sqrt{3} = 0{,}0115\,\mathrm{L}$ (uniform: zonder meer informatie is elke waarde binnen de tolerantie even waarschijnlijk).

3. $Q = 60\,V/\bar{t} = 1{,}4096\,\mathrm{L/min}$. Een quotiënt, dus relatief kwadratisch: $\sqrt{(0{,}62\,\%)^2 + (1{,}15\,\%)^2} = 1{,}31\,\%$.

4. $u(Q) = 0{,}0131 \cdot 1{,}410 = 0{,}0185\,\mathrm{L/min}$; $U = 2\,u = 0{,}037\,\mathrm{L/min}$.

ANTWOORD

$\bar{t} = (42{,}57 \pm 0{,}68)\,\mathrm{s}$ (95 %) en $Q = (1{,}410 \pm 0{,}037)\,\mathrm{L/min}$ ($k = 2$). Het interval is 1,4 keer smaller dan in hoofdstuk 1 van I, omdat het nu de onzekerheid van het *gemiddelde* is en de bronnen kwadratisch optellen.

Klopt dit? De maatbeker levert 78 % van de variantie. Meer vultijden meten helpt dus weinig; het volume wegen (1,000 kg water op een balans van 1 g: 0,1 %) wel. Zo lees je een onzekerheidsbudget: verbeter de grootste term eerst.

CODE · 6.17

Monte Carlo: de onzekerheid van een NTC-temperatuur

17/28

De temperatuur uit een NTC-meting is een kromme functie van drie onzekere grootheden: de ADC-waarde N (ruis 1,2 stap, uit de proef), en de geijkte R_{25} en B uit hoofdstuk 22 van I. Twee manieren om de onzekerheid op T te vinden: de formule met partiële afgeleiden (numeriek, met centrale differenties uit hoofdstuk 1), of **Monte Carlo**: trek duizenden keren een waarde voor elke invoer uit haar verdeling, reken telkens T uit en kijk naar de verdeling van de uitkomsten.

Python **montecarlo.py** 37 regels

```python
# montecarlo.py - de onzekerheid op een NTC-temperatuur: lineair en met Monte Carlo
import numpy as np

T25, RV = 298.15, 10000.0
waarden = {"N": 446.0, "R25": 10370.0, "B": 3913.0}        # een ADC-waarde, geijkte R25 (ohm) en B (K)
u = {"N": 1.2, "R25": 30.0, "B": 15.0}                      # standaardonzekerheden


def temperatuur(N, R25, B):
    R = RV * (1024.0 - N) / N                               # spanningsdeler omgekeerd (NTC boven)
    return 1.0 / (1.0 / T25 + np.log(R / R25) / B) - 273.15


T0 = temperatuur(**waarden)
print("T = %.3f °C" % T0)
som = 0.0
for x in waarden:                                           # gevoeligheid = partiële afgeleide (centrale differentie)
    h = 1e-4 * waarden[x]
    plus, min_ = dict(waarden), dict(waarden)
    plus[x] += h
    min_[x] -= h
```

```
    c = (temperatuur(**plus) - temperatuur(**min_)) / (2 * h)
    print("  %-4s gevoeligheid %+.6f   bijdrage %.3f K" % (x, c, abs(c) * u[x]))
    som += (c * u[x]) ** 2
print("lineair:     u(T) = %.3f K" % np.sqrt(som))

rng = np.random.default_rng(7)
M = 200_000
Ts = temperatuur(rng.normal(446.0, 1.2, M), rng.normal(10370.0, 30.0, M), rng.normal(3913.0, 15.0, M))
lo, hi = np.percentile(Ts, [2.5, 97.5])
print("Monte Carlo: u(T) = %.3f K, gemiddelde %.3f °C, 95 %% tussen %.3f en %.3f °C" % (Ts.std(ddof=1),
Ts.mean(), lo, hi))

# waar lineariseren faalt: y = 1/x met x = 2,0 +- 0,6 (30 %)
x = rng.normal(2.0, 0.6, M)
y = 1 / x
print("1/x lineair: 0,500 +- 0,150; Monte Carlo: gemiddelde %.3f, mediaan %.3f, 95 %% tussen %.3f en %.3f"
      % (y.mean(), np.median(y), *np.percentile(y, [2.5, 97.5])))
```

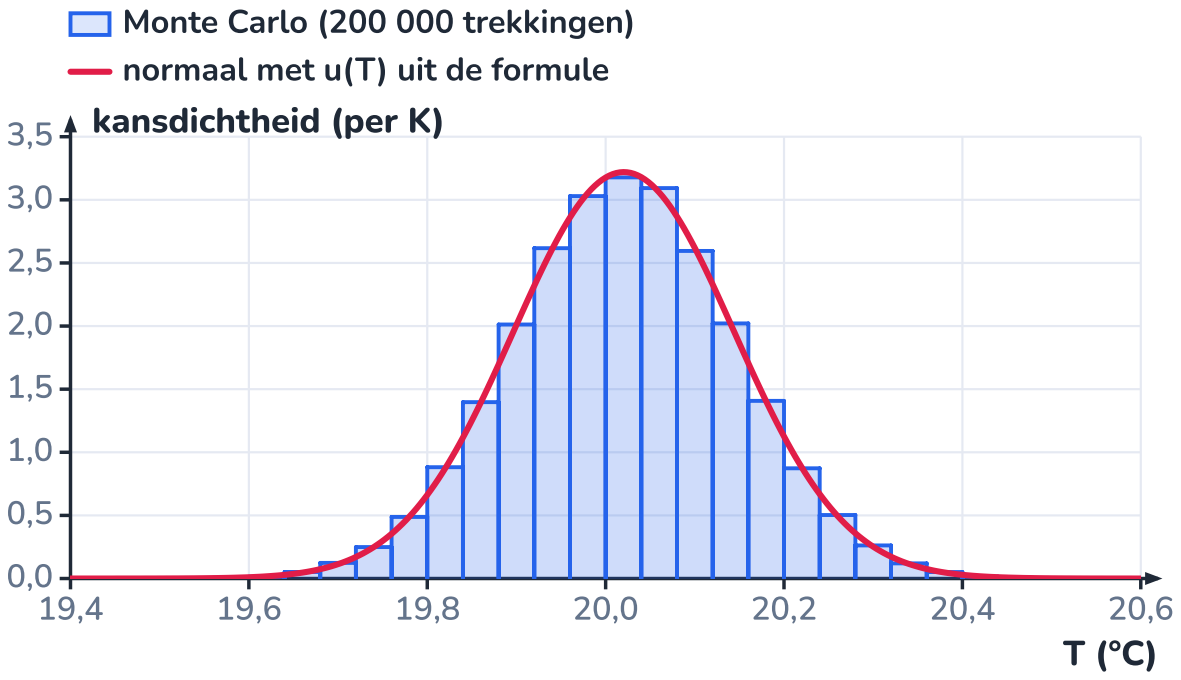
Uitvoer:

```
T = 20.020 °C
  N    gevoeligheid +0.087250   bijdrage 0.105 K
  R25  gevoeligheid +0.002118   bijdrage 0.064 K
  B    gevoeligheid +0.001251   bijdrage 0.019 K
lineair:     u(T) = 0.124 K
Monte Carlo: u(T) = 0.124 K, gemiddelde 20.020 °C, 95 % tussen 19.777 en 20.264 °C
1/x lineair: 0,500 +- 0,150; Monte Carlo: gemiddelde 0.561, mediaan 0.500, 95 % tussen 0.315 en
1.211
```

bron	soort	$u(x_i)$	gevoeligheid $\partial T/\partial x_i$	bijdrage (K)
ruis op één ADC-waarde N	A (uit de proef)	1,2 stap	0,0873 K per stap	0,105
geijkte R_{25} (de vaste weerstand zit erin)	B (uit de ijking)	30 Ω	2,118 K per kΩ	0,064
geijkte B	B (uit de ijking)	15 K	0,00125	0,019
samen (kwadratisch)				**0,124**

Formule en simulatie geven dezelfde $u(T) = 0{,}124\,\mathrm{K}$: over een bereik van enkele stappen is $T(N)$ bijna recht, dus lineariseren mag. De ruis op één meting is de grootste bron; middel je 28 metingen, dan wordt R_{25} de grootste. De vaste weerstand van 10 kΩ telt hier niet apart, omdat de ijking de hele keten ijkte (T hangt alleen af van de verhouding R_{vast}/R_{25}). Wie niet ijkt en met een weerstand van 1 % rekent, krijgt daar alleen al 0,13 K bij.

De laatste regel toont waar lineariseren faalt: bij $y = 1/x$ met 30 % onzekerheid op x is de verdeling van y scheef. Het gemiddelde is 0,561 in plaats van 0,500, en het 95 %-gebied loopt van 0,31 tot 1,21, niet symmetrisch rond 0,5. Vuistregel: bij relatieve onzekerheden van meer dan ongeveer 10 % op een kromme functie, of bij grenzen (een kans, een wortel), controleer je met Monte Carlo.



Het histogram van 200 000 Monte Carlo-temperaturen valt samen met de normale verdeling die de formule voorspelt.

UITLEG · 6.18

Een verschil toetsen

18/28

Twee groepen, twee gemiddelden, een verschil. Is het echt, of toeval? Een **hypothesetoets** keert de vraag om. Stel dat er géén verschil is: de **nulhypothese** $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Hoe verrassend zijn je gegevens dan? De maat voor die verrassing is de **p-waarde**: de kans om, als H_0 waar is, een resultaat te vinden dat minstens zo extreem is als het jouwe. Is p kleiner dan of gelijk aan een vooraf gekozen **significantieniveau** α (meestal 0,05), dan verwerp je H_0.

Om 'extreem' te meten, deel je het verschil door zijn standaardfout. De standaardfout van een verschil volgt uit 'varianties tellen op':

WELCH-TOETS VOOR TWEE GROEPEN

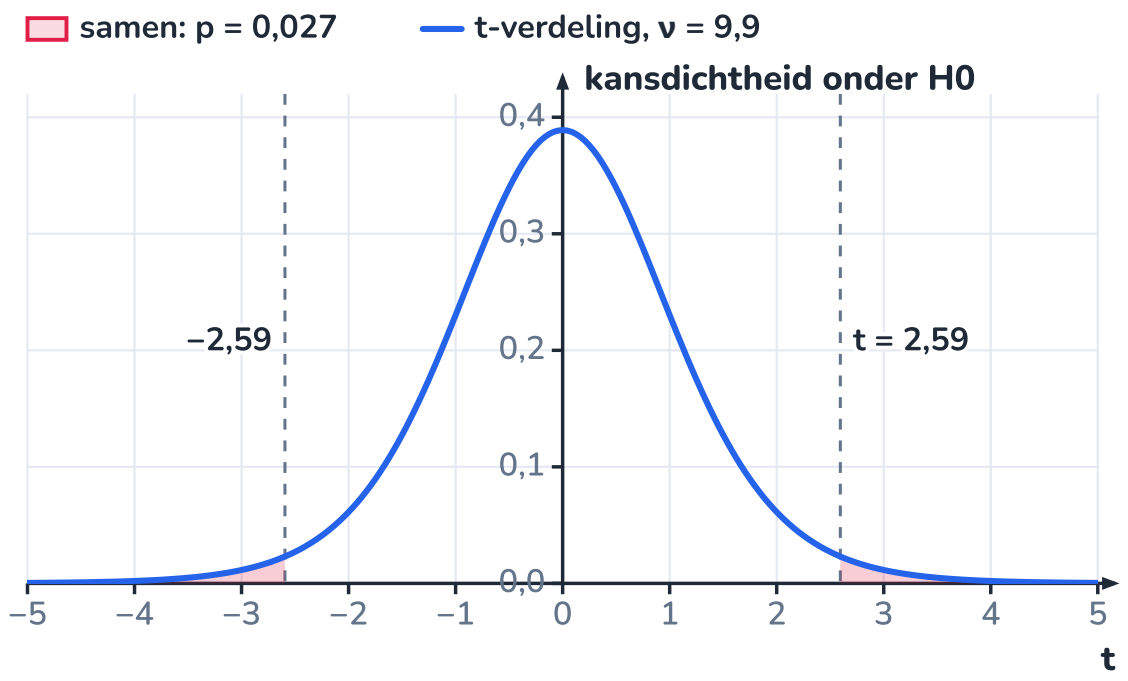
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \qquad \nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

Onder H_0 volgt t bij benadering een t-verdeling met ν vrijheidsgraden (Welch en Satterthwaite, 1946-1947). $p = P(|T| \geq |t|)$: beide staarten, want een verschil in beide richtingen telt (tweezijdig).

De Welch-toets veronderstelt niet dat beide groepen dezelfde spreiding hebben; de oudere toets van Student doet dat wel. Welch kost weinig als de spreidingen gelijk zijn en beschermt als ze verschillen: gebruik hem standaard. Voor **gepaarde** metingen (twee sensoren op dezelfde ogenblikken, een plant voor en na) toets je de verschillen d_i zelf: $t = \bar{d}/(s_d/\sqrt{n})$ met $\nu = n - 1$.

	H0 is waar (geen effect)	H1 is waar (er is een effect)
H0 verworpen ($p \le \alpha$)	fout van type I: vals alarm, kans α	juist: effect gevonden, kans $1-\beta$ (onderscheidingsvermogen)
H0 niet verworpen	juist, kans $1-\alpha$	fout van type II: effect gemist, kans β

Een toets kan zich op twee manieren vergissen. Kies je $\alpha = 0{,}05$, dan geeft hij in 5 % van de proeven zonder effect toch 'significant'. Het **onderscheidingsvermogen** $1-\beta$ zegt hoe vaak hij een echt effect van een bepaalde grootte vindt; dat hangt af van de grootte van het effect, σ en n.



De toets van de lampproef verderop: onder H0 zou een t van minstens deze grootte (in één van beide richtingen) maar in 2,7 % van de proeven voorkomen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.19

De Welch-toets met de hand: licht en sla

19/28

Toets met de gegevens van de groeiproef (hoofdstuk 27 van F) of 100 % licht meer sla geeft dan 70 % licht. Gebruik $\alpha = 0{,}05$, tweezijdig, en controleer met Python.

GEGEVEN

- 100 %: $\bar{x}_1 = 101{,}67$, $s_1 = 4{,}041$, $n_1 = 3$
- 70 %: $\bar{x}_2 = 73{,}67$, $s_2 = 4{,}509$, $n_2 = 3$

GEVRAAGD

- t, ν, p en een besluit

OPLOSSING

1. Proefeenheid: het bakje. Elk bakje kreeg zijn behandeling onafhankelijk (eigen druppelaar, geloot over beide rijen), dus $n = 3$ per groep is eerlijk geteld.

2. $\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{16{,}33}{3} = 5{,}444$ en $\frac{s_2^2}{n_2} = \frac{20{,}33}{3} = 6{,}778$; standaardfout van het verschil $\sqrt{12{,}222} = 3{,}496$ g.

3 $t = \dfrac{101{,}67 - 73{,}67}{3{,}496} = 8{,}01.$

4 $\nu = \dfrac{12{,}222^2}{5{,}444^2/2 + 6{,}778^2/2} = 3{,}95$: bijna $2 + 2 = 4$, omdat de spreidingen ongeveer gelijk zijn.

5 Kritieke waarde $t^{*}_{3,95} = 2{,}79$. $|t| = 8{,}01$ ligt ver voorbij: $p = 0{,}0014$ (`scipy.stats.ttest_ind(a, b, equal_var=False)` geeft hetzelfde).

ANTWOORD

$t = 8{,}0$, $\nu = 4{,}0$, $p = 0{,}0014$: 100 % licht geeft significant meer sla. Het verschil is $28{,}0\,\mathrm{g}$ met een 95 %-interval van $28{,}0 \pm 9{,}8\,\mathrm{g}$.

Klopt dit? Zelfs met drie bakjes per groep is het resultaat overtuigend, omdat het verschil (28 g) zeven keer zo groot is als de spreiding (4 g). Een klein effect in veel ruis vraagt veel meer herhalingen: dat is het probleem van de lampproef.

VERHAAL · 6.20

De dame die thee proefde

20/28

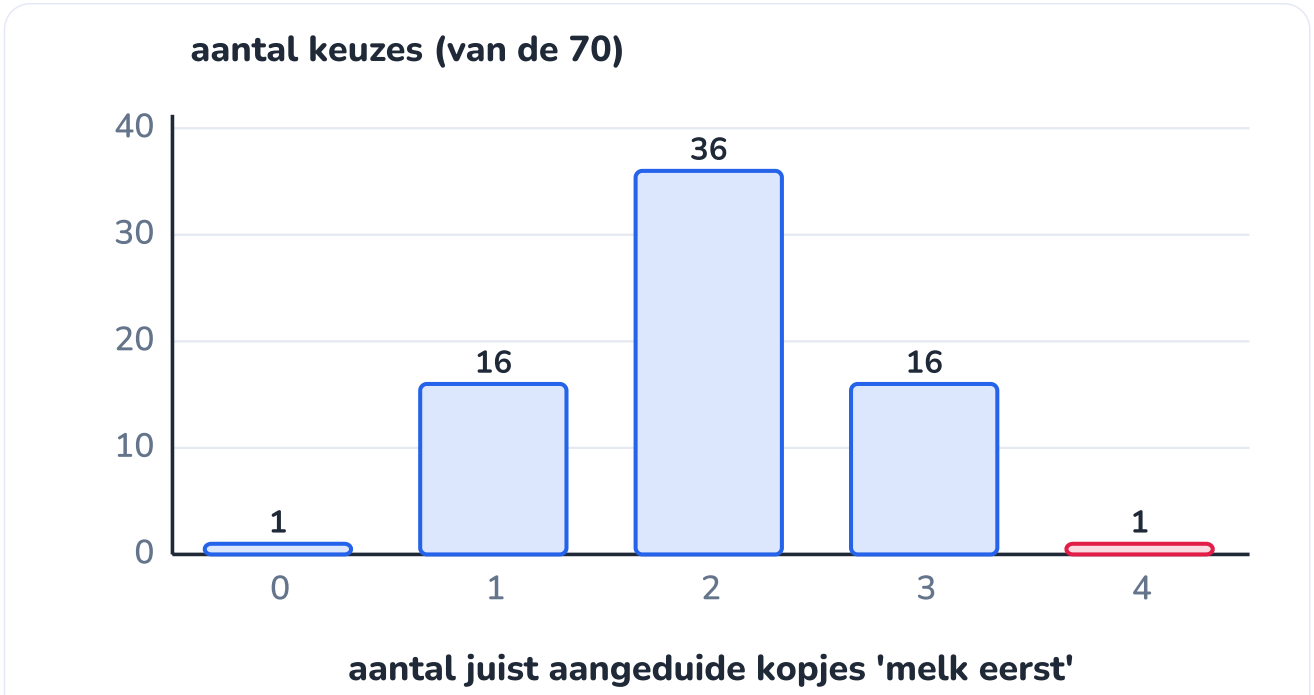
Op het landbouwproefstation van Rothamsted, ten noorden van Londen, bood de statisticus Ronald Fisher in de jaren 1920 een collega een kop thee aan. De algenonderzoekster Muriel Bristol weigerde: hij had de melk na de thee in de kop gegoten, en ze proefde het verschil. Fisher maakte er later het openingsvoorbeeld van zijn boek *The Design of Experiments* (1935) van, want de vraag is precies die van dit hoofdstuk: hoe toon je aan dat iemand iets kan, en niet gewoon geluk heeft?

Zijn ontwerp: acht koppen, vier met eerst melk en vier met eerst thee, in een **gelote** volgorde. De proefster weet dat het vier en vier is en moet de vier 'melk eerst' aanwijzen. Stel dat ze niets proeft (H_0): dan is elke keuze van vier uit acht even waarschijnlijk. Er zijn $\binom{8}{4} = 70$ zulke keuzes, en maar één ervan is helemaal juist. De figuur telt ze per aantal juiste:

$$P(4 \text{ juist} \mid H_0) = \tfrac{1}{70} = 0{,}0143, \qquad P(\text{minstens } 3 \mid H_0) = \tfrac{1+16}{70} = 0{,}243.$$

Alle vier juist is dus overtuigend ($p = 0{,}014$), drie juist niet: dat haalt een gokker in bijna een kwart van de gevallen. Dat is een p-waarde in haar zuiverste vorm: tel alle uitkomsten die onder H_0 mogelijk waren, en kijk welk deel minstens zo extreem is als wat je zag. Het **loten** maakt die rekensom geldig: zonder loting kan de proefster bijvoorbeeld aan de kleur of de temperatuur raden.

Hoe het afliep, staat niet in Fisher's boek. Volgens een collega die erbij was, wees ze alle koppen juist aan. Fisher populariseerde ook de grens van 5 %, in zijn *Statistical Methods for Research Workers* (1925), als een handige vuistregel om te zien of een resultaat verder onderzoek waard is: geen heilige grens tussen waar en onwaar.



Onder H0 is elke keuze even waarschijnlijk. Alleen alle vier juist (1 van de 70) is zeldzaam genoeg om overtuigend te zijn.

UITLEG · 6.21

Wat een p-waarde niet zegt

21/28

De p-waarde is de meest gebruikte en meest verkeerd begrepen maat uit de wetenschap. In 2016 gaf de Amerikaanse statistiekvereniging (ASA) er een verklaring over uit. Vijf dingen die ze **niet** zegt:

1. **Niet de kans dat H_0 waar is.** p is de kans op zulke gegevens *als* H_0 waar is. Of H_0 waar is, hangt ook af van hoe aannemelijk ze vooraf was: een 'significant' resultaat voor iets onwaarschijnlijks (een lamp die sla telepathisch laat groeien) is meestal toeval.
2. **Niet hoe groot of belangrijk het effect is.** Met genoeg metingen is 0,1 g extra sla 'significant'. Geef altijd het verschil met zijn interval, en een **effectgrootte** zoals Cohens $d = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/s$ (0,2 klein, 0,5 middel, 0,8 groot, als ruwe richtwaarden).
3. $p > 0{,}05$ **betekent niet 'geen effect'.** Afwezigheid van bewijs is geen bewijs van afwezigheid: een te kleine proef ziet een echt effect vaak niet.
4. **0,049 en 0,051 verschillen niet wezenlijk.** De grens van 0,05 is een afspraak.
5. **Niet de kans dat je resultaat 'door toeval' komt.** Dat is dezelfde vergissing als de eerste.

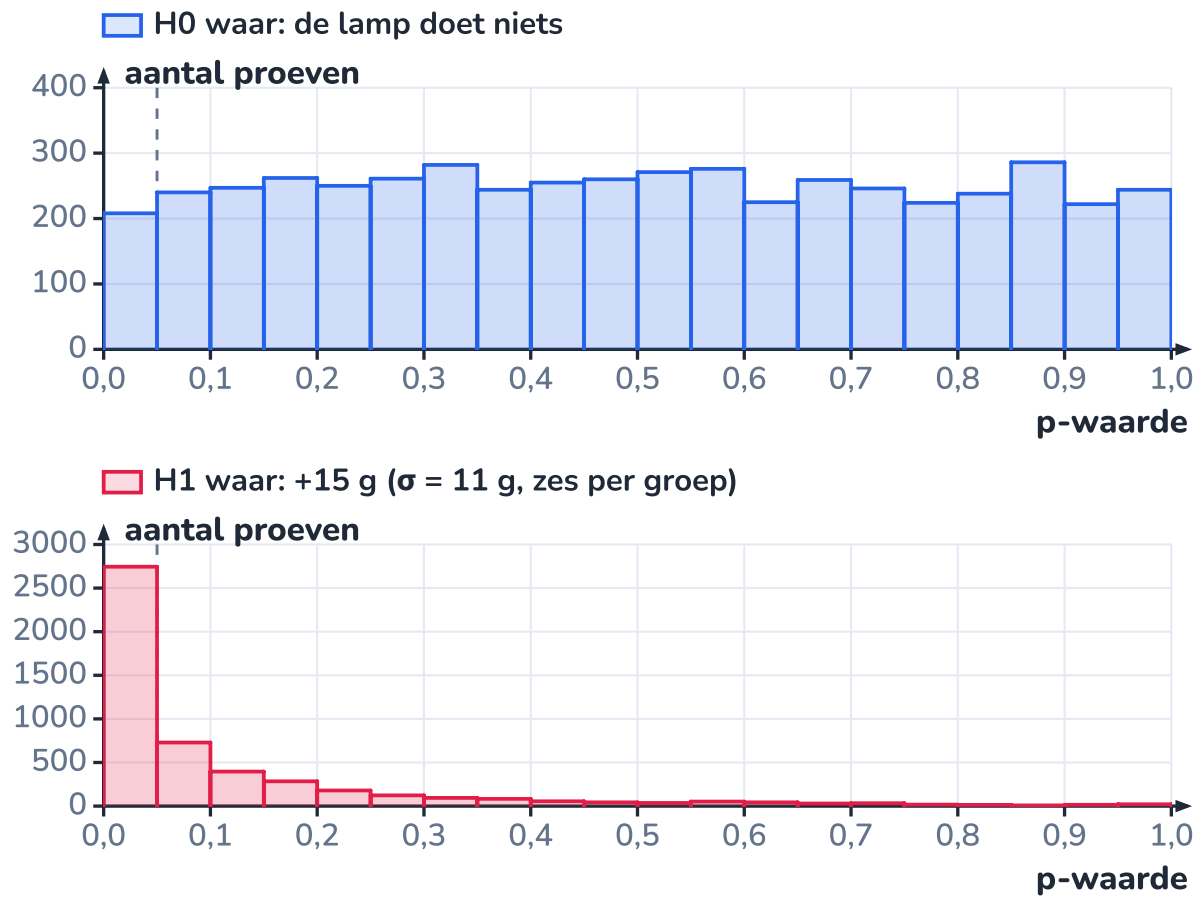
De figuur toont waarom. Als H_0 waar is, is p **uniform** verdeeld: elke waarde tussen 0 en 1 even waarschijnlijk, dus $p < 0{,}05$ in 5 % van de proeven (de simulatie: 4,2 %; Welch is bij kleine groepen iets voorzichtig). Is er een echt effect, dan stapelen de p-waarden zich op bij 0, maar met zes vakjes per groep en een effect van 15 g haalt maar 55 % van de proeven de grens. En de proeven die de grens wél halen, overschatten het effect: gemiddeld 18,9 g in plaats van 15 g. Wie alleen significante resultaten publiceert, publiceert te grote effecten.

Meervoudig toetsen. Meet je 20 uitkomsten (versgewicht, drooggewicht, bladaantal, kleur, …) bij een lamp die niets doet, dan is de kans op minstens één $p < 0{,}05$ gelijk aan $1 - 0{,}95^{20} = 64\,\%$. Corrigeer (Bonferroni: toets elke uitkomst tegen $\alpha/m = 0{,}0025$), of leg vooraf één **hoofduitkomst** vast. **Optional stopping** is dezelfde val in de tijd: toets je na elke drie planten en stop je zodra $p < 0{,}05$, dan vind je bij

een lamp die niets doet in 19 % van de proeven een 'effect' (opdracht 6.14). Al die keuzes achteraf heten samen **p-hacking**. Het medicijn is **voorregistratie**: vraag, uitkomst, n en analyse vastleggen vóór je de gegevens ziet.

De replicatiecrisis

In 2015 herhaalde de *Open Science Collaboration* 100 psychologische studies. Van de originelen was 97 % significant, van de herhalingen 36 %, en de effecten waren gemiddeld half zo groot. In 2012 meldden onderzoekers van het biotechbedrijf Amgen dat ze maar 6 van 53 baanbrekende kankerstudies konden bevestigen. Oorzaken: kleine proeven, p-hacking, publiceren wat significant is. Sindsdien winnen voorregistratie, open data en herhalingsstudies terrein; in 2019 riepen meer dan 800 wetenschappers in *Nature* op om het woord 'significant' als ja-neegrens te laten vallen.



Boven: zonder effect is elke p-waarde even waarschijnlijk (5 % valt links van 0,05, de stippellijn). Onder: met een echt effect stapelen de p-waarden zich op bij 0, maar lang niet allemaal.

UITLEG · 6.22

Hoeveel herhalingen? Waar de 16 vandaan komt

22/28

Een proef ontwerp je zo dat ze een effect van de grootte die er voor jou toe doet, δ, met grote kans vindt, meestal 80 %. De standaardfout van een verschil tussen twee groepen van n is $\sigma\sqrt{2/n}$. De toets verwerpt H_0 als het gemeten verschil groter is dan $z_{0{,}975}\,\sigma\sqrt{2/n}$. Is het echte verschil δ, dan wil je dat het gemeten verschil in 80 % van de proeven boven die grens valt: δ moet $z_{0{,}80}$ standaardfouten boven de grens liggen.

STEEKPROEFGROOTTE PER GROEP (A = 0,05, 80 %)

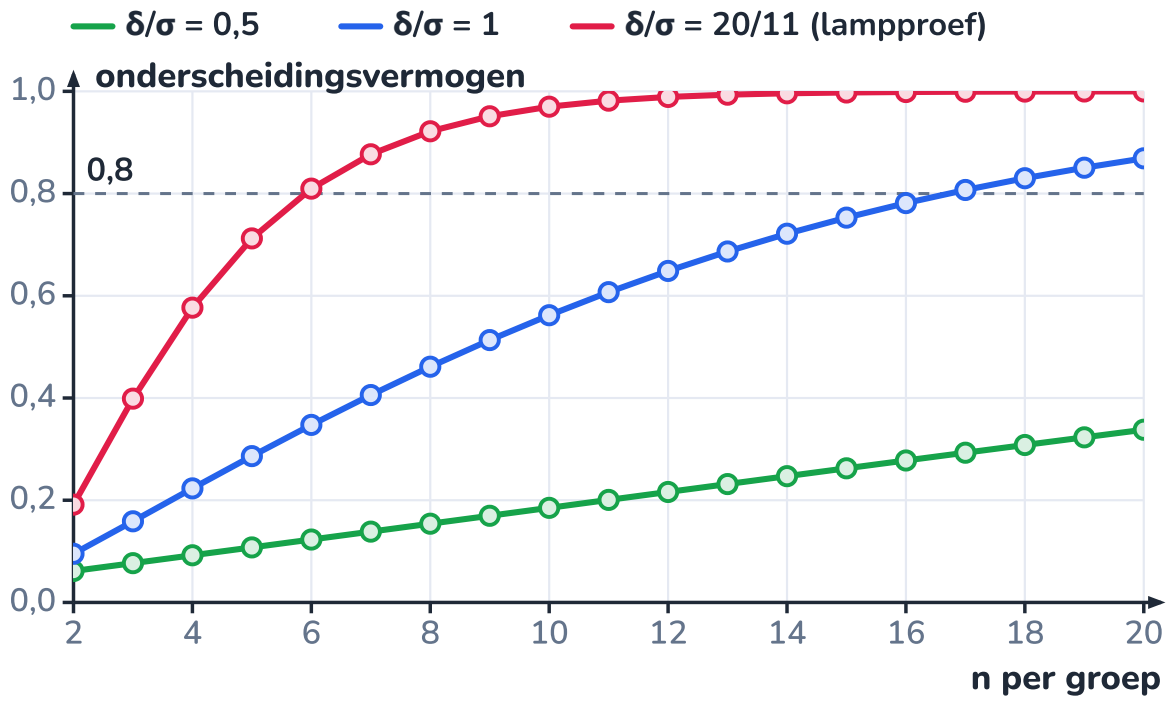
$$\delta = (z_{0,975} + z_{0,80})\,\sigma\sqrt{\tfrac{2}{n}} \;\Rightarrow\; n = 2\,(1{,}960 + 0{,}842)^2 \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2 = 15{,}7\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2$$

De vuistregel $n \approx 16\,(s/\delta)^2$ uit hoofdstuk 2 van I. Voor 90 % vermogen wordt de factor 21. Bij kleine n geeft de t-verdeling nog een of twee extra.

De figuur geeft het onderscheidingsvermogen exact, met de t-verdeling. Een effect van een halve standaardafwijking vraagt meer dan 60 per groep; een effect van één σ ongeveer 17. Voor de lampproef (verderop: $\sigma \approx 11$ g tussen vakjes, $\delta = 20$ g) geeft de formule $4{,}75$, dus 5; de t-verdeling geeft met 5 vakjes maar 71 % en met 6 81 %.

⚠ Te klein is niet 'voorzichtig'

Een proef met te weinig herhalingen is geen goedkope versie van een goede proef. Ze vindt echte effecten zelden, en als ze er een vindt, is dat vaak een overschatting (de vorige bladzijde). Reken n uit vóór je begint, en zeg eerlijk welk effect je proef wel en niet kan zien.



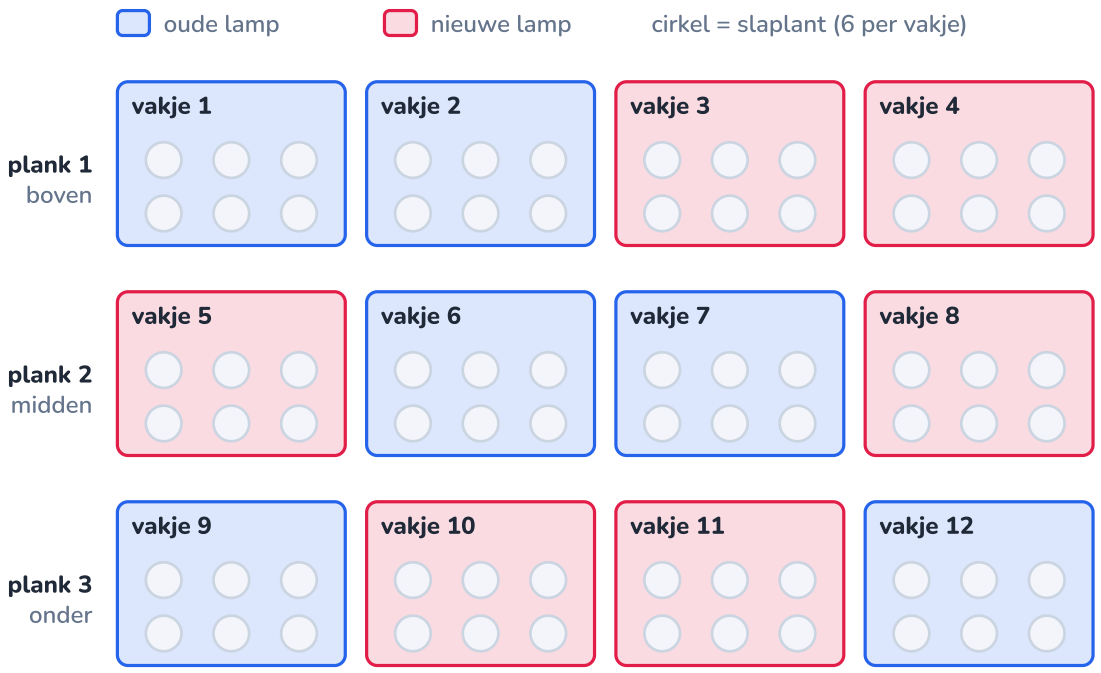
Kans om een echt effect te vinden, per groepsgrootte. Hoe kleiner het effect tegenover de spreiding, hoe meer herhalingen: de benodigde n schaalt met (σ/δ)².

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.23

Habitat: de lampproef ontwerpen

23/28

Een leverancier biedt een groeilamp aan met extra verrood licht (rond 730 nm), en belooft bij hetzelfde PAR-licht 15 % meer versgewicht bij sla. De twee grote lampen boven het kweekbed (hoofdstuk 20 en 25 van I) verlichten samen het hele bed: daarmee kan je twee lamptypes niet eerlijk vergelijken. Het team heeft een proefrek met drie planken van vier vakjes, elk met een eigen klein ledpaneel, af te stellen met de PAR-meter. De leverancier levert beide spectra als klein paneel. Ontwerp de proef.



Het resultaat van de loting (numpy, seed 10): op elke plank twee vakjes met de nieuwe lamp, zodat een warmere of koelere plank beide lampen evenveel treft.

GEGEVEN

- sla: ongeveer 200 g per krop na 35 dagen (hoofdstuk 14 van I); 6 planten per vakje
- vooronderzoek (vorige teelten in het rek): vakjesgemiddelden spreiden $s \approx 11\,\text{g}$
- relevant is een winst van 10 % (20 g): kleiner is de omschakeling niet waard

GEVRAAGD

- proefeenheid en aantal
- loting en blind meten
- wat je vooraf vastlegt

OPLOSSING

1. **Proefeenheid.** Het vakje, niet de plant: de zes planten in een vakje delen hetzelfde paneel en dezelfde plek. Een paneel dat iets feller brandt of een vakje dat warmer is, geeft alle zes hetzelfde voordeel. Planten tellen als herhalingen zou **pseudoreplicatie** zijn (Hurlbert, 1984; hoofdstuk 2 van I).

2. **Aantal.** $n = 15{,}7\,(11/20)^2 = 4{,}75$ volgens de formule; met de t-verdeling geeft $n = 5$ een vermogen van $71\,\%$, $n = 6$ van $81\,\%$. Dus 6 vakjes per lamptype: precies het rek.

3. **Loting in blokken.** De bovenste plank is warmer dan de onderste. Loot daarom per plank welke twee van de vier vakjes de nieuwe lamp krijgen: elke plank heeft er dan twee van elk. Ook welke zaailing in welk vakje komt, beslist het lot (alle planten uit één zaaiing).

4. **Eerlijk licht.** Elk paneel afstellen op 200 µmol/(m²·s) PAR op planthoogte, gemeten met dezelfde PAR-meter; de temperatuur per plank loggen. Het verrood valt buiten PAR (400-700 nm): dat is precies het verschil dat je test.

5. **Blind wegen.** Bij de oogst krijgt elke plant een code; wie weegt, kent de sleutel niet. De sleutel ligt bij iemand anders tot alle gewichten in het bestand staan.

6. **Voorregistratie.** Vóór het zaaien leggen we alles vast (tabel hieronder), ook de beslisregel.

ANTWOORD

12 vakjes, 6 per lamptype, geloot per plank, 72 planten blind gewogen; analyse op vakjesgemiddelden. Vooraf vastgelegd:

VOORAF VASTGELEGD (15 MAART, VÓÓR HET ZAAIEN)	KEUZE
onderzoeksvraag	geeft het nieuwe lamptype bij hetzelfde PAR-licht meer versgewicht dan het oude?
proefeenheid en n	het vakje met zijn eigen paneel; 6 vakjes per lamptype, 6 planten per vakje
loting	per plank 2 van de 4 vakjes nieuw (numpy, seed 10); planten per vakje geloot uit één zaaiing
hoofduitkomst	gemiddeld versgewicht per vakje na 35 dagen, blind gewogen op code
analyse	Welch-toets op 6 + 6 vakjesgemiddelden, tweezijdig, $\alpha = 0{,}05$, 95 %-interval voor het verschil
beslisregel	vervangen als het interval boven 0 ligt én het geschatte verschil minstens 20 g (10 %) is
bijkomend (verkennend)	drooggewicht, aantal bladeren, temperatuur per plank; niet om de beslissing te nemen

Klopt dit? Stel de vraag uit hoofdstuk 2 van I: 'als ik een verschil vind, kan ik dan nog een andere oorzaak bedenken?' Plaats (geloot en in blokken), paneelsterkte (afgesteld en gemeten), verwachtingen van wie weegt (blind), een gekozen analyse achteraf (vastgelegd). Wat overblijft, is de lamp of het toeval, en het toeval kan je uitrekenen.

CODE · 6.24

Habitat: de lampproef analyseren

24/28

Na 35 dagen zijn de 72 planten blind gewogen. Het bestand `lampproef.csv` (na het openen van de sleutel) begint zo:

```
vakje,plank,lamp,plant,versgewicht_g
1,1,oud,1,222
1,1,oud,2,222
1,1,oud,3,215
1,1,oud,4,196
...
```

Het programma middelt eerst per vakje (de proefeenheid), voert de Welch-toets uit met eigen code en controleert met scipy. Daarna doet het, ter vergelijking, wat je *niet* mag doen: alle planten als onafhankelijke herhalingen tellen. Dit is een voorbeelddataset, gesimuleerd met realistische spreidingen (plant ±20 g, vakje ±8 g, planken ±4 g).

Python **lampproef.py** 44 regels

```python
# lampproef.py - is de nieuwe lamp echt beter? Analyse op het niveau van de proefeenheid (het vakje)
import csv
import math
from collections import defaultdict
from scipy import stats

planten = defaultdict(list)                        # (vakje, lamp) -> versgewichten van de zes planten
with open("lampproef.csv", newline="") as f:
    for rij in csv.DictReader(f):
        planten[(int(rij["vakje"]), rij["lamp"])].append(float(rij["versgewicht_g"]))


```

```python
def gem(x):
    return sum(x) / len(x)


def var(x):                                          # steekproefvariantie (delen door n - 1)
    m = gem(x)
    return sum((v - m) ** 2 for v in x) / (len(x) - 1)


def welch(a, b):
    va, vb = var(a) / len(a), var(b) / len(b)
    se = math.sqrt(va + vb)
    t = (gem(a) - gem(b)) / se
    nu = (va + vb) ** 2 / (va ** 2 / (len(a) - 1) + vb ** 2 / (len(b) - 1))
    return gem(a) - gem(b), se, t, nu, 2 * stats.t.sf(abs(t), nu)


vak = {lamp: [gem(g) for (v, l), g in sorted(planten.items()) if l == lamp] for lamp in ("oud", "nieuw")}
for lamp in ("oud", "nieuw"):
    print("%-5s vakjes: %s  gem %.1f g, s %.1f g" % (lamp, " ".join("%.1f" % x for x in vak[lamp]),
                                                    gem(vak[lamp]), math.sqrt(var(vak[lamp]))))

d, se, t, nu, p = welch(vak["nieuw"], vak["oud"])
tk = stats.t.ppf(0.975, nu)
print("vakjes (n = 6 + 6): verschil %.1f g, se %.2f g, t = %.2f, nu = %.1f, p = %.3f" % (d, se, t, nu, p))
print("   95 %%-interval: %.1f tot %.1f g   (scipy: p = %.3f)"
      % (d - tk * se, d + tk * se, stats.ttest_ind(vak["nieuw"], vak["oud"], equal_var=False).pvalue))

# zo NIET: elke plant als onafhankelijke herhaling tellen (pseudoreplicatie)
alle = {lamp: [x for (v, l), g in planten.items() if l == lamp for x in g] for lamp in ("oud", "nieuw")}
d2, se2, t2, nu2, p2 = welch(alle["nieuw"], alle["oud"])
print("planten (n = 36 + 36): verschil %.1f g, se %.2f g, t = %.2f, p = %.4f  <- te zelfzeker" % (d2, se2,
t2, p2))
```

Uitvoer:

```
oud   vakjes: 205.7 188.3 199.3 185.5 175.5 190.3  gem 190.8 g, s 10.6 g
nieuw vakjes: 205.3 215.0 218.5 199.0 202.8 194.0  gem 205.8 g, s 9.4 g
vakjes (n = 6 + 6): verschil 15.0 g, se 5.78 g, t = 2.59, nu = 9.9, p = 0.027
   95 %-interval: 2.1 tot 27.9 g   (scipy: p = 0.027)
planten (n = 36 + 36): verschil 15.0 g, se 4.29 g, t = 3.50, p = 0.0008  <- te zelfzeker
```

Op het niveau van de vakjes: een verschil van 15,0 g, $p = 0{,}027$ en een 95 %-interval van 2,1 tot 27,9 g. Met de planten als herhaling lijkt het resultaat veel sterker ($p = 0{,}0008$), maar dat is schijn: de standaardfout is te klein omdat de verschillen *tussen* vakjes (paneel, plek) niet meetellen, en het aantal vrijheidsgraden is opgeblazen van ongeveer 10 naar ongeveer 68. Het geschatte verschil is in beide gevallen hetzelfde; alleen de zekerheid verschilt.

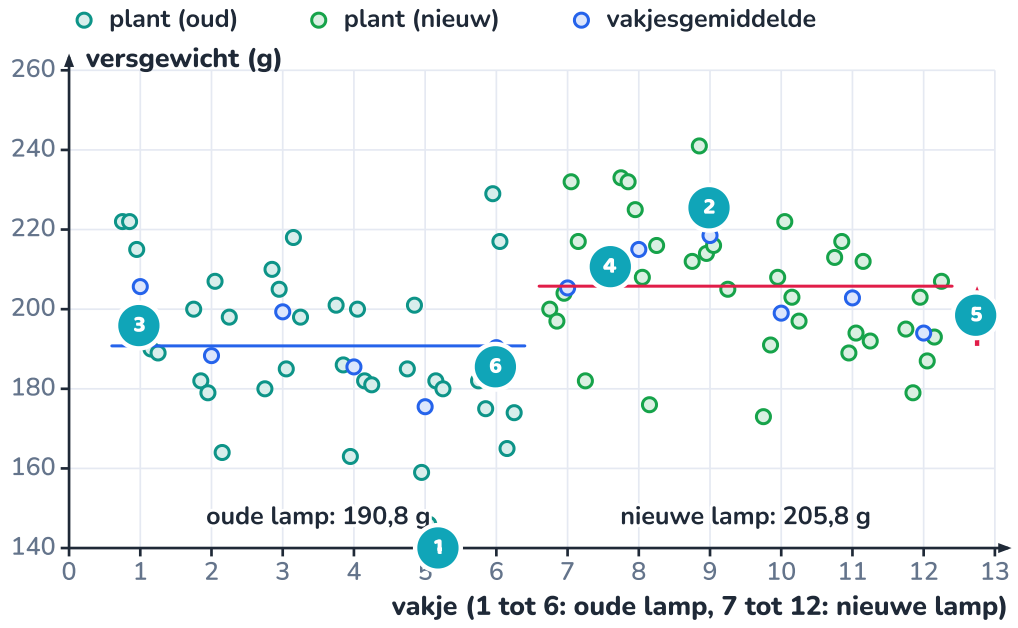
OOK TE DOWNLOADEN

ONTLEED · 6.25

De lampproef in één figuur

25/28

Alle 72 planten (kleine punten), de 12 vakjesgemiddelden (groot) en de twee groepsgemiddelden (lijnen). Links de zes vakjes met de oude lamp, rechts de zes met de nieuwe, telkens gesorteerd per plank.



De spreiding tussen planten is groot (tientallen grammen); de toets kijkt naar de vakjesgemiddelden, die veel minder spreiden.

1 Eén plant zegt weinig
De lichtste plant weegt 146 g, de zwaarste 241 g. Planten in hetzelfde vakje verschillen tot 64 g: de natuurlijke spreiding (s ≈ 18 g per plant).

2 Het vakje is de proefeenheid
Elk groot punt is het gemiddelde van zes planten onder één paneel. Vakjesgemiddelden spreiden ongeveer 10 g: dat getal hoort in de toets.

3 Oude lamp
Gemiddelde van de zes vakjes: 190,8 g (s = 10,6 g).

4 Nieuwe lamp
Gemiddelde van de zes vakjes: 205,8 g (s = 9,4 g).

5 Het verschil
15,0 g, of 7,9 %, met een 95 %-interval van 2,1 tot 27,9 g. De belofte van de leverancier (15 %, 30 g) valt erbuiten.

6 Planken verschillen
De vakjes van de onderste plank liggen bij beide lampen wat lager (gemiddeld 191 g tegenover 204 g boven). Door de loting per plank treft dat beide lampen evenveel.

UITGEWERKT VOORBEELD · 6.26

Habitat: is de nieuwe lamp echt beter?

26/28

Neem het besluit met de vooraf vastgelegde regel: vervangen als het 95 %-interval van het verschil boven 0 ligt én het geschatte verschil minstens 20 g is. Weeg ook de energie mee: bij hetzelfde PAR-licht verbruikt de nieuwe lamp 5 % meer stroom (de verrode leds). Wat besluit het team, en wat doet het daarna?

GEGEVEN

- verschil 15,0 g, 95 %-interval [2,1; 27,9] g, $p = 0{,}027$
- lampen: 3,04 kWh per dag (93 % van 3,27 kWh, hoofdstuk 20 van I); 48 kroppen per 35 dagen

GEVRAAGD

- statistisch en praktisch besluit
- de volgende stap

OPLOSSING

1 **Is er een effect?** Het interval ligt helemaal boven 0 ($p = 0{,}027 < 0{,}05$): waarschijnlijk geeft de nieuwe lamp iets meer sla.

2 **Hoe groot?** Geschat 15,0 g, of 7,9 %, onder de drempel van 20 g. Het interval loopt van 1,1 tot 14,6 %: een winst van 10 % is niet uitgesloten, maar ook niet aangetoond.

3 **De belofte.** 15 % (30 g) ligt buiten het interval: de gegevens passen slecht bij de claim van de leverancier.

4 **Energie.** 5 % van 3,04 kWh is 0,15 kWh per dag, 55 kWh per jaar (€ 17 aan € 0,30). In de winter, als de batterij al tekortschiet (hoofdstuk 20 van I), kost dat lichturen. Opbrengst: 7,9 % van 500 kroppen van 200 g is ongeveer 8 kg sla per jaar.

5 **Regel toepassen.** De eerste voorwaarde is voldaan, de tweede niet: **niet vervangen**. Effectgrootte per plant: Cohens $d = 0{,}82$, volgens de ruwe richtwaarden 'groot', omdat planten in een geregelde kweek weinig spreiden: een willekeurige plant onder de nieuwe lamp is in 72 % van de gevallen zwaarder dan een willekeurige onder de oude (zonder effect: 50 %). In gram en procent blijft de winst bescheiden; voor een besluit tellen de eenheden die ertoe doen.

ANTWOORD

De nieuwe lamp is waarschijnlijk iets beter (ongeveer 8 %), maar niet de beloofde 15 % en niet aantoonbaar de 10 % die de omschakeling waard is. Besluit: de huidige lampen blijven. Een tweede teelt met hetzelfde ontwerp maakt het interval smaller (opdracht 6.12); als de oude lampen aan vervanging toe zijn, weegt dit resultaat mee in de keuze.

Klopt dit? Wie de planten als herhalingen telt, vindt $p = 0{,}0008$ en voelt zich zeker, maar het geschatte verschil en dus het besluit volgens de regel blijven hetzelfde: 15,0 g is minder dan 20 g. Een kleine p-waarde maakt een klein effect niet groter. En het omgekeerde: met $p = 0{,}2$ had je niet mogen besluiten dat de lamp niets doet, alleen dat de proef het niet kon zien.

NASLAG · 6.27

Statistiek en meetonzekerheid: formules en tabellen

27/28

Werkwijze bij een meting: bronnen oplijsten, u per bron (type A of B), gevoeligheden, kwadratisch optellen, $U = 2u$. Bij een vergelijking: proefeenheid, n, loting, blind, vooraf vastgelegde analyse; rapporteer het verschil met zijn interval.

verwachting en variantie

$$\mu = \int x\, f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \sigma^2 = \int (x-\mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x$$

symbool	betekenis	eenheid
$f(x)$	kansdichtheid	per eenheid van x

gemiddelde, standaardafwijking, standaardfout

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \frac{s}{\sqrt{n}}$$

normale verdeling

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \Phi(z) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\tfrac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

varianties tellen op

$$\operatorname{Var}(X \pm Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \quad \text{(onafhankelijk)}$$

betrouwbaarheidsinterval

$$\bar{x} \pm t^*_{n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$$

symbool	betekenis	eenheid
t^*	kritieke t-waarde	–

foutenpropagatie en uitgebreide onzekerheid

$$u(y)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2 \qquad U = k\,u$$

symbool	betekenis	eenheid
u	standaardonzekerheid	eenheid van de grootheid
k	dekkingsfactor, meestal 2	–

type B

$$u = \frac{a}{\sqrt{3}}\ (\text{tolerantie } \pm a) \qquad u = \frac{q}{\sqrt{12}}\ (\text{resolutie } q)$$

Welch-toets en gepaarde toets

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} \qquad t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

effectgrootte en steekproefgrootte (80 %, α = 0,05)

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \qquad n \approx 15{,}7\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2$$

ν	90 % ($t_{0,95}$)	95 % ($t_{0,975}$)	99 % ($t_{0,995}$)
1	6,314	12,706	63,657
2	2,920	4,303	9,925
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
8	1,860	2,306	3,355
10	1,812	2,228	3,169
15	1,753	2,131	2,947
20	1,725	2,086	2,845
30	1,697	2,042	2,750
60	1,671	2,000	2,660
∞ (normaal, z)	1,645	1,960	2,576

situatie	gebruik
één reeks, σ onbekend	$\bar{x} \pm t^*_{n-1}\,s/\sqrt{n}$
twee onafhankelijke groepen	Welch-toets, interval van het verschil
paren (zelfde plant, zelfde moment)	gepaarde t-toets op de verschillen
formule van onzekere grootheden	foutenpropagatie; bij grote of scheve onzekerheden Monte Carlo
veel uitkomsten	één hoofduitkomst vooraf, of Bonferroni (α/m)

HET GEHEEL · 6.28

Waar statistiek vandaan komt en waar ze heen gaat

28/28

Statistiek is de wiskunde (W) van het onderzoeken en meten (O) en de basis van data en AI (A). Ze gebruikt de afgeleide (lineariseren, partiële afgeleiden) en de integraal (kans als oppervlakte), en ze keert terug in elk hoofdstuk waar gemeten, gefilterd, geschat of geleerd wordt. Het ontwerp van een eerlijke proef komt uit de biologie en de landbouw (Rothamsted, Guinness), maar geldt even goed voor een sensor of een algoritme.

F27 Planten: fotosynthese en groei

De groeiproef met schaduwdoek: hier getoetst en met intervallen omringd.

I1 Meetfouten en nauwkeurigheid

Gemiddelde, s, fouten optellen: hier de standaardfout en kwadratisch optellen.

I2 Experimenten ontwerpen en rapporteren

Controlegroep, loting, blind, pseudoreplicatie en de vuistregel met 16, hier afgeleid.

I22 De spanningsdeler en sensoren

De NTC-deler en haar ijking: de bron van het onzekerheidsbudget.

E1 Afgeleiden: verandering meten

Lineariseren is foutenpropagatie; ruis op een differentie is σ/(√2 h).

E2 Optimaliseren

Partiële afgeleiden als gevoeligheden.

E3 Integralen: ophopen

Een kans is een oppervlakte onder een kansdichtheid.

E21 Filters en signaalverwerking

Middelen als filter; periodieke storing en onafhankelijke ruis.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Bisectie, numeriek integreren en simuleren, verder uitgewerkt.

E40 Sensorfusie en schatten

Het Kalman-filter weegt metingen met hun onzekerheid: een gewogen gemiddelde (opdracht 6.16).

E41 Van data naar model: regressie

Intervallen op de helling van een rechte, residuen, overfitting.

E42 Classificatie en clustering

Vals alarm en gemist effect heten daar vals positief en vals negatief: precisie en recall.

E46 Betrouwbaarheid en risico

Kansen op falen, zeldzaam maal vaak.

Habitat

Het brein van het station rekent met onzekerheden: elke meting krijgt een waarde en een U ($k = 2$), alarmen beslissen op een minuutgemiddelde (CO_2) in plaats van op losse metingen, de NTC van het reservoir middelt 28 metingen per ronde, en een nieuwe teeltbehandeling wordt getest in het proefrek met loting per plank, blind wegen en een vooraf vastgelegde analyse. De eerste lampproef gaf 15,0 g winst (95 %-interval 2,1 tot 27,9 g): de lampen blijven. Opdracht 6.12 voegt de tweede teelt toe.

SAMENVATTING

In het kort

- Een kansverdeling beschrijft het toeval; bij een continue grootheid is een kans een oppervlakte $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$, met verwachting μ en variantie σ^2.

- De normale verdeling: 68,3 % binnen $\pm\sigma$, 95 % binnen $\pm 1{,}96\sigma$, 99,7 % binnen $\pm 3\sigma$. Een zeldzame gebeurtenis maal veel metingen is een geregelde gebeurtenis.
- Onafhankelijke varianties tellen op; daardoor heeft een gemiddelde de standaardfout $\sigma/\sqrt{n}$ en wordt het normaal verdeeld (centrale limietstelling). Middelen verkleint geen systematische fout en weinig bij afhankelijke ruis.
- Betrouwbaarheidsinterval: $\bar{x} \pm t^*_{n-1}\, s/\sqrt{n}$; de 95 % gaat over de methode. Met weinig metingen is t^* veel groter dan 1,96.
- Foutenpropagatie: $u(y)^2 = \sum(\partial f/\partial x_i)^2 u(x_i)^2$; relatief bij producten; type A en B; $U = 2u$; controleer kromme of grote gevallen met Monte Carlo.
- Een toets berekent hoe verrassend de gegevens zijn als er geen effect is (p); Welch voor twee groepen, gepaard voor paren. Een p-waarde is niet de kans dat H_0 waar is en zegt niets over de grootte van het effect.
- Goede proeven: de juiste proefeenheid (geen pseudoreplicatie), $n \approx 16(\sigma/\delta)^2$, loting (in blokken), blind meten, voorregistratie; rapporteer het verschil met zijn interval en beslis op relevantie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

kansdichtheid

Functie $f(x) \geq 0$ met totale oppervlakte 1; de kans dat de grootheid tussen a en b ligt, is $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

verwachting

Het gemiddelde van een kansverdeling: $\mu = \int x\, f(x)\,\mathrm{d}x$ (continu) of $\sum x_k p_k$ (discreet).

variantie

De verwachte gekwadrateerde afwijking $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$; de standaardafwijking σ is haar wortel.

normale verdeling

De klokvormige verdeling $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$; 68,3 % binnen $\pm\sigma$, 95,4 % binnen $\pm 2\sigma$, 99,7 % binnen $\pm 3\sigma$.

standaardfout

De standaardafwijking van een gemiddelde: $\sigma/\sqrt{n}$, geschat met $s/\sqrt{n}$.

centrale limietstelling

Het gemiddelde van veel onafhankelijke metingen is bij benadering normaal verdeeld, ook als de metingen zelf dat niet zijn.

betrouwbaarheidsinterval

Interval rond een schatting dat met een vooraf gekozen methode in bv. 95 % van de herhaalde proeven de echte waarde bevat: $\bar{x} \pm t^*\, s/\sqrt{n}$.

t-verdeling

De verdeling van $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ bij normale metingen; bredere staarten dan de normale verdeling, vooral bij weinig vrijheidsgraden.

standaardonzekerheid

De onzekerheid op een grootheid uitgedrukt als een standaardafwijking (u); type A uit een reeks metingen, type B uit andere informatie (tolerantie, resolutie, ijkcertificaat).

uitgebreide onzekerheid

$U = k\,u$, met meestal $k = 2$: een interval dat ongeveer 95 % dekt.

p-waarde

De kans om, als de nulhypothese waar is, een resultaat te vinden dat minstens zo extreem is als het gemeten resultaat.

onderscheidingsvermogen

De kans dat een toets een echt effect van een gegeven grootte ook vindt ($1 - \beta$).

pseudoreplicatie

voorregistratie

Metingen tellen als onafhankelijke herhalingen terwijl ze dezelfde behandeling niet onafhankelijk kregen (bv. alle planten onder één lamp).

Vraag, uitkomstmaat, steekproefgrootte en analyse vastleggen vóór de gegevens bestaan.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 7

Sinusoïden, complexe getallen en fasoren

Een sinus is een draaiende wijzer; met complexe getallen reken je ermee zoals met gewone getallen

Het stopcontact, een toon, een trillende ventilator, de stroom door een pomp: allemaal sinusoïden. Wie ze wil optellen, afleiden of door een schakeling sturen, verdrinkt snel in goniometrische formules. Er is een elegantere weg: zie een sinus als de schaduw van een draaiende wijzer, en schrijf die wijzer als een complex getal. Dan wordt optellen vectoren optellen en afleiden vermenigvuldigen met jω. Je bouwt de complexe getallen op, bewijst de formule van Euler, rekent met fasoren in Python en maakt de brug naar wisselstroom en trillingen. Aan het eind weet je wat de netomvormer van het station moet maken, en reken je de stroom uit die hij levert.

11× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

W Wiskundig modelleren · L Elektriciteit en elektronica · K Krachten, beweging en constructies



De omvormer maakt van 48 V gelijkspanning een sinus van 325 V piek, vijftig keer per seconde.

Na dit hoofdstuk

- Je kan van een sinusoïdaal signaal amplitude, periode, frequentie, hoekfrequentie en fase bepalen, ook uit een oscilloscoopbeeld, en een tijdverschil omrekenen naar een faseverschil.
- Je kan een sinus en een cosinus uitleggen als projecties van een draaiende wijzer, en afleiden als een draaiing over 90° met een factor ω.
- Je kan twee sinusoïden van dezelfde frequentie optellen als vectoren en de amplitude en fase van de som berekenen.
- Je kan rekenen met complexe getallen in de vorm a + bj en in poolvorm (optellen, vermenigvuldigen, delen, toegevoegde, modulus, argument met het juiste kwadrant).
- Je kan de formule van Euler afleiden en gebruiken, en complexe getallen in Python (cmath, numpy) inzetten.
- Je kan sinusoïden als fasoren voorstellen en er sommen en afgeleiden mee berekenen, en een fasor uit bemonsterde metingen halen.
- Je kan zwevingen en aliasing verklaren met wijzers die met verschillende snelheden draaien.

- Je kan de impedantie van R, L en C als complex getal afleiden en gebruiken voor een eenvoudige kring, en een gedwongen trilling met een fasor oplossen.
- Je kan voor de netomvormer van het station amplitude, frequentie en fase vastleggen en de stroom bij een gemengde belasting met fasoren berekenen.

VERHAAL · 7.1

Onmogelijke getallen die het net doen draaien

1/26

In 1545 publiceerde de Italiaanse arts en wiskundige Gerolamo Cardano in zijn *Ars Magna* een formule voor derdegraadsvergelijkingen. Bij sommige vergelijkingen kwam er een wortel uit een negatief getal in voor, en Cardano wist er geen raad mee: zulke getallen noemde hij spitsvondig en nutteloos. Zijn landgenoot Rafael Bombelli durfde in 1572 gewoon verder te rekenen. Voor $x^3 = 15x + 4$ gaf de formule $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, terwijl $x = 4$ duidelijk een oplossing is. Bombelli merkte dat $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$: de twee derdemachtswortels zijn $2 + \sqrt{-1}$ en $2 - \sqrt{-1}$, en hun som is precies 4. Het 'onmogelijke' deel viel weg, en er kwam een echt antwoord uit.

Descartes noemde ze in 1637 smalend 'denkbeeldig' (imaginair), en die naam bleef. Leonhard Euler rekende er vrij mee en vond in 1748 het verband $\mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$. Rond 1800 toonden de Noors-Deense landmeter Caspar Wessel en de Zwitserse amateurwiskundige Jean-Robert Argand, los van elkaar, dat je zo'n getal kan tekenen als een punt in een vlak, en Gauss maakte de voorstelling vanaf 1831 bekend onder de naam 'complexe getallen'.

De doorbraak in de techniek kwam in 1893. Op een internationaal elektrotechnisch congres in Chicago toonde de ingenieur Charles Proteus Steinmetz hoe je wisselstroomkringen oplost door elke sinusoïde als een complex getal te schrijven. Wat eerder pagina's differentiaalvergelijkingen vroeg, werd rekenen zoals met de wet van Ohm. Datzelfde jaar werd de wereldtentoonstelling in Chicago met wisselstroom verlicht: de 'stroomoorlog' tussen gelijkstroom en wisselstroom was zo goed als beslecht. Steinmetz' methode maakte het ontwerpen van wisselstroomnetten, transformatoren en motoren voor gewone ingenieurs haalbaar. Elektrotechnici schrijven de imaginaire eenheid als j, omdat i al bezet is door de stroom; wiskundigen en natuurkundigen schrijven i. Python volgt de ingenieurs: `3 + 4j`.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het station krijgt een netomvormer die van 48 V gelijkspanning 230 V wisselspanning maakt, en op het proefterrein kan het zelfs stroom aan het net leveren. Hoeveel stroom de omvormer levert bij een pomp en een verwarming samen, en waarom hij exact in de pas moet lopen met het net, reken je met fasoren uit. Dezelfde wiskunde draagt de trillingen (hoofdstuk 11), de wisselstroom (20), de filters (21) en de vermogenselektronica (24).



Rond 1890 werd wisselstroom de standaard; met complexe getallen werd het rekenen eraan haalbaar.

UITLEG · 7.2

Wat je al weet, en de vraag van dit hoofdstuk

wat je al kan	wat nu komt
sinus, cosinus en tangens in een rechthoekige driehoek; vectoren optellen en ontbinden (hoofdstuk 6 van I)	sinus en cosinus als projecties van een draaiende vector; sinussen optellen als vectoren
bemonsteren, bemonsteringsfrequentie, PWM (hoofdstuk 25 van I)	bemonsteren als een wijzer in stapjes; zwevingen en aliasing
$(\sin x)' = \cos x$; $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ bij een wisselspanning (hoofdstuk 1)	afleiden = de wijzer 90° draaien en met ω rekken: vermenigvuldigen met $j\omega$
effectieve waarde $\hat{U}/\sqrt{2}$ (hoofdstuk 3); de RC-kring als differentiaalvergelijking (hoofdstuk 4)	de RC-kring bij een sinus zonder differentiaalvergelijking, met impedanties
rotatiematrix, vectoren in het vlak (hoofdstuk 5)	complexe getallen: één getal voor een vector, vermenigvuldigen = draaien

Tot nu toe kwamen sinussen losse keren voor: de helling van $\sin x$ (hoofdstuk 1), de effectieve waarde (hoofdstuk 3), een condensator aan het net (opdracht 1.13). In de techniek zijn ze overal, omdat elke draaiende machine ze maakt en omdat elk periodiek signaal een som van sinussen is (hoofdstuk 21). Dit

hoofdstuk geeft je het gereedschap om er vlot mee te rekenen: de draaiende wijzer, de complexe getallen, en hun combinatie, de **fasor**.

De Habitat-vraag: het station krijgt een 48 V-net met een omvormer naar 230 V (de basisfiche). Wat moet die omvormer precies maken, en welke stroom levert hij als de noodverwarming en de drukpomp van het drinkwater tegelijk draaien? De tweede vraag lijkt een optelling, maar een pomp neemt haar stroom 'te laat': stromen van verschillende toestellen tel je als wijzers op, niet als getallen.

230 V is geen oefenmateriaal

Alles wat in dit hoofdstuk over het net gaat, reken je uit; je meet het niet zelf. Een oscilloscoop of een Arduino rechtstreeks aan het net is levensgevaarlijk (hoofdstuk 5 en 19 van F). Metingen aan 230 V doet een bevoegd elektricien met geïsoleerde tastkoppen. Oefen met een functiegenerator of een transformator met een lage spanning.

UITLEG · 7.3

De sinusoïde: amplitude, periode, frequentie en fase

Een **sinusoïde** is elk signaal van de vorm

SINUSOÏDE

$$a(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$\hat{A}$: **amplitude** (de piekwaarde). T: **periode** (s). $f = 1/T$: **frequentie** (Hz). ω: **hoekfrequentie** (rad/s). φ: **fase** op $t = 0$ (rad of graden).

We nemen de cosinus als referentie, zoals de elektrotechniek; een sinus is dan gewoon een cosinus met een fase van $-90°$: $\sin x = \cos(x - 90°)$. De fase verschuift het signaal in de tijd. De piek van $\cos(\omega t + \varphi)$ valt waar $\omega t + \varphi = 0$, dus op $t = -\varphi/\omega$. In de figuur heeft de netspanning $\varphi = -60°$: ze bereikt haar piek $T/6 = 3{,}33\,\text{ms}$ later dan de referentie. Een negatieve fase betekent **later** (naijlen), een positieve **eerder** (voorijlen).

FASEVERSCHIL EN TIJDVERSCHIL

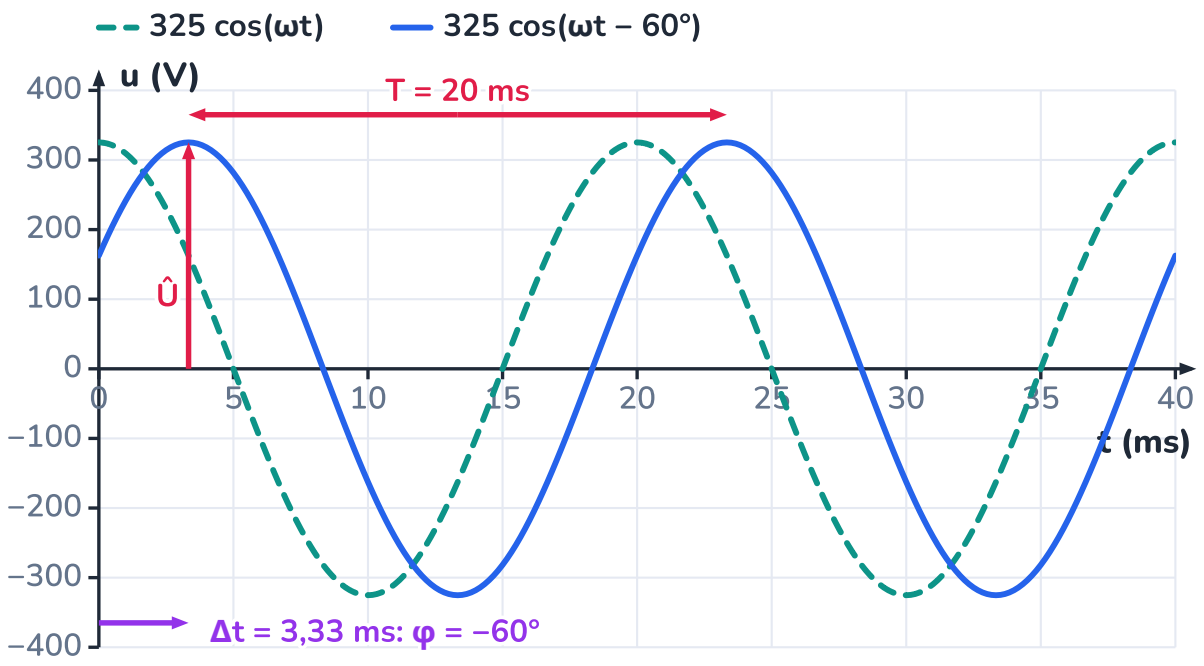
$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{360°}\,T$$

Bij 50 Hz is $1°$ gelijk aan $20\,\text{ms}/360 = 55{,}6\,\mu\text{s}$.

Echte signalen in en rond het station:

signaal	amplitude	f	T	ω
netspanning	325 V (230 V effectief)	50 Hz	20 ms	314,2 rad/s
stemtoon A (geluidsdruk)	0,1 Pa (ongeveer 71 dB)	440 Hz	2,273 ms	2765 rad/s
ventilator WTW-unit (1500 tpm), versnelling	0,5 m/s²	25 Hz	40 ms	157,1 rad/s
buitentemperatuur over een dag (ruwweg)	enkele °C	1 per dag	24 h	$7{,}27\cdot10^{-5}$ rad/s

Waarom zijn sinusoïden zo gewoon? Elke eenparige draaiing (een generator, een ventilator, de aarde) maakt ze, en elke trilling van een massa aan een veer ook (hoofdstuk 11). En een sinusoïde blijft een sinusoïde als je ze afleidt, integreert, vertraagt of optelt met een andere van dezelfde frequentie. Dat maakt ze tot de natuurlijke bouwstenen van signalen.



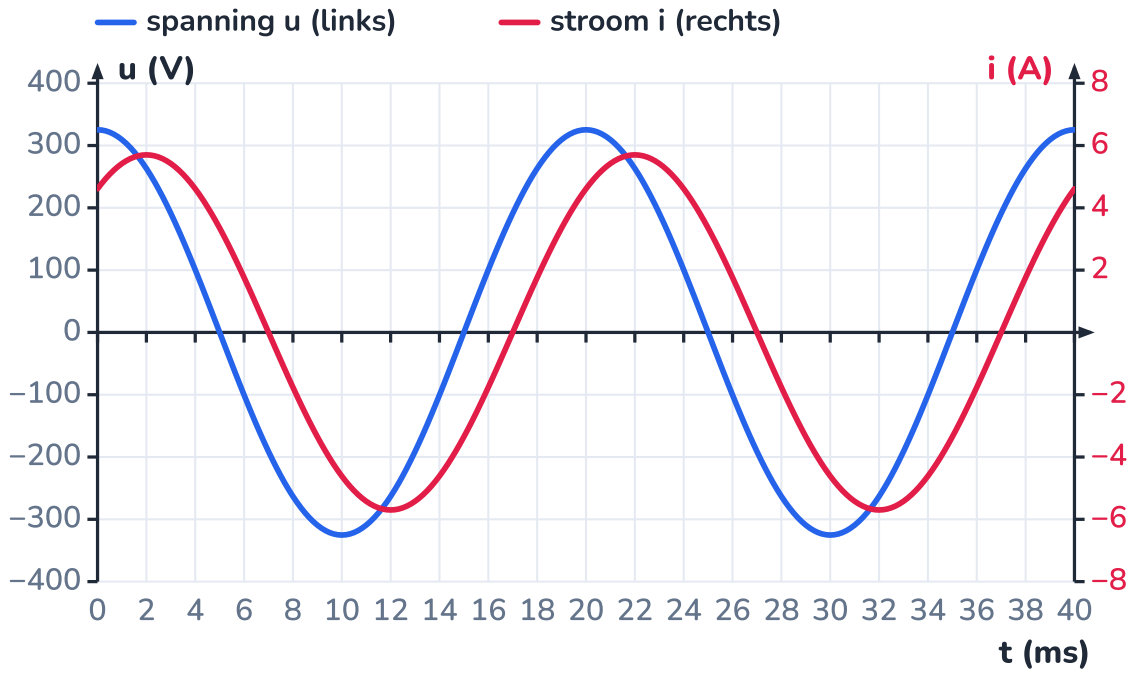
De netspanning met een fase van −60° (volle lijn) tegenover de referentie (stippellijn): dezelfde amplitude en periode, 3,33 ms later.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.4

Een oscilloscoopbeeld lezen

4/26

Een elektricien meet met een differentiaaltastkop en een stroomtang de spanning en de stroom van de drukpomp van het drinkwater. Het beeld staat hieronder (2 ms per hokje). Bepaal frequentie, amplitudes, effectieve waarden en het faseverschil. Welk signaal ijlt voor?



Spanning (links) en stroom (rechts) van de drukpomp: de stroompiek komt één hokje, 2 ms, na de spanningspiek.

GEGEVEN

- het oscilloscoopbeeld: spanning (links, V) en stroom (rechts, A)

GEVRAAGD

- f, $\hat{U}$, $\hat{I}$, U_{eff}, I_{eff}
- Δt en $\Delta\varphi$

OPLOSSING

1. Periode: de spanning heeft pieken op 0, 20 en 40 ms, dus $T = 20\,\text{ms}$ en $f = 1/T = 50\,\text{Hz}$.
2. Amplitudes: $\hat{U} \approx 325\,\text{V}$ en $\hat{I} \approx 5{,}7\,\text{A}$. Effectief: $U_{\text{eff}} = 325/\sqrt{2} = 230\,\text{V}$ en $I_{\text{eff}} = 5{,}7/\sqrt{2} = 4{,}03\,\text{A}$ (hoofdstuk 3).
3. De stroompiek valt $2{,}0\,\text{ms}$ (één hokje) na de spanningspiek. $\Delta\varphi = \frac{2{,}0}{20} \cdot 360^\circ = 36^\circ$.
4. De stroom komt later: hij **ijlt 36° na** op de spanning. Met de spanning als referentie: $u = 325\cos(\omega t)$ en $i = 5{,}7\cos(\omega t - 36^\circ)$.

ANTWOORD

$f = 50\,\text{Hz}$; $\hat{U} = 325\,\text{V}$ (230 V eff.), $\hat{I} = 5{,}7\,\text{A}$ (4,03 A eff.); de stroom ijlt 36° na. Een motor gedraagt zich deels als een spoel: de stroom komt later dan de spanning.

Klopt dit? Het gemiddelde vermogen is $\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\Delta\varphi = \frac{1}{2} \cdot 325 \cdot 5{,}7 \cdot \cos 36^\circ = 750\,\text{W}$ (opdracht 7.18 bewijst die formule): het opgegeven vermogen van de pomp. Zonder faseverschil zou $U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} = 927\,\text{W}$ uitkomen: het faseverschil kost niets, maar de stroom is groter dan nodig.

De sinus als schaduw van een draaiende wijzer

Laat een pijl (een **wijzer**) met lengte $\hat{A}$ eenparig rond de oorsprong draaien, tegen de klok in, met hoeksnelheid ω. Op tijdstip t maakt hij een hoek $\omega t + \varphi$ met de horizontale as. Zijn horizontale projectie is $\hat{A}\cos(\omega t + \varphi)$, zijn verticale $\hat{A}\sin(\omega t + \varphi)$ (hoofdstuk 6 van I: de componenten van een vector). Teken je de verticale projectie uit naar rechts tegen de tijd, dan krijg je een sinus; de horizontale naar onder, een cosinus. Eén omwenteling is één periode: daarom is $\omega = 2\pi/T$ in radialen per seconde.

Het beeld maakt drie dingen vanzelfsprekend. De **amplitude** is de lengte van de wijzer. De **fase** is de hoek waarmee hij op $t = 0$ vertrekt. En een **faseverschil** tussen twee sinusoïden van dezelfde frequentie is de hoek tussen hun wijzers; die blijft constant, want ze draaien samen rond.

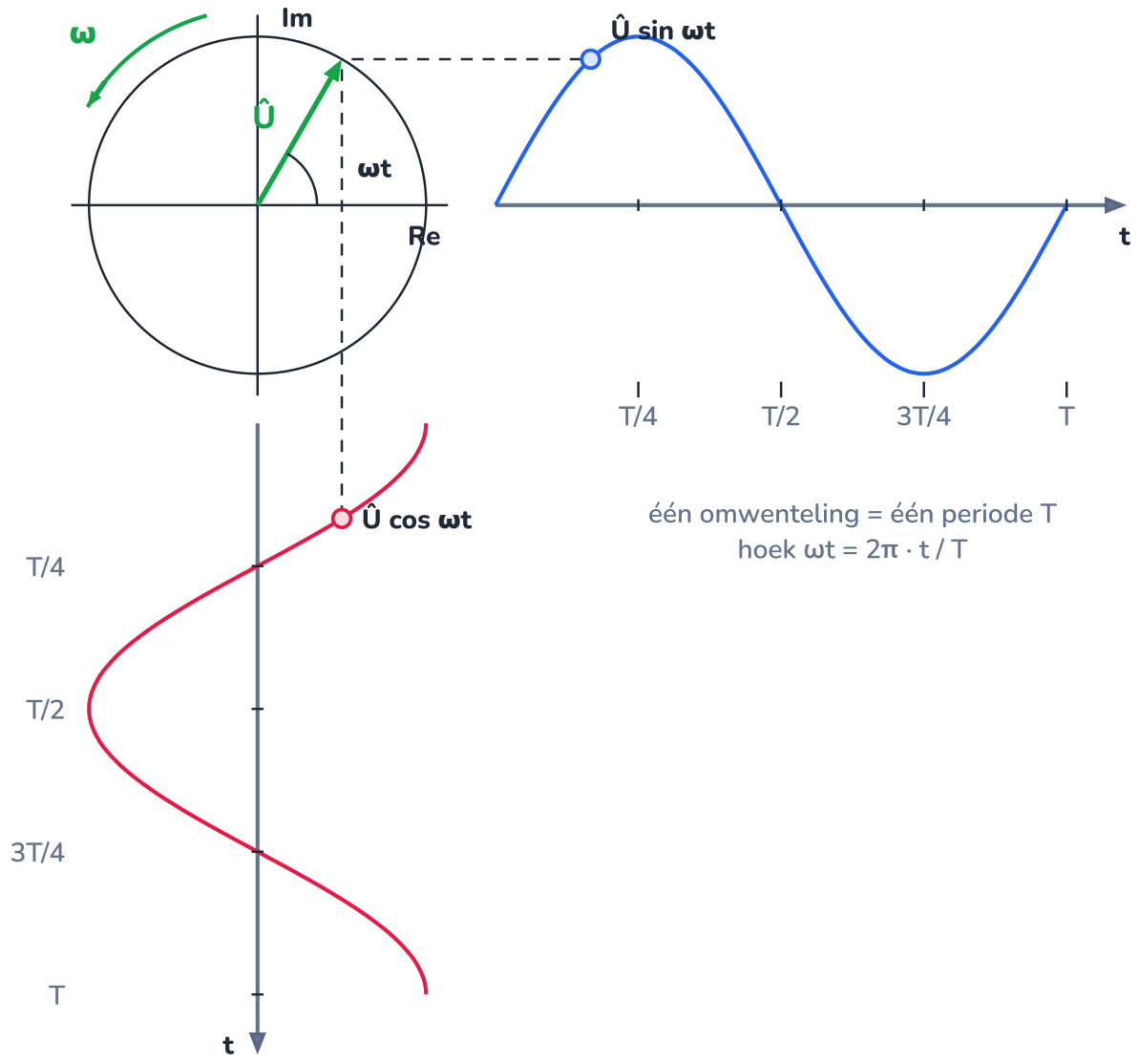
Ook afleiden wordt een beeld. Uit hoofdstuk 1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat{A}\cos(\omega t + \varphi) = -\omega\hat{A}\sin(\omega t + \varphi) = \omega\hat{A}\cos(\omega t + \varphi + 90^\circ).$$

De afgeleide is een wijzer die ω keer zo lang is en een kwartslag (90°) voorligt. Twee keer afleiden geeft ω^2 en 180°: precies tegengesteld. Integreren draait 90° terug en deelt door ω.

Radialen

ωt moet in radialen staan als je afleidt ($(\sin x)' = \cos x$ geldt alleen in radialen, hoofdstuk 1). Fasen mag je in graden noteren, zolang je bij het rekenen omzet: $1\,\mathrm{rad} = 57{,}3^\circ$. In Python: `math.radians` en `math.degrees`.



De wijzer staat op ωt = 60°. Zijn verticale projectie is de sinus rechts, zijn horizontale projectie de cosinus onder (met de tijd naar onder).

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.6

Hoe ver trilt de ventilator?

6/26

Een versnellingsmeter op de behuizing van de ventilatie-unit met warmteterugwinning meet een sinusoïdale trilling van 25 Hz (de ventilator draait 1500 toeren per minuut) met een amplitude van 0,5 m/s². Hoe groot zijn de snelheid en de uitwijking, en hoe liggen ze in fase tegenover de versnelling?

GEGEVEN

- $a(t) = 0{,}5\cos(\omega t)\,\mathrm{m/s^2}$, $f = 25\,\mathrm{Hz}$

GEVRAAGD

- $\hat{v}$ en $\hat{x}$, met hun fase

OPLOSSING

1. $\omega = 2\pi \cdot 25 = 157{,}1\,\mathrm{rad/s}$ (1500 tpm $=$ 25 omwentelingen per seconde).
2. Integreren deelt door ω en draait 90° terug: $\hat{v} = 0{,}5/157{,}1 = 3{,}18\,\mathrm{mm/s}$, en $v(t) = 3{,}18\cos(\omega t - 90^\circ)\,\mathrm{mm/s}$.

3 Nog eens: $\hat{x} = 0{,}5/\omega^2 = 20{,}3\,\mu\text{m}$, en $x(t) = 20{,}3\cos(\omega t - 180°)\,\mu\text{m}$: de uitwijking is precies tegengesteld aan de versnelling.

4 Controle door af te leiden: $x = -X\cos\omega t$ geeft $\ddot{x} = \omega^2 X\cos\omega t$, en $\omega^2 X = 24\,674 \cdot 20{,}3 \cdot 10^{-6} = 0{,}5\,\text{m/s}^2$.

ANTWOORD

$\hat{v} = 3{,}2\,\text{mm/s}$ (90° achter op a), $\hat{x} = 20\,\mu\text{m}$ (180°: tegengesteld). Een halve meter per seconde kwadraat klinkt veel, maar bij 25 Hz is het een trilling van twee honderdsten van een millimeter.

Klopt dit? Dimensies: m/s² gedeeld door rad/s geeft m/s, nog eens gedeeld: m. Een tegengestelde uitwijking en versnelling is precies wat een massa aan een veer doet ($m\ddot{x} = -kx$): hoofdstuk 11 bouwt erop verder, en een trillingsnorm voor machines gebruikt net deze snelheid (mm/s).

UITLEG · 7.7

Twee sinussen van dezelfde frequentie optellen

7/26

Wat is $10\cos\omega t + 6\cos(\omega t + 60°)$? Met de somformule van de cosinus lukt het, maar het wordt snel een bladzijde. Met wijzers is het een vectorsom: beide wijzers draaien met dezelfde ω rond, dus hun **som** is ook een wijzer die met ω draait. En de projectie van een som is de som van de projecties. Dus: tel de wijzers op $t = 0$ op als vectoren (kop aan staart of met het parallellogram), en de somwijzer geeft amplitude en fase van de somsinusoïde.

In componenten (hoofdstuk 6 van I): $A_1 = (10;\ 0)$ en $A_2 = (6\cos 60°;\ 6\sin 60°) = (3;\ 5{,}196)$. Samen $(13;\ 5{,}196)$, met lengte $\sqrt{13^2 + 5{,}196^2} = 14{,}00$ en hoek $\text{atan2}(5{,}196;\ 13) = 21{,}79°$:

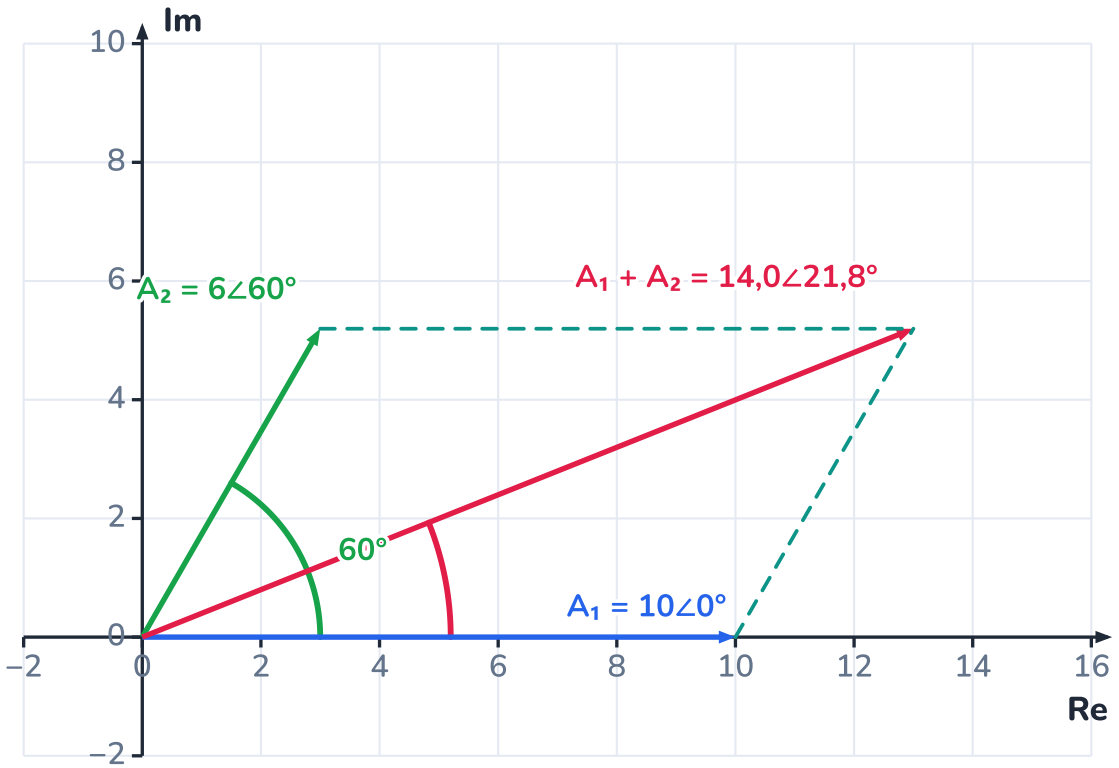
$$10\cos\omega t + 6\cos(\omega t + 60°) = 14{,}0\cos(\omega t + 21{,}8°).$$

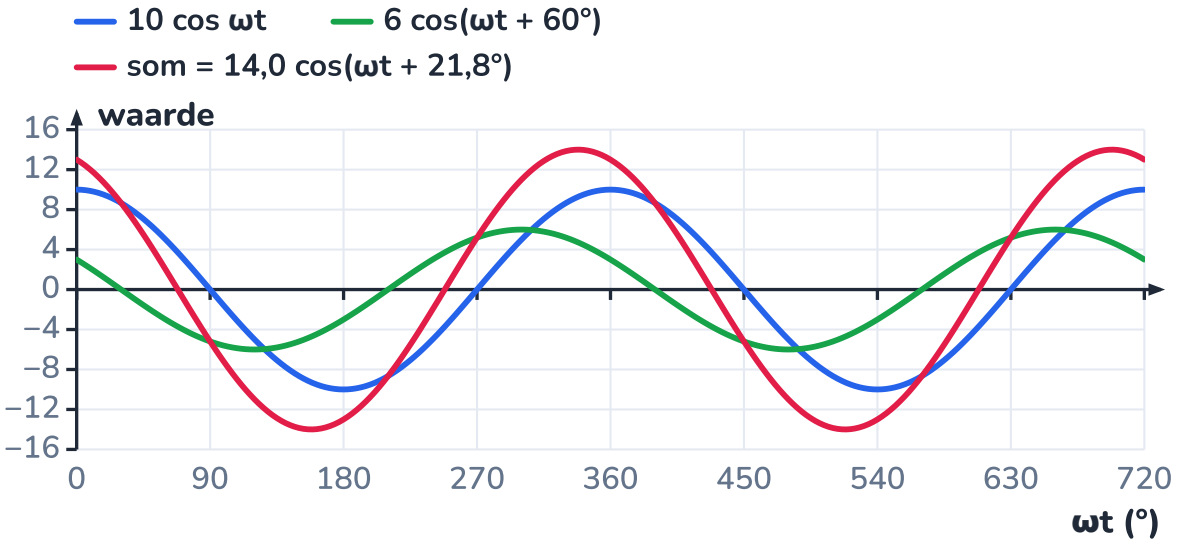
AMPLITUDE VAN EEN SOM (COSINUSREGEL)

$$\hat{A}^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

In fase ($\Delta\varphi = 0$): de amplitudes tellen op. In tegenfase ($180°$): ze trekken af. Een kwartslag ($90°$): $\hat{A} = \sqrt{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2}$, zoals bij Pythagoras.

Let op het gevolg: $10 + 6$ geeft hier geen 16 maar 14,0. Twee stromen van 10 A en 6 A in een knooppunt geven samen niet altijd 16 A. Dat zie je terug bij de omvormer van het station.





Boven de wijzers op t = 0: de som volgt uit het parallellogram. Onder dezelfde drie signalen in de tijd: de somkromme heeft amplitude 14 en ligt 21,8° voor op de eerste.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.8

Twee luidsprekers, één toon

8/26

Twee luidsprekers spelen dezelfde toon van 440 Hz, in fase. Op een luisterplek komt de geluidsgolf van de eerste met een amplitude van 0,10 Pa aan, die van de tweede (verder weg) met 0,09 Pa, en die tweede heeft een weg afgelegd die 0,26 m langer is. Hoe groot is de geluidsdruk op die plek? Waar zou het het stilst zijn? Geluidssnelheid 343 m/s.

GEGEVEN

- $f = 440\,\mathrm{Hz}$, $c = 343\,\mathrm{m/s}$

GEVRAAGD

- $\hat{p}$ van de som

- $\hat{p}_1 = 0{,}10\,\text{Pa}$, $\hat{p}_2 = 0{,}09\,\text{Pa}$, $\Delta s = 0{,}26\,\text{m}$

- de weglengte voor de grootste uitdoving

OPLOSSING

1. Golflengte: $\lambda = c/f = 343/440 = 0{,}780\,\text{m}$. Een omweg Δs komt $\Delta s/c$ later aan: een faseachterstand $\Delta\varphi = 360° \cdot \Delta s/\lambda = 120{,}1°$.

2. Wijzers: $P_1 = 0{,}10\angle 0°$ en $P_2 = 0{,}09\angle -120{,}1° = -0{,}0451 - 0{,}0779\,j$ Pa.

3. Som: $0{,}0549 - 0{,}0779\,j$, met lengte $0{,}0953\,\text{Pa}$. Cosinusregel ter controle: $\sqrt{0{,}01 + 0{,}0081 + 2 \cdot 0{,}009 \cos 120{,}1°} = 0{,}0953$.

4. Het stilst is het bij $180°$: $\Delta s = \lambda/2 = 0{,}390\,\text{m}$ (of $\lambda/2 + k\lambda$). Daar blijft $0{,}10 - 0{,}09 = 0{,}01\,\text{Pa}$ over.

ANTWOORD

$\hat{p} = 0{,}095\,\text{Pa}$**: minder dan elke luidspreker afzonderlijk, tegenover 0,19 Pa op een plek zonder omweg. Bij een omweg van 39 cm is het bijna stil.**

Klopt dit? Zo werkt ruisonderdrukking in een koptelefoon: een microfoon meet het omgevingsgeluid en een luidsprekertje speelt het in tegenfase. Voor lage tonen (grote λ) lukt dat goed; voor hoge tonen moet de fase veel nauwkeuriger kloppen.

UITLEG · 7.9

Complexe getallen: rekenen met j

9/26

Een wijzer is een vector in het vlak: twee getallen. Het wordt veel handiger als je er **één** getal van maakt. Voer een nieuw getal j in met

COMPLEX GETAL

$$j^2 = -1, \qquad z = a + bj \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$a = \text{Re}\, z$ is het reële deel, $b = \text{Im}\, z$ het imaginaire deel (een reëel getal!). Wiskundigen schrijven i, elektrotechnici j.

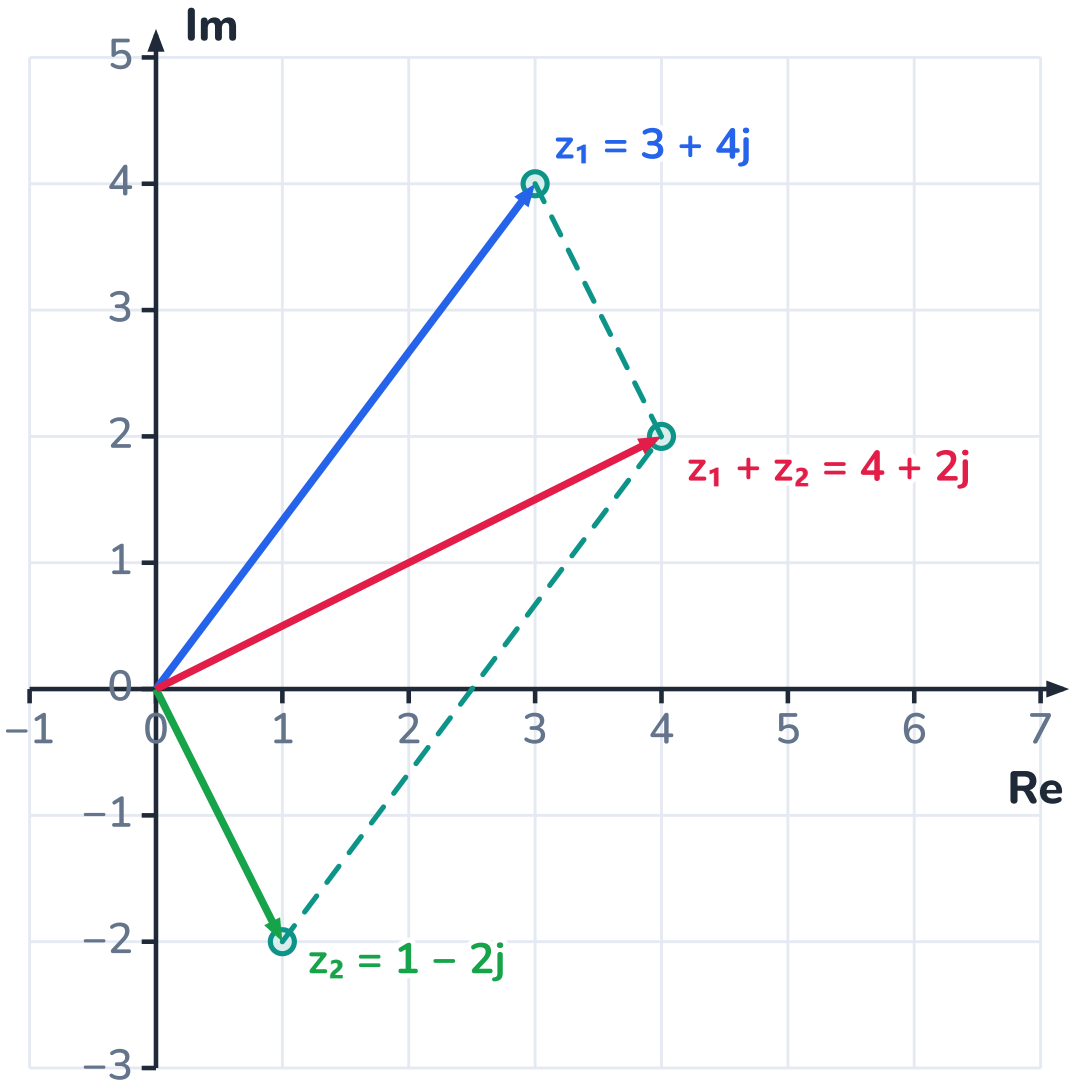
Je rekent zoals met veeltermen in j, en vervangt j^2 telkens door -1:

- optellen per deel: $(3 + 4j) + (1 - 2j) = 4 + 2j$ (vectoren optellen);
- vermenigvuldigen: $(3 + 4j)(1 - 2j) = 3 - 6j + 4j - 8j^2 = 11 - 2j$;
- de **toegevoegde** $\bar{z} = a - bj$ spiegelt over de reële as, en $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ is reëel;
- delen: vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde van de noemer: $\dfrac{3 + 4j}{1 - 2j} = \dfrac{(3 + 4j)(1 + 2j)}{1 + 4} = \dfrac{-5 + 10j}{5} = -1 + 2j$.

In het **complexe vlak** (Wessel en Argand) staat $a + bj$ op het punt $(a;\ b)$. De **modulus** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ is de lengte van de pijl, het **argument** $\arg z$ de hoek met de positieve reële as. Optellen is vectoren optellen; wat vermenigvuldigen betekent, zie je op het volgende blad.

Het argument is atan(b/a)

Alleen als $a > 0$. De getallen $2 + 2j$ en $-2 - 2j$ hebben dezelfde $b/a = 1$, maar de eerste ligt op $45°$ en de tweede op $-135°$. Gebruik **atan2**(b, a), die naar de tekens van beide kijkt (in Python `math.atan2(b, a)` of `cmath.phase(z)`), of teken het getal even.



Een complex getal is een punt of een pijl in het complexe vlak; optellen gaat met het parallellogram, net als bij wijzers.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.10

Rekenen met complexe getallen

10/26

Bereken voor $z_1 = 3 + 4j$ en $z_2 = 1 - 2j$: $z_1 z_2$, z_1/z_2, $|z_1|$, $\arg z_1$ en $\arg z_2$. Schrijf daarna $z_3 = -2 - 2j$ in poolvorm, en los $z^2 + 2z + 5 = 0$ op.

GEGEVEN

- $z_1 = 3 + 4j$, $z_2 = 1 - 2j$, $z_3 = -2 - 2j$

GEVRAAGD

- product, quotiënt, moduli en argumenten

- de oplossingen van de vierkantsvergelijking

OPLOSSING

1. $z_1 z_2 = 3 - 6j + 4j - 8j^2 = 11 - 2\,j$ en $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(3+4j)(1+2j)}{1^2+2^2} = \dfrac{3+6j+4j+8j^2}{5} = -1 + 2\,j$.

2. $|z_1| = \sqrt{9+16} = 5$ en $\arg z_1 = \operatorname{atan2}(4,3) = 53{,}13°$; $|z_2| = \sqrt{5} = 2{,}236$, $\arg z_2 = -63{,}43°$ (vierde kwadrant).

3. Controle met de poolvorm: $|z_1 z_2| = 5 \cdot \sqrt{5} = 11{,}180$ en $\arg(z_1 z_2) = 53{,}13° + (-63{,}43°) = -10{,}30°$: $11 - 2\,j$ heeft modulus $\sqrt{125}$ en ligt net onder de reële as. Klopt.

4. $z_3 = -2 - 2j$: $|z_3| = \sqrt{8} = 2{,}828$, derde kwadrant, dus $\arg z_3 = -135°$ (of $225°$). $z_3 = 2{,}828\angle -135°$.

5. $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$. Controle: $(-1+2j)^2 + 2(-1+2j) + 5 = (1 - 4j - 4) - 2 + 4j + 5 = 0$.

ANTWOORD

$z_1 z_2 = 11 - 2j$, $z_1/z_2 = -1 + 2j$, $|z_1| = 5$, $\arg z_1 = 53{,}13°$, $\arg z_2 = -63{,}43°$; $z_3 = 2{,}828\angle -135°$; $z = -1 \pm 2j$.

Klopt dit? Een vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten en een negatieve discriminant heeft twee toegevoegde oplossingen. Zulke paren duiken op bij elke gedempte trilling: de -1 geeft de demping, de $\pm 2j$ de trillingsfrequentie (verderop).

UITLEG · 7.11

Poolvorm: vermenigvuldigen is draaien en schalen

11/26

Een complex getal met modulus r en argument φ is

POOLVORM

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r\angle\varphi \qquad a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi$$

$r = |z|$, $\varphi = \arg z = \operatorname{atan2}(b, a)$.

Vermenigvuldig twee getallen in poolvorm en gebruik de somformules $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ en $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$:

$$r_1(\cos\alpha + j\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta + j\sin\beta) = r_1 r_2\big(\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)\big).$$

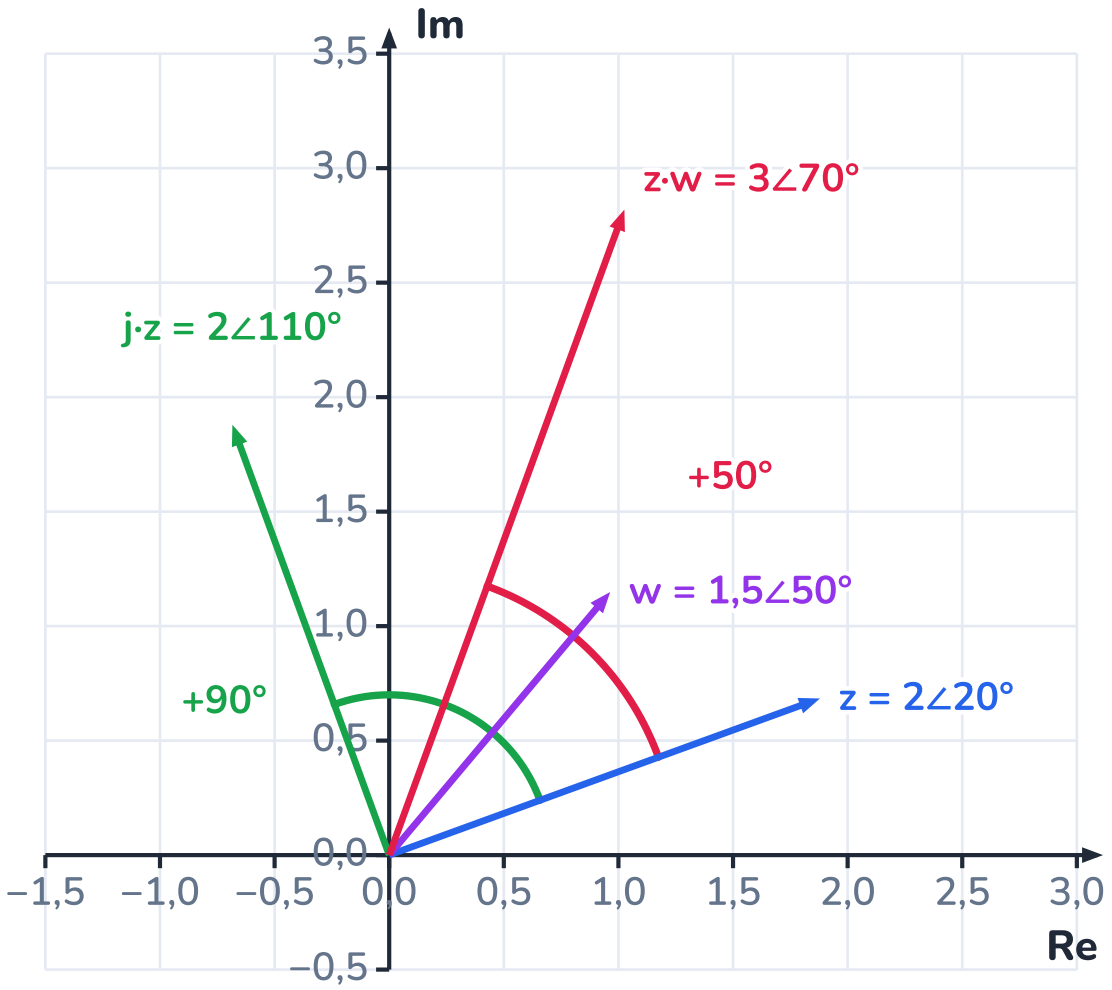
VERMENIGVULDIGEN EN DELEN IN POOLVORM

$$r_1\angle\alpha \cdot r_2\angle\beta = r_1 r_2\angle(\alpha+\beta) \qquad \frac{r_1\angle\alpha}{r_2\angle\beta} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\alpha-\beta)$$

De moduli vermenigvuldigen, de hoeken tellen op. Optellen doe je in de vorm $a + bj$, vermenigvuldigen en delen in poolvorm.

Vermenigvuldigen met $w = r\angle\beta$ is dus: **draaien** over β en **schalen** met r. Vermenigvuldigen met $j = 1\angle 90°$ is een kwartslag tegen de klok in, en $j \cdot j$ een halve slag: -1. Dat is de meetkundige betekenis van $j^2 = -1$. Vermenigvuldigen met $1\angle\beta$ doet hetzelfde als de rotatiematrix van hoofdstuk 5:

$$(\cos\beta + j\sin\beta)(a + bj) = (a\cos\beta - b\sin\beta) + j(a\sin\beta + b\cos\beta).$$



j · z is z een kwartslag gedraaid; z · w heeft lengte 2 · 1,5 = 3 en hoek 20° + 50° = 70°.

UITLEG · 7.12

De formule van Euler

12/26

Bekijk $f(\varphi) = \cos\varphi + j\sin\varphi$, de wijzer met lengte 1 op hoek φ. Leid af naar φ: $f'(\varphi) = -\sin\varphi + j\cos\varphi = j(\cos\varphi + j\sin\varphi) = j\,f(\varphi)$. Dus $f' = jf$ met $f(0) = 1$. Dat is dezelfde differentiaalvergelijking als $y' = ky$ uit hoofdstuk 4, met $k = j$, en die heeft als oplossing $\mathrm{e}^{k\varphi}$. Een differentiaalvergelijking met een beginwaarde heeft maar één oplossing, dus:

FORMULE VAN EULER

$$\mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

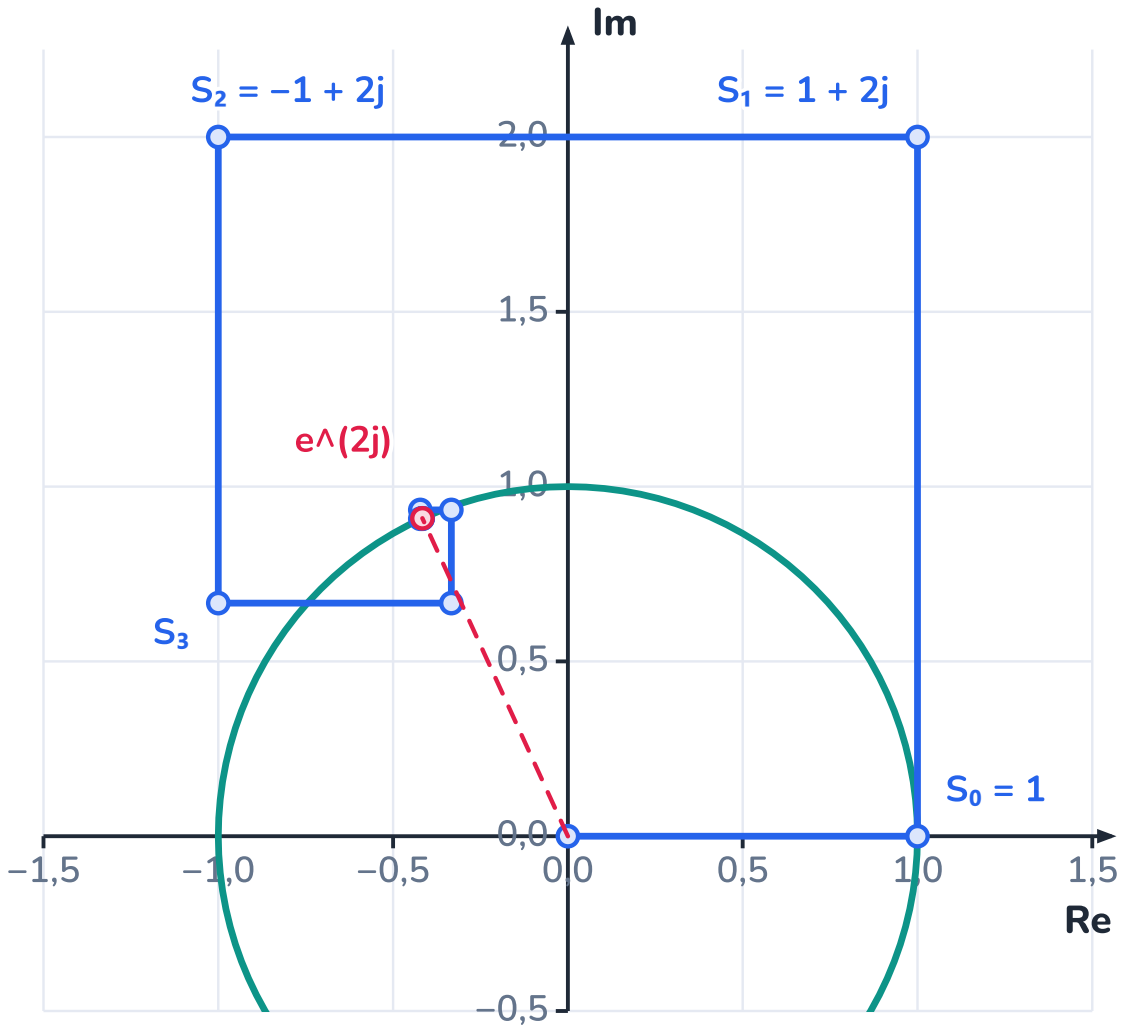
Een complexe exponentiële is een wijzer met lengte 1 en hoek φ. Met $\varphi = \pi$: $\mathrm{e}^{j\pi} + 1 = 0$, de vijf belangrijkste getallen van de wiskunde in één regel.

Een tweede weg, dezelfde conclusie: vul $x = j\varphi$ in de reeks $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ in. De machten van j lopen rond: $1, j, -1, -j, 1, \ldots$ De reële termen vormen de reeks van $\cos\varphi$, de imaginaire die van $\sin\varphi$. De figuur tekent de partiële sommen voor $\varphi = 2\,\mathrm{rad}$: elke term is een stukje dat een kwartslag

draait tegenover het vorige en snel korter wordt, en het pad spiraalt naar het punt $\cos 2 + j \sin 2$ op de eenheidscirkel.

Drie gevolgen die je steeds gebruikt:

- poolvorm kort: $z = r\,\mathrm{e}^{j\varphi}$, en $r_1\mathrm{e}^{j\alpha} \cdot r_2\mathrm{e}^{j\beta} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{j(\alpha+\beta)}$ (machten vermenigvuldigen: exponenten optellen);
- $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{e}^{j\varphi} + \mathrm{e}^{-j\varphi}}{2}$ en $\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{e}^{j\varphi} - \mathrm{e}^{-j\varphi}}{2j}$: een cosinus is de som van twee wijzers die in tegengestelde zin draaien;
- de formule van De Moivre $(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi$, waaruit elke verdubbelings- of verdrievoudigingsformule van de goniometrie volgt (opdracht 7.14).



De partiële sommen 1, 1 + 2j, −1 + 2j, … draaien telkens een kwartslag en worden korter; na tien termen liggen ze op het punt e^(2j) = cos 2 + j sin 2.

CODE · 7.13

Complexe getallen in Python

Python kent complexe getallen van huis uit: `3 + 4j` is een `complex`. De module `cmath` heeft de complexe versies van `exp`, `sqrt`, … en de omzettingen `polar` en `rect`; numpy rekent met hele reeksen complexe getallen tegelijk (`np.abs`, `np.angle`, `np.exp(1j * ...)`).

Python **complex.py** 23 regels

```python
# complex.py - rekenen met complexe getallen (Python schrijft j, net als de elektrotechniek)
import cmath
import math

z1, z2 = 3 + 4j, 1 - 2j
print("som      ", z1 + z2)
print("product  ", z1 * z2)
print("quotiënt ", z1 / z2)
print("toegevoegde van z1:", z1.conjugate(), "  |z1| =", abs(z1))
print("arg z1 = %.2f graden" % math.degrees(cmath.phase(z1)))

r, phi = cmath.polar(-2 - 2j)                  # poolvorm: phase gebruikt atan2, dus het juiste kwadrant
print("-2-2j in poolvorm: r = %.4f, hoek = %.1f graden" % (r, math.degrees(phi)))
print("naïef atan(b/a) zou %.1f graden geven" % math.degrees(math.atan(-2 / -2)))
print("2 met hoek 30 graden:", cmath.rect(2, math.radians(30)))

print("e^(j pi) =", cmath.exp(1j * math.pi))     # Euler: -1, op een afrondingsfout na
s, term = 0, 1
for k in range(12):                              # de reeks 1 + (j phi) + (j phi)^2/2! + ... voor phi = 2
    s += term
    term *= 2j / (k + 1)
print("reeks tot k = 11:", s)
print("cmath.exp(2j):   ", cmath.exp(2j))
```

Uitvoer:

```
som       (4+2j)
product   (11-2j)
quotiënt  (-1+2j)
toegevoegde van z1: (3-4j)   |z1| = 5.0
arg z1 = 53.13 graden
-2-2j in poolvorm: r = 2.8284, hoek = -135.0 graden
naïef atan(b/a) zou 45.0 graden geven
2 met hoek 30 graden: (1.7320508075688774+0.9999999999999999j)
e^(j pi) = (-1+1.2246467991473532e-16j)
reeks tot k = 11: (-0.4161552028218696+0.9092961359628027j)
cmath.exp(2j):    (-0.4161468365471424+0.9092974268256817j)
```

Drie dingen om op te letten. `cmath.phase` geeft -135° voor $-2-2j$, de naïeve arctangens 45°: een fout van een halve slag. $e^{j\pi}$ geeft $-1+1{,}2\cdot10^{-16}j$: de imaginaire rest is een afrondingsfout, zoals in hoofdstuk 1. En na twaalf termen valt de reeks samen met `cmath.exp(2j)` tot op zes decimalen: de faculteit in de noemer wint het snel van 2^k.

UITLEG · 7.14

Fasoren: sinusoïden als complexe getallen

Nu komt alles samen. Met Euler is de draaiende wijzer $\hat{A}\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}$, en de sinusoïde is zijn reële deel (de horizontale projectie):

FASOR

$$a(t) = \hat{A}\cos(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}\big(A\,\mathrm{e}^{j\omega t}\big), \qquad A = \hat{A}\,\mathrm{e}^{j\varphi} = \hat{A}\angle\varphi$$

De **fasor** A is de wijzer op $t=0$. De factor $\mathrm{e}^{j\omega t}$ is voor alle signalen met dezelfde frequentie dezelfde: je laat hem weg en rekent alleen met A.

Twee regels maken fasoren krachtig. **Optellen**: omdat $\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{j\omega t}) + \mathrm{Re}(B\mathrm{e}^{j\omega t}) = \mathrm{Re}\big((A+B)\mathrm{e}^{j\omega t}\big)$, is de fasor van een som de som van de fasoren. **Afleiden**: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(A\mathrm{e}^{j\omega t}\big) = j\omega A\,\mathrm{e}^{j\omega t}$, dus de fasor van de afgeleide is $j\omega A$: rekken met ω en een kwartslag draaien, precies wat de wijzer liet zien. Een differentiaalvergelijking wordt zo een algebraïsche vergelijking.

in de tijd	als fasor	waarom
$\hat{A}\cos(\omega t+\varphi)$	$A = \hat{A}\,\mathrm{e}^{j\varphi} = \hat{A}\angle\varphi$	definitie: $\mathrm{Re}(A\,\mathrm{e}^{j\omega t})$
$\hat{A}\sin(\omega t+\varphi)$	$\hat{A}\angle(\varphi-90°)$	$\sin x = \cos(x-90°)$
$a(t)+b(t)$	$A+B$	Re is lineair
$c\,a(t)$ (c reëel)	$c\,A$	idem
$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$	$j\omega\,A$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{j\omega t} = j\omega\,\mathrm{e}^{j\omega t}$
$\int a\,\mathrm{d}t$ (zonder constante)	$\frac{A}{j\omega}$	omgekeerd
$a(t)\cdot b(t)$	geen fasor	een product bevat 2ω en een gelijkdeel

⚠ Alleen bij één frequentie

Fasoren tellen alleen sinusoïden van **dezelfde** frequentie op: de factor $\mathrm{e}^{j\omega t}$ moet voor allemaal dezelfde zijn. Twee frequenties geven een zweving (verderop); een product van twee sinusoïden (zoals het vermogen $p = u\,i$) bevat de dubbele frequentie en is geen fasor.

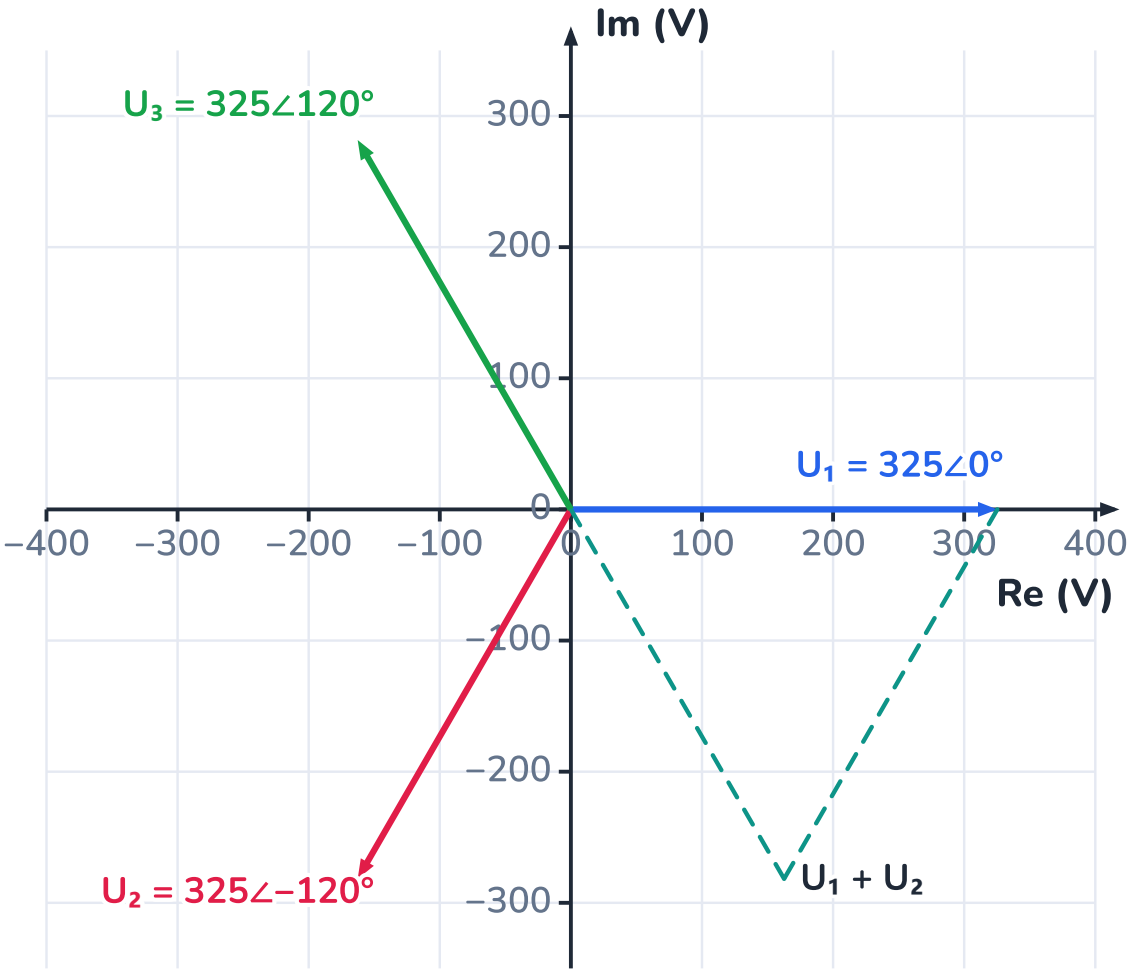
ⓘ Amplitude of effectieve waarde?

Hier is de lengte van de fasor de amplitude. In de elektrotechniek (hoofdstuk 20) geeft men de fasor meestal de **effectieve** waarde: $U = 230\angle 0°\ \mathrm{V}$ in plaats van $325\angle 0°\ \mathrm{V}$. Alle hoeken en verhoudingen blijven dezelfde; zeg er altijd bij welke je gebruikt. Het Habitat-voorbeeld verderop rekent met effectieve waarden.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.15

Het driefasige net: drie wijzers die samen nul zijn

Het openbare net levert drie fasen: drie spanningen van 230 V effectief tegenover de nulgeleider, 120° na elkaar. Toon met fasoren dat hun som op elk ogenblik nul is, en leg uit wat dat betekent voor de stroom in de nulgeleider als drie gelijke weerstanden elk op een fase hangen.



Drie wijzers van gelijke lengte, 120° uit elkaar; kop aan staart (stippellijnen) sluiten ze, dus hun som is nul.

GEGEVEN

- $U_1 = 325\angle 0°, U_2 = 325\angle -120°, U_3 = 325\angle 120°$ (V, amplitudes)

GEVRAAGD

- $U_1 + U_2 + U_3$ en het gevolg voor de nulgeleider

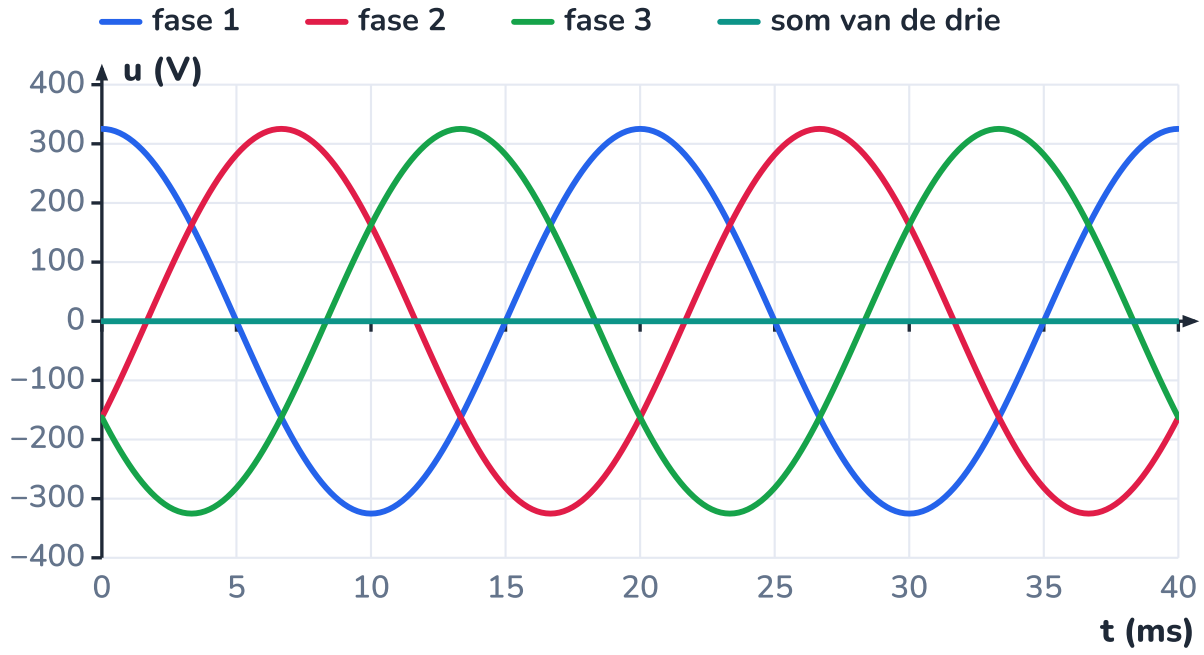
OPLOSSING

1. In de vorm $a + bj$: $U_1 = 325$, $U_2 = 325(\cos 120° - j \sin 120°) = -162{,}6 - 281{,}6j$, $U_3 = -162{,}6 + 281{,}6j$.
2. Som: reëel $325 - 162{,}6 - 162{,}6 = 0$, imaginair $-281{,}6 + 281{,}6 = 0$. Omdat de fasor van de som nul is, is de som in de tijd $\mathrm{Re}(0 \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}) = 0$ op elk ogenblik.
3. Meetkundig: kop aan staart vormen de drie wijzers een gelijkzijdige driehoek, die sluit.
4. Drie gelijke weerstanden R: de stromen zijn U_k/R, ook drie wijzers van gelijke lengte 120° uit elkaar. De stroom in de nulgeleider is hun som: nul. Bij een evenwichtige belasting draagt de nulgeleider niets.

ANTWOORD

$U_1 + U_2 + U_3 = 0$ op elk ogenblik (numeriek kleiner dan 10^{-12} V: afrondingsruis). Bij een evenwichtige driefasige belasting loopt er geen stroom in de nulgeleider: daarom kan een net met drie fasen veel vermogen transporteren met weinig koper.

Klopt dit? Is de belasting niet in evenwicht (een fase zwaarder belast), dan is de som van de stromen niet nul en draagt de nulgeleider het verschil. De spanning tussen twee fasen is $U_1 - U_2$, een wijzer met lengte $\sqrt{3} \cdot 325 = 563\,\mathrm{V}$ amplitude, of 400 V effectief: de '400 V' van een driefasige aansluiting (hoofdstuk 20).



In de tijd: op elk ogenblik tellen de drie fasespanningen op tot nul (de vlakke lijn).

CODE · 7.16

Een fasor uit metingen halen

16/26

Een energiemeter of de Pi van het station krijgt geen formule maar metingen: duizenden waarden van spanning en stroom. Hoe haal je daar amplitude en fase uit? Vermenigvuldig het signaal met $\mathrm{e}^{-j\omega t}$ en neem het gemiddelde over hele periodes. Voor $x(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{A}}{2}\left(\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} + \mathrm{e}^{-j(\omega t+\varphi)}\right)$ geeft dat

$$\overline{x(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}} = \frac{\hat{A}}{2}\mathrm{e}^{j\varphi} + \frac{\hat{A}}{2}\,\overline{\mathrm{e}^{-j(2\omega t+\varphi)}} = \frac{\hat{A}}{2}\mathrm{e}^{j\varphi},$$

want een wijzer die rondgaat, is over hele periodes gemiddeld nul. Twee keer dat gemiddelde is de fasor. Ruis en andere frequenties vallen grotendeels weg. Het programma doet dat met gesimuleerde metingen van de drukpomp (via geïsoleerde sensoren, zoals in een energiemeter).

Python **fasor_meten.py** 23 regels

```python
# fasor_meten.py - amplitude en fase van 50 Hz uit bemonsterde spanning en stroom
import numpy as np

fs, f = 5000, 50.0                      # 5000 metingen per seconde, netfrequentie
t = np.arange(0, 0.2, 1 / fs)           # 0,2 s = precies tien periodes
w = 2 * np.pi * f
rng = np.random.default_rng(1)
u = 325.3 * np.cos(w * t) + rng.normal(0, 5.0, t.size)                  # spanning met ruis (V)
```

```python
i = 5.70 * np.cos(w * t - np.radians(36)) + rng.normal(0, 0.1, t.size)    # stroom van de pomp (A)


def fasor(x):
    """Complexe amplitude: 2 * gemiddelde van x(t) * e^(-j w t) over hele periodes."""
    return 2 * np.mean(x * np.exp(-1j * w * t))


U, I = fasor(u), fasor(i)
for naam, X, eenheid in (("U", U, "V"), ("I", I, "A")):
    print("%s = %7.2f %s  hoek %6.2f graden" % (naam, abs(X), eenheid, np.degrees(np.angle(X))))
phi = np.angle(U) - np.angle(I)
print("faseverschil u - i: %.2f graden, cos phi = %.3f" % (np.degrees(phi), np.cos(phi)))
print("vermogen uit de fasoren  0,5 Re(U I*) = %.0f W" % (0.5 * (U * np.conj(I)).real))
print("vermogen uit de samples  gemiddelde(u i) = %.0f W" % np.mean(u * i))
```

Uitvoer:

```
U =  325.12 V  hoek   0.02 graden
I =    5.70 A  hoek -36.00 graden
faseverschil u - i: 36.02 graden, cos phi = 0.809
vermogen uit de fasoren  0,5 Re(U I*) = 749 W
vermogen uit de samples  gemiddelde(u i) = 749 W
```

Uit 1000 metingen met ruis komt de fasor op enkele tienden van een procent en een graad nauwkeurig terug. Het vermogen uit de fasoren, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(U\bar{I})$, is gelijk aan het gemiddelde van $u\,i$ over de metingen: twee wegen naar dezelfde 750 W. Dit gemiddelde van $x(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}$ is één 'bin' van de discrete Fouriertransformatie (hoofdstuk 21): doe het voor elke frequentie, en je hebt het spectrum.

> ⚠ **Hele periodes**
>
> Het gemiddelde over $0{,}2\,\mathrm{s}$ bevat precies tien periodes van 50 Hz. Neem je 9,5 periodes, dan middelt de wijzer met 2ω niet helemaal weg en krijg je een fout. Meetapparaten bemonsteren daarom synchroon met het net, of gebruiken een venster (hoofdstuk 21).

UITLEG · 7.17

Verschillende frequenties: zwevingen en aliasing

17/26

In de technische ruimte draaien twee ventilatoren, een van 1500 en een van 1560 toeren per minuut (25 en 26 Hz). Samen maken ze een brom die aanzwelt en wegsterft, één keer per seconde. Met de formule van Euler, of de somformule van de cosinus:

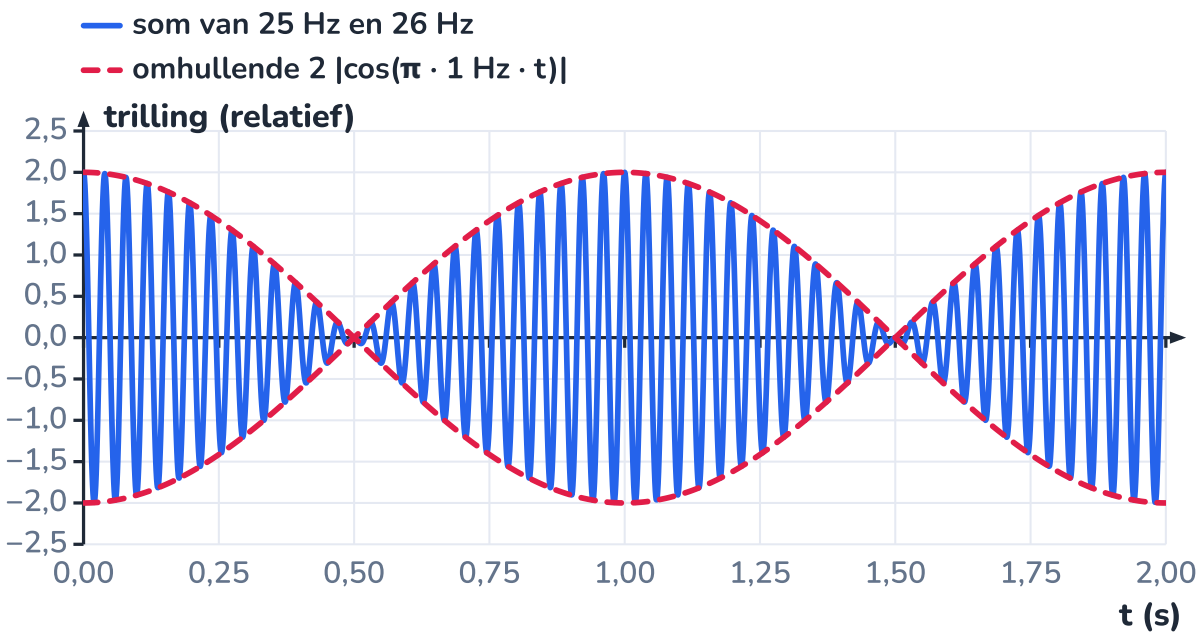
ZWEVING

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi\,\tfrac{f_2 - f_1}{2}\,t\right)\cos\left(2\pi\,\tfrac{f_1 + f_2}{2}\,t\right)$$

Een trilling op de gemiddelde frequentie (25,5 Hz) met een langzaam veranderende amplitude. De luidheid piekt telkens als de omhullende ± 2 is: $|f_2 - f_1|$ keer per seconde.

Met wijzers: de twee wijzers draaien bijna even snel. Bekijk je ze vanuit de eerste, dan draait de tweede langzaam rond met $2\pi(f_2 - f_1)$: soms liggen ze samen (luid), soms tegengesteld (stil). Muzikanten stemmen zo: twee snaren die 440 en 442 Hz geven, zweven twee keer per seconde, en je draait tot de zweving verdwijnt.

Aliasing (hoofdstuk 25 van I) is hetzelfde verhaal. Bemonsteren is de wijzer alleen op de meetmomenten bekijken. Draait hij tussen twee metingen meer dan een halve slag, dan lijkt hij de andere kant op te draaien, zoals een wagenwiel in een film achteruit lijkt te draaien. Een signaal van 50 Hz, 60 keer per seconde bemonsterd, draait 300° per meting en lijkt $-60°$ per meting te draaien: een schijnbaar signaal van $-10\,\mathrm{Hz}$ (opdracht 7.15). Daarom moet de bemonsteringsfrequentie meer dan twee keer de hoogste frequentie zijn (Nyquist, hoofdstuk 21).



De som van 25 en 26 Hz: een trilling van 25,5 Hz binnen een omhullende die één keer per seconde aanzwelt en wegsterft.

PROEF · 7.18

Zwevingen horen en meten

18/26

ONDERZOEKSVRAAG

Klopt het dat twee tonen met een klein frequentieverschil zweven met precies dat verschil?

MATERIAAL

- twee smartphones met een app die een zuivere sinustoon maakt (toongenerator)
- stopwatch
- optioneel: computer met een microfoon en Audacity of Python

Veiligheid

Houd het volume matig en de luidsprekers niet tegen je oor.



Twee toongeneratoren van 440 en 443 Hz: je hoort drie zwellingen per seconde.

WERKWIJZE

1. Stel de eerste telefoon in op 440 Hz, de tweede op 443 Hz, allebei op een matig volume. Leg ze naast elkaar.
2. Luister: je hoort één toon die regelmatig aanzwelt en wegsterft. Tel het aantal zwellingen in 20 s.
3. Herhaal met 441 Hz en met 446 Hz voor de tweede telefoon. Wat gebeurt er als beide op 440 Hz staan?
4. Optioneel: neem 5 s op met een microfoon en bekijk de golfvorm. Meet de tijd tussen twee minima van de omhullende.
5. Leg één telefoon een halve meter verder. Verandert de zwevingsfrequentie? Wat verandert er wel?

WAARNEMING

Voorbeeldresultaten: 440 en 443 Hz: 60 zwellingen in 20 s, dus 3,0 per seconde. 441 Hz: 1 per seconde; 446 Hz: 6 per seconde, al moeilijk te tellen. Bij gelijke frequenties geen zweving, maar een toon die luider of zachter is naargelang waar je hoofd zit. In de opname liggen de minima 0,33 s uit elkaar. Een telefoon verplaatsen verandert de zwevingsfrequentie niet, wel het moment waarop de minima vallen.

VERKLARING

De zwevingsfrequentie is $|f_2 - f_1|$, onafhankelijk van waar je staat: de relatieve wijzer draait met het frequentieverschil rond. De plaats bepaalt alleen de beginfase (hoe ver de tweede golf moet reizen), dus wanneer de wijzers samenvallen. Bij gelijke frequenties staan de wijzers stil tegenover elkaar: dan geldt de cosinusregel van het vorige voorbeeld, en hangt de luidheid af van de plek. Boven ongeveer 15 zwevingen per seconde hoor je geen aanzwellen meer, maar een ruwe klank.

UITLEG · 7.19

De brug naar wisselstroom: impedantie

19/26

Een weerstand, een spoel en een condensator aan een sinusvormige spanning. In de tijd gelden $u = R\,i$, $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ en $i = C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ (hoofdstuk 1). Met fasoren wordt afleiden vermenigvuldigen met $j\omega$:

$$U = R\,I, \qquad U = j\omega L\,I, \qquad I = j\omega C\,U.$$

Alle drie hebben de vorm van de wet van Ohm, $U = Z\,I$, met een complexe **impedantie**:

IMPEDANTIE VAN R, L EN C

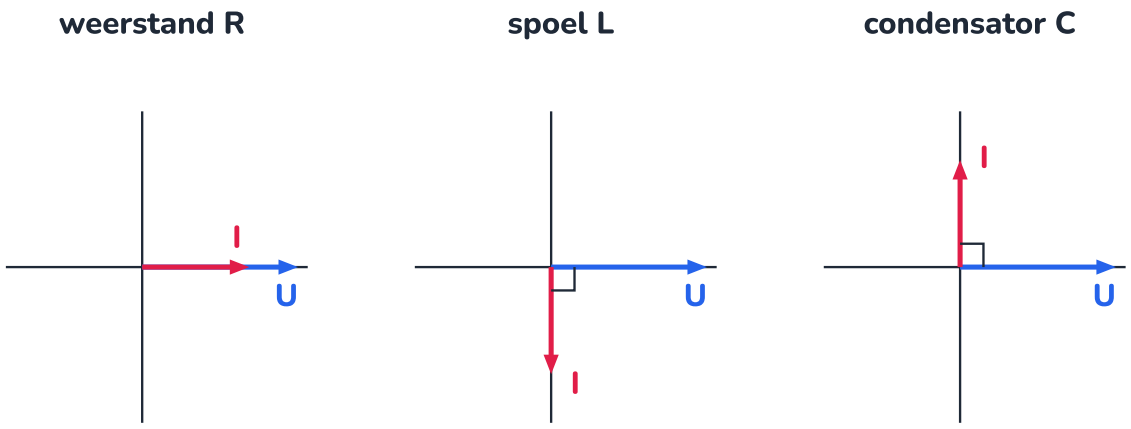
$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Eenheid: ohm. Bij een spoel ijlt de stroom $90°$ na (deel door j), bij een condensator ijlt hij $90°$ voor. $|Z_L| = \omega L$ groeit met de frequentie, $|Z_C| = 1/(\omega C)$ daalt.

Impedanties in serie tel je op, parallel neem je het omgekeerde van de som van de omgekeerden, net als weerstanden (hoofdstuk 21 van I), maar met complexe getallen. Een wisselstroomkring los je zo op met de wetten van Kirchhoff en complexe rekenkunde, zonder één differentiaalvergelijking; bij een groot net met de matrices van hoofdstuk 5. Alles wat daaruit volgt (resonantie, vermogen, arbeidsfactor, driefasige netten) is hoofdstuk 20.

Waarom een condensator gelijkstroom tegenhoudt

Bij gelijkspanning is $\omega = 0$ en $|Z_C| = 1/(\omega C)$ oneindig: er loopt geen stroom. Bij hoge frequentie wordt $|Z_C|$ klein: de condensator laat door. Voor een spoel is het net omgekeerd. Een ontstoringscondensator van 100 nF aan het net heeft $|Z_C| = 31{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ bij 50 Hz (een stroom van enkele mA, opdracht 1.13) maar maar $159\,\Omega$ bij 10 kHz: storing vloeit weg, het net niet.



Met de spanning als referentie: bij een weerstand valt de stroom samen met de spanning, bij een spoel ijlt hij 90° na, bij een condensator 90° voor.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.20

Het RC-filter aan de batterijdeler

20/26

Op pin A3 van de Mega meet de klimaatmodule de batterijspanning via een deler van 100 kΩ en 33 kΩ, met 100 nF van A3 naar de massa (hoofdstuk 22 van I). De groeilampen schakelen met PWM op 490 Hz, waardoor de 12,8 V-lijn rimpelt; neem een sinusvormige rimpel van 0,30 V amplitude. Hoeveel rimpel bereikt de ADC? En hoeveel een storing van 50 Hz? Los op met fasoren, en controleer met een simulatie in de tijd.

GEGEVEN

- deler 100 kΩ / 33 kΩ, $C = 100\,\mathrm{nF}$
- rimpel 0,30 V bij 490 Hz; ADC-stap 4,88 mV

GEVRAAGD

- $H = U_{A3}/U_{\mathrm{deler}}$ bij 50 en 490 Hz
- de rimpel aan de ADC

OPLOSSING

1. Vervangschema (Thévenin, hoofdstuk 21 van I): de deler gedraagt zich als een bron $\frac{33}{133}U_{\mathrm{bat}}$ met inwendige weerstand $R = 100 \parallel 33 = 24{,}81\,\mathrm{k\Omega}$ in serie met C naar de massa.
2. Spanningsdeler met impedanties: $H = \dfrac{Z_C}{R + Z_C} = \dfrac{1}{1 + j\omega RC}$. Met $RC = 2{,}481\,\mathrm{ms}$.
3. 50 Hz: $\omega RC = 0{,}779$, $H = 0{,}789\angle -37{,}9°$: de storing wordt maar 21 % kleiner en loopt 38° achter.
4. 490 Hz: $\omega RC = 7{,}64$, $H = 0{,}130\angle -82{,}5°$. De rimpel aan A3: $0{,}30 \cdot \frac{33}{133} \cdot 0{,}130 = 9{,}7\,\mathrm{mV}$, ongeveer 2 ADC-stappen.
5. Controle in de tijd (Euler zoals in hoofdstuk 4, stap 2 µs, twaalf periodes): een sinus van 1 V bij 490 Hz geeft na het inschakelverschijnsel een amplitude van $0{,}130\,\mathrm{V}$, tegenover $|H| = 0{,}130$ uit de fasor.

ANTWOORD

Het filter dempt 490 Hz tot 13 % (ongeveer 10 mV of twee ADC-stappen rimpel), maar 50 Hz nauwelijks (79 % blijft over). De kantelfrequentie $1/(2\pi RC) = 64\,\text{Hz}$ ligt tussen beide in: het filter is gemaakt tegen de PWM, niet tegen het net.

Klopt dit? Grensgevallen: bij $\omega \to 0$ is $H = 1$ (de gelijkspanning, de batterijspanning zelf, komt ongedempt door); bij hoge ω gaat $H \approx 1/(j\omega RC)$: tien keer hogere frequentie, tien keer minder rimpel en $-90°$. De rimpel van de PWM is eigenlijk een blokgolf; de fasorberekening geldt voor zijn grondtoon, de hogere harmonischen worden nog sterker gedempt (hoofdstuk 21).

UITLEG · 7.21

De brug naar trillingen

Een massa m aan een veer k met demping c volgt $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ (hoofdstuk 11). Zonder kracht zoek je oplossingen $x = \mathrm{e}^{st}$, zoals bij $y' = ky$ in hoofdstuk 4. Invullen geeft de **karakteristieke vergelijking** $ms^2 + cs + k = 0$. Bij weinig demping is de discriminant negatief, en de oplossingen zijn toegevoegd complex: $s = -\alpha \pm j\omega_d$. Dan is

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(X\,\mathrm{e}^{(-\alpha+j\omega_d)t}\right) = |X|\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \varphi)\ :$$

een wijzer die draait én krimpt, een uitdovende trilling. Het reële deel van s is de demping, het imaginaire de trillingsfrequentie. Zonder demping is $s = \pm j\omega_0$ met $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, de **eigenfrequentie**.

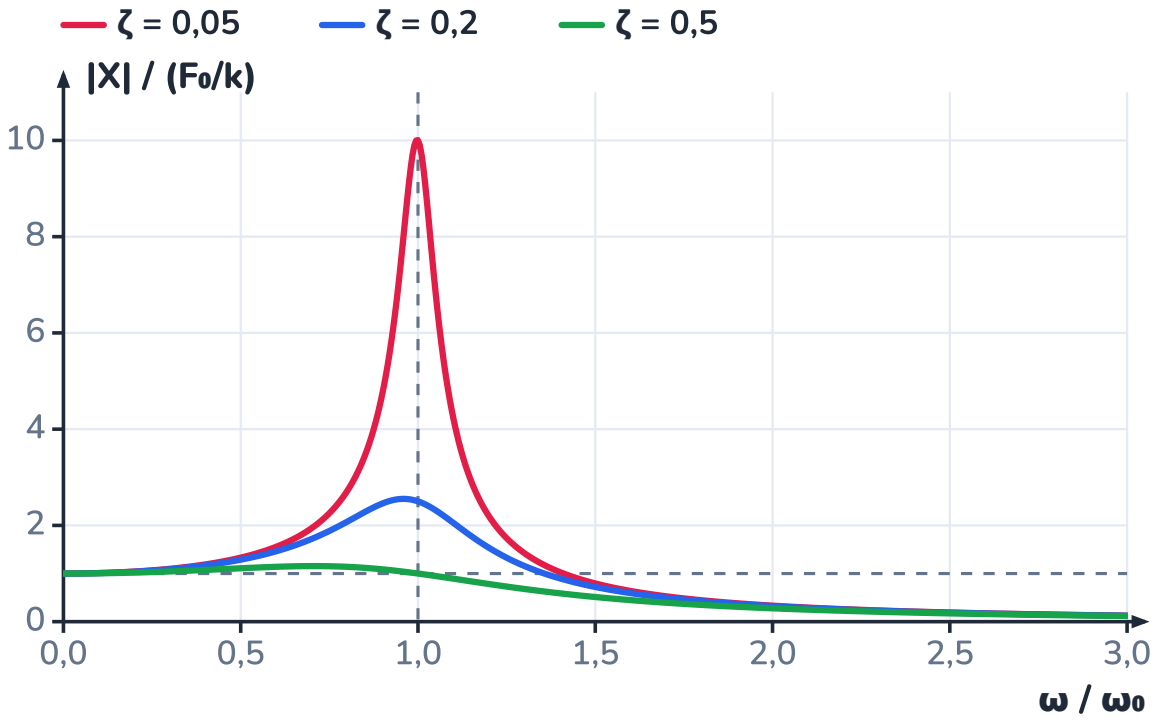
Duw je met een sinusoïdale kracht $F_0\cos\omega t$, dan volgt de massa na een tijd met dezelfde frequentie. Met fasoren ($\dot{x} \to j\omega X$, $\ddot{x} \to -\omega^2 X$):

GEDWONGEN TRILLING MET EEN FASOR

$$(k - m\omega^2 + j\omega c)\,X = F_0 \ \Rightarrow\ \frac{|X|}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},\quad r = \frac{\omega}{\omega_0},\ \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Bij $r \approx 1$ is de noemer klein: **resonantie**. Hoe kleiner de demping ζ, hoe hoger de piek.

Een voorbeeld: de ventilatie-unit (12 kg) op rubberen voeten (samen 30 kN/m) heeft een eigenfrequentie $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{30\,000/12} = 7{,}96\,\text{Hz}$. De ventilator duwt met 25 Hz, $r = 3{,}14$: met $\zeta = 0{,}1$ is de amplitude maar 0,11 keer de statische uitwijking. Ver boven de eigenfrequentie trilt een machine op zachte voeten weinig; hoeveel daarvan naar de vloer gaat, berekent hoofdstuk 11 voor de windturbine van het station.



Bij ω = ω₀ piekt de amplitude, des te hoger naarmate de demping kleiner is; ver erboven zakt ze onder de statische uitwijking.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.22

Habitat: wat moet de netomvormer maken?

22/26

Het station heeft een 48 V-batterij en een omvormer die er 230 V, 50 Hz van maakt voor de gewone toestellen. Leg vast wat de omvormer moet leveren (amplitude, frequentie, fase), welke spanningsverhouding hij moet overbruggen, en welke stroom hij levert als de noodverwarming (2,0 kW, zuiver resistief, hoofdstuk 39) en de drukpomp van het drinkwater (0,75 kW, $\cos\varphi = 0{,}81$, stroom 36° achter) tegelijk draaien. Reken met effectieve waarden.

GEGEVEN

- $U = 230\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$ (effectief, referentie), $f = 50\ \mathrm{Hz}$
- verwarming $P = 2000\ \mathrm{W}$, $\varphi = 0$; pomp $P = 750\ \mathrm{W}$, $\varphi = -36^\circ$
- batterij: rekenwaarde 44 tot 56 V

GEVRAAGD

- $u(t)$ van de omvormer
- de totale stroom I als fasor en de schijnbare belasting $U\,|I|$

OPLOSSING

1. **Wat hij maakt.** $u(t) = 325\cos(2\pi \cdot 50\,t + \varphi_0)$ V met $\hat{U} = 230\sqrt{2} = 325{,}3\ \mathrm{V}$. In eilandbedrijf kiest de omvormer zelf φ_0 (een kristal bepaalt de 50 Hz); aan het net moet φ_0 die van het net volgen (volgend blad).

2. **Spanningsverhouding.** Een brug van schakelaars kan hoogstens de batterijspanning doorgeven, 44 tot 56 V. Om 325 V piek te maken, moet hij minstens $325/44 = 7{,}4$ keer opwaarts: met een transformator of met een gelijkspanningsomzetter naar een tussenspanning van ongeveer 400 V. Hoe precies, is hoofdstuk 24.

3. **Stromen.** Verwarming: $I_R = 2000/230 = 8{,}696\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$. Pomp: $S = P/\cos\varphi = 750/0{,}809 = 927\ \mathrm{VA}$, dus $|I_M| = 927/230 = 4{,}031\ \mathrm{A}$ en $I_M = 4{,}031\angle -36^\circ = 3{,}261 - 2{,}369\,j\ \mathrm{A}$.

4. **Som (Kirchhoff met fasoren).** $I = I_R + I_M = 11{,}957 - 2{,}369\,j\ \mathrm{A}$, $|I| = \sqrt{11{,}957^2 + 2{,}369^2} = 12{,}19\ \mathrm{A}$ onder $-11{,}2^\circ$.

5 **Belasting.** $U\,|I| = 230 \cdot 12{,}19 = 2803\ \mathrm{VA}$, voor 2750 W nuttig vermogen. De getallen gewoon optellen had $12{,}73\ \mathrm{A}$ gegeven: 4 % te veel.

ANTWOORD

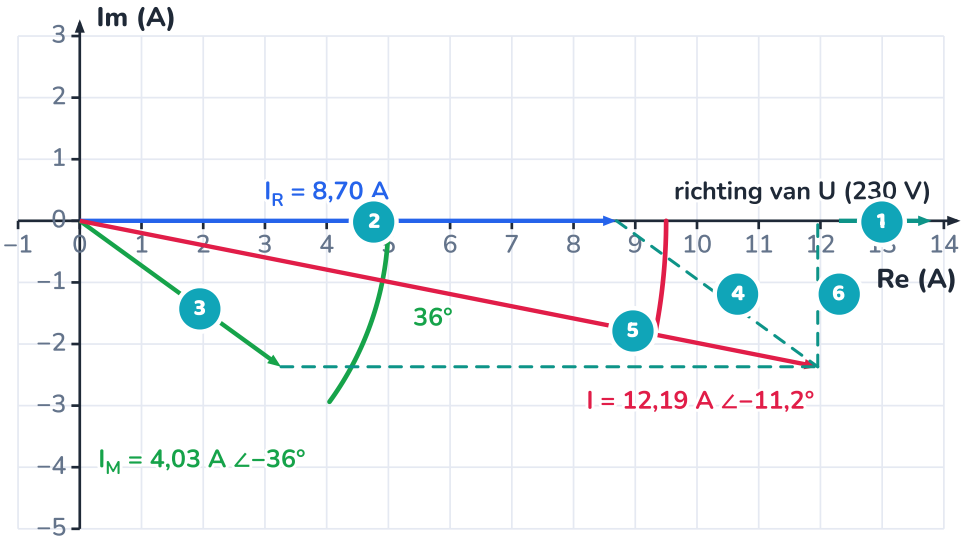
De omvormer maakt $325\cos(100\pi t + \varphi_0)$ V uit 44 tot 56 V gelijkspanning (verhouding minstens 7,4). Bij verwarming en pomp samen levert hij $I = 12{,}19\angle -11{,}2°\ \mathrm{A}$, ofwel 2803 VA. Met de koelkast en de rest erbij (opdracht 7.12) komt de ontwerpbelasting op 3,30 kVA. Dossierwaarde: omvormer 4,0 kVA continu, 8 kVA gedurende 5 s (de aanloopstroom van een pompmotor is enkele keren de nominale); aan de 48 V-kant is dat bij vol vermogen ongeveer 90 A.

Klopt dit? Het deel van I in fase met U is $11{,}96\ \mathrm{A}$, en $230 \cdot 11{,}96 = 2750\ \mathrm{W}$: precies het nuttige vermogen. Het deel loodrecht op U draagt geen gemiddeld vermogen maar belast wel de kabels en de omvormer. Die splitsing (actief en reactief vermogen, de arbeidsfactor) is het hart van hoofdstuk 20.

ONTLEED · 7.23

Het fasordiagram van de omvormer

De stromen van het vorige blad als wijzers, met de spanning als referentie langs de reële as. Schaal: ampère; de spanningswijzer is niet op schaal.



De stroom van de pomp ijlt 36° na; opgeteld bij de stroom van de verwarming geeft ze een totale stroom die 11° achter de spanning ligt.

1 **Referentie**
De spanning van de omvormer, 230 V effectief, legt de hoek nul vast. Alle stromen worden tegenover haar gemeten.

2 **Verwarming**
Een weerstand: stroom in fase met de spanning, 8,70 A. Ze zet alle vermogen om in warmte.

3 **Pomp**
De motor neemt 4,03 A, 36° te laat. Een deel van haar stroom bouwt alleen het magnetisch veld op en brengt het terug.

4 **Kop aan staart**
De stippellijnen maken het parallellogram af: de pompstroom begint aan de kop van de verwarmingsstroom.

5 **Totale stroom**
12,19 A onder −11,2°: minder dan 8,70 + 4,03 = 12,73 A, omdat de twee wijzers niet dezelfde kant op wijzen.

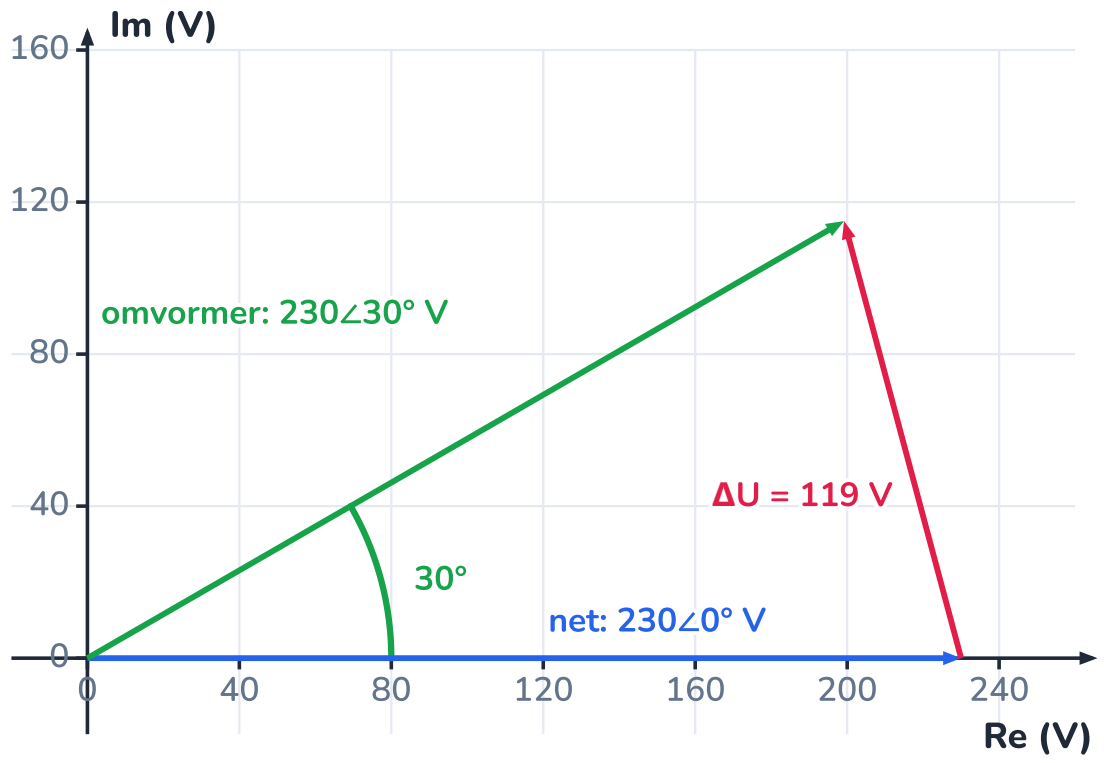
6 **Werkzaam en blind**
De projectie op de spanning (11,96 A) draagt het vermogen van 2750 W; de verticale 2,37 A niet. Hoofdstuk 20 noemt ze actieve en reactieve stroom.

UITGEWERKT VOORBEELD · 7.24

Habitat: in de pas lopen met het net

24/26

Op het proefterrein kan het station aan het openbare net hangen en er zonnestroom aan leveren. Tussen omvormer en net zit een koppelspoel van 2,0 mH (rekenwaarde). (a) Onder welke hoek δ moet de omvormerspanning (230 V) voorlopen op het net (230 V) om 3,0 kW te leveren? (b) Hoe groot wordt de stroom als de omvormer inschakelt met een faseverschil van 30°?



Omvormer en net elk 230 V, maar 30° uit fase: het verschil van de wijzers (119 V) staat over de koppelspoel van 0,63 Ω.

GEGEVEN

- $U_{\text{net}} = 230\angle 0°\ \text{V}$, $U_{\text{omv}} = 230\angle \delta\ \text{V}$
- $L = 2{,}0\,\text{mH}$, $f = 50\,\text{Hz}$

GEVRAAGD

- δ voor 3,0 kW
- de stroom bij $\delta = 30°$

OPLOSSING

1 Impedantie van de spoel: $Z = j\omega L = j \cdot 314{,}2 \cdot 0{,}002 = j\,0{,}628\,\Omega$.

2 Stroom: $I = \dfrac{U_{\text{omv}} - U_{\text{net}}}{jX}$. Geleverd vermogen aan het net: $P = \text{Re}(U_{\text{net}}\bar{I})$. Uitwerken geeft $P = \dfrac{U^2}{X}\sin\delta$ (opdracht 7.16).

3 (a) $\sin\delta = \dfrac{P\,X}{U^2} = \dfrac{3000 \cdot 0{,}628}{230^2} = 0{,}0356$, dus $\delta = 2{,}04°$: een voorsprong van 113 µs.

4 Controle: $I = \dfrac{230\angle 2{,}04° - 230}{j\,0{,}628} = 13{,}05\angle 1{,}02°\ \text{A}$, bijna in fase met het net; $\text{Re}(230 \cdot \bar{I}) = 3000\ \text{W}$.

5 (b) $|U_{\text{omv}} - U_{\text{net}}| = 2 \cdot 230 \cdot \sin 15° = 119\ \text{V}$ over $0{,}628\,\Omega$: $I = 189\ \text{A}$, meer dan tien keer de nominale stroom.

ANTWOORD

Een voorsprong van 2,0° (113 µs) volstaat voor 3 kW. Inschakelen met 30° faseverschil geeft 189 A; zelfs 5° geeft al 32 A. Dossierwaarde: de omvormer schakelt pas op het net als frequentie, fase en spanning overeenkomen, en volgt daarna de fase van het net (een fasevolger, hoofdstuk 24).

Klopt dit? Het vermogen hangt aan $\sin\delta$: een kleine faseverschuiving stuurt veel vermogen, omdat X klein is. Zo werken ook de grote generatoren van het net: wie voorloopt, levert. Een frequentieverschil van 0,5 Hz laat de fase in één seconde 180° verschuiven: de stroom zwelt dan aan en af zoals een zweving, tot de beveiliging uitschakelt.

NASLAG · 7.25

Sinusoïden, complexe getallen en fasoren: formules

25/26

Werkwijze bij een wisselstroomprobleem: kies een referentie (meestal de spanning), zet elke sinusoïde om in een fasor, reken met complexe getallen (optellen in $a + bj$, vermenigvuldigen en delen in poolvorm), zet het resultaat terug naar de tijd, en controleer met een schets van het fasordiagram.

sinusoïde

$$a(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

symbool	betekenis	eenheid
$\hat{A}$	amplitude	eenheid van a
ω	hoekfrequentie	rad/s
φ	fase	rad of °

som van twee sinusoïden

$$\hat{A}^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

complex getal

$$z = a + bj = r\angle\varphi = r\,\mathrm{e}^{j\varphi} \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \varphi = \text{atan2}(b, a)$$

toegevoegde en delen

$$\bar{z} = a - bj \qquad z\bar{z} = |z|^2 \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

vermenigvuldigen

$$r_1\angle\alpha \cdot r_2\angle\beta = r_1 r_2\angle(\alpha + \beta)$$

Euler

$$\mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{j\varphi} + \mathrm{e}^{-j\varphi}}{2}$$

fasor

$$a(t) = \text{Re}(A\,\mathrm{e}^{j\omega t}) \qquad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow j\omega A$$

impedantie

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad U = Z\,I$$

zweving

$$\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t = 2\cos\big(\pi(f_2 - f_1)t\big)\cos\big(\pi(f_1 + f_2)t\big)$$

in de tijd	als fasor	waarom
$\hat{A}\cos(\omega t + \varphi)$	$A = \hat{A}\,\mathrm{e}^{j\varphi} = \hat{A}\angle\varphi$	definitie: $\mathrm{Re}(A\,\mathrm{e}^{j\omega t})$
$\hat{A}\sin(\omega t + \varphi)$	$\hat{A}\angle(\varphi - 90°)$	$\sin x = \cos(x - 90°)$
$a(t) + b(t)$	$A + B$	Re is lineair
$c\,a(t)$ (c reëel)	$c\,A$	idem
$\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$	$j\omega\,A$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{j\omega t} = j\omega\,\mathrm{e}^{j\omega t}$
$\int a\,\mathrm{d}t$ (zonder constante)	$\dfrac{A}{j\omega}$	omgekeerd
$a(t)\cdot b(t)$	geen fasor	een product bevat 2ω en een gelijkdeel

in Python	betekenis
`3 + 4j`, `complex(3, 4)`	een complex getal
`z.real`, `z.imag`, `z.conjugate()`, `abs(z)`	delen, toegevoegde, modulus
`cmath.phase(z)`, `cmath.polar(z)`, `cmath.rect(r, phi)`	argument (atan2), naar en van poolvorm (radialen)
`cmath.exp(1j * phi)`, `np.exp(1j * w * t)`	wijzer, reeks wijzers
`np.abs(Z)`, `np.angle(Z, deg=True)`	modulus en argument van een hele reeks

HET GEHEEL · 7.26

Waar sinusoïden en fasoren vandaan komen en waar ze heen gaan

26/26

Dit hoofdstuk verbindt de goniometrie en de vectoren (W) met de elektrotechniek (L) en de mechanica (K). Complexe getallen lijken een wiskundig kunstje, maar ze zijn het natuurlijke getal voor alles wat draait of trilt: ze onthouden amplitude en fase in één keer, en maken van afleiden een vermenigvuldiging.

I6 Goniometrie en vectoren
Sinus, cosinus en vectoren in componenten: hier de projecties van een draaiende wijzer.

I25 Van analoog naar digitaal
Bemonsteren en PWM; aliasing als een wijzer die te grote stappen maakt.

I22 De spanningsdeler en sensoren
De batterijdeler met zijn condensator, hier als RC-filter met fasoren.

E1 Afgeleiden: verandering meten
De afgeleide van sin en cos, en i = C du/dt bij een wisselspanning.

E3 Integralen: ophopen
De effectieve waarde van een sinus; het gemiddelde vermogen als integraal (opdracht 7.18).

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
y' = ky met k = j geeft de formule van Euler; de RC-kring in de tijd.

E5 Vectoren en matrices
Vermenigvuldigen met e^(jφ) is de rotatiematrix; netwerken als stelsels, nu complex.

E11 Trillingen en resonantie
Eigenfrequentie, demping en resonantie, uitgewerkt met de fasor van een gedwongen trilling.

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie
De generator en de transformator die de sinus maken en omzetten.

E20 Wisselstroom

Impedantie, RLC-kringen, actief en reactief vermogen, arbeidsfactor, driefasig net.

E21 Filters en signaalverwerking

Filters als H(jω), het Bode-diagram, Fourier en Nyquist.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

Hoe de omvormer de sinus maakt (PWM, brug, opwaarts omzetten) en met het net synchroniseert.

Habitat

Dossier: de netomvormer maakt 230 V effectief (325 V piek), 50 Hz, een zuivere sinus, uit 48 V (rekenwaarde 44 tot 56 V; verhouding minstens 7,4); 4,0 kVA continu, 8 kVA gedurende 5 s, ontwerpbelasting 3,30 kVA (noodverwarming, drukpomp met cos φ = 0,81, koelkast, rest). Aan het net: koppelspoel 2,0 mH, 3 kW bij 2,0° voorsprong, inschakelen alleen gesynchroniseerd. Hoofdstuk 20 rekent de vermogens en de arbeidsfactor uit, hoofdstuk 24 bouwt de omvormer.

SAMENVATTING

In het kort

- Een sinusoïde $\hat{A}\cos(\omega t+\varphi)$ heeft amplitude, hoekfrequentie $\omega=2\pi f=2\pi/T$ en fase; een faseverschil $\Delta\varphi$ is een tijdverschil $\Delta\varphi/\omega$.
- Een sinusoïde is de projectie van een draaiende wijzer; afleiden rekt hem met ω en draait hem 90° vooruit.
- Sinusoïden van dezelfde frequentie tel je op als vectoren: $\hat{A}^2=\hat{A}_1^2+\hat{A}_2^2+2\hat{A}_1\hat{A}_2\cos\Delta\varphi$.
- Complexe getallen $a+bj$ met $j^2=-1$: optellen per deel, vermenigvuldigen in poolvorm (moduli maal, hoeken plus), delen met de toegevoegde; het argument met atan2.
- Euler: $\mathrm{e}^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi$; een complexe exponentiële is een wijzer.
- Fasor: $a(t)=\mathrm{Re}(A\mathrm{e}^{j\omega t})$; som van signalen = som van fasoren, afgeleide = $j\omega A$; alleen bij één frequentie. Verschillende frequenties geven zwevingen, bemonsteren kan aliasing geven.
- Impedantie: $Z_R=R$, $Z_L=j\omega L$, $Z_C=1/(j\omega C)$ en $U=ZI$; een gedwongen trilling heeft $X=F_0/(k-m\omega^2+j\omega c)$.
- Habitat: de omvormer maakt 325 V piek bij 50 Hz uit 48 V; stromen van toestellen tellen als wijzers op; aan het net moet hij exact in fase inschakelen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

sinusoïde

Signaal van de vorm $\hat{A}\cos(\omega t+\varphi)$: amplitude $\hat{A}$, hoekfrequentie $\omega=2\pi f$, fase φ.

hoekfrequentie

$\omega=2\pi f=2\pi/T$, in rad/s: de hoeksnelheid van de wijzer die de sinusoïde maakt.

fase

De hoek φ van de wijzer op $t=0$; een faseverschil $\Delta\varphi$ komt overeen met een tijdverschil $\Delta t=\Delta\varphi/\omega$.

complex getal

Getal $z=a+bj$ met $j^2=-1$ (wiskundigen schrijven i); een punt of vector in het complexe vlak.

modulus en argument

De lengte $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en de hoek $\arg z$ van een complex getal; bereken de hoek met atan2 (juiste kwadrant).

toegevoegde

$\bar{z} = a - bj$, het spiegelbeeld tegenover de reële as; $z\bar{z} = |z|^2$.

formule van Euler

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$: een complexe exponentiële is een wijzer met lengte 1 en hoek φ.

fasor

De complexe amplitude $\hat{A}\,e^{j\varphi}$ van een sinusoïde $\hat{A}\cos(\omega t + \varphi)$; in de elektrotechniek vaak met de effectieve waarde.

zweving

Een omhullende die aanzwelt en wegsterft bij de som van twee trillingen met een klein frequentieverschil; de zwevingsfrequentie is het verschil.

impedantie

Complexe 'weerstand' $Z = U/I$ bij een sinusoïde: $Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$, $Z_C = 1/(j\omega C)$.

synchroniseren

Een bron pas op het net schakelen als spanning, frequentie en fase overeenkomen.

E EXPERT · DEEL E2 · MECHANICA EN CONSTRUCTIES

HANDBOEK · HOOFDSTUK 8

Beweging in twee dimensies

Van een druppel uit de sproeier tot een drone in de wind: beweging als vector

Een druppel uit een sproeier, een pakket uit een drone, een robot in een bocht: ze bewegen niet langs een rechte lijn. Toch volstaat wat je al kent, als je plaats, snelheid en versnelling als **vectoren** schrijft en per component afleidt. Je leert de horizontale en de schuine worp exact, ziet waarom de lucht die mooie parabolen verknoeit en **simuleert** dan de echte baan in Python. Met relatieve beweging stuur je een drone door de wind, en de cirkelbeweging toont welke kracht iets in een bocht houdt. Habitat krijgt een sproeier voor de moestuin, met een bereik dat klopt.

8× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Elke druppel volgt zijn eigen baan: de grote vliegen het verst, de kleine remt de lucht af.

Na dit hoofdstuk

- Je kan plaats, snelheid en versnelling als vectoren schrijven, v en a per component afleiden uit r(t), en de versnelling ontbinden in een tangentiële en een normale component (met de kromtestraal).
- Je kan de horizontale en de schuine worp zonder luchtweerstand oplossen: baan, top, vliegtijd, bereik, landingssnelheid, en de twee hoeken die hetzelfde doel raken.
- Je kan verklaren waarom luchtweerstand de twee componenten koppelt, een baan met kwadratische weerstand simuleren met Heun, en de eindsnelheid en de lengteschaal v^2/g gebruiken om een resultaat te beoordelen.
- Je kan uit een druk de uitstroomsnelheid en het debiet van een sproeier schatten en met een simulatie het bereik, de beste hoek en het effect van wind bepalen.
- Je kan snelheden optellen en aftrekken bij relatieve beweging (snelheid tegenover de grond = snelheid tegenover de lucht + wind), onder meer om een drone of boot tegen wind of stroming in te sturen.
- Je kan de eenparige cirkelbeweging beschrijven met ω, T en f, de middelpuntzoekende versnelling v^2/R afleiden en de kracht aanwijzen die ze levert.

VERHAAL · 8.1

Galilei en de parabool

1/20

Een kanonskogel vliegt eerst rechtdoor, tot zijn 'impetus' op is, en valt dan loodrecht naar beneden. Zo tekenden geleerden in de late middeleeuwen de baan van een projectiel. De Italiaanse wiskundige Niccolò Tartaglia vertrok in zijn *Nova scientia* (1537) nog van dat beeld, met een gebogen overgang tussen het rechte en het vallende stuk. Hij schreef wel al dat een kanon het verst draagt onder 45°.

Galileo Galilei (1564-1642) pakte het anders aan: hij liet kogels over hellende gootjes rollen, mat, en zocht een wiskundige wet. Op een werkblad uit de jaren rond 1608 laat hij een kogel van een helling rollen, over de rand van een tafel schieten en op de vloer neerkomen, voor verschillende starthoogtes. De afstanden passen bij een horizontale beweging die eenparig blijft en een val die eenparig versnelt. (De historicus Stillman Drake toonde in de jaren 1970 wat dit blad tussen Galilei's nagelaten papieren betekende.)

In zijn *Dialogo* (1632) verdedigde Galilei zo'n onafhankelijkheid met een schip: een steen die van de top van de mast valt, komt aan de voet van de mast terecht, of het schip nu stilligt of eenparig vaart. Wie benedendeks in een afgesloten kajuit zit, kan met geen enkele proef uitmaken of het schip vaart: vliegen, vissen in een kom, druppels die in een fles vallen, alles gebeurt zoals aan wal. Na zijn veroordeling in 1633 mocht Galilei in Italië niets meer publiceren. Zijn laatste boek, de *Discorsi*, verscheen in 1638 in Leiden, bij Elzevier. Op de vierde dag bewijst hij dat een horizontaal geworpen lichaam een halve **parabool** beschrijft, rekent hij tabellen voor schuine worpen uit, en toont hij dat 45° het verst draagt en dat hoeken die evenveel boven en onder 45° liggen, even ver dragen.

Galilei wist dat de lucht zijn parabool verstoort, en meer naarmate een voorwerp lichter en sneller is. Hij liet haar bewust weg om de wet te zien. In dit hoofdstuk doe je beide: eerst de parabool, dan de lucht erbij, met een computer die Galilei niet had.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het brein van het station moet weten waar dingen terechtkomen: hoe ver de sproeiers van de moestuin reiken, waar de drone een pakket moet loslaten, hoe snel het inspectierobotje een bocht mag nemen. Dat zijn bewegingen in twee dimensies, en meestal is de lucht niet te verwaarlozen. Met vectoren en een simulatie van twintig regels reken je ze uit.



Een kogel rolt van een helling over de tafelrand: Galilei mat waar hij neerkwam en vond de halve parabool.

UITLEG · 8.2

Wat je al weet: beweging, nu als vector

2/20

wat je al kan	wat nu komt
snelheid en versnelling langs een rechte lijn, (x,t)- en (v,t)-grafieken, vrije val (hoofdstuk 7 van I)	dezelfde grootheden als vectoren in het vlak, voor elke kromme baan
vectoren ontbinden in componenten en optellen (hoofdstuk 6 van I; hoofdstuk 5)	een beweging in twee componenten die elkaar niet storen; snelheden optellen bij relatieve beweging
de afgeleide als ogenblikkelijke verandering (hoofdstuk 1)	$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ en $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$, per component
$\vec{F} = m\,\vec{a}$, wrijving (hoofdstuk 8 van I)	de middelpuntzoekende kracht: welke kracht houdt iets op een cirkel?
een stelsel met Euler en Heun simuleren; een vallend pakket met luchtweerstand (hoofdstuk 4)	een baan in twee dimensies simuleren: de sproeier en de drone

Kies een oorsprong en twee loodrechte assen. De plaats van een voorwerp is dan de **plaatsvector** $\vec{r}(t) = (x(t);\ y(t))$. Zijn afgeleide is de **snelheidsvector**, en die afgeleide opnieuw de **versnellingsvector**. Afleiden gebeurt per component (hoofdstuk 1 en 5):

PLAATS, SNELHEID EN VERSNELLING ALS VECTOREN

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t};\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right) \qquad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

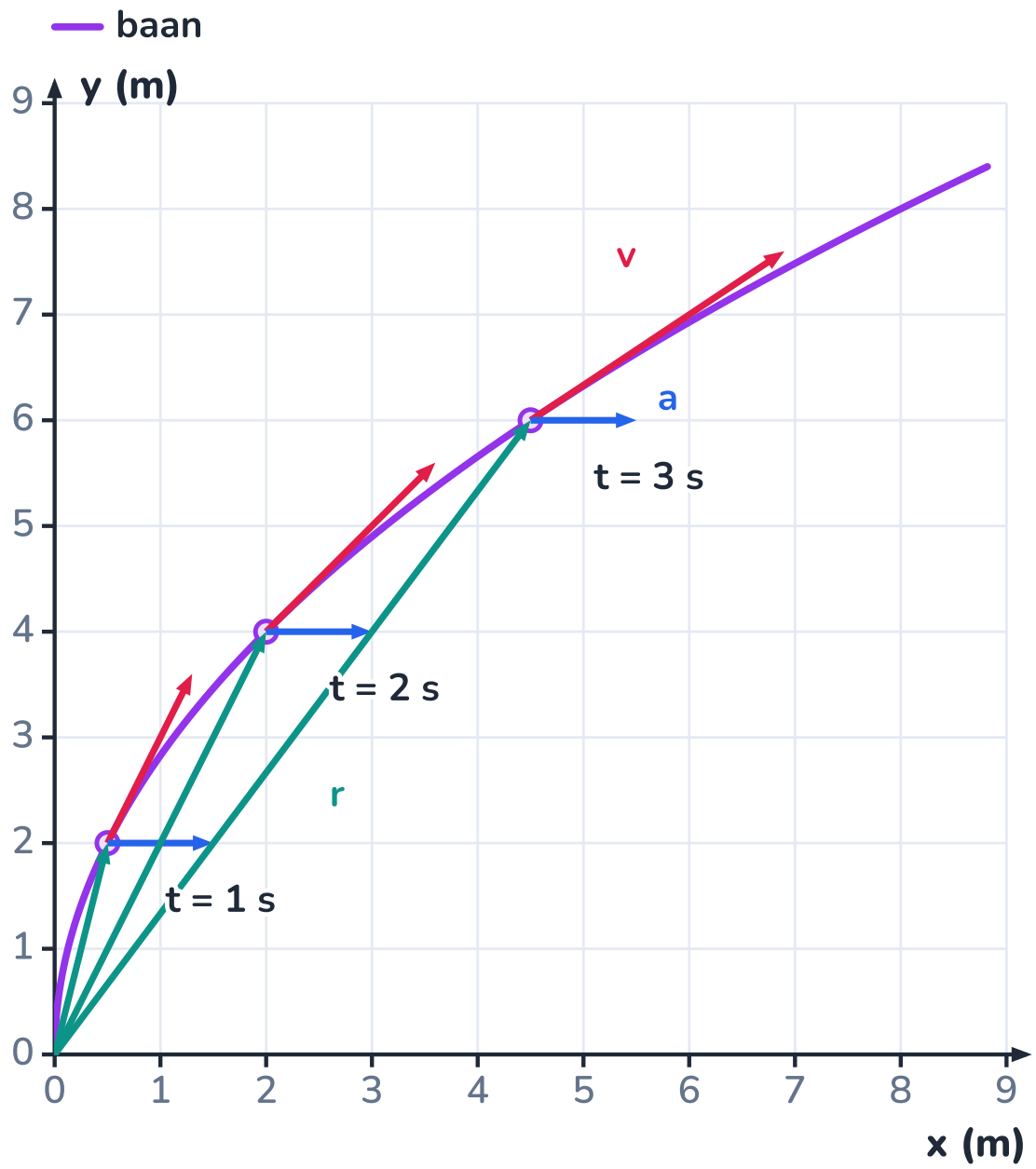
$\vec{v}$ raakt altijd aan de baan (hij is de limiet van $\Delta\vec{r}/\Delta t$, een koorde die een raaklijn wordt). $\vec{a}$ hoeft dat niet: zodra de baan buigt, wijst $\vec{a}$ naar de holle kant.

In de figuur vertrekt een drone vanop de grond met $\vec{r}(t) = (0{,}50\,t^2;\ 2{,}0\,t)$ (in m, t in s): hij stijgt met een constante 2,0 m/s en versnelt tegelijk horizontaal. Dan is $\vec{v} = (t;\ 2{,}0)$ en $\vec{a} = (1{,}0;\ 0)$ m/s². De versnelling is constant en horizontaal, maar de snelheid draait: de baan is een liggende parabool $x = y^2/8$.

Twee soorten versnelling. Ontbind $\vec{a}$ langs de snelheid en loodrecht erop. De component langs $\vec{v}$, de **tangentiële versnelling** $a_\mathrm{t} = \vec{a}\cdot\hat{v}$ (hoofdstuk 5), verandert de *grootte* van de snelheid: $a_\mathrm{t} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. De component loodrecht erop, de **normale versnelling** a_n, verandert alleen de *richting*. Hoe scherper de bocht, hoe groter a_n bij dezelfde snelheid: $a_\mathrm{n} = v^2/\rho$, met ρ de **kromtestraal**, de straal van de cirkel die de baan in dat punt het best volgt. Op een rechte is ρ oneindig en $a_\mathrm{n} = 0$; op een cirkel is $\rho = R$ (verderop in dit hoofdstuk).

De versnelling wijst in de richting van de beweging

Alleen op een rechte lijn. De drone vliegt schuin omhoog en versnelt horizontaal. Een druppel in de top van zijn baan beweegt horizontaal en versnelt naar beneden. Een voorwerp op een cirkel met constante snelheid versnelt naar het middelpunt, loodrecht op zijn beweging.



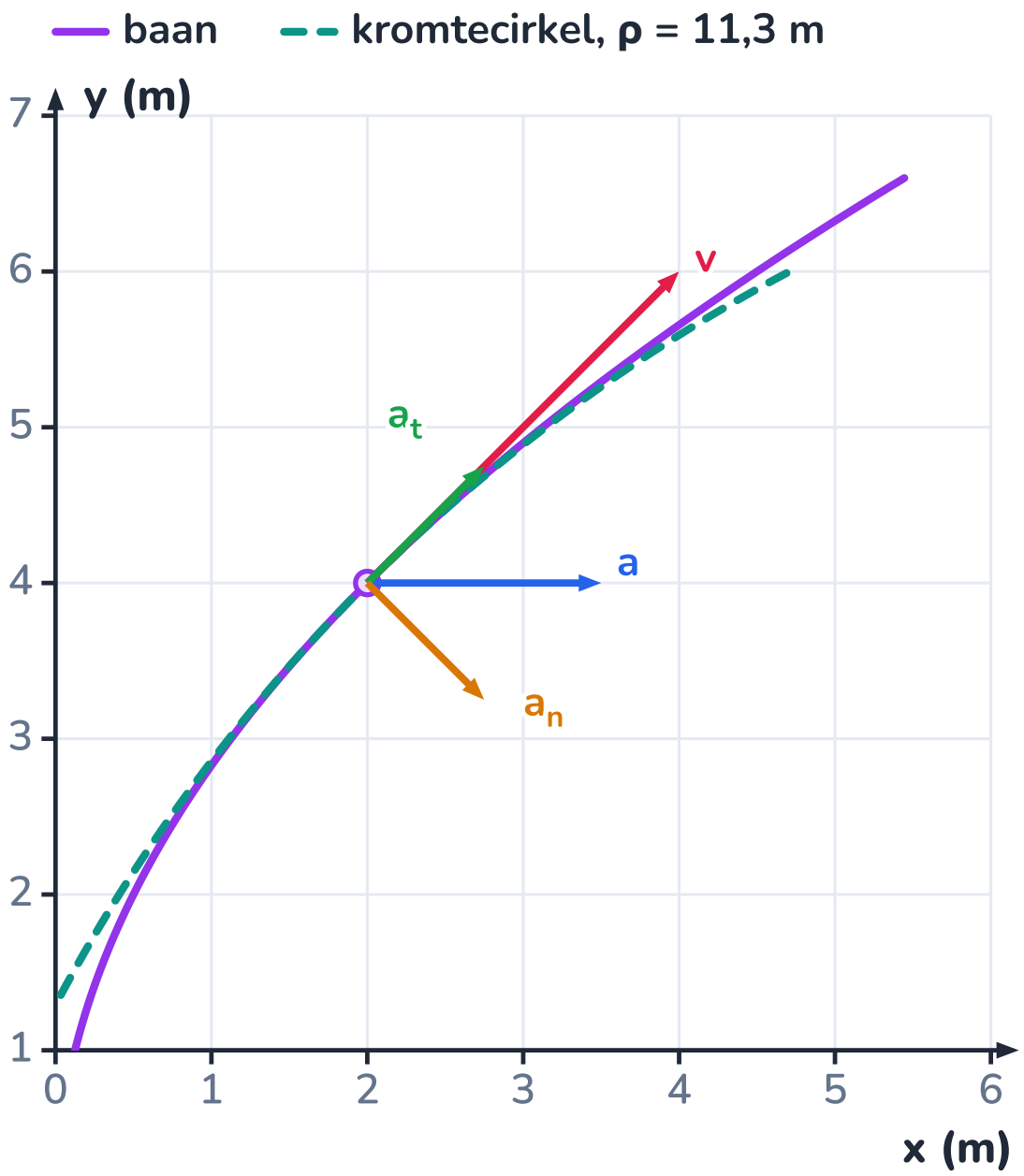
r wijst van de oorsprong naar de drone, v raakt aan de baan (0,8 m per m/s), a blijft horizontaal (1 m per m/s²): de baan buigt naar de kant van a.

UITGEWERKT VOORBEELD · 8.3

De drone vertrekt: hoe scherp buigt zijn baan?

3/20

De drone van het vorige blad volgt $\vec{r}(t) = (0{,}50\,t^2;\ 2{,}0\,t)$ (m, s). Bereken op $t = 2{,}0$ s de snelheid (grootte en richting), de tangentiële en de normale versnelling, en de kromtestraal van de baan. Controleer de snelheid met de gemiddelde snelheid tussen $t = 1$ en $t = 3$ s.



Op t = 2 s: a ontbonden langs v (verandert de snelheid) en loodrecht erop (buigt de baan). De stippelcirkel volgt de baan in dat punt.

GEGEVEN

- $\vec{r}(t) = (0{,}50\,t^2;\ 2{,}0\,t)$
- $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$

GEVRAAGD

- $\vec{v}$, v en de hoek met de horizontaal
- a_t, a_n, ρ

OPLOSSING

1 Afleiden per component: $\vec{v} = (t;\ 2{,}0)$, dus $\vec{v}(2) = (2{,}0;\ 2{,}0)$ m/s, $v = \sqrt{8} = 2{,}83\,\mathrm{m/s}$ onder 45° met de horizontaal. Eenheidsvector $\hat{v} = (0{,}707;\ 0{,}707)$.

2 Opnieuw afleiden: $\vec{a} = (1{,}0;\ 0)$ m/s², voor elke t.

3 Tangentieel: $a_\mathrm{t} = \vec{a} \cdot \hat{v} = 1{,}0 \cdot 0{,}707 = 0{,}707\,\mathrm{m/s^2}$. Controle: $v(t) = \sqrt{t^2+4}$, dus $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = t/\sqrt{t^2+4} = 2/\sqrt{8} = 0{,}707$. De snelheid neemt toe.

4 Normaal: $a_\mathrm{n} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{1 - 0{,}5} = 0{,}707\,\mathrm{m/s^2}$ (of $|a_x v_y - a_y v_x|/v$, het vectorproduct van hoofdstuk 5).

5 Kromtestraal: $\rho = v^2/a_\mathrm{n} = 8/0{,}707 = 11{,}3\,\mathrm{m}$. Het middelpunt van de kromtecirkel ligt op die afstand aan de holle kant, in $(10{,}0;\ -4{,}0)$.

6 Gemiddelde snelheid: $\dfrac{\vec{r}(3) - \vec{r}(1)}{2} = \dfrac{(4{,}5;\ 6{,}0) - (0{,}5;\ 2{,}0)}{2} = (2{,}0;\ 2{,}0)$ m/s: precies $\vec{v}(2)$. Bij een kwadratische $\vec{r}(t)$ geeft de centrale differentie (hoofdstuk 1) de exacte snelheid.

ANTWOORD

$\vec{v} = (2{,}0;\ 2{,}0)\,\mathrm{m/s}$, $v = 2{,}83\,\mathrm{m/s}$ **onder 45°;** $a_\mathrm{t} = a_\mathrm{n} = 0{,}71\,\mathrm{m/s^2}$**; de baan buigt er met een kromtestraal van 11,3 m.**

Klopt dit? $a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1 = |\vec{a}|^2$. Later in de vlucht wordt $\vec{v}$ steeds meer horizontaal: dan ligt $\vec{a}$ bijna langs $\vec{v}$, a_n daalt en de baan wordt rechter (op $t = 4$ s is $\rho = 45\,\mathrm{m}$).

UITLEG · 8.4

De horizontale worp: twee bewegingen die elkaar niet storen

4/20

Zonder lucht is de enige kracht op een geworpen voorwerp zijn gewicht, en dat wijst loodrecht naar beneden. Dus $\vec{a} = (0;\ -g)$: horizontaal verandert de snelheid niet, verticaal valt het voorwerp vrij. Integreer twee keer per component (hoofdstuk 3) met de beginwaarden $\vec{r}(0) = (0;\ h)$ en $\vec{v}(0) = (v_0;\ 0)$:

HORIZONTALE WORP VANAF HOOGTE H

$$x = v_0\,t \qquad y = h - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad v_x = v_0 \qquad v_y = -g\,t$$

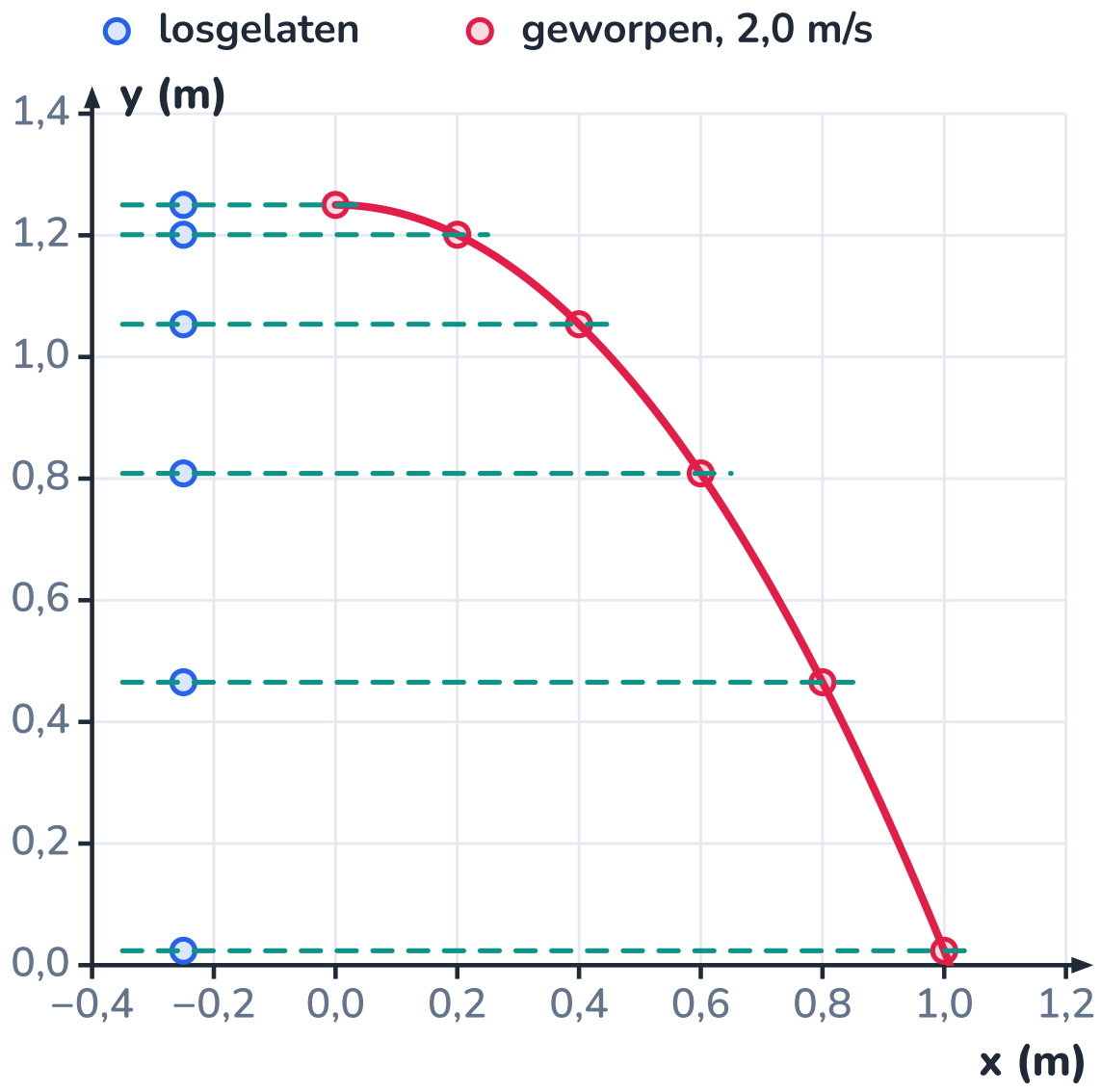
Val je $t = x/v_0$ weg, dan krijg je de baan $y = h - \dfrac{g}{2v_0^2}\,x^2$: een halve parabool. Valtijd $t_\mathrm{v} = \sqrt{2h/g}$ (dezelfde als bij loslaten!), worpafstand $d = v_0\sqrt{2h/g}$.

In de figuur vallen twee kogels vanaf 1,25 m: de ene wordt losgelaten, de andere met 2,0 m/s horizontaal weggeschoten. Op elk ogenblik zijn ze even hoog, en ze komen tegelijk neer, na $\sqrt{2 \cdot 1{,}25/9{,}81} = 0{,}505\,\mathrm{s}$. De horizontale snelheid verandert de val niet, en de val verandert de horizontale beweging niet. Dat is de kern van Galilei: de componenten zijn **onafhankelijk**, omdat de kracht geen horizontale component heeft en niet van de snelheid afhangt.

De landing. De snelheid bij de grond is $\vec{v} = (v_0;\ -g\,t_\mathrm{v})$, met grootte $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Dat volgt ook uit de energie (hoofdstuk 9 van I): $\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh$. De hoek met de grond is $\tan\beta = |v_y|/v_x$.

Wat sneller vooruit gaat, blijft langer in de lucht

Een kogel die uit een geweer horizontaal wordt afgevuurd en een kogel die je op hetzelfde ogenblik uit je hand laat vallen, raken zonder lucht tegelijk de grond. De eerste landt alleen verder weg.



Om de 0,1 s: de geworpen kogel is op elk ogenblik even hoog als de losgelaten kogel; ze landen tegelijk.

PROEF · 8.5

De knikker van de tafel

5/20

ONDERZOEKSVRAAG

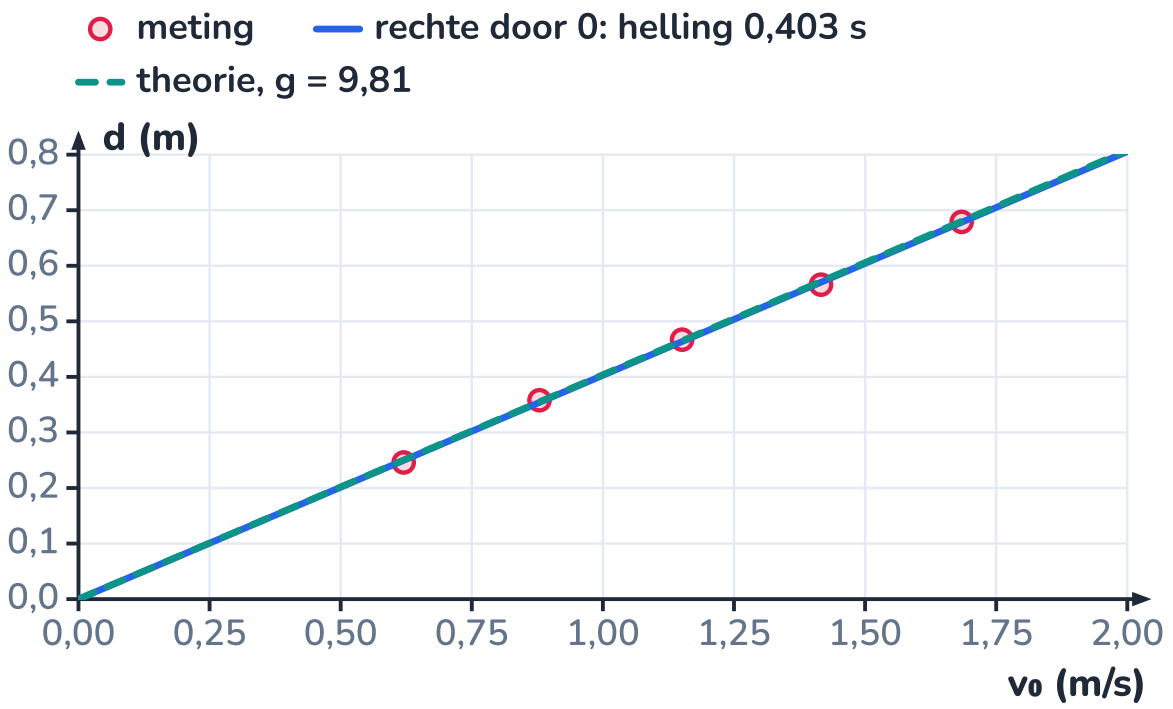
Klopt $d = v_0\sqrt{2H/g}$? Een knikker rolt over een goot, verlaat de tafel horizontaal en landt op de vloer. Kan je uit de metingen g terugvinden?

MATERIAAL

- tafel (H = 0,800 m tot de vloer), goot of helling met een horizontaal stukje aan de tafelrand
- knikker van 16,0 mm
- lichtpoort met timer aan de rand van de tafel (of slow motion met een meetlat in beeld)
- schietlood, carbonpapier op wit papier, meetlint

Veiligheid

Knikkers op de vloer zijn glad: raap ze meteen op.



Landingsafstand tegen beginsnelheid: een rechte door de oorsprong, met als helling de valtijd.

WERKWIJZE

1. Hang een schietlood aan de tafelrand en markeer het punt onder de rand op de vloer.
2. Laat de knikker van telkens een andere hoogte in de goot los, zodat hij met vijf verschillende snelheden van de tafel rolt.
3. Lees de tijd af waarin de knikker de lichtpoort afdekt en bereken v_0 = diameter / Δt.
4. Meet de afstand d van het punt onder de rand tot de afdruk op het carbonpapier (drie keer per hoogte, neem het gemiddelde).
5. Zet d uit tegen v_0, trek de beste rechte door de oorsprong en bereken g uit de helling.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting:

poging	Δt lichtpoort (ms)	$v_0 = d_\mathrm{k}/\Delta t$ (m/s)	voorspeld $v_0\sqrt{2H/g}$ (m)	gemeten d (m)
1	25,8	0,620	0,250	
2	18,2	0,879	0,355	
3	13,9	1,151	0,465	
4	11,3	1,416	0,572	
5	9,5	1,684	0,680	

De punten liggen op een rechte door de oorsprong met helling 0,4028 s (kleinste kwadraten door 0: $\sum v_0 d / \sum v_0^2$).

VERKLARING

De valtijd hangt niet af van v_0: de knikker valt altijd $H = 0{,}800$ m. De helling van de rechte ís die valtijd: dus $g = 2H/t_\mathrm{v}^2 = 2 \cdot 0{,}800/0{,}4028^2 = 9{,}86\,\mathrm{m/s^2}$, dicht bij 9,81. De voorspelde en gemeten afstanden verschillen hoogstens enkele millimeter: de onafhankelijkheid van Galilei klopt.

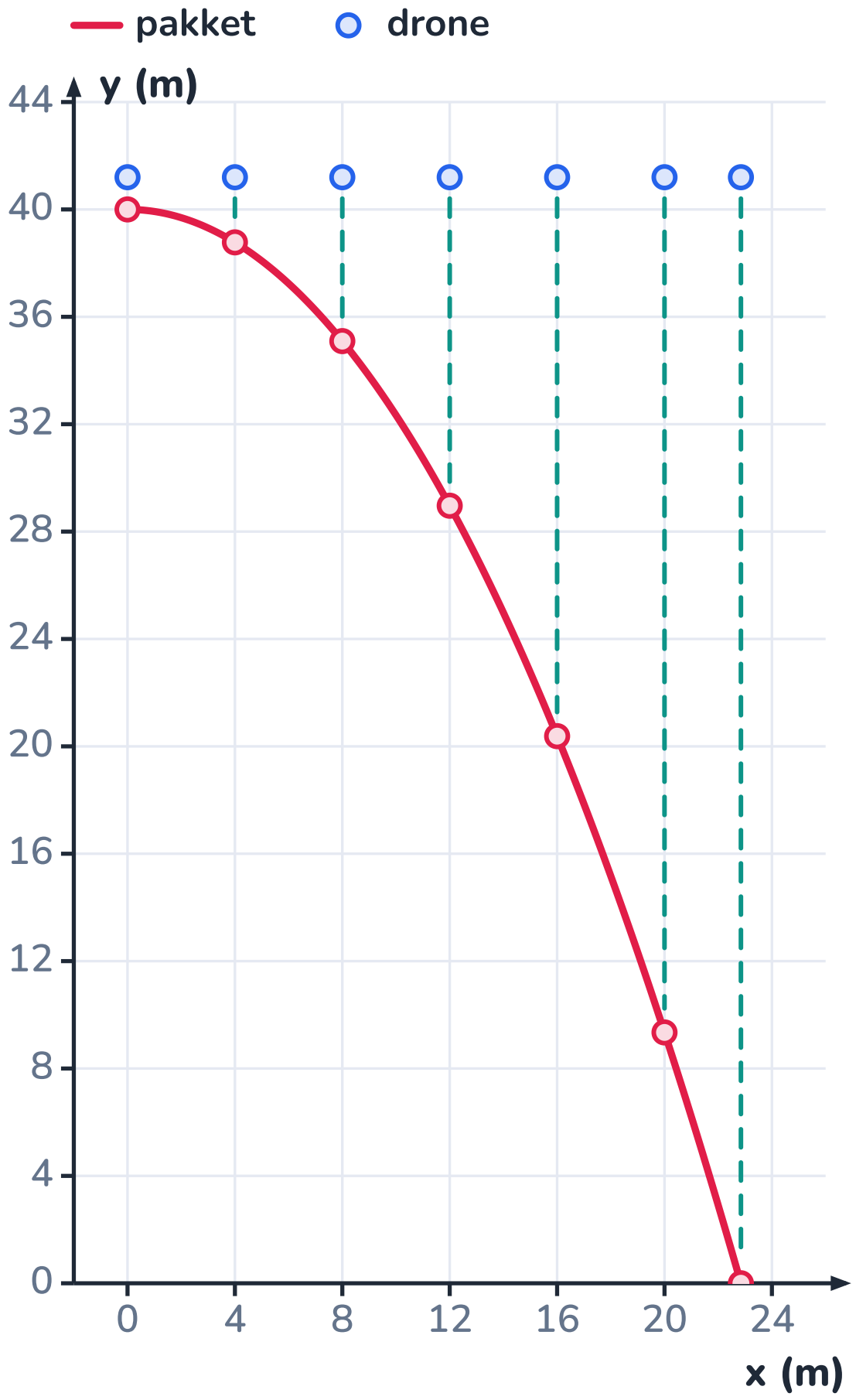
Kleine afwijkingen komen van de lichtpoort (0,1 ms op 10 à 25 ms is 0,4 tot 1 %), van de plaats van het schietlood en van de rand: een rollende knikker schiet niet perfect horizontaal weg. Luchtweerstand speelt hier geen rol: bij 1 à 2 m/s is ze honderden keren kleiner dan het gewicht van een knikker.

UITGEWERKT VOORBEELD · 8.6

Waar laat de drone het pakket los?

6/20

De bevoorradingsdrone van het station (hoofdstuk 9) vliegt op 40 m hoogte met 8,0 m/s horizontaal naar het afzetpunt. Hoeveel meter vóór het afzetpunt moet hij het pakket loslaten, als je de lucht verwaarloost? Met welke snelheid en onder welke hoek komt het neer, en waar is de drone dan?



Zonder lucht blijft het pakket recht onder de drone: beide bewegen horizontaal even snel.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- $h = 40\,\text{m}$, $\vec{v}_0 = (8{,}0;\ 0)\,\text{m/s}$ (de snelheid van de drone)
- $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$, geen lucht

- de valtijd en de afstand
- landingssnelheid en hoek
- de plaats van de drone

OPLOSSING

1. Het pakket krijgt bij het loslaten de snelheid van de drone mee: een horizontale worp met $v_0 = 8{,}0\,\text{m/s}$.
2. Valtijd: $t_\text{v} = \sqrt{2h/g} = \sqrt{80/9{,}81} = 2{,}856\,\text{s}$.
3. Afstand: $d = v_0 t_\text{v} = 8{,}0 \cdot 2{,}856 = 22{,}8\,\text{m}$ vóór het afzetpunt loslaten.
4. Landing: $\vec{v} = (8{,}0;\ -28{,}0)\,\text{m/s}$, $v = 29{,}1\,\text{m/s}$, onder $\tan^{-1}(28{,}0/8{,}0) = 74°$ met de grond.
5. De drone vliegt eenparig verder: na 2,86 s is hij ook 22,8 m verder, dus recht boven het pakket. Tegenover de drone valt het pakket gewoon loodrecht: het schip van Galilei.

ANTWOORD

Loslaten 23 m vóór het afzetpunt; het pakket landt na 2,9 s met 29 m/s onder 74°, recht onder de drone.

Klopt dit? Energie: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{64 + 785} = 29{,}1\,\text{m/s}$. Klopt. Maar een pakket van 2 kg met een doos van 30 cm heeft een eindsnelheid van ongeveer 19 m/s (hoofdstuk 4): het kan nooit met 29 m/s neerkomen. De lucht is hier niet te verwaarlozen; de simulatie verderop rekent ze mee, en hoofdstuk 9 geeft het pakket een parachute.

UITLEG · 8.7

De schuine worp

7/20

Vertrekt een voorwerp onder een hoek α met de horizontaal, dan ontbind je de beginsnelheid: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Verder verandert er niets: horizontaal eenparig, verticaal eenparig versneld.

SCHUINE WORP ZONDER LUCHTWEERSTAND

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \qquad y = h + v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad y = h + x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Kenmerken bij vertrek en landing op dezelfde hoogte ($h = 0$):

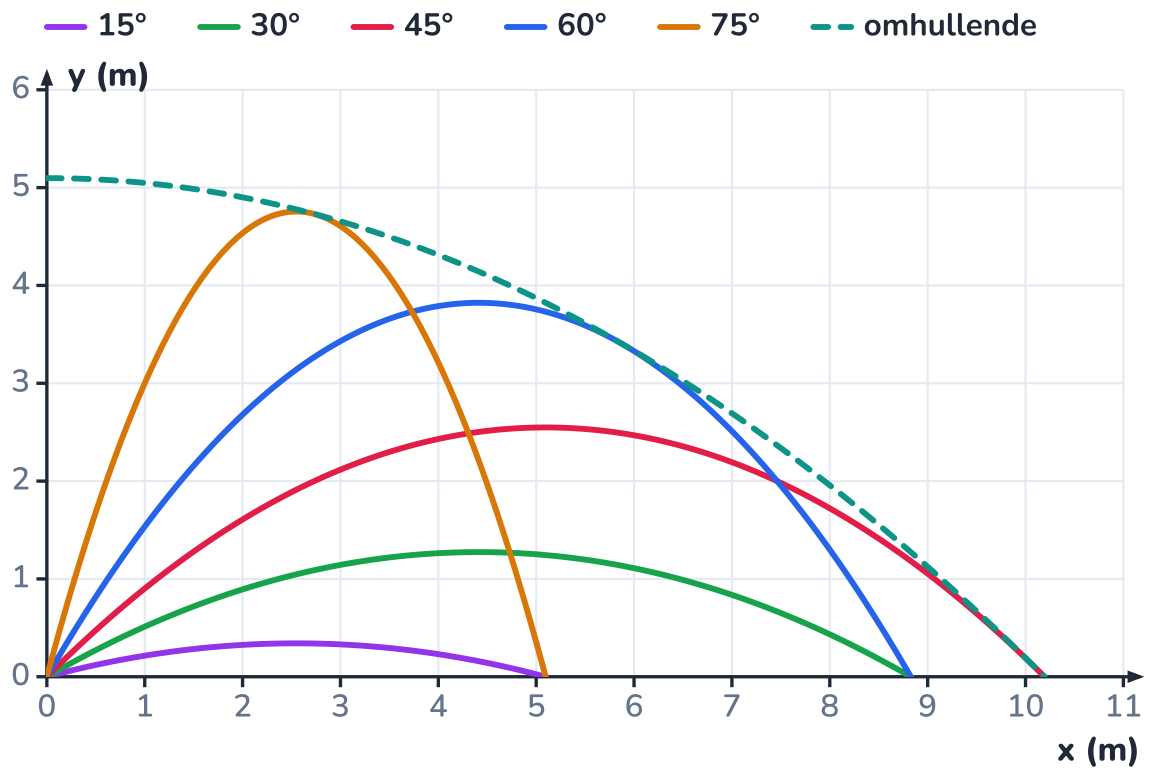
- **Top:** waar $v_y = 0$, na $t = v_0 \sin\alpha / g$, op hoogte $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.
- **Vliegtijd:** $T = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, twee keer de tijd tot de top (symmetrie).
- **Bereik:** $R = v_0 \cos\alpha \cdot T = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Het grootste bereik hoort bij $\sin 2\alpha = 1$: $\alpha = 45°$, $R_\text{max} = v_0^2/g$. Omdat $\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha)$, dragen $45° + \delta$ en $45° - \delta$ even ver (Galilei).

In de figuur vertrekken worpen met 10 m/s onder vijf hoeken. 15° en 75° landen op dezelfde plaats, net als 30° en 60°; 45° draagt 10,2 m. Alle banen blijven onder één stippellijn, de **omhullende** $y = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g\,x^2}{2v_0^2}$ (opdracht 8.15): elk punt eronder kan je met 10 m/s bereiken, langs twee banen; op de omhullende

langs één; erboven niet. Ze heet ook de 'veiligheidsparabool': wie erboven staat, kan met die beginsnelheid niet geraakt worden.

Eerst de componenten

Elk worpprobleem los je op dezelfde manier op: schrijf $x(t)$ en $y(t)$ op, zoek het tijdstip dat je nodig hebt uit één component (de top: $v_y = 0$; de landing: $y = 0$; een muur: $x = d$), en vul dat tijdstip in de andere in. Formules als $R = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ gelden alleen op gelijke hoogte.



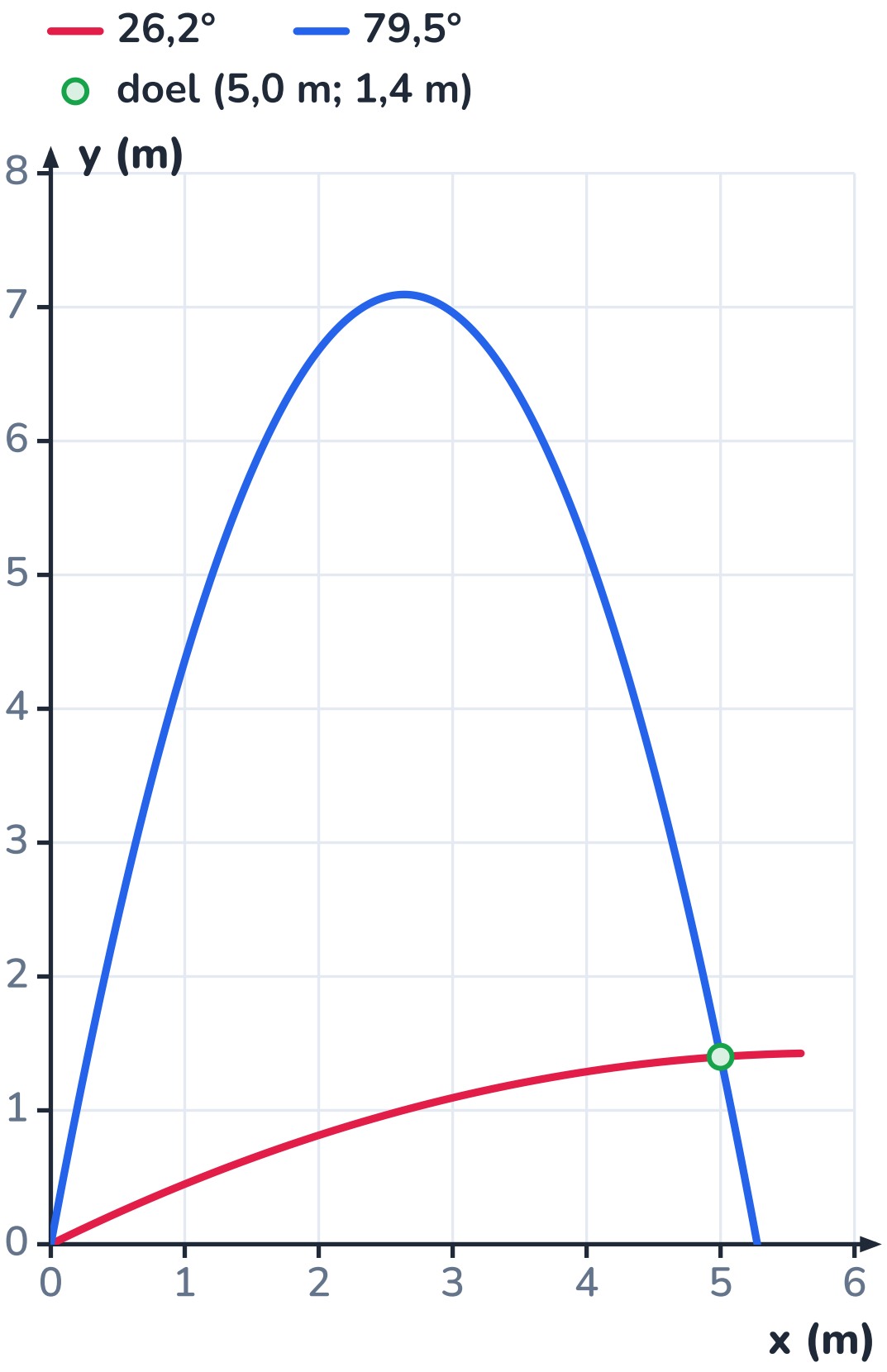
Vijf worpen met 10 m/s: 45° draagt het verst, 30° en 60° landen samen, en alle banen blijven onder de omhullende.

UITGEWERKT VOORBEELD · 8.8

Twee hoeken voor hetzelfde doel

8/20

Met een tuinslang spoel je de nok van het kasdak van de klimaatmodule af. De straal verlaat het spuitstuk met 12 m/s; de nok ligt 5,0 m verder en 1,4 m hoger dan het spuitstuk. Onder welke hoeken moet je richten? Welke hoek is beter? Verwaarloos de lucht (een samenhangende straal over 5 m).



De vlakke en de steile baan raken hetzelfde doel; de steile doet er vijf keer zo lang over.

GEGEVEN

- $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$
- doel: $x = 5{,}0\,\mathrm{m}$, $y = 1{,}4\,\mathrm{m}$

GEVRAAGD

- α
- vliegtijd en top per oplossing

OPLOSSING

1 Vul het doel in de baanvergelijking in en gebruik $1/\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$. Met $u = \tan\alpha$:

$$y = x\,u - \frac{g x^2}{2v_0^2}(1 + u^2).$$

2 $\dfrac{g x^2}{2v_0^2} = \dfrac{9{,}81 \cdot 25}{2 \cdot 144} = 0{,}8516$, dus $0{,}8516\,u^2 - 5{,}0\,u + (1{,}4 + 0{,}8516) = 0$.

3 Discriminant $25 - 4 \cdot 0{,}8516 \cdot 2{,}2516 = 17{,}33 > 0$: twee oplossingen, $u = 0{,}491$ en $u = 5{,}380$, dus $\alpha = 26{,}2°$ en $\alpha = 79{,}5°$.

4 Vliegtijd $x/(v_0\cos\alpha)$: 0,46 s voor de vlakke baan, 2,28 s voor de steile. De steile baan gaat eerst 7,1 m hoog en valt dan bijna loodrecht op de nok.

ANTWOORD

$\alpha = 26°$ (vlak, 0,46 s) of $\alpha = 79°$ (steil, 2,3 s). De vlakke baan is beter: korter in de lucht, dus minder gevoelig voor wind, en ze spoelt schuin over het dak.

Klopt dit? Is een doel wel bereikbaar? Er zijn twee oplossingen zolang de discriminant positief is; bij de kleinste snelheid die het doel nog haalt, $v_{\min} = \sqrt{g\,(y + \sqrt{x^2 + y^2})} = 8{,}04\,\mathrm{m/s}$, vallen ze samen. Het doel ligt dan precies op de omhullende.

UITLEG · 8.9

Worpen met luchtweerstand: de componenten raken gekoppeld

9/20

Voor alles wat snel, licht of groot is, klopt de parabool niet: een druppel, een pakket, een badmintonshuttle. De luchtweerstand bij deze snelheden is ongeveer kwadratisch in de snelheid (hoofdstuk 4) en werkt **tegen de snelheid tegenover de lucht** in. Met $\vec{v}_{\mathrm{rel}} = \vec{v} - \vec{w}$ ($\vec{w}$ = de wind):

BAAN MET KWADRATISCHE LUCHTWEERSTAND

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{g} - k\,|\vec{v}_{\mathrm{rel}}|\,\vec{v}_{\mathrm{rel}} \qquad k = \tfrac{1}{2}\rho\,c_d A \qquad v_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

ρ: dichtheid van de lucht, c_d: weerstandscoëfficiënt, A: frontale oppervlakte. Met de eindsnelheid wordt het $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} - \dfrac{g}{v_{\mathrm{e}}^2}\,|\vec{v}_{\mathrm{rel}}|\,\vec{v}_{\mathrm{rel}}$: alleen v_{e} telt.

Schrijf het uit per component (zonder wind):

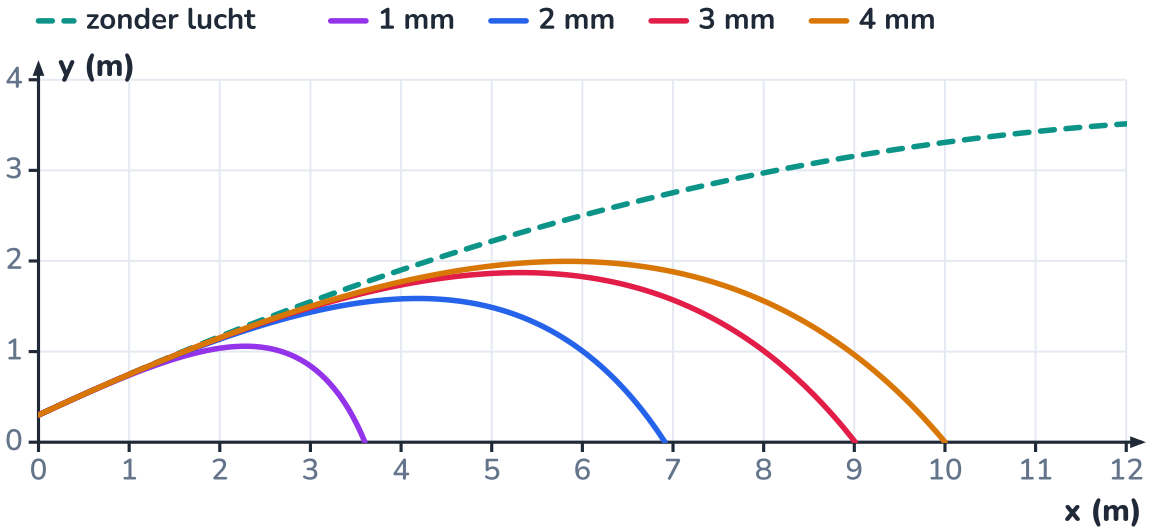
$$\dot{v}_x = -\frac{g}{v_{\mathrm{e}}^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_x, \qquad \dot{v}_y = -g - \frac{g}{v_{\mathrm{e}}^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_y.$$

De wortel bevat *beide* componenten: de remming van de horizontale beweging hangt af van hoe snel het voorwerp valt, en omgekeerd. De onafhankelijkheid van Galilei is weg, en er bestaat geen formule meer voor de baan. Je lost het stelsel op zoals in hoofdstuk 4: toestand $(x;\ y;\ v_x;\ v_y)$, en stap voor stap.

Wat je zonder rekenen al weet.

- Een voorwerp met eindsnelheid v_{e} heeft een natuurlijke lengteschaal $L = v_{\mathrm{e}}^2/g$. Is de parabool veel korter dan L, dan speelt de lucht nauwelijks; is ze langer, dan domineert de lucht. Een druppel van 3 mm heeft $L = 8{,}06^2/9{,}81 = 6{,}6\,\mathrm{m}$, een parabool van bijna 29 m: de lucht beslist.

- Het bereik is geen symmetrische boog meer: het voorwerp remt af, bereikt zijn top eerder dan halverwege en valt aan het eind steil, naar een verticale eindsnelheid toe.
- De beste hoek is kleiner dan 45°: hoe langer een voorwerp in de lucht hangt, hoe meer het afremt.
- Grote druppels vliegen verder dan kleine: de massa groeit met d^3, de weerstand maar met d^2.



Dezelfde beginsnelheid, andere druppels: zonder lucht zou de straal pas op 28,8 m landen (buiten beeld); met lucht halen druppels van 1 tot 4 mm 3,6 tot 10 m.

CODE · 8.10

Een baan simuleren in Python

10/20

Het programma lost de bewegingsvergelijking op met de methode van **Heun** uit hoofdstuk 4 (orde 2): per stap twee hellingen, gemiddeld. De toestand is een vector $\vec{s} = (x;\ y;\ v_x;\ v_y)$ en de functie `f` geeft zijn afgeleide. De luchtweerstand zit in één regel, met de snelheid tegenover de lucht. Raakt het voorwerp de grond tussen twee stappen, dan interpoleert het programma lineair tot $y = 0$, zodat het bereik niet afhangt van waar de laatste stap toevallig eindigt.

Twee toepassingen: het pakket van het vorige voorbeeld, nu met zijn eindsnelheid van 18,6 m/s (hoofdstuk 4), en druppels uit de sproeier van de moestuin (volgend blad), met de gemeten eindsnelheden van regendruppels.

Python **baan.py** 50 regels

```python
# baan.py - banen met en zonder luchtweerstand, met de methode van Heun (hoofdstuk 4)
import math
import numpy as np

g = 9.81


def baan(v0, hoek, h0=0.0, vt=None, wind=0.0, dt=0.001):
    """Worp vanaf hoogte h0 (m) met snelheid v0 (m/s) onder een hoek (graden) met de horizontaal.
    vt = eindsnelheid (m/s) voor kwadratische luchtweerstand, None = zonder lucht; wind in m/s (+ = mee).
    Geeft een array met rijen [t, x, y, vx, vy], tot het voorwerp de grond (y = 0) raakt."""
    def f(s):                                   # s = [x, y, vx, vy]  ->  ds/dt
        x, y, vx, vy = s
        if vt is None:
            return np.array([vx, vy, 0.0, -g])
        rx, ry = vx - wind, vy                  # snelheid tegenover de lucht
```

```
        k = g / vt**2 * math.hypot(rx, ry)          # |F_w| / m = g (v_rel / vt)^2
        return np.array([vx, vy, -k * rx, -g - k * ry])

    a = math.radians(hoek)
    s = np.array([0.0, h0, v0 * math.cos(a), v0 * math.sin(a)])
    t, rijen = 0.0, [[0.0, *s]]
    while True:
        k1 = f(s)
        k2 = f(s + dt * k1)
        s2 = s + dt / 2 * (k1 + k2)                 # Heun: gemiddelde van twee hellingen
        if s2[1] < 0:                               # de grond ligt binnen deze stap: lineair interpoleren
            q = s[1] / (s[1] - s2[1])
            s2 = s + q * (s2 - s)
            rijen.append([t + q * dt, *s2])
            return np.array(rijen)
        s, t = s2, t + dt
        rijen.append([t, *s])


if __name__ == "__main__":
    print("pakket uit de drone: 40 m hoog, 8,0 m/s horizontaal")
    for naam, vt in (("zonder lucht", None), ("met lucht (vt = 18,6 m/s)", 18.6)):
        t, x, y, vx, vy = baan(8.0, 0.0, 40.0, vt)[-1]
        hoek = math.degrees(math.atan2(-vy, vx))
        print(f"  {naam:26s} {t:5.2f} s  {x:5.1f} m verder  {math.hypot(vx, vy):5.1f} m/s onder {hoek:4.1f}
°")

    print("sproeier: 19,0 m/s onder 25°, mondje 0,30 m hoog")
    for naam, vt in (("zonder lucht", None), ("druppel 1 mm", 4.03), ("druppel 2 mm", 6.49),
                     ("druppel 3 mm", 8.06), ("druppel 4 mm", 8.83)):
        b = baan(19.0, 25.0, 0.30, vt)
        print(f"  {naam:13s} bereik {b[-1, 1]:5.2f} m  top {b[:, 2].max():4.2f} m  vliegtijd {b[-1, 0]:4.2f}
s")

    b1, b2 = baan(19.0, 25.0, 0.30, 8.06, dt=0.001), baan(19.0, 25.0, 0.30, 8.06, dt=0.002)
    print(f"controle 3 mm: dt = 1 ms {b1[-1, 1]:.4f} m, dt = 2 ms {b2[-1, 1]:.4f} m")
```

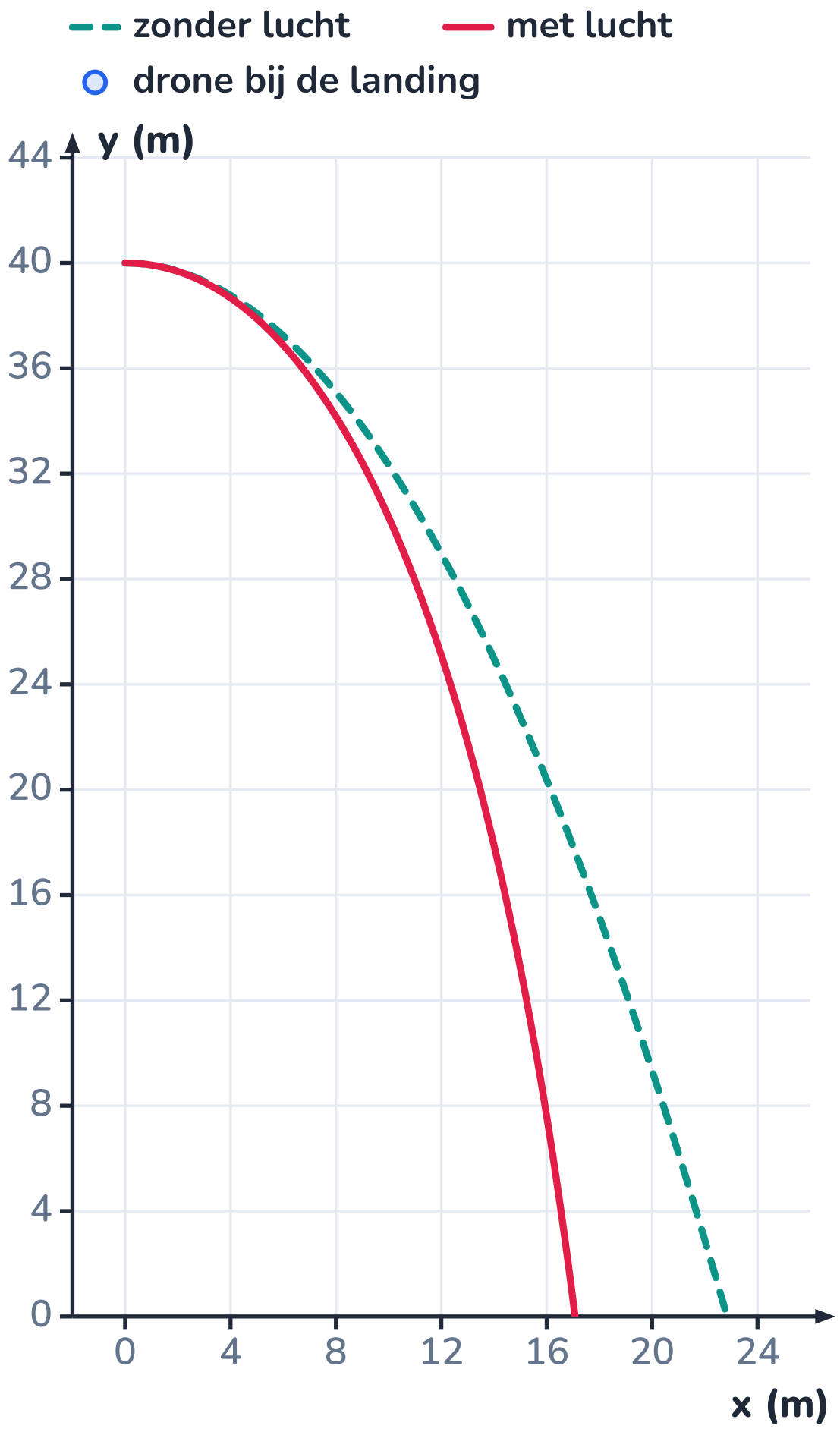
Uitvoer:

```
pakket uit de drone: 40 m hoog, 8,0 m/s horizontaal
  zonder lucht                2.86 s   22.8 m verder   29.1 m/s onder 74.1°
  met lucht (vt = 18,6 m/s)   3.48 s   17.1 m verder   17.6 m/s onder 82.9°
sproeier: 19,0 m/s onder 25°, mondje 0,30 m hoog
  zonder lucht  bereik 28.82 m  top 3.59 m  vliegtijd 1.67 s
  druppel 1 mm  bereik  3.60 m  top 1.06 m  vliegtijd 0.85 s
  druppel 2 mm  bereik  6.91 m  top 1.59 m  vliegtijd 1.07 s
  druppel 3 mm  bereik  9.01 m  top 1.87 m  vliegtijd 1.17 s
  druppel 4 mm  bereik 10.00 m  top 2.00 m  vliegtijd 1.22 s
controle 3 mm: dt = 1 ms 9.0104 m, dt = 2 ms 9.0104 m
```

Het pakket valt met lucht 0,6 s langer en komt met 17,6 m/s neer in plaats van 29,1 m/s. Het landt maar 17,1 m verder: de lucht remt de horizontale snelheid, zodat het pakket achter de drone blijft hangen (figuur). Voor de druppels verandert alles: van 28,8 m zonder lucht naar 3,6 tot 10 m. De laatste regel controleert de stap: met 2 ms in plaats van 1 ms verschuift het bereik minder dan een tiende millimeter.

Een simulatie controleren

Drie tests die altijd kunnen: (1) zet de lucht uit (`vt=None`) en vergelijk met de formules van de parabool: 28,82 m hier, en exact $\left(v_0 \cos\alpha / g\right)\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right)$ geeft hetzelfde; (2) halveer de stap; (3) kijk of de valsnelheid naar v_e gaat.



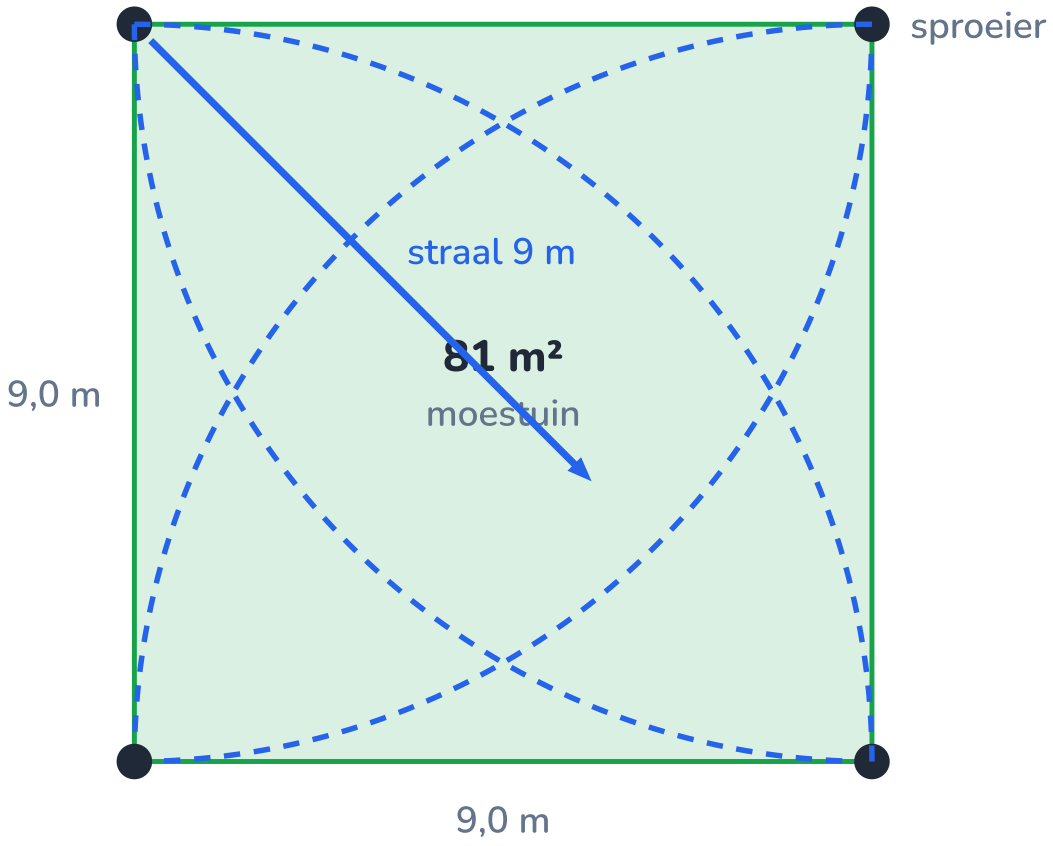
Met lucht blijft het pakket achter: bij de landing vliegt de drone al een eind verder.

UITGEWERKT VOORBEELD · 8.11

Habitat: hoe ver sproeit de sproeier?

11/20

Naast de meetkas komt een moestuin van 9,0 × 9,0 m, beregend met regenwater. Een kleine sproeier heeft een spuitmondje van 2,0 mm en krijgt 2,0 bar overdruk; de straal vertrekt onder 25°, 0,30 m boven de grond. Schat de uitstroomsnelheid en het debiet, bereken het bereik zonder lucht en met de simulatie, en beslis hoeveel sproeiers de tuin nodig heeft.



Vier kwartcirkelsproeiers in de hoeken: elke sproeier reikt tot de volgende, alle water blijft in de tuin.

GEGEVEN

- $\Delta p = 2{,}0\,\text{bar}$, $d = 2{,}0\,\text{mm}$, $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$
- $\alpha = 25°$, $h = 0{,}30\,\text{m}$
- eindsnelheden van druppels (Gunn en Kinzer, 1949): zie tabel

GEVRAAGD

- v_0, Q en het hydraulisch vermogen
- het bereik zonder en met lucht
- de opstelling in de tuin

OPLOSSING

1. **Snelheid uit de energie.** Een kubieke meter water onder 2,0 bar overdruk heeft $\Delta p \cdot 1\,\text{m}^3 = 2{,}0 \cdot 10^5\,\text{J}$ 'drukenergie'. Wordt die volledig bewegingsenergie, dan is $\tfrac{1}{2}\rho v^2 = \Delta p$, dus $v = \sqrt{2\Delta p/\rho} = \sqrt{400} = 20{,}0\,\text{m/s}$ (de wet van Bernoulli, hoofdstuk 18). Wrijving in het mondje kost wat: met een snelheidscoëfficiënt van 0,95 is $v_0 = 19{,}0\,\text{m/s}$.

2. **Debiet.** $Q = A\,v_0 = \tfrac{\pi}{4}(2{,}0 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 19{,}0 = 5{,}97 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^3/\text{s} = 3{,}58\,\text{L/min}$. Hydraulisch vermogen $\Delta p\,Q = 11{,}9\,\text{W}$.

3 **Zonder lucht.** Vanaf 0,30 m hoog: 28,8 m ver en 3,6 m hoog. Dat is onmogelijk: echte tuinsproeiers van deze grootte halen ongeveer 10 m.

4 **Met lucht.** De straal breekt kort na het mondje in druppels. De simulatie (`baan.py`) geeft per druppelgrootte:

DRUPPEL	EINDSNELHEID V_E	V_E^2/G	BEREIK (25°)	TOP	VLIEGTIJD
0,5 mm	2,06 m/s	0,4 m	1,3 m	0,61 m	0,63 s
1 mm	4,03 m/s	1,7 m	3,6 m	1,06 m	0,85 s
2 mm	6,49 m/s	4,3 m	6,9 m	1,59 m	1,07 s
3 mm	8,06 m/s	6,6 m	9,0 m	1,87 m	1,17 s
4 mm	8,83 m/s	7,9 m	10,0 m	2,00 m	1,22 s
zonder lucht	-	-	28,8 m	3,59 m	1,67 s

5 **Welke straal?** De grootste druppels bepalen hoe ver de sproeier reikt. Rekenen we met druppels tot 3 mm, dan is de straal ongeveer 9 m. De tabellen van een fabrikant bevestigen de orde van grootte: een rotor met een iets groter mondstuk haalt bij 1,7 à 2,4 bar ongeveer 10 m met 4 à 5 L/min.

6 **Opstelling.** Vier kwartcirkelsproeiers in de hoeken, elk met een straal van 9 m (kop aan kop: elke sproeier reikt tot de volgende). Alle water valt in de tuin, en elk punt krijgt water van minstens twee sproeiers. Samen $4Q = 14{,}3\,\mathrm{L/min}$ op 81 m²: $10{,}6\,\mathrm{mm/h}$.

ANTWOORD

$v_0 \approx 19\,\mathrm{m/s}$, $Q \approx 3{,}6\,\mathrm{L/min}$, 12 W hydraulisch per sproeier. Zonder lucht 29 m, met lucht ongeveer 9 m (druppels tot 3 mm). Vier kwartcirkelsproeiers in de hoeken geven 10,6 mm per uur; een droge zomerdag (5 mm, 405 L) vraagt 28 minuten.

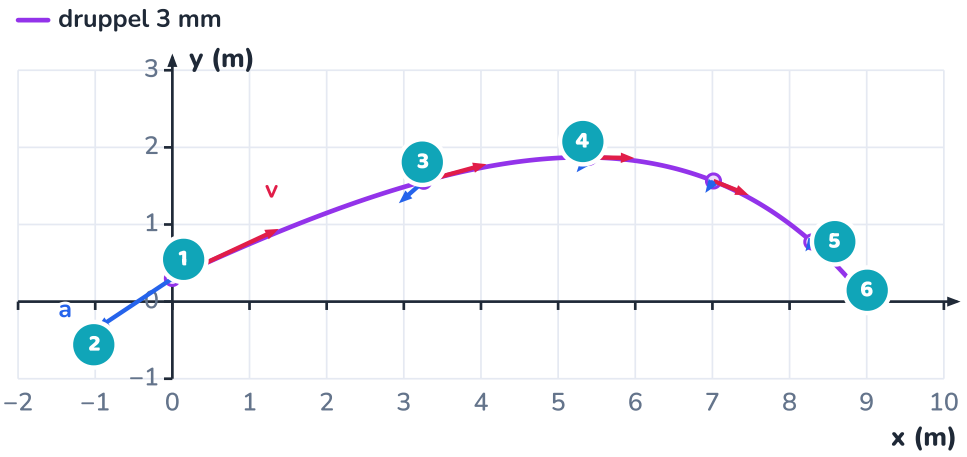
Klopt dit? De sproeier stoot water uit met impuls: de reactiekracht $\rho\,Q\,v_0 = 1{,}13\,\mathrm{N}$ laat sommige sproeiers draaien (hoofdstuk 9). Een neerslag van ongeveer 10 mm/h kan een leemgrond opnemen zonder plassen; zwaardere sproeiers zouden de tuin in twee beurten moeten beregenen.

ONTLEED · 8.12

Habitat: de baan van een druppel ontleed

12/20

Een druppel van 3 mm uit de sproeier, om de 0,25 s met zijn snelheid $\vec{v}$ (0,08 m per m/s) en zijn versnelling $\vec{a}$ (0,02 m per m/s²), uit dezelfde simulatie.



In het begin remt de lucht de druppel veel harder af dan de zwaartekracht hem doet vallen; aan het eind valt hij bijna met zijn eindsnelheid.

1 Vertrek
19,0 m/s onder 25°. De luchtweerstand is dan g · (19,0/8,06)² = 55 m/s², meer dan vijf keer g: de druppel remt in het begin vooral af.

2 De versnelling bij vertrek
a = g + weerstand wijst schuin naar achteren en naar beneden (59 m/s²), bijna tegen v in. Ze verandert vooral de grootte van v (grote tangentiële component).

3 Na 0,25 s
De snelheid is al gezakt tot 10,5 m/s. Hoe trager, hoe kleiner de weerstand: de pijl van a krimpt en draait naar beneden.

4 De top
Na 0,49 s op 1,87 m hoogte, op 5,3 m van de sproeier: minder dan halverwege, anders dan bij een parabool.

5 Dalen
Op 1,0 s is a bijna gelijk aan g: de druppel valt en zijn snelheid gaat naar de eindsnelheid, die verticaal is.

6 Landing
Na 1,17 s, 9,0 m ver, met 6,3 m/s onder 52° met de grond: veel steiler dan de 25° van de parabool. Zo slaan druppels minder gronddeeltjes los.

UITLEG · 8.13

De beste hoek, en de wind

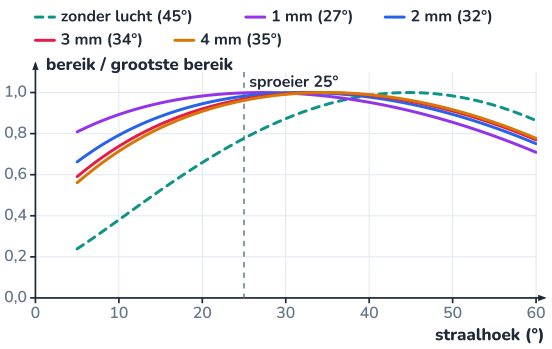
13/20

Zonder lucht draagt 45° het verst. Met lucht is een lagere hoek beter: een steile baan houdt de druppel langer in de lucht, waar hij afremt. De figuur toont het bereik tegen de straalhoek, telkens gedeeld door het grootste bereik, uit dezelfde simulatie. Hoe kleiner de druppel, hoe lager de beste hoek. Voor 3 mm ligt het optimum rond 34° (9,3 m), maar 25° haalt al 9,0 m: de kromme is vlak rond haar top.

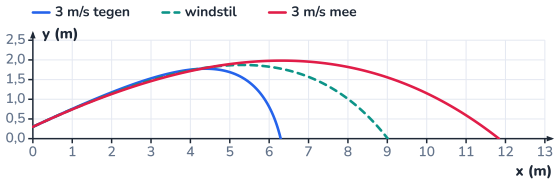
Waarom kiezen sproeiers dan toch 20 à 25°? Om de **wind**. De weerstand hangt af van de snelheid tegenover de *lucht*. Blaast de wind mee, dan remt een druppel minder af en draagt hij verder; tegen de wind in omgekeerd. Met 3 m/s wind komt een druppel van 3 mm op 11,8 m (mee) of 6,3 m (tegen) in plaats van 9,0 m; een druppel van 1 mm op 6,0 of 1,4 m in plaats van 3,6 m. Kleine druppels waaien weg. Een lage baan is korter in de lucht en dus minder windgevoelig.

Habitat: sproeien bij weinig wind

Het brein van het station leest de windmeter op de weermast (hoofdstuk 5). Boven 3 m/s wordt de moestuin ongelijk nat en waait water weg; de sproeiers draaien daarom vroeg in de ochtend, als het meestal windstil is en er ook minder water verdampt.



Hoe kleiner de druppel, hoe lager de beste hoek (tussen haakjes). Zonder lucht ligt het optimum bij 45°.



Dezelfde druppel met 3 m/s wind mee, tegen of zonder wind: de wind verschuift de landing met 2 à 3 m.

UITLEG · 8.14

Relatieve beweging

14/20

Een snelheid heeft alleen betekenis tegenover iets: de kade, het water, de lucht. Beweegt A tegenover B en B tegenover C, dan tel je de snelheden op als vectoren:

SNELHEDEN OPTELLEN (GALILEI)

$$\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} \qquad \vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$$

Lees de indices als een ketting: 'A tegenover B' plus 'B tegenover C' is 'A tegenover C'. Voor plaatsen geldt hetzelfde: $\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC}$. Afleiden geeft de formule voor de snelheden, en nog eens afleiden $\vec{a}_{AC} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BC}$.

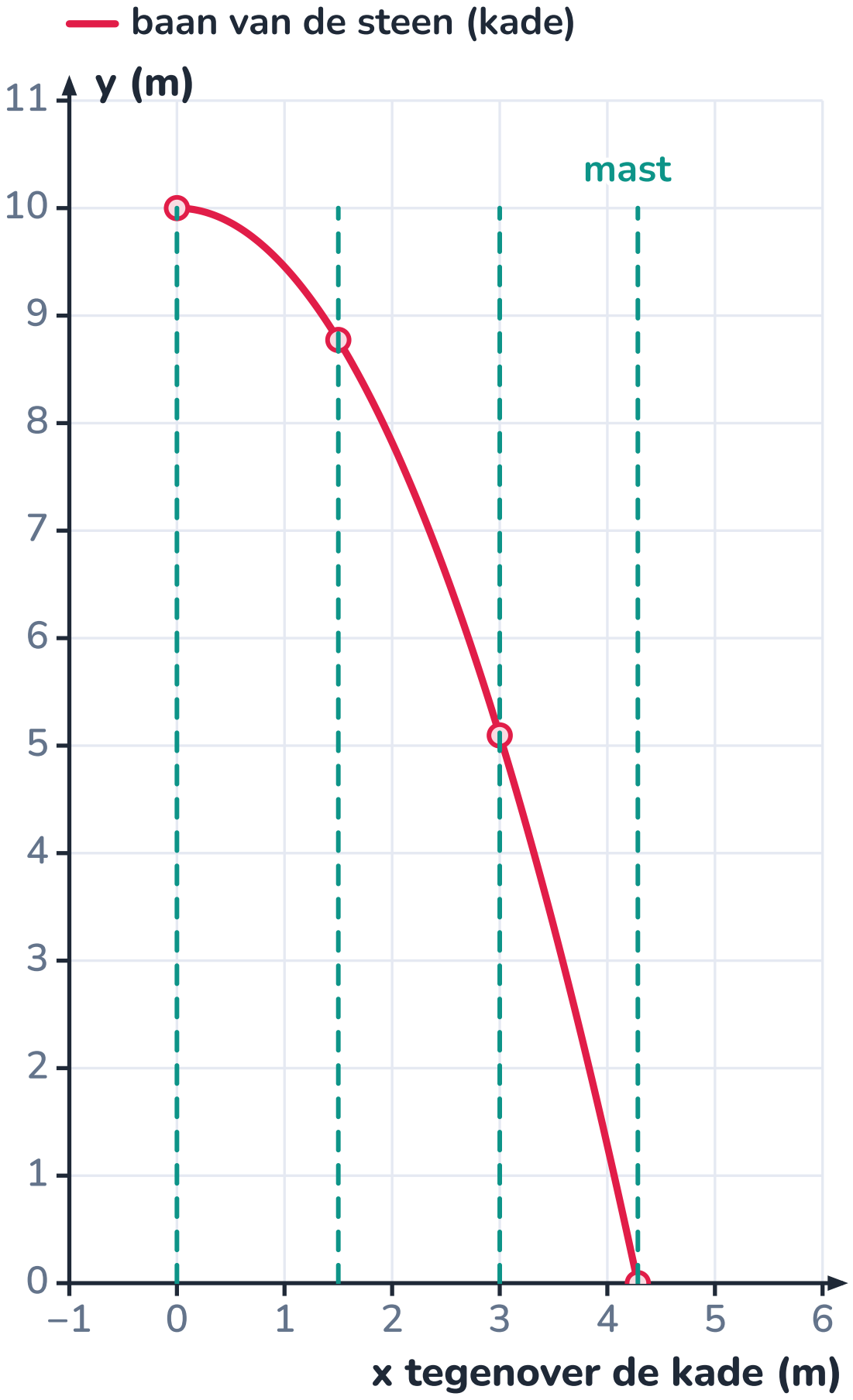
Het schip van Galilei. Een steen valt van een mast van 10 m op een schip dat met 3,0 m/s vaart. Voor een matroos valt hij recht naar beneden. Voor iemand op de kade heeft hij bij het loslaten al 3,0 m/s horizontaal: hij volgt een halve parabool en komt 4,3 m verder neer, precies waar de voet van de mast dan is. Beide beschrijvingen kloppen; ze verschillen alleen in het assenstelsel. Omdat het schip niet versnelt, is de versnelling van de steen in beide stelsels dezelfde, $\vec{g}$: dezelfde natuurwetten.

Waar het in de praktijk telt.

- Een drone of een vliegtuig vliegt tegenover de lucht; de lucht beweegt tegenover de grond (de wind). $\vec{v}_{\text{grond}} = \vec{v}_{\text{lucht}} + \vec{w}$ (volgend voorbeeld).
- Een boot vaart tegenover het water, het water stroomt tegenover de oever (opdracht 8.5).
- Luchtweerstand hangt af van $\vec{v} - \vec{w}$: de druppel in de wind van het vorige blad.
- Regen die loodrecht valt, maakt schuine strepen op het raam van een rijdende trein (opdracht 8.14).

Een losgelaten voorwerp valt recht naar beneden

Tegenover wie? Wie een pakket loslaat uit een vliegende drone, geeft het de snelheid van de drone mee. Tegenover de grond is dat een worp, geen val.



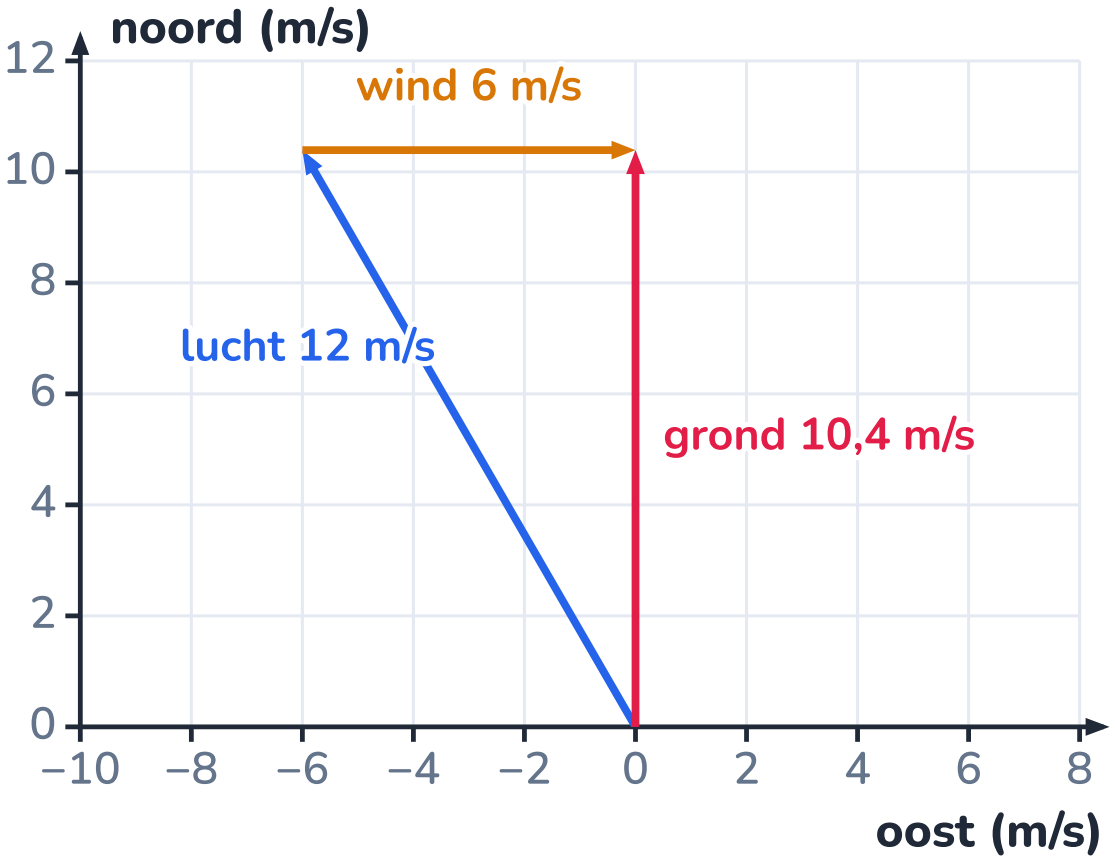
Gezien vanaf de kade: de steen beschrijft een halve parabool en blijft op elk ogenblik onder de top van de mast (stippellijnen om de 0,5 s).

UITGEWERKT VOORBEELD · 8.15

De drone in de wind

15/20

Het bevoorradingsdepot ligt 6,0 km recht ten noorden van het station. De drone vliegt met 12 m/s tegenover de lucht. Er staat een westenwind van 6,0 m/s (de lucht beweegt naar het oosten). Welke koers moet de drone aanhouden om recht naar het noorden te vliegen, en hoe lang duurt de heen- en terugvlucht? Vergelijk met windstil weer en met 6,0 m/s tegenwind op de heenweg.



Kop aan staart: de snelheid tegenover de lucht (koers 30° ten westen van het noorden) plus de wind is de snelheid tegenover de grond, recht naar het noorden.

GEGEVEN

- $|\vec{v}_{\text{lucht}}| = 12\,\text{m/s}$, $\vec{w} = (6{,}0;\ 0)\,\text{m/s}$ (x oost, y noord)
- afstand 6,0 km

GEVRAAGD

- koers, $|\vec{v}_{\text{grond}}|$, tijden

OPLOSSING

1. Voorwaarde: $\vec{v}_{\text{grond}} = \vec{v}_{\text{lucht}} + \vec{w}$ wijst naar het noorden, dus de x-component is nul: $v_{\text{lucht},x} = -6{,}0\,\text{m/s}$.
2. Koers: $\sin\beta = 6{,}0/12 = 0{,}5$, $\beta = 30°$ ten westen van het noorden (de drone 'krabt' tegen de wind in).
3. Snelheid tegenover de grond: $v_{\text{lucht},y} = \sqrt{12^2 - 6{,}0^2} = 10{,}39\,\text{m/s}$, en dat is ook $|\vec{v}_{\text{grond}}|$. Heen: $6000/10{,}39 = 577\,\text{s} = 9{,}6\,\text{min}$; terug evenveel (de wind staat opnieuw dwars).
4. Windstil: 8,3 min per richting, samen 16,7 min. Met zijwind: 19,2 min.

5 Tegenwind heen, meewind terug: $6000/6{,}0 + 6000/18 = 1000 + 333\,\text{s} = 22{,}2\,\text{min}$.

ANTWOORD

Koers 30° ten westen van het noorden, 10,4 m/s over de grond, 19,2 min heen en terug (windstil 16,7 min, met tegen- en meewind 22,2 min).

Klopt dit? Wind kost op een heen-en-terugvlucht *altijd* tijd: met tegen- en meewind is de totale tijd $\frac{2d\,v}{v^2 - w^2}$, met zijwind $\frac{2d}{\sqrt{v^2 - w^2}}$, allebei groter dan $2d/v$. De tijd die je met meewind wint, verlies je dubbel met tegenwind, want je vliegt langer tegen. Bij $w \geq v$ komt de drone nooit aan: het energiebudget van de drone (hoofdstuk 9) moet dus met de wind rekenen.

UITLEG · 8.16

De eenparige cirkelbeweging

16/20

Een punt op een draaiend wiel, een robot in een bocht, een satelliet: ze bewegen op een cirkel met straal R. De plaats beschrijf je met de **hoek** $\theta(t)$ in radialen (booglengte gedeeld door straal, $s = R\theta$). Bij een **eenparige** cirkelbeweging neemt θ gelijkmatig toe met de **hoeksnelheid** ω (rad/s):

$$\theta = \omega t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \qquad \vec{r}(t) = R\,(\cos\omega t;\ \sin\omega t).$$

Afleiding met de afgeleide. Leid $\vec{r}(t)$ af met de kettingregel (hoofdstuk 1):

$$\vec{v} = R\omega\,(-\sin\omega t;\ \cos\omega t), \qquad \vec{a} = -R\omega^2\,(\cos\omega t;\ \sin\omega t) = -\omega^2\,\vec{r}.$$

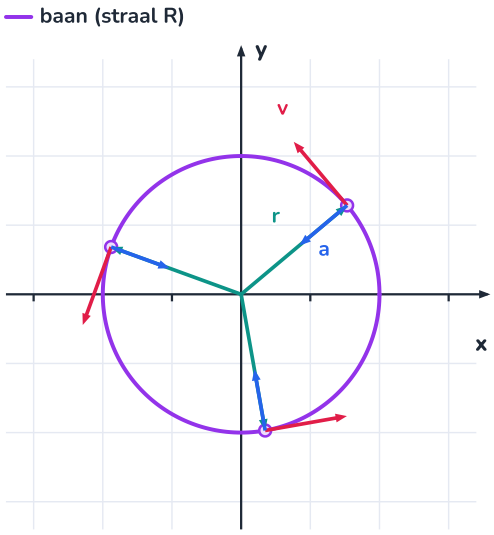
De snelheid staat loodrecht op $\vec{r}$ (hun scalair product is nul) en heeft grootte $v = \omega R$. De versnelling wijst tegen $\vec{r}$ in, naar het middelpunt: de **middelpuntzoekende** of centripetale versnelling.

EENPARIGE CIRKELBEWEGING

$$v = \omega R \qquad a_\text{c} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \qquad F_\text{c} = m\,\frac{v^2}{R}$$

De snelheid blijft even groot ($a_\text{t} = 0$), maar haar richting draait voortdurend: dat vraagt een versnelling $a_\text{n} = v^2/R$, zoals op het tweede blad met $\rho = R$.

Afleiding met de meetkunde (Huygens en Newton deden het zo). In een korte tijd Δt draait de straal over $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$, en de snelheid draait mee over dezelfde hoek. Zet $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ met hun staart samen: $\Delta\vec{v}$ is de basis van een smalle gelijkbenige driehoek met benen v en tophoek $\Delta\theta$, dus $|\Delta\vec{v}| \approx v\,\Delta\theta$, en hij wijst naar het middelpunt. Dan is $a = |\Delta\vec{v}|/\Delta t = v\,\omega = v^2/R$.



Op drie plaatsen: r vanuit het middelpunt, v langs de raaklijn, a naar het middelpunt (schets, geen schaal).



Rechts twee posities op de cirkel; links hun snelheden met de staarten samen: Δv wijst naar het middelpunt.

UITLEG · 8.17

De middelpuntzoekende kracht

17/20

Volgens de tweede wet van Newton (hoofdstuk 8 van I) vraagt de versnelling v^2/R naar het middelpunt een resulterende kracht mv^2/R in die richting. Dat is **geen nieuwe soort kracht**: het is een rol die een gewone kracht speelt. Zoek dus altijd *welke* kracht naar het middelpunt wijst:

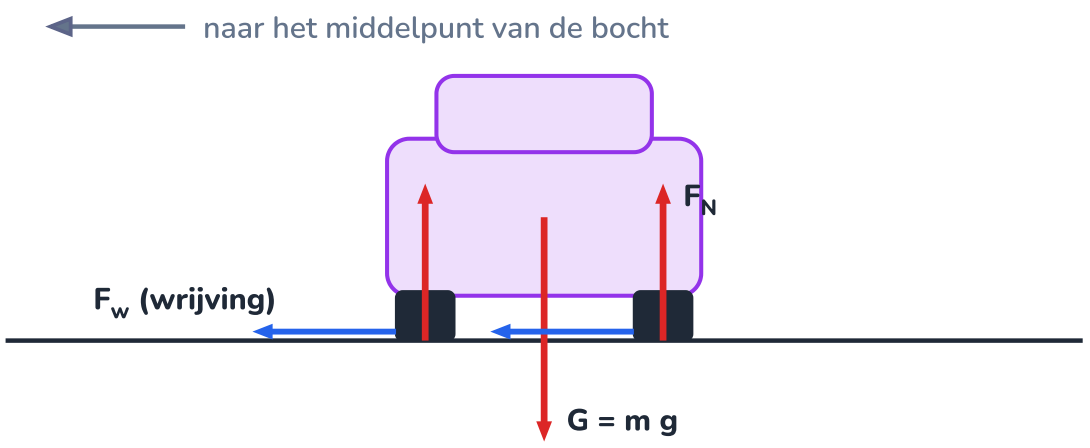
voorbeeld	v, R	$a_c = v^2/R$	wie levert de kracht?
inspectierobot in de bocht van zijn lus (hoofdstuk 33 van I)	0,20 m/s; 0,15 m	0,27 m/s²	wrijving tussen banden en vloer; slippen pas boven 0,86 m/s (bij $\mu = 0{,}5$)
auto in een vlakke bocht	$R = 50$ m	$\leq \mu g$	wrijving: hoogstens 71 km/h droog ($\mu = 0{,}8$), 50 km/h nat ($\mu = 0{,}4$)
slacentrifuge (oogst van de klimaatmodule)	300 tpm; 0,12 m	118 m/s² = 12 g	de wand van de korf duwt de sla naar binnen; water gaat door de gaatjes rechtdoor
ISS rond de aarde	7,67 km/s; 6771 km	8,69 m/s²	de zwaartekracht van de aarde, helemaal

De auto in de bocht. In een vlakke bocht moet de wrijving tussen banden en weg de hele kracht leveren. Statische wrijving levert hoogstens $\mu F_N = \mu mg$, dus $mv^2/R \leq \mu mg$: $v_{max} = \sqrt{\mu g R}$. De massa valt weg: een volle bus en een lege auto slippen bij dezelfde snelheid. Een nat wegdek halveert μ en deelt v_{max} door $\sqrt{2}$. Een hellende bocht laat de normaalkracht meehelpen (opdracht 8.12).

De slacentrifuge. De bladeren van de oogst worden door de wand van de korf naar binnen geduwd. Een waterdruppel van 0,2 g op een blad heeft bij 300 toeren per minuut 24 mN nodig om mee te draaien; zodra de hechting aan het blad dat niet meer levert, vliegt hij *rechtdoor*, langs de raaklijn, door de gaatjes van de korf.

Een middelpuntvliedende kracht duwt je naar buiten

In een auto die een bocht neemt, voel je je naar buiten geduwd. Er is geen kracht die dat doet: jouw lichaam wil rechtdoor (traagheid), en de auto draait onder je weg tot de deur of de gordel je naar het middelpunt duwt. Wie de beweging beschrijft vanuit de draaiende auto (een versnellend assenstelsel), mag een schijnkracht mv^2/R naar buiten invoeren om de rekening te laten kloppen. Maar in een vrijlichaamsdiagram vanaf de grond staat alleen de kracht naar binnen.



In een vlakke bocht levert alleen de wrijving tussen banden en weg de kracht naar het middelpunt; G en de normaalkrachten heffen elkaar op.

UITGEWERKT VOORBEELD · 8.18

Een baan om de aarde

18/20

Het internationale ruimtestation ISS draait op ongeveer 400 km hoogte rond de aarde. Hoe snel moet het gaan om op een cirkelbaan te blijven, hoe lang duurt een omloop, en hoe groot is de zwaartekracht daar? Waarom zweven de astronauten?

GEGEVEN

- $GM_{\text{aarde}} = 3{,}986 \cdot 10^{14}\,\text{m}^3/\text{s}^2$, $R_{\text{aarde}} = 6371\,\text{km}$
- $h = 400\,\text{km}$

GEVRAAGD

- v, T en g op die hoogte

OPLOSSING

1. De zwaartekracht $\frac{GMm}{r^2}$ levert de middelpuntzoekende kracht: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, dus $v = \sqrt{GM/r}$. De massa van het station valt weg.
2. $r = 6371 + 400 = 6771\,\text{km}$: $v = \sqrt{3{,}986 \cdot 10^{14}/6{,}771 \cdot 10^{6}} = 7673\,\text{m/s}$, ongeveer 27 600 km/h.
3. Omlooptijd: $T = 2\pi r/v = 5545\,\text{s} = 92{,}4\,\text{min}$.
4. Zwaartekracht: $g = GM/r^2 = 8{,}69\,\text{m/s}^2$, nog 89 % van die aan de grond.

ANTWOORD

$v \approx 7{,}67\,\mathrm{km/s}$, $T \approx 92\,\mathrm{min}$ **(ongeveer 15,6 omlopen per dag)**, $g \approx 8{,}7\,\mathrm{m/s^2}$.

Klopt dit? De astronauten zweven niet omdat er geen zwaartekracht is, maar omdat ze samen met het station voortdurend vallen: hun hele versnelling is g, dezelfde als die van de wanden. Newton beschreef het al met een kanon op een hoge berg: hoe sneller de kogel, hoe verder hij valt, tot de aarde onder hem even snel wegbuigt als hij valt. Opdracht 8.17 zoekt de hoogte waarop een satelliet boven dezelfde plek blijft hangen.

NASLAG · 8.19

Beweging in twee dimensies: formules en werkwijze

19/20

Werkwijze bij een worp: (1) kies assen en oorsprong; (2) ontbind de beginsnelheid; (3) schrijf $x(t)$ en $y(t)$; (4) zoek het tijdstip uit één component en vul in de andere in; (5) controleer met de energie. Met lucht: schat eerst $L = v_e^2/g$ tegenover de parabool, en simuleer als ze vergelijkbaar zijn.

kinematica in het vlak

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \quad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \vec{a}\cdot\hat{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

symbool	betekenis	eenheid
ρ	kromtestraal	m

worp zonder lucht

$$x = v_0\cos\alpha\, t, \quad y = h + v_0\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

op gelijke hoogte

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \quad T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}, \quad R = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

omhullende (bereikbaar gebied)

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

met kwadratische luchtweerstand

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} - \frac{g}{v_e^2}|\vec{v}-\vec{w}|(\vec{v}-\vec{w}), \quad v_e = \sqrt{mg/k}$$

symbool	betekenis	eenheid
$\vec{w}$	windsnelheid	m/s
$k = \frac{1}{2}\rho c_d A$	weerstandsconstante	kg/m

straal uit een spuitmond (orde van grootte)

$$v \approx \sqrt{2\Delta p/\rho}, \quad Q = A\,v$$

relatieve snelheid

$$\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$$

cirkelbeweging

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad v = \omega R, \quad a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

symbool	betekenis	eenheid
ω	hoeksnelheid	rad/s
f	frequentie	Hz

cirkelbaan om een planeet

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

sproeier van de moestuin (Habitat)	waarde
overdruk aan het mondje, diameter, hoek, hoogte	2,0 bar; 2,0 mm; 25°; 0,30 m
uitstroomsnelheid, debiet	19,0 m/s; 3,58 L/min
bereik zonder lucht / met lucht (druppels tot 3 mm)	28,8 m / ±9 m
moestuin, opstelling, neerslag	9,0 × 9,0 m; 4 kwartcirkels in de hoeken; 10,6 mm/h
5 mm beregenen	405 L in 28 min

HET GEHEEL · 8.20

Waar beweging in twee dimensies vandaan komt en waar ze heen gaat

20/20

Beweging in het vlak is de kinematica van hoofdstuk 7 van I, met de vectoren van hoofdstuk 5 en de afgeleiden van hoofdstuk 1. De simulatie is die van hoofdstuk 4, nu met een toestand van vier getallen. Samen met de wetten van Newton vormt ze de basis voor alles wat in de mechanica volgt: botsingen, rotatie, trillingen. Buiten de mechanica (K) raakt ze het modelleren (W) en het programmeren (P), en in het station het regelen (R): een drone of robot moet zijn baan kennen om ze te sturen.

F14 Beweging en snelheid
Snelheid als verplaatsing per tijd: hier een vector die raakt aan de baan.

I6 Goniometrie en vectoren
Vectoren ontbinden en optellen: de beginsnelheid ontbinden, snelheden optellen in de wind.

I7 Beweging beschrijven
ERB, EVRB en vrije val: de twee componenten van een worp.

I8 De wetten van Newton
F = m a: de middelpuntzoekende kracht is een resulterende kracht.

I33 Een mobiele robot
Het robotje in zijn bocht en de wielen: hier de versnelling en de grens van de wrijving.

E1 Afgeleiden: verandering meten
v en a als afgeleiden; de centrale differentie uit videodata.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
Heun, stelsels en het vallende pakket: nu in twee dimensies.

E5 Vectoren en matrices
Scalair product voor de tangentiële versnelling, vectorproduct voor de normale.

E9 Impuls en botsingen
De drone dropt het pakket met een parachute; de sproeier en de rotor als straalkracht.

E10 Rotatie
Hoeksnelheid en hoekversnelling, de rollende knikker (waarom 10/7) en het impulsmoment van een baan.

E11 Trillingen en resonantie
Een cirkelbeweging geprojecteerd op een as is een harmonische trilling.

E18 Stroming van vloeistoffen en gassen
Bernoulli, drukverlies en de pomp achter de sproeiers.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen
Runge-Kutta en stapgrootteregeling voor banen.

Habitat

Habitat krijgt een beregende moestuin van 9,0 × 9,0 m op het proefterrein: vier kwartcirkelsproeiers in de hoeken, spuitmond 2,0 mm op 2,0 bar, straal ongeveer 9 m, 10,6 mm per uur; een droge zomerdag vraagt 28 minuten en 405 L regenwater. Het brein sproeit bij weinig wind. De bevoorradingsdrone vliegt 12 m/s tegenover de lucht naar een

depot op 6,0 km; wind kost altijd tijd. Opdracht 8.13 werkt het beregeningsplan uit; hoofdstuk 18 kiest de pomp en de leidingen.

SAMENVATTING

In het kort

- Plaats, snelheid en versnelling zijn vectoren: $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ en $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$, per component. $\vec{v}$ raakt aan de baan; $\vec{a}$ ontbindt in $a_\mathrm{t} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ en $a_\mathrm{n} = v^2/\rho$.
- Zonder lucht zijn horizontale en verticale beweging onafhankelijk: $x = v_0 \cos\alpha\, t$, $y = h + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$, een parabool.
- Op gelijke hoogte: $H = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$, $T = 2v_0 \sin\alpha/g$, $R = v_0^2 \sin 2\alpha/g$; 45° draagt het verst; een bereikbaar doel heeft twee banen.
- Luchtweerstand $\propto |\vec{v}_\mathrm{rel}|\vec{v}_\mathrm{rel}$ koppelt de componenten: geen formule, wel een simulatie. De lengteschaal v_e^2/g zegt of de lucht telt; de beste hoek ligt dan onder 45°.
- Een sproeier met 2,0 bar spuit ongeveer 19 m/s; zonder lucht zou hij 29 m ver reiken, echt ongeveer 9 m: de grootste druppels bepalen de straal, de wind verschuift ze.
- Relatieve beweging: $\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$. Een drone krabt tegen de wind in; op een heen-en-terugvlucht kost wind altijd tijd.
- Eenparige cirkelbeweging: $v = \omega R$, $a_\mathrm{c} = v^2/R = \omega^2 R$ naar het middelpunt. De kracht mv^2/R komt van wrijving, spanning, normaalkracht of zwaartekracht; een baan om de aarde: $v = \sqrt{GM/r}$.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

plaatsvector
De vector $\vec{r}(t) = (x(t);\ y(t))$ van de oorsprong naar het voorwerp; zijn afgeleide is de snelheid.

snelheidsvector
$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$: raakt altijd aan de baan, lengte = de snelheid (in m/s).

versnellingsvector
$\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$: wijst naar de holle kant van de baan zodra de baan buigt; ontbindt in $a_\mathrm{t} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ langs de baan en $a_\mathrm{n} = v^2/\rho$ ernaar toe.

kromtestraal
De straal ρ van de cirkel die een baan in een punt het best benadert: $\rho = v^2/a_\mathrm{n}$.

horizontale worp
Een worp met een horizontale beginsnelheid: zonder lucht eenparig horizontaal en vrij vallend verticaal, samen een halve parabool.

schuine worp
Een worp onder een hoek α; zonder lucht een parabool met bereik $v_0^2 \sin 2\alpha/g$ op gelijke hoogte.

eindsnelheid
De snelheid waarbij de luchtweerstand het gewicht opheft; bij kwadratische weerstand $v_\mathrm{e} = \sqrt{mg/k}$.

relatieve beweging
Een beweging beschreven vanuit een ander, bewegend assenstelsel: $\vec{v}_{AC} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC}$.

eenparige cirkelbeweging

Beweging op een cirkel met een constante snelheid; de snelheidsvector draait, dus er is een versnelling v^2/R naar het middelpunt.

hoeksnelheid

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ in rad/s; bij een eenparige cirkelbeweging $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ en $v = \omega R$.

middelpuntzoekende kracht

De resulterende kracht mv^2/R naar het middelpunt die een voorwerp op een cirkel houdt; geen nieuwe soort kracht, maar een rol die wrijving, spanning, een normaalkracht of de zwaartekracht speelt.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 9

Impuls en botsingen

Wat een botsing doet, hangt af van hoe lang ze duurt: van karretjes tot raketten en pakketten aan een parachute

Een bal die terugkaatst, een raket die zich afzet tegen zijn eigen uitlaatgassen, een auto die zich opvouwt tegen een muur: telkens verandert een **impuls**, en de kracht die daarvoor nodig is, hangt af van hoe lang het duurt. Je leert de stoot als oppervlakte onder een krachtcurve, het behoud van impuls als gevolg van de derde wet, het verschil tussen elastische en inelastische botsingen, en de raketvergelijking van Tsiolkovski. Met dezelfde ideeën ontwerp je de bevoorrading van Habitat: hoeveel vermogen een drone nodig heeft om te hangen, en hoe een pakket veilig neerkomt.

7× uitleg · 7× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 11 lestijden

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Een pakket van 2 kg valt van 40 m: zonder parachute met bijna 18 m/s, met parachute met minder dan 5 m/s.

Na dit hoofdstuk

- Je kan impuls als vector gebruiken, de tweede wet schrijven als F = dp/dt, en de stoot berekenen als oppervlakte onder F(t), ook uit meetwaarden met de trapeziumregel.
- Je kan het behoud van impuls afleiden uit de derde wet, toepassen op botsingen, terugstoot en explosies, en controleren met een botsingsproef.
- Je kan elastische en inelastische botsingen in één dimensie oplossen, de restitutiecoëfficiënt en het energieverlies berekenen, en botsingen in het vlak met vectoren behandelen.
- Je kan de raketvergelijking van Tsiolkovski afleiden, er massaverhoudingen en trappen mee beoordelen, en een waterraket simuleren.
- Je kan straalkracht F = ṁ v toepassen op een sproeier en op de rotoren van een drone (impulstheorie, vermogen om te hangen).
- Je kan met stoot en remweg verklaren hoe een kreukelzone, gordel, airbag of verpakking de krachten verkleint, en een parachute en verpakking voor een pakket dimensioneren.

VERHAAL · 9.1

Tsiolkovski en de raket

1/21

Konstantin Tsiolkovski werd in 1857 geboren in Izjevskoje, een dorp in het gouvernement Rjazan. Toen hij negen was, maakte roodvonk hem bijna doof; op school kon hij niet meer volgen. Als tiener trok hij naar Moskou en leerde drie jaar lang zelf wiskunde, natuurkunde en sterrenkunde in de bibliotheek van het Roemjantsev-museum. Daarna werd hij leraar rekenen en meetkunde, eerst in Borovsk en vanaf 1892 in Kaloega, en in zijn vrije tijd rekende en schreef hij over vliegen, luchtschepen en de ruimte.

Op 10 mei 1897 schreef hij in zijn schrift een formule die zijn naam zou dragen: de snelheid die een raket kan winnen, hangt alleen af van de snelheid van zijn uitlaatgassen en van de verhouding tussen zijn massa bij de start en bij brandsluiting. In mei 1903 verscheen zijn artikel 'Onderzoek van de wereldruimte met reactietoestellen' in het tijdschrift *Naoetsjnoje Obozrenieje*. Hij stelde er vloeibare waterstof en zuurstof als brandstof voor, en later, in 1929, raketten die trap na trap hun lege tanks achterlaten. In een brief uit 1911 schreef hij dat de aarde de wieg van de mensheid is, maar dat niemand eeuwig in een wieg kan blijven.

Tsiolkovski was niet de enige. De Britse wiskundige William Moore had dezelfde vergelijking al in 1810 afgeleid voor militaire raketten (in boekvorm in 1813), maar niemand deed er iets mee. De Duitser Hermann Oberth publiceerde in 1923 *Die Rakete zu den Planetenräumen*, en de Amerikaan Robert Goddard lanceerde op 16 maart 1926 in Auburn (Massachusetts) de eerste raket op vloeibare brandstof: ze vloog 2,5 seconden, 12,5 m hoog en kwam 56 m verder neer. Tsiolkovski bouwde zelf nooit een raket. Hij stierf in 1935 in Kaloega. Op 4 oktober 1957, iets meer dan honderd jaar na zijn geboorte, bracht een raket Spoetnik 1 in een baan om de aarde.

De raketvergelijking is een toepassing van één eenvoudig idee: **impuls** die je nergens kwijtraakt. Wat de raket naar achteren wegstoot, duwt haar naar voren. Hetzelfde idee verklaart waarom een drone kan hangen, waarom een airbag je leven redt en hoe een pakket veilig uit de lucht komt.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het station wordt om de 30 dagen bevoorraad; dringende onderdelen en stalen komen tussendoor met een drone. Het brein moet weten hoeveel energie zo'n vlucht kost, waar de drone moet loslaten en of de inhoud de landing overleeft. Dat zijn vragen over impuls, stoot en botsduur.



In zijn huis in Kaloega rekende een dove wiskundeleraar uit wat een raket nodig heeft om de ruimte te bereiken.

UITLEG · 9.2

Wat je al weet: impuls en de tweede wet

2/21

wat je al kan	wat nu komt
$F = m\,a$ en actie en reactie (hoofdstuk 8 van I)	$\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$: de tweede wet voor impuls, en behoud van impuls uit de derde wet
kinetische energie en rendement (hoofdstuk 9 van I)	welke botsingen energie verliezen, en hoeveel
de integraal als oppervlakte, de trapeziumregel (hoofdstuk 3)	de stoot $\int F\,\mathrm{d}t$ uit een krachtmeting
scheiden van veranderlijken, Euler en Heun (hoofdstuk 4)	de raketvergelijking; een waterraket en een parachute simuleren
vectoren en worpen (hoofdstuk 5 en 8)	impuls als vector: botsingen in het vlak, een pakket uit een drone

Newton schreef zijn tweede wet oorspronkelijk niet als $F = ma$, maar als: de verandering van de 'hoeveelheid beweging' is evenredig met de kracht. Die hoeveelheid heet nu **impuls**:

IMPULS, TWEEDE WET EN STOOT

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \qquad \vec{F}_{\text{res}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \Delta\vec{p}$$

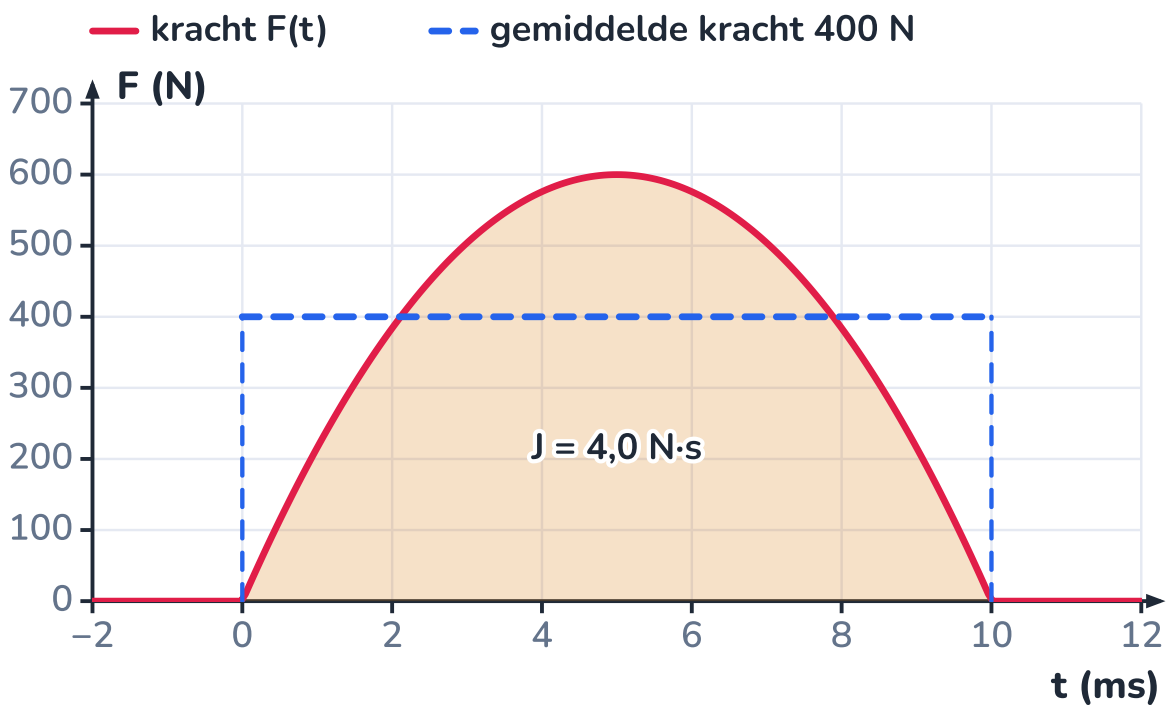
Impuls is een vector (kg·m/s), met de richting van de snelheid. De **stoot** $\vec{J}$ (N·s) is de integraal van de kracht over de tijd: de oppervlakte onder $F(t)$. Bij constante massa is $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = m\,\vec{a}$.

Waarom zou je die omweg maken? Omdat bij een botsing de kracht een paar milliseconden duurt en razendsnel verandert: niemand kent $F(t)$ precies. Maar voor en na de botsing ken je de snelheden, dus de stoot. Deel je die door de botsduur, dan heb je de **gemiddelde kracht**: $F_{\text{gem}} = \Delta p / \Delta t$. De rechthoek in de figuur heeft dezelfde oppervlakte als de kromme.

Daaruit volgt meteen de sleutel van dit hoofdstuk: **dezelfde impulsverandering in een langere tijd vraagt een kleinere kracht**. Een voetballer die een bal opvangt, beweegt mee; een kreukelzone vouwt; een pakket landt in schuim. En omgekeerd: wie een grote kracht wil, maakt de botsing kort, zoals een hamer op een spijker.

Een zware vrachtwagen en een fiets met dezelfde snelheid hebben dezelfde 'vaart'

Ze hebben dezelfde snelheid, maar niet dezelfde impuls. Om ze in dezelfde tijd tot stilstand te brengen, vraagt de vrachtwagen een honderden keren grotere kracht. Impuls combineert massa en snelheid; dat is wat een botsing voelt.



De stoot is de oppervlakte onder F(t); de gemiddelde kracht maal de botsduur geeft dezelfde oppervlakte.

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.3

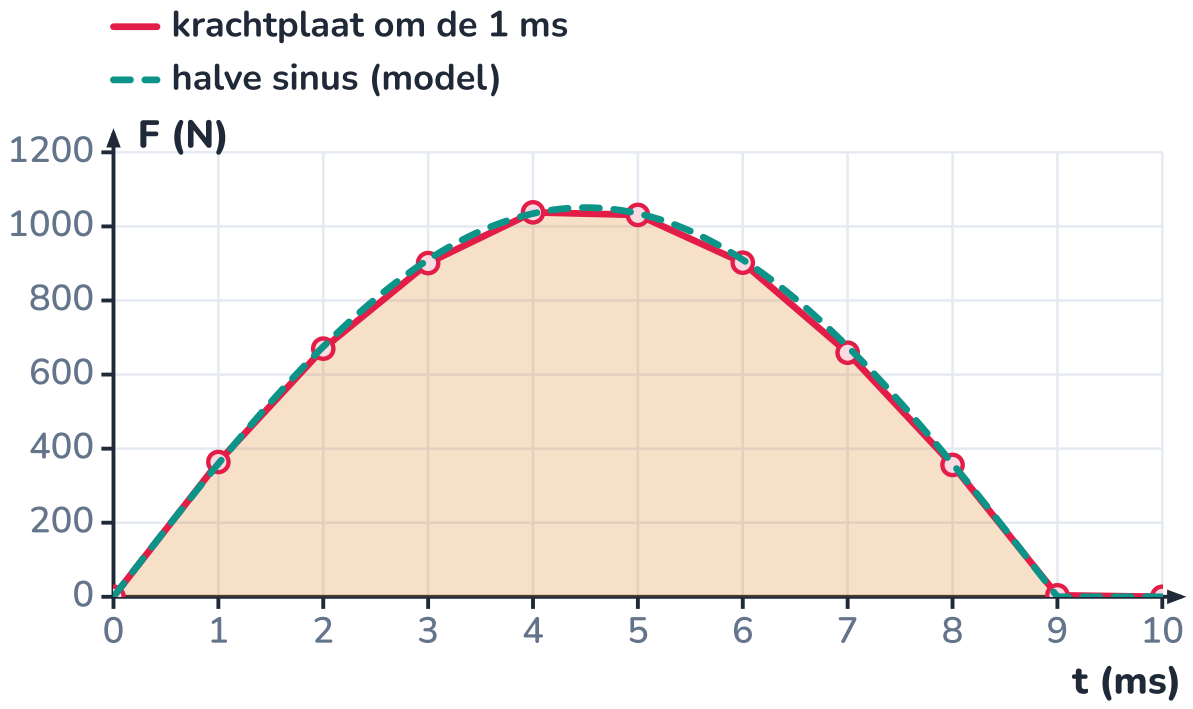
Een stoot meten met een krachtplaat

3/21

Een voetbal van 0,43 kg valt met 8,0 m/s op een krachtplaat die om de milliseconde meet (voorbeeldmeting):

t (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F (N)	0	364	670	901	1038	1031	902	659	356	4	0

Bereken de stoot met de trapeziumregel, de gemiddelde en de grootste kracht, en de snelheid waarmee de bal terugkaatst. Welk deel van de energie gaat verloren?



De meetpunten liggen op een halve sinus; de oppervlakte eronder is de stoot.

GEGEVEN

- $m = 0{,}43\,\text{kg}$, $v_{\text{in}} = 8{,}0\,\text{m/s}$ omlaag
- F om de 1 ms (tabel)

GEVRAAGD

- J, F_{gem}, F_{max}
- v_{uit} en het energieverlies

OPLOSSING

1. Trapeziumregel (hoofdstuk 3) met $\Delta t = 1\,\text{ms}$: $J \approx \Delta t\left(\tfrac{1}{2}F_0 + F_1 + \cdots + F_9 + \tfrac{1}{2}F_{10}\right) = 5{,}925\,\text{N s}$.
2. Botsduur ongeveer 9 ms: $F_{\text{gem}} = J/\Delta t = 658\,\text{N}$; de grootste gemeten waarde is 1038 N, ongeveer 250 keer het gewicht van de bal.
3. Tijdens de botsing werkt ook het gewicht (omlaag). Omhoog positief: $\Delta p = J - mg\,\Delta t = 5{,}925 - 0{,}038 = 5{,}887\,\text{N s}$. De bijdrage van het gewicht is minder dan 1 %.
4. $\Delta p = m\,v_{\text{uit}} - m\,(-v_{\text{in}})$, dus $v_{\text{uit}} = \Delta p/m - v_{\text{in}} = 13{,}69 - 8{,}0 = 5{,}69\,\text{m/s}$ omhoog.
5. Energie: $\tfrac{1}{2}mv^2$ gaat van $13{,}76\,\text{J}$ naar $6{,}96\,\text{J}$: 49 % wordt warmte in de bal en de plaat.

ANTWOORD

$J \approx 5{,}92\,\text{N s}$, $F_{\text{gem}} \approx 658\,\text{N}$, $F_{\text{max}} \approx 1038\,\text{N}$; **de bal kaatst terug met 5,7 m/s en verliest ongeveer 49 % van zijn energie.**

Klopt dit? Een halve sinus met dezelfde oppervlakte heeft top $F_{\max} = \dfrac{\pi J}{2\,\Delta t}$, ongeveer $1{,}57\,F_{\text{gem}}$: 1034 N, dicht bij de meting. Met stappen van 1 ms op een botsing van 9 ms is de trapeziumregel nauwkeurig tot op een procent; met 5 ms (twee punten) zou je de stoot niet meer kunnen reconstrueren.

UITLEG · 9.4

Behoud van impuls

Neem twee karretjes A en B die botsen. Tijdens de botsing duwt A op B met $\vec{F}_{AB}$ en B op A met $\vec{F}_{BA}$. Volgens de derde wet zijn die op elk ogenblik even groot en tegengesteld, en ze duren even lang. Dus zijn ook hun stoten tegengesteld:

$$\Delta\vec{p}_B = \int \vec{F}_{AB}\,\mathrm{d}t = -\int \vec{F}_{BA}\,\mathrm{d}t = -\Delta\vec{p}_A \quad \Rightarrow \quad \Delta(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = \vec{0}.$$

BEHOUD VAN IMPULS

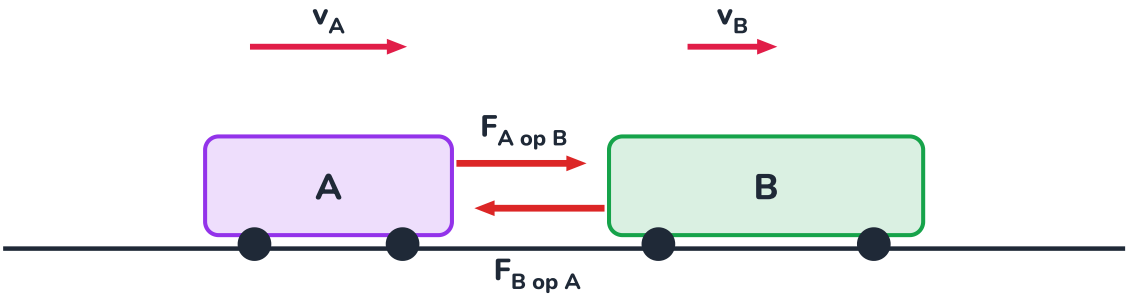
$$\sum \vec{F}_{\text{uitw}} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{p}_{\text{tot}} = \sum m_i\,\vec{v}_i = \text{constant}$$

De inwendige krachten (tussen de delen van het systeem) heffen elkaar paarsgewijs op. Alleen uitwendige krachten veranderen de totale impuls: $\sum \vec{F}_{\text{uitw}} = \mathrm{d}\vec{p}_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$.

Drie opmerkingen die in opgaven het verschil maken:

- **Kies het systeem.** Voor twee botsende karretjes op een rail zijn gewicht en normaalkracht uitwendig, maar ze heffen elkaar op; de wrijving is klein tegenover de botsingskrachten. Bij een botsing van een paar milliseconden doen uitwendige krachten als de zwaartekracht bijna niets (zie de voetbal: minder dan 1 %).
- **Het is een vectorwet.** Ze geldt per component. Werkt er alleen verticaal een uitwendige kracht, dan blijft de horizontale impuls toch behouden.
- **Het zwaartepunt.** $\vec{p}_{\text{tot}} = M\,\vec{v}_{\text{zw}}$, met $\vec{r}_{\text{zw}} = \sum m_i\vec{r}_i/M$. Zonder uitwendige kracht beweegt het zwaartepunt dus eenparig rechtdoor, wat de delen ook doen: botsen, uit elkaar springen, ontploffen.

In de zeventiende eeuw was dat allerminst duidelijk. René Descartes telde 'hoeveelheid beweging' als massa maal snelheid zonder richting, en kwam tot botsingsregels die niet klopten. In 1668 vroeg de Royal Society in Londen om de wetten van de botsing; John Wallis, Christopher Wren en Christiaan Huygens antwoordden in 1668-1669. Huygens en Wren toonden voor harde bollen dat de som met teken behouden blijft; Huygens zag ook dat bij zulke botsingen $\sum mv^2$ behouden blijft.



derde wet: even groot, tegengesteld, even lang

Op elk ogenblik van de botsing duwt A even hard op B als B op A, in tegengestelde zin: de stoten heffen elkaar op.

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.5

Terugstoot in de ruimte

5/21

Een astronaut van 100 kg (met pak) zweeft stil op 20 m van het ruimtestation, zijn veiligheidslijn is los. Hij gooit een gereedschapskist van 2,0 kg met 5,0 m/s van het station weg. Hoe snel drijft hij naar het station, hoe lang duurt dat, en hoeveel energie leverden zijn armen?

GEGEVEN

- $M = 100\,\text{kg}$, $m = 2{,}0\,\text{kg}$, $v = 5{,}0\,\text{m/s}$
- afstand 20 m, alles in rust tegenover het station

GEVRAAGD

- V van de astronaut, de tijd, de energie

OPLOSSING

1. Systeem astronaut + kist: geen uitwendige kracht (in de baan vallen station, astronaut en kist samen; tegenover het station telt alleen hun onderlinge duw). Impuls voor: 0.
2. Na: $MV + mv = 0$, dus $V = -\dfrac{m}{M}v = -\dfrac{2{,}0 \cdot 5{,}0}{100} = -0{,}10\,\text{m/s}$: 10 cm/s naar het station.
3. Tijd: $20\,\text{m} / 0{,}10\,\text{m/s} = 200\,\text{s}$, iets meer dan drie minuten.
4. Energie: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = 25 + 0{,}50 = 25{,}5\,\text{J}$. Bijna alles gaat naar de kist.

ANTWOORD

Hij drijft met 0,10 m/s naar het station en is er na 200 s; zijn armen leverden ongeveer 26 J.

Klopt dit? Impulsen zijn even groot ($10\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$), maar de energie verdeelt zich omgekeerd evenredig met de massa: $E_\text{k} = p^2/(2m)$. Daarom schopt een geweer minder hard dan de kogel vliegt, en draagt een raket haar energie vooral mee in de uitlaatgassen. Astronauten dragen voor zo'n noodgeval een klein stuwraketpakket: hetzelfde principe, met gas in plaats van een kist.

PROEF · 9.6

Botsende karretjes

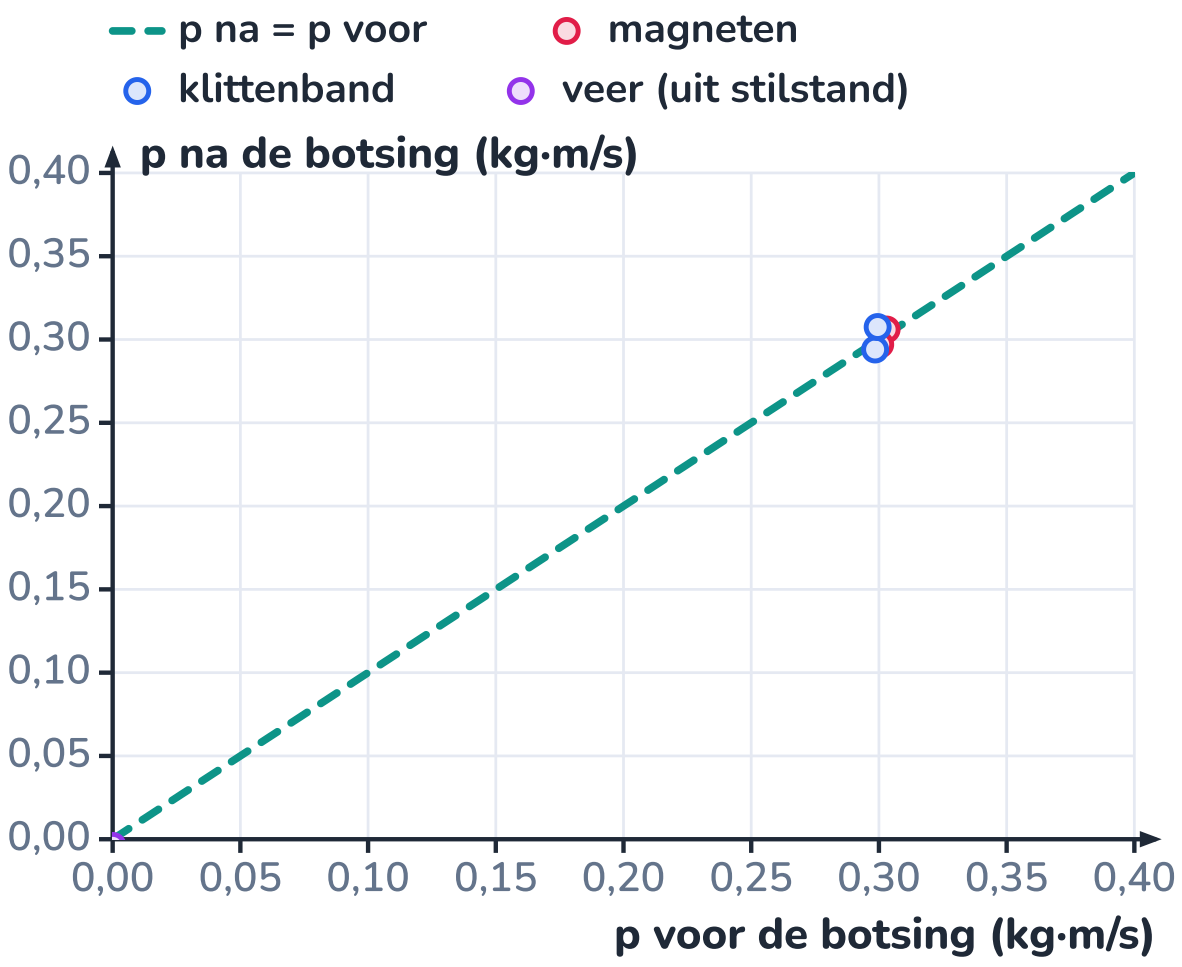
6/21

ONDERZOEKSVRAAG

Blijft de impuls behouden bij elke botsing, ook als de karretjes aan elkaar blijven hangen of uit elkaar springen? En de kinetische energie?

MATERIAAL

- rail met twee karretjes (0,500 kg; een extra massa maakt B 1,000 kg)
- magneten (afstoten), klittenband (vasthaken), een samengedrukt veertje met een pal
- twee bewegingssensoren aan de uiteinden (of een smartphone op statief voor videoanalyse met een meetlat in beeld)
- weegschaal



Alle vijf de botsingen liggen op de rechte p na = p voor: impuls blijft behouden, welke koppeling je ook gebruikt.

WERKWIJZE

1. Weeg de karretjes. Zet de rail waterpas: een karretje dat je een zetje geeft, moet op 1 m hoogstens 1 à 2 % vertragen.
2. Duw A met ongeveer 0,6 m/s tegen het stilstaande B. Lees de snelheden vlak voor en vlak na de botsing af (gemiddelde over 0,1 s).
3. Herhaal met magneten, met klittenband en met B = 1,000 kg.

4 Zet A en B met het samengedrukte veertje tegen elkaar en ontgrendel de pal.

5 Bereken per poging de impuls en de kinetische energie voor en na, en de restitutiecoëfficiënt e.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting (snelheden naar rechts positief):

poging	koppeling	m_A (kg)	m_B (kg)	v_A (m/s)	v_B (m/s)	v'_A (m/s)	v'_B (m/s)
1	magneten	0,500	0,500	0,606	0,000		
2	magneten	0,500	1,000	0,601	0,000		
3	klittenband	0,500	0,500	0,597	0,000		
4	klittenband	0,500	1,000	0,599	0,000		
5	veer	0,500	1,000	0,000	0,000		

Verwerkt:

poging	p voor (kg·m/s)	p na	E_k voor (mJ)	E_k na (mJ)	e
1	0,303	0,306	91,8	84,6	
2	0,300	0,297	90,3	80,7	
3	0,298	0,294	89,1	43,2	
4	0,299	0,307	89,7	31,5	
5	0,000	−0,004	0,0	60,4	

VERKLARING

De impuls na de botsing verschilt hoogstens 8 g·m/s van die ervoor (poging 4), van dezelfde orde als de …n fout van 0,004 m/s op de 1,5 kg die daar samen rijden, is al 6 g·m/s. **Impuls blijft behouden**, bij elke soort botsing. De kinetische energie niet: met magneten gaat er 8 à 11 % verloren ($e \approx 0{,}92$), met klittenband de helft (gelijke massa's) of twee derde (B dubbel zo zwaar), en bij de veer *ontstaat* er 60 mJ uit de veerenergie. Bij poging 5 was de impuls voor en na nul: de karretjes schieten uit elkaar met snelheden in de verhouding 2 : 1, omgekeerd evenredig met hun massa.

Bij poging 2 kaatst het lichtere A terug: een licht voorwerp dat op een zwaarder botst, keert om (volgend blad).

UITLEG · 9.7

Elastisch en inelastisch

7/21

Impuls blijft bij elke botsing behouden; kinetische energie niet noodzakelijk. Dat geeft de indeling:

soort	impuls	kinetische energie	e	voorbeeld
elastisch	behouden	behouden	1	biljartballen (bijna), neutronen op kernen, magneten
inelastisch	behouden	deels omgezet in warmte en vervorming	tussen 0 en 1	tennisbal op de grond, auto's
volledig inelastisch	behouden	het grootste mogelijke verlies	0	klittenband, een kogel in een blok
'explosie'	behouden	neemt toe (uit een veer, een lading, een spier)	-	terugstoot, raket

Elastisch, frontaal, in één dimensie. Voorwerp 1 (m_1, v_1) botst op voorwerp 2 (m_2, v_2). Twee onbekenden v'_1 en v'_2, twee behoudswetten:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2), \qquad m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2).$$

Schrijf de tweede als $m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$ en deel door de eerste: $v_1 + v_1' = v_2' + v_2$, dus

ELASTISCHE BOTSING IN ÉÉN DIMENSIE

$$v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1) \qquad v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

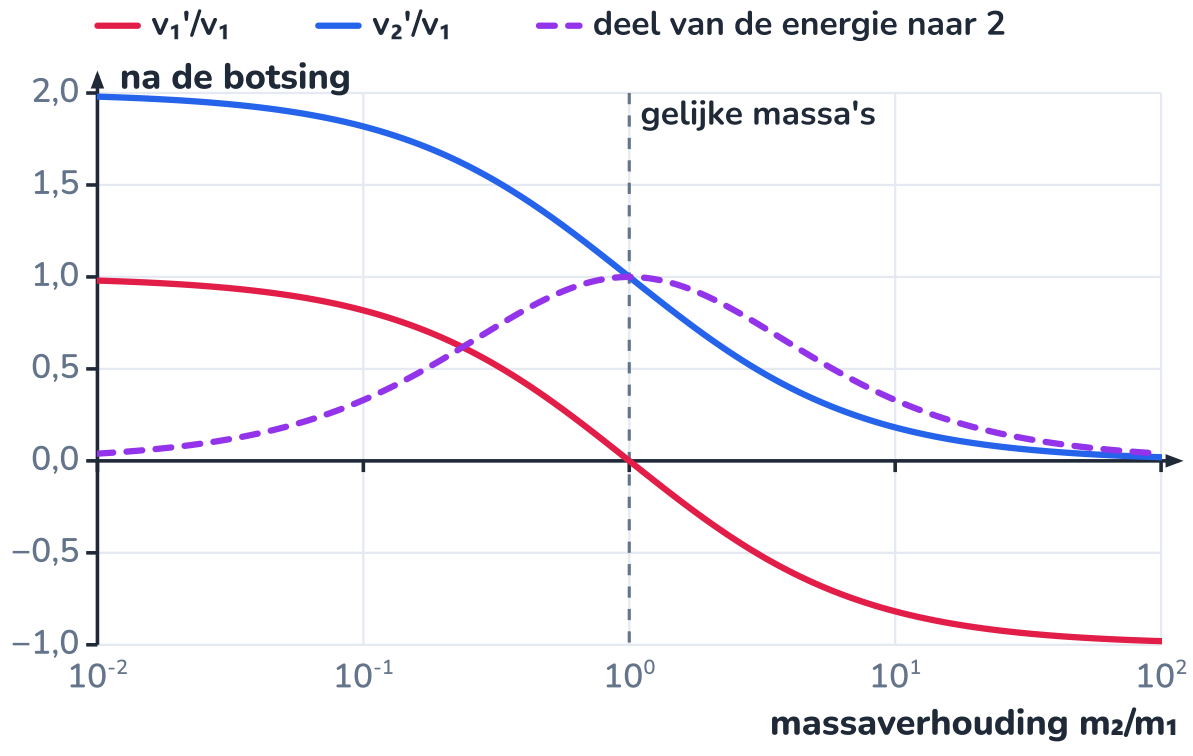
Bij een elastische botsing keert de **relatieve snelheid** om met dezelfde grootte. Dat is een lineaire vergelijking: veel handiger dan de energie.

Restitutie. Bij echte botsingen is de relatieve snelheid na kleiner: $v_2' - v_1' = -e\,(v_2 - v_1)$ met $0 \le e \le 1$. Een tennisbal op beton heeft $e \approx 0{,}75$ (hij stuitert tot $e^2 \approx 56\,\%$ van zijn valhoogte). Met $e = 0$ blijven de voorwerpen samen: $v' = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

Wat de figuur toont (voorwerp 2 in rust): bij gelijke massa's staat 1 stil en neemt 2 alles over (de slinger van Newton); een licht voorwerp op een zwaar kaatst terug met bijna dezelfde snelheid; een zwaar op een licht rijdt bijna ongestoord door en geeft het lichte bijna twee keer zijn snelheid. De energie gaat alleen volledig over bij gelijke massa's.

Bij een inelastische botsing gaat impuls verloren

Nee: impuls kan niet 'verloren gaan' in warmte, want warmte heeft geen richting. Impuls van de ene naar de andere kant van de botsing verplaatsen gaat alleen via krachten, en die zijn tegengesteld. Energie kan wel van vorm veranderen. Daarom is impulsbehoud de eerste vergelijking bij elke botsing.



Snelheden na een frontale elastische botsing met een stilstaand voorwerp, tegen de massaverhouding (logaritmische as).

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.8

Neutronen afremmen

8/21

In een kernreactor komen neutronen bij de splijting vrij met ongeveer 2 MeV. Om een volgende uraniumkern te splijten, moeten ze afgeremd worden tot ongeveer 0,025 eV, de energie van de warmtebeweging. Dat gebeurt door elastische botsingen met kernen van een **moderator**. Welke kern remt het best af: waterstof, deuterium, koolstof of uranium? Neem een frontale botsing met een kern in rust.

GEGEVEN

- neutron: massa 1 (in atomaire eenheden), kern: massa A
- elastisch, frontaal, kern in rust

GEVRAAGD

- welk deel van zijn energie het neutron per botsing verliest

OPLOSSING

1 Met $m_1 = 1$, $m_2 = A$, $v_2 = 0$: de kern krijgt $v_2' = \dfrac{2}{1+A} v_1$.

2 Zijn energie: $\frac{1}{2} A\, v_2'^2 = \dfrac{4A}{(1+A)^2} \cdot \frac{1}{2} v_1^2$. Het deel dat overgaat, is dus $\dfrac{4A}{(1+A)^2}$.

3 Per kern:

KERN	A	FRONTAAL: DEEL VAN E DAT OVERGAAT	GEMIDDELD AANTAL BOTSINGEN VAN 2 MEV TOT 0,025 EV
waterstof (water)	1	100,0 %	18
deuterium (zwaar water)	2	88,9 %	25
koolstof (grafiet)	12	28,4 %	115
uranium-238	238	1,7 %	2172

4 Echte botsingen zijn meestal niet frontaal: dan gaat er minder over. De laatste kolom geeft het gemiddelde aantal botsingen (isotrope verstrooiing, standaardformule uit de reactorfysica; opdracht 9.15 controleert ze met een simulatie).

ANTWOORD

Waterstof neemt bij een frontale botsing alle energie over (gelijke massa's); ongeveer 18 botsingen volstaan. Koolstof neemt hoogstens 28 % over (±115 botsingen), uranium nog geen 2 %. Lichte kernen zijn de beste moderators.

Klopt dit? Dezelfde massaverhouding als bij de karretjes: een licht voorwerp op een zwaar kaatst terug en houdt zijn energie. Toch gebruiken veel reactoren grafiet of zwaar water in plaats van gewoon water: waterstof vangt ook neutronen in. De eerste kernreactor, die van Enrico Fermi in Chicago (2 december 1942), was een stapel grafiet.

UITLEG · 9.9

Botsingen in twee dimensies

9/21

Impuls is een vector: bij een schuine botsing blijft elke component apart behouden. In het vlak geeft dat twee vergelijkingen; is de botsing elastisch, dan komt de energie erbij als derde. Voor vier onbekenden

(twee snelheden, twee richtingen) is dat één vergelijking te weinig: je moet één richting meten (bv. de hoek waaronder bal 1 wegspringt), of weten waar de botsing de bal raakt.

Gelijke massa's, elastisch, één in rust: 90°. Met $m_1 = m_2$ vereenvoudigen de behoudswetten tot

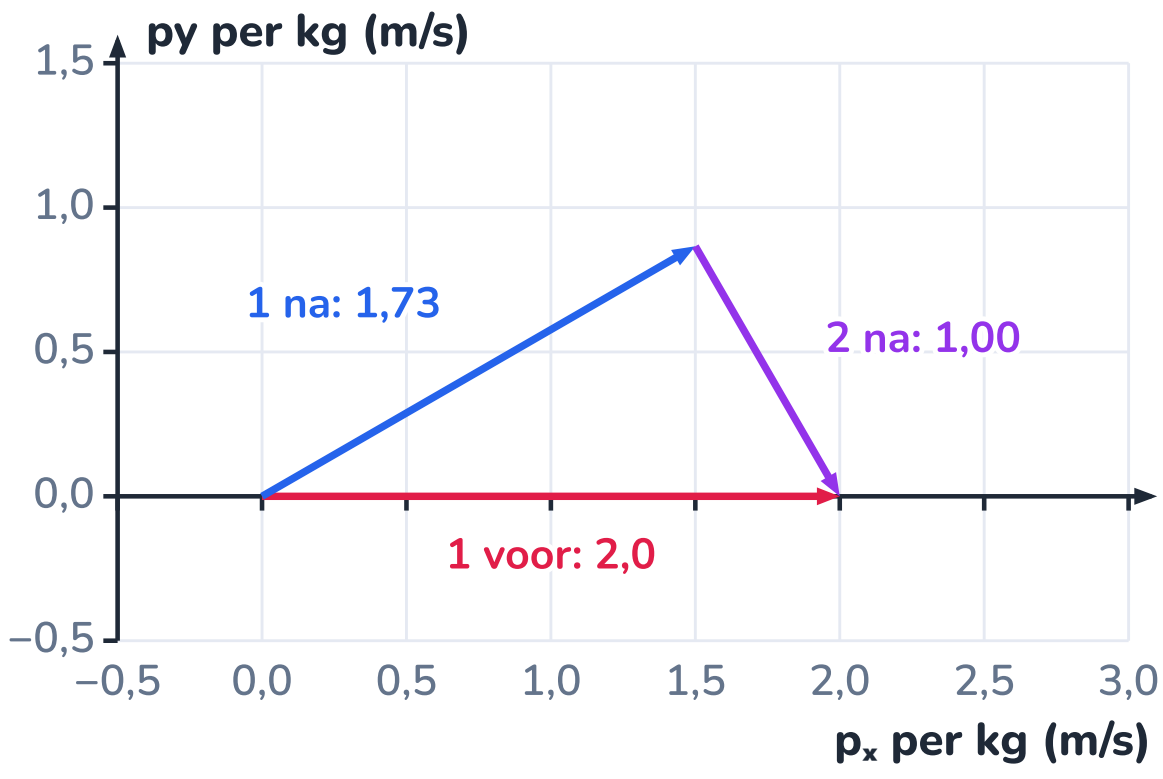
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2', \qquad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Kwadrateer de eerste: $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\,\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$. Vergelijk met de tweede: $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$. De twee ballen gaan loodrecht uit elkaar (hoofdstuk 5: scalair product nul). De drie impulsen vormen een rechthoekige driehoek, met de impuls vooraf als schuine zijde.

Voorbeeld. Een biljartbal met 2,0 m/s raakt een stilstaande bal schuin en springt onder 30° weg. Dan gaat bal 2 onder 60° aan de andere kant weg, en de driehoek geeft $v_1' = 2{,}0\cos 30^\circ = 1{,}73\,\mathrm{m/s}$, $v_2' = 2{,}0\sin 30^\circ = 1{,}00\,\mathrm{m/s}$. Controle: $1{,}732^2 + 1{,}0^2 = 4{,}0$.

Bij twijfel: componenten

Kies x langs de beginsnelheid, schrijf per component 'impuls voor = impuls na', en voeg de energie toe als de botsing elastisch is. Deeltjesfysici doen niets anders: uit de sporen van de deeltjes na een botsing en het behoud van impuls leiden ze af hoeveel impuls er onzichtbaar wegvloog, met een deeltje dat hun detectoren niet zien.



Impuls per kg van bal 1 voor, bal 1 na en bal 2 na: kop aan staart geven ze de impuls ervoor; bij gelijke massa's staan ze loodrecht op elkaar.

UITLEG · 9.10

Het raketprincipe: de vergelijking van Tsiolkovski

10/21

Een raket heeft niets om zich tegen af te zetten, behalve haar eigen uitlaatgassen. Die verlaten de straalpijp met een snelheid v_e *tegenover de raket*. Bekijk een kort tijdje $\mathrm{d}t$ in een stelsel dat op dat ogenblik met de raket meebeweegt (hoofdstuk 8), zonder zwaartekracht of lucht:

- voor: raket met massa m, in rust, impuls 0;
- na: raket met massa $m + \mathrm{d}m$ (met $\mathrm{d}m < 0$) en snelheid $\mathrm{d}v$; gas met massa $-\mathrm{d}m$ en snelheid $-v_\mathrm{e}$.

Behoud van impuls: $0 = (m + \mathrm{d}m)\,\mathrm{d}v + (-\mathrm{d}m)(-v_\mathrm{e})$. Het product $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ is verwaarloosbaar, dus $m\,\mathrm{d}v = -v_\mathrm{e}\,\mathrm{d}m$. Scheiden en integreren (hoofdstuk 4) van m_0 tot m_1:

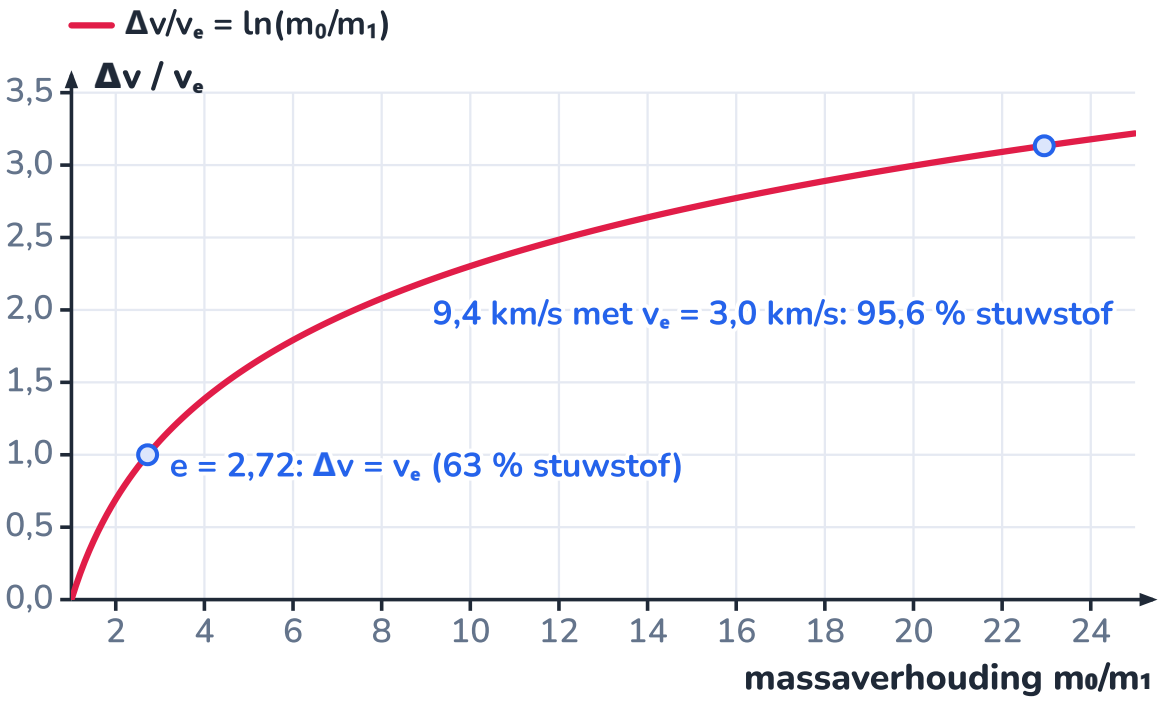
RAKETVERGELIJKING VAN TSIOLKOVSKI EN STUWKRACHT

$$\Delta v = \int_{m_0}^{m_1} -\frac{v_\mathrm{e}}{m}\,\mathrm{d}m = v_\mathrm{e} \ln \frac{m_0}{m_1} \qquad F_\mathrm{stuw} = \dot{m}\, v_\mathrm{e}$$

m_0: massa bij de start, m_1: massa bij brandsluiting (leeg), $\dot{m}$: massadebiet van het gas. De snelheidswinst hangt niet af van hoe snel de stuwstof verbrandt, alleen van v_e en de verhouding.

Wat de logaritme betekent. Wie Δv wil verdubbelen, moet de massaverhouding kwadrateren. Met chemische motoren is v_e ongeveer 2,5 tot 4,5 km/s (waterstof en zuurstof geven de hoogste waarde). Een lage baan om de aarde vraagt 7,7 km/s (hoofdstuk 8) plus ongeveer 1,5 à 2 km/s verlies aan zwaartekracht en lucht: ongeveer 9,4 km/s. Met $v_\mathrm{e} = 3{,}0\,\mathrm{km/s}$ is dan $m_0/m_1 = \mathrm{e}^{9{,}4/3{,}0} = 23$: 95,6 % van de startmassa moet stuwstof zijn. Tanks, motoren en last in 4 %: onmogelijk met één trap.

Stuwkracht. Per seconde krijgt een massa $\dot{m}$ gas de snelheid v_e: de raket geeft het gas een impuls $\dot{m}\, v_\mathrm{e}$ per seconde, en krijgt dezelfde terug. De stuwkracht moet groter zijn dan het gewicht om op te stijgen, maar de vergelijking hierboven kent geen zwaartekracht: wie traag opstijgt, verliest $g\, t_\mathrm{brand}$ (opdracht 9.16).



De snelheidswinst groeit maar met de logaritme van de massaverhouding: elke extra km/s kost exponentieel meer stuwstof.

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.11

Waarom raketten trappen hebben

11/21

Een raket moet 1,0 t nuttige last in een lage baan brengen (±9,4 km/s). Vergelijk twee ontwerpen met dezelfde stuwstof en dezelfde structuurmassa (rekenwaarden): (a) twee trappen: trap 1 met 100 t stuwstof en 8 t structuur ($v_\mathrm{e} = 2{,}9\,\mathrm{km/s}$

in de dichte lucht onderaan), trap 2 met 20 t stuwstof en 2 t structuur ($v_e = 3{,}3\,\mathrm{km/s}$ in het luchtledige); (b) één trap met 120 t stuwstof, 10 t structuur en gemiddeld $v_e = 3{,}1\,\mathrm{km/s}$.

GEGEVEN

- massa's en uitstroomsnelheden hierboven

GEVRAAGD

- Δv van beide ontwerpen

OPLOSSING

1. Startmassa: $1 + 2 + 20 + 8 + 100 = 131\,\mathrm{t}$.

2. Trap 1 brandt: van 131 t naar 31 t: $\Delta v_1 = 2{,}9 \ln \dfrac{131}{31} = 4{,}18\,\mathrm{km/s}$.

3. Trap 1 (8 t leeg) valt af. Trap 2 brandt van 23 t naar 3 t: $\Delta v_2 = 3{,}3 \ln \dfrac{23}{3} = 6{,}72\,\mathrm{km/s}$.

	MASSA VOOR (T)	MASSA NA (T)	V_E (KM/S)	ΔV (KM/S)
trap 1 brandt	131	31	2,9	4,18
trap 1 los, trap 2 brandt	23	3	3,3	6,72
twee trappen samen				**10,9**
één trap, zelfde stuwstof en structuur	131	11	3,1	7,7

4. Eén trap: $3{,}1 \ln \dfrac{131}{11} = 7{,}68\,\mathrm{km/s}$: de lege tanks van trap 1 moeten helemaal mee versneld worden.

ANTWOORD

Twee trappen: 10,9 km/s, genoeg voor een baan (met reserve). Eén trap: 7,7 km/s, niet genoeg. Het verschil komt alleen van het afwerpen van 8 t lege structuur.

Klopt dit? Dit is het idee van de 'raketten-treinen' van Tsiolkovski (1929). Het eerste model van een trap is ook de eenvoudigste reden waarom herbruikbare raketten zo moeilijk zijn: elke kilogram landingsgestel en brandstof om terug te keren, moet eerst mee omhoog, en de logaritme vergeeft niets.

CODE · 9.12

Een waterraket simuleren

12/21

Een waterraket is een PET-fles met water, onder druk gezet met een fietspomp. De lucht in de fles duwt het water door de hals naar buiten: dat is de 'uitlaat'. Anders dan bij een echte raket daalt v_e tijdens de stuwing, omdat de lucht uitzet en de druk zakt. Het model per tijdstap:

- druk: de lucht zet adiabatisch uit (hoofdstuk 15), $p = p_0\,(V_{\mathrm{lucht},0}/V_{\mathrm{lucht}})^{1{,}4}$;
- uitstroomsnelheid uit de energie, zoals bij de sproeier (hoofdstuk 8): $u = \sqrt{2(p - p_{\mathrm{at}})/\rho}$;
- stuwkracht $F = \dot{m}\,u = \rho A u^2 = 2(p - p_{\mathrm{at}})A$, met A de doorsnede van de hals;
- bewegingsvergelijking met veranderlijke massa: $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = F - mg - k\,v|v|$ (Euler, stap 0,1 ms).

De vraag: hoeveel water moet er in de fles voor de hoogste vlucht? Te weinig water: te weinig massa om weg te stoten. Te veel: te weinig lucht om het water uit te duwen, en zwaar dood gewicht.

Python **waterraket.py** 35 regels

```python
# waterraket.py - een PET-fles van 1,5 L met water en lucht onder druk, verticaal gelanceerd
import math
```

```python

g, rho, p_at, gamma = 9.81, 1000.0, 1.013e5, 1.4
V_fles, d_mond, m_leeg = 1.5e-3, 0.0215, 0.15      # m³, m, kg
A_mond = math.pi / 4 * d_mond**2
k = 0.5 * 1.2 * 0.4 * math.pi / 4 * 0.09**2          # luchtweerstand van de fles (Ø 9 cm, cd 0,4)


def lancering(V_water, p_over=4.0e5, dt=1e-4):
    """Geeft (brandtijd, snelheid bij brandsluiting, hoogste punt). De luchtstoot na het water verwaarlozen we."""
    V_lucht0, p0 = V_fles - V_water, p_over + p_at
    V_w, v, h, t, t_brand, v_brand = V_water, 0.0, 0.0, 0.0, None, None
    while v >= 0.0:
        m = m_leeg + rho * V_w
        F = 0.0
        if V_w > 0:
            p = p0 * (V_lucht0 / (V_fles - V_w))**gamma  # lucht zet adiabatisch uit
            if p > p_at:
                u = math.sqrt(2 * (p - p_at) / rho)      # uitstroomsnelheid (Bernoulli)
                F = rho * A_mond * u * u                 # stuwkracht = massadebiet x uitstroomsnelheid
                V_w = max(V_w - A_mond * u * dt, 0.0)
            else:
                V_w = 0.0                                # de druk is op: resterend water blijft zitten
        elif t_brand is None:
            t_brand, v_brand = t, v
        a = F / m - g - k / m * v * abs(v)
        v, h, t = v + a * dt, h + v * dt, t + dt
    return t_brand, v_brand, h


print("water (L)  brandtijd (s)  v einde stuwing (m/s)  hoogste punt (m)")
for V in (0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0):
    tb, vb, h = lancering(V * 1e-3)
    print(f"{V:6.1f}  {tb:12.3f}  {vb:18.1f}  {h:16.1f}")
```

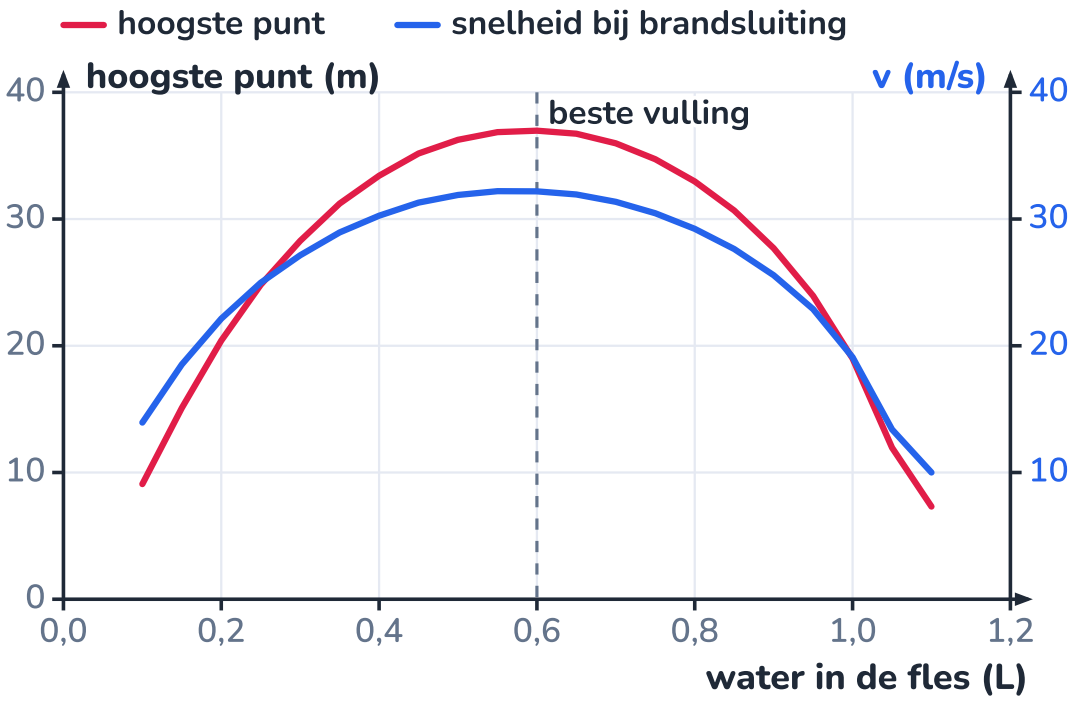
Uitvoer:

```
water (L)  brandtijd (s)  v einde stuwing (m/s)  hoogste punt (m)
   0.2         0.021                22.1              20.4
   0.3         0.032                27.1              28.3
   0.4         0.045                30.3              33.4
   0.5         0.060                31.9              36.3
   0.6         0.077                32.2              37.0
   0.7         0.098                31.4              36.0
   0.8         0.125                29.2              33.0
   1.0         0.253                19.1              19.0
```

Het optimum ligt rond 0,60 L, ongeveer 40 % van de fles: 37 m hoog. De stuwing duurt amper 77 ms en versnelt de fles tot ongeveer 32 m/s: tientallen keren g. Met 1,0 L water is de lucht zo snel ontspannen dat de raket maar half zo hoog komt. Echte waterraketten doen het nog iets beter: na het water blaast ook de resterende lucht nog uit.

Waterraketten lanceren

Alleen buiten, met een lanceerbasis die je van op afstand ontgrendelt, veiligheidsbril voor iedereen, nooit over mensen heen en nooit boven 5 à 6 bar in een gewone PET-fles. Een fles die barst, spat in stukken; gebruik altijd flessen voor koolzuurhoudende dranken (die zijn op druk gebouwd).



Hoogste punt en snelheid bij brandsluiting tegen de vulling: rond 40 % water vliegt de fles het hoogst.

UITLEG · 9.13

Straalkracht: sproeiers, rotors en drones

13/21

Wat voor een raket geldt, geldt voor elke stroom die iets wegstoot: de kracht is de impuls die per seconde wordt meegegeven, $F = \dot{m}\,\Delta v$.

De sproeier. Het mondje van de moestuinsproeier (hoofdstuk 8) stoot $\dot{m} = \rho Q = 59{,}7\,\mathrm{g/s}$ water uit met 19,0 m/s: een reactiekracht van $1{,}13\,\mathrm{N}$ tegen de straal in. Staat het mondje op een arm, dan draait de sproeier vanzelf rond: de reactiesproeier.

De rotor. Een drone hangt stil door lucht naar beneden te versnellen. Het eenvoudigste model, de **impulstheorie** van Rankine en Froude (19e eeuw), ziet de rotor als een schijf met oppervlakte A waar de lucht door stroomt. Ver boven de rotor staat de lucht stil, in de schijf heeft ze de geïnduceerde snelheid v_i, ver eronder v_j. Drie behoudswetten:

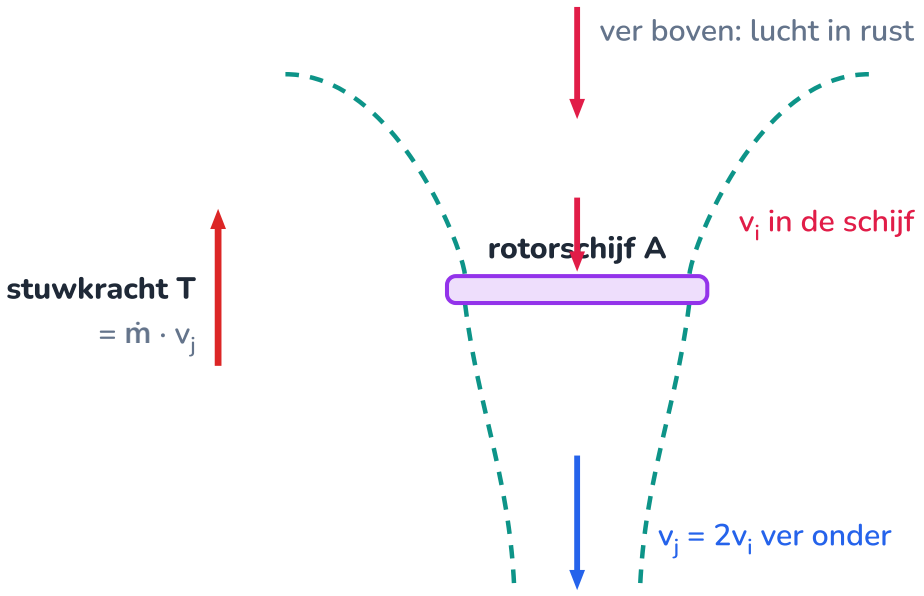
- massa: $\dot{m} = \rho A v_\mathrm{i}$;
- impuls: stuwkracht $T = \dot{m}\,v_\mathrm{j}$;
- energie: het vermogen dat de rotor levert, gaat in bewegingsenergie van de lucht: $P = T\,v_\mathrm{i} = \tfrac{1}{2}\dot{m}\,v_\mathrm{j}^2$.

De laatste twee geven $v_\mathrm{j} = 2v_\mathrm{i}$: de lucht versnelt voor de helft boven en voor de helft onder de schijf. Dan is $T = 2\rho A v_\mathrm{i}^2$:

IMPULSTHEORIE VAN EEN HANGENDE ROTOR

$$v_\mathrm{i} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} \qquad P_\mathrm{ideaal} = T\,v_\mathrm{i} = \frac{T^{3/2}}{\sqrt{2\rho A}}$$

Een grotere schijf vraagt minder vermogen voor dezelfde stuwkracht: veel lucht een beetje versnellen is zuiniger dan weinig lucht veel. Daarom hebben helikopters grote rotoren. Echte rotoren halen 60 à 75 % van het ideale vermogen (de *figure of merit*).



De rotor versnelt een luchtkolom naar beneden; de impuls die de lucht per seconde krijgt, is de stuwkracht omhoog.

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.14

Habitat: hoeveel vermogen vraagt de bevoorradingsdrone?

14/21

De bevoorradingsdrone van het station is een quadcopter van 8,0 kg (met batterij) die een pakket tot 2,0 kg draagt. Hij heeft vier rotoren van 0,56 m. Bereken het vermogen om te hangen met en zonder pakket (figure of merit 0,65, motoren en regelaars 85 %), en de energie voor een vlucht naar het depot op 6,0 km, een minuut hangen om te droppen, en terug. De batterij levert 44,4 V en 20 Ah, waarvan 80 % bruikbaar.

GEGEVEN

- $M = 10\,\mathrm{kg}$ met pakket, 8,0 kg zonder; $A = 4 \cdot \frac{\pi}{4}\,0{,}56^2 = 0{,}985\,\mathrm{m}^2$
- $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$; kruissnelheid 12 m/s (hoofdstuk 8)

GEVRAAGD

- v_i, P met en zonder pakket
- energie per vlucht

OPLOSSING

1. Met pakket: $T = 10 \cdot 9{,}81 = 98{,}1\,\mathrm{N}$, $v_\mathrm{i} = \sqrt{98{,}1/(2 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}985)} = 6{,}44\,\mathrm{m/s}$, $P_\mathrm{ideaal} = 632\,\mathrm{W}$. Werkelijk: $632/(0{,}65 \cdot 0{,}85) = 1144\,\mathrm{W}$ uit de batterij.

2. Zonder pakket: $T = 78{,}5\,\mathrm{N}$, $v_\mathrm{i} = 5{,}76\,\mathrm{m/s}$, $P_\mathrm{ideaal} = 452\,\mathrm{W}$, uit de batterij $818\,\mathrm{W}$. Het vermogen schaalt met $T^{3/2}$: 20 % minder massa is 28 % minder vermogen.

3 Vooruit vliegen kost bij deze snelheid ongeveer evenveel als hangen (vaak iets minder); we rekenen met het vermogen van hangen als bovengrens.

DEEL VAN DE VLUCHT	MASSA	VERMOGEN	TIJD	ENERGIE
heen, 6,0 km met 12 m/s	10 kg	1144 W	500 s	159 Wh
hangen boven het afzetpunt	10 kg	1144 W	60 s	19 Wh
terug	8 kg	818 W	500 s	114 Wh
samen				**292 Wh** (41 % van 710 Wh)

4 De rotoren stuwen $\dot{m} = \rho A v_\mathrm{i} = 7{,}6\,\mathrm{kg}$ lucht per seconde omlaag met $2v_\mathrm{i} = 12{,}9\,\mathrm{m/s}$: een stevige windvlaag onder de drone.

ANTWOORD

Hangen kost 1144 W met pakket en 818 W zonder; een vlucht naar het depot en terug met een drop ongeveer 292 Wh, 41 % van de bruikbare batterij. De rest is reserve voor wind (hoofdstuk 8) en een tweede poging.

Klopt dit? Op het ogenblik dat de drone het pakket loslaat, is zijn stuwkracht nog afgesteld op 98 N terwijl hij maar 78,5 N weegt: hij schiet omhoog met $19{,}6/8{,}0 = 2{,}45\,\mathrm{m/s^2}$ tot de regelaar het vermogen terugschroeft. Dat is een tweede reden (naast de windvlaag) om niet vlak boven mensen of het station te droppen.

UITLEG · 9.15

Botsveiligheid: kreukelzone, gordel en airbag

15/21

Bij een frontale botsing tegen een muur moet de impuls mv van de auto en van elke inzittende naar nul. Die stoot ligt vast; de kracht hangt af van de tijd waarin hij gegeven wordt. Bij een constante vertraging over een remweg s geldt (hoofdstuk 7 van I):

REMMEN OVER EEN REMWEG S

$$a = \frac{v^2}{2s} \qquad \Delta t = \frac{2s}{v} \qquad F_\mathrm{gem} = \frac{m\,v}{\Delta t} = \frac{m\,v^2}{2s}$$

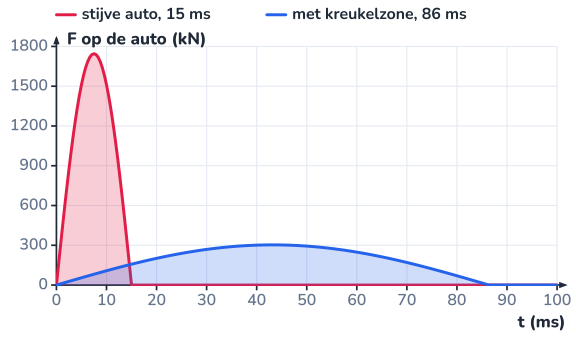
Dubbel zo veel remweg, half zo veel kracht. De energie $\frac{1}{2}mv^2$ moet door vervorming worden opgenomen: de kracht maal de remweg.

De kreukelzone is het voorste deel van de auto, gebouwd om gecontroleerd in elkaar te plooien, zodat de auto over 0,5 à 0,7 m tot stilstand komt in plaats van over een paar centimeter. De **kooi** rond de inzittenden moet net heel stijf blijven. **Gordel en airbag** zorgen ervoor dat de inzittende meteen mee begint te remmen, over de remweg van de auto plus een paar decimeter in de auto. De airbag blaast zich in een paar honderdste van een seconde op en loopt dan leeg terwijl het hoofd erin zakt: de kracht wordt gespreid over een groot oppervlak en een langere tijd.

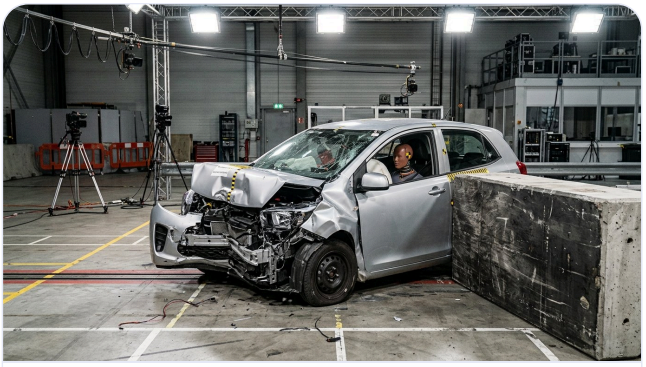
In de figuur krijgt een auto van 1200 kg met 50 km/h dezelfde stoot van 16,7 kN·s op twee manieren: in 15 ms (een stijve auto) of in 86 ms (met kreukelzone). Dezelfde oppervlakte, een zes keer lagere piek.

Een stevige auto die niet vervormt, is het veiligst

Voor de inzittenden is het omgekeerd: een auto die niet plooit, stopt in een fractie van de tijd, en alles wat erin zit, krijgt enorme versnellingen. Moderne auto's zien er na een botsing vaak total loss uit terwijl de inzittenden ongedeerd uitstappen. Juist dat wordt getest bij de frontale botstest tegen een vaste muur met 50 km/h.



Twee stoten met dezelfde oppervlakte: de kreukelzone rekt de botsing zes keer uit en deelt de piekkracht door zes.



Na de botsing is de voorkant opgevouwen, de kooi heel: de kreukelzone heeft de energie opgenomen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.16

Een frontale botsing met 50 km/h

16/21

Een auto van 1200 kg rijdt met 50 km/h tegen een vaste muur. De kreukelzone plooit 0,60 m. Een inzittende van 75 kg met gordel en airbag remt 0,30 m extra in de auto. Bereken voor auto en inzittende de gemiddelde vertraging (in g), de botsduur en de gemiddelde kracht. Vergelijk met een inzittende zonder gordel die 0,50 m vrij vooruit vliegt en dan over 5 cm tegen het stuur tot stilstand komt.

GEGEVEN

- $v = 50\,\text{km/h} = 13{,}89\,\text{m/s}$, $s_{\text{auto}} = 0{,}60\,\text{m}$
- inzittende: $s = 0{,}60 + 0{,}30 = 0{,}90\,\text{m}$

GEVRAAGD

- a, Δt, F

OPLOSSING

1. Auto: $a = v^2/(2s) = 13{,}89^2/1{,}20 = 161\,\text{m/s}^2 = 16{,}4\,g$; $\Delta t = 2s/v = 86\,\text{ms}$; $F = 193\,\text{kN}$.
2. Inzittende met gordel en airbag: $a = 13{,}89^2/1{,}80 = 107\,\text{m/s}^2 = 10{,}9\,g$; $\Delta t = 130\,\text{ms}$; $F = 75 \cdot 107 = 8{,}0\,\text{kN}$, verdeeld over gordel en airbag.
3. Zonder gordel: tegenover de remmende auto schuift de inzittende 0,50 m vooruit in $\sqrt{2 \cdot 0{,}50/a} = 79\,\text{ms}$. Tegen dan is de auto bijna stil; de inzittende heeft nog zijn volle snelheid: hij raakt het stuur met $12{,}7\,\text{m/s}$.
4. Over 5 cm: $a = 12{,}7^2/0{,}10 = 1608\,\text{m/s}^2 = 164\,g$, een kracht van 121 kN op een klein oppervlak.

ANTWOORD

De auto remt met ongeveer 16 g in 86 ms; de inzittende met gordel en airbag met ongeveer 11 g (8 kN), zonder gordel met ongeveer 164 g (121 kN).

Klopt dit? De stoot op de inzittende is in alle gevallen $75 \cdot 13{,}9 = 1042\,\text{N s}$. Wat verschilt, is de tijd: 130 ms tegenover een paar milliseconden. Zonder gordel doet de kreukelzone voor de inzittende niets: hij botst pas als de auto al stilstaat. (Een echte botsing heeft geen constante vertraging; de piek ligt hoger dan het gemiddelde, zoals bij de voetbal.)

CODE · 9.17

Habitat: het pakket aan een parachute

Het pakket van hoofdstuk 4 (2,0 kg, doos van 30 cm) valt zonder parachute met bijna 18 m/s op de grond. Hoofdstuk 8 toonde dat het tegenover de grond een worp is. Nu krijgt het een ronde parachute van 1,5 m. Een treklijn aan de drone trekt ze open: vanaf 0,5 s, na 1,5 s volledig open (een eenvoudig model van het opengaan). De simulatie is die van hoofdstuk 8, met een weerstandsconstante die in de tijd verandert en met wind.

Wat we willen weten: de landingssnelheid, de grootste kracht bij het opengaan (die de treklijn en de naden moeten houden), en hoe ver het pakket afdrijft in de wind.

Python **pakket.py** 45 regels

```python
# pakket.py - een pakket van 2,0 kg aan een parachute, uit de drone op 40 m (hoofdstuk 4 en 8)
import math
import numpy as np

g, rho, m = 9.81, 1.2, 2.0
k_doos = 0.5 * rho * 1.05 * 0.30**2                # doos van 30 cm, plat vlak naar voren
D, cd_par = 1.5, 0.8                               # ronde parachute: diameter (m), cd op de nominale oppervlakte
k_par = 0.5 * rho * cd_par * math.pi / 4 * D**2


def open_deel(t, t_start=0.5, t_vol=1.5):
    """Welk deel van de parachute open is: niets tot t_start, dan lineair tot volledig open op t_vol."""
    return min(1.0, max(0.0, (t - t_start) / (t_vol - t_start)))


def val(h0=40.0, vx0=0.0, wind=0.0, parachute=True, dt=0.001):
    """Heun op s = [x, y, vx, vy]; geeft de tijden, de toestanden en de grootste kracht van de lucht."""
    def f(s, t):
        k = k_doos + (k_par * open_deel(t) if parachute else 0.0)
        rx, ry = s[2] - wind, s[3]                  # snelheid tegenover de lucht
        v = math.hypot(rx, ry)
        return np.array([s[2], s[3], -k / m * v * rx, -g - k / m * v * ry]), k * v * v

    s, t, F_max = np.array([0.0, h0, vx0, 0.0]), 0.0, 0.0
    ts, ss = [t], [s]
    while s[1] > 0:
        k1, F = f(s, t)
        k2, _ = f(s + dt * k1, t + dt)
        s, t = s + dt / 2 * (k1 + k2), t + dt
        F_max = max(F_max, F)
        ts.append(t)
        ss.append(s)
    return np.array(ts), np.array(ss), F_max

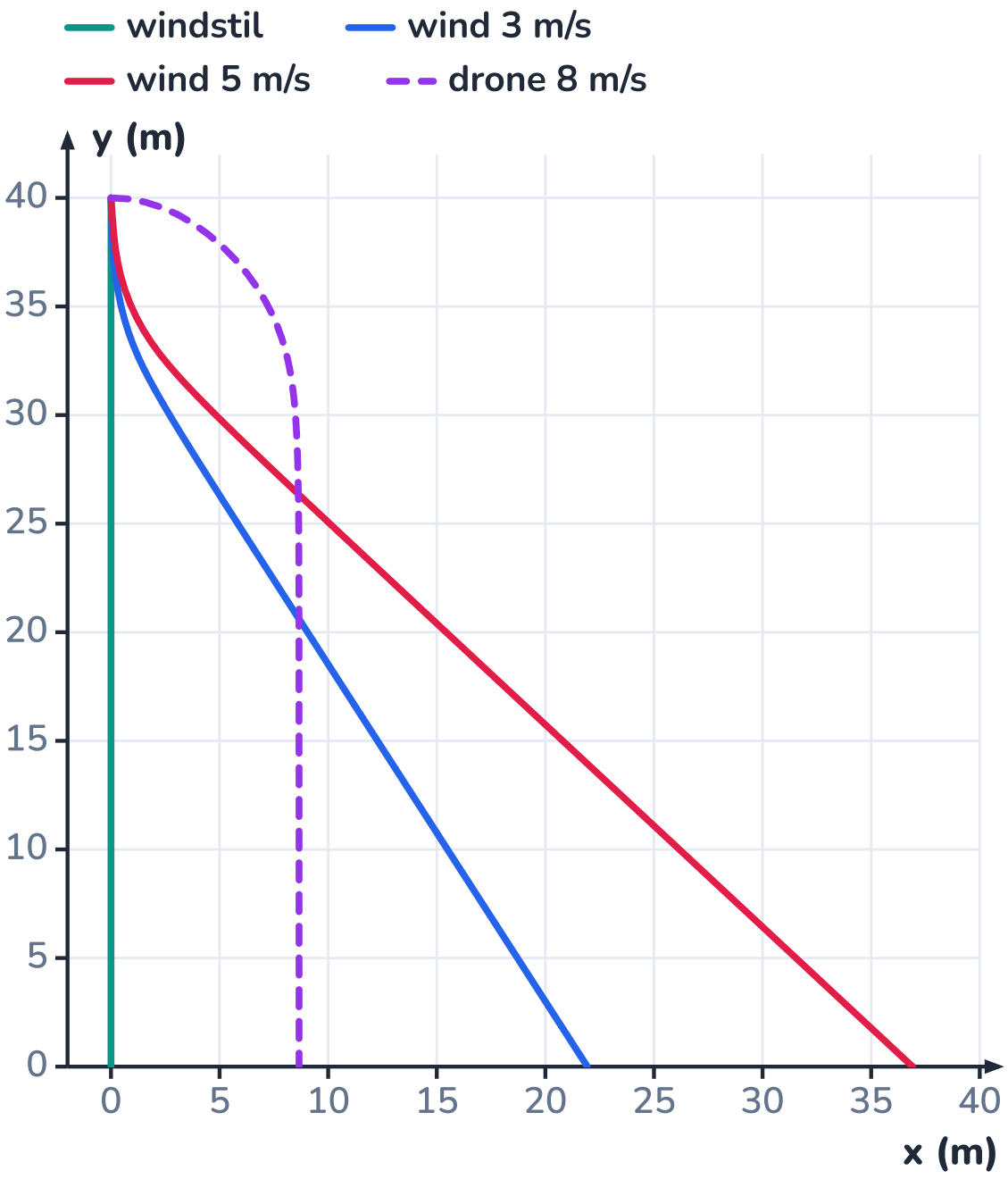

if __name__ == "__main__":
    ve = math.sqrt(m * g / (k_doos + k_par))
    print(f"eindsnelheid met open parachute: {ve:.2f} m/s")
    for naam, kw in (("zonder parachute", dict(parachute=False)), ("met parachute", {}),
                     ("wind 3 m/s", dict(wind=3.0)), ("wind 5 m/s", dict(wind=5.0)),
                     ("drone 8 m/s vooruit", dict(vx0=8.0))):
        ts, ss, F_max = val(**kw)
        x, y, vx, vy = ss[-1]
        print(f"{naam:20s} {ts[-1]:5.2f} s  landt {x:5.1f} m verder  v = {math.hypot(vx, vy):5.2f} m/s"
              f"  grootste luchtkracht {F_max:5.1f} N")
```

Uitvoer:

```
eindsnelheid met open parachute: 4.66 m/s
zonder parachute      3.41 s  landt   0.0 m verder  v = 17.61 m/s  grootste luchtkracht  17.6 N
met parachute         8.47 s  landt   0.0 m verder  v =  4.66 m/s  grootste luchtkracht  26.4 N
wind 3 m/s            8.49 s  landt  21.9 m verder  v =  5.54 m/s  grootste luchtkracht  26.4 N
wind 5 m/s            8.52 s  landt  36.9 m verder  v =  6.83 m/s  grootste luchtkracht  26.5 N
drone 8 m/s vooruit   8.58 s  landt   8.7 m verder  v =  4.66 m/s  grootste luchtkracht  27.2 N
```

Met parachute landt het pakket na 8,5 s met 4,66 m/s, de eindsnelheid $\sqrt{mg/(k_{\text{doos}}+k_{\text{par}})}$. De grootste luchtkracht, 26 N, is kleiner dan je zou vrezen, omdat de parachute al na een halve seconde (bij 4,8 m/s) begint open te gaan.

De wind is het grote probleem: aan een parachute gaat het pakket binnen enkele seconden horizontaal met de wind mee, en het hangt lang in de lucht. Bij 3 m/s drijft het 22 m af, bij 5 m/s 37 m. De drone moet dus **boven de wind** loslaten, op ongeveer wind maal valtijd van het afzetpunt, en het brein leest daarvoor de windmeter van de weermast. Vliegt de drone zelf nog 8 m/s bij het loslaten, dan landt het pakket maar 8,7 m verder: de parachute remt de horizontale snelheid snel af.



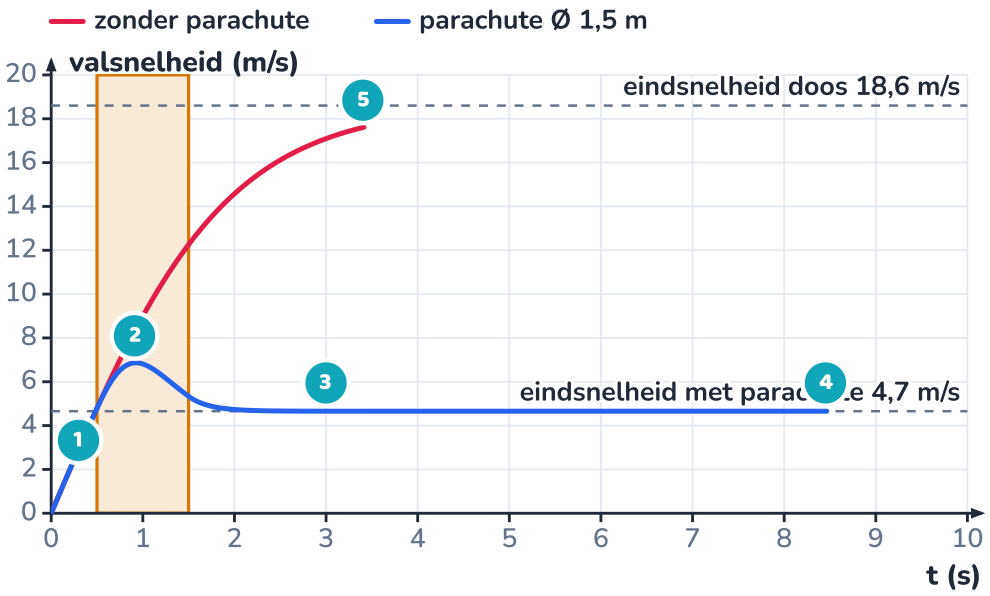
Aan de parachute daalt het pakket traag en drijft het met de wind mee; zonder wind landt het recht onder het punt van loslaten.

ONTLEED · 9.18

Habitat: de val van het pakket ontleed

18/21

De valsnelheid van het pakket uit dezelfde simulatie, zonder en met parachute, van 40 m hoog, windstil.



Zonder parachute versnelt het pakket tot bijna zijn eindsnelheid; met parachute (die opengaat in de gekleurde strook) remt het af tot minder dan 5 m/s.

1 Vrije val
De eerste halve seconde valt het pakket bijna vrij: 9,8 m/s per seconde. De doos zelf remt nog nauwelijks.

2 De parachute gaat open
Tussen 0,5 en 1,5 s groeit de parachute. De snelheid piekt op 6,9 m/s na 0,92 s; daarna is de luchtkracht groter dan het gewicht en remt het pakket af. De grootste kracht op de lijnen is 26 N.

3 Eindsnelheid
Na ongeveer 1,7 s is de snelheid binnen 5 % van de eindsnelheid, 4,66 m/s: luchtkracht en gewicht heffen elkaar op.

4 Landing
Na 8,5 s raakt het pakket de grond met 4,66 m/s: de stoot die de verpakking moet opvangen is 2,0 · 4,66 = 9,3 N·s.

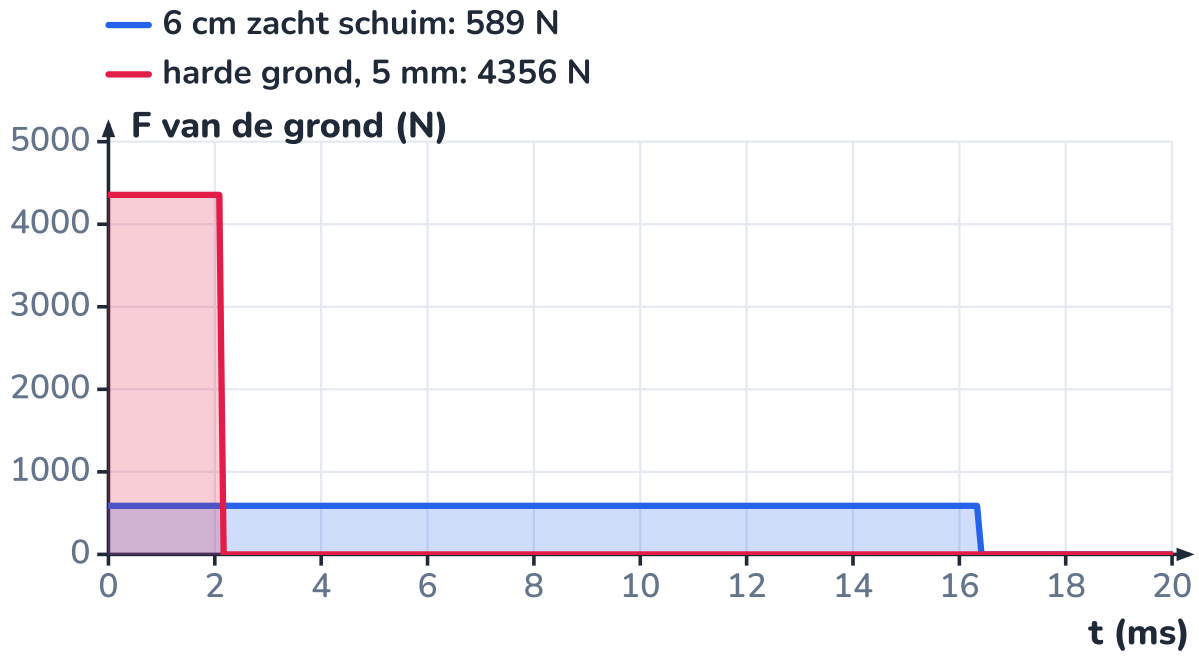
5 Zonder parachute
Na 3,41 s met 17,6 m/s op de grond, dicht bij de eindsnelheid van de doos (18,6 m/s): een stoot van 35 N·s, bijna vier keer zo veel. Zonder lucht zou het pakket al na 2,86 s met 28,0 m/s neerkomen (hoofdstuk 8).

UITGEWERKT VOORBEELD · 9.19

Habitat: de verpakking dimensioneren

19/21

In het pakket zitten sensoren en reserveonderdelen. Ontwerpeis: de inhoud mag bij de landing hoogstens 30 g krijgen. Het pakket landt met 4,66 m/s. De inhoud zit in schuim dat bij indrukken een ongeveer constante spanning geeft (de *plateauspanning*) en dat je hoogstens tot 70 % van zijn dikte kan indrukken. Hoe dik moet het schuim zijn, en hoe zacht? Vergelijk met droppen zonder parachute (van 40 m) en met hangen op 2,0 m.



Dezelfde stoot op twee manieren: 16 ms in zacht schuim of 2 ms op harde grond (ideale, constante remkracht).

GEGEVEN

- $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, $v = 4{,}66\,\mathrm{m/s}$, eis $a \leq 30\,g$
- bodem 30 × 30 cm, bruikbare indrukking 70 %

GEVRAAGD

- remweg, dikte en plateauspanning van het schuim
- landingsstoot en duur

OPLOSSING

1 De grond duwt met F omhoog, het gewicht trekt omlaag: de vertraging is $F/m - g$. Met $F/m \leq 30\,g$ is de vertraging hoogstens $29\,g = 284\,\mathrm{m/s^2}$.

2 Remweg: $s = v^2/(2a) = 4{,}66^2/(2 \cdot 284) = 3{,}8\,\mathrm{cm}$. Met 70 % bruikbare indrukking: $3{,}8/0{,}7 = 5{,}4\,\mathrm{cm}$: kies 6 cm.

3 Kracht: $F = m \cdot 30\,g = 589\,\mathrm{N}$. Over de hele bodem van 0,09 m² is dat een plateauspanning van $589/0{,}09 = 6{,}5\,\mathrm{kPa}$: een zacht schuim. Hard verpakkingsschuim (EPS) plooit pas rond 100 kPa: over de hele bodem zou dat 9000 N en 460 g geven. Wie EPS wil gebruiken, zet het in vier kleine blokjes van samen 59 cm². De plateauspanning bepaalt de kracht, de dikte de remweg.

4 Stoot: $J = mv = 9{,}31\,\mathrm{N\,s}$ (plus het gewicht tijdens de korte rem), over $\Delta t = 2s/v = 16\,\mathrm{ms}$. Op harde grond met 5 mm vervorming zou het 2,1 ms duren en 222 g geven.

5 Zonder parachute (17,6 m/s) zou dezelfde eis 55 cm remweg vragen, 78 cm schuim. Hangen op 2,0 m en loslaten geeft 6,3 m/s en 6,9 cm remweg, maar de drone moet dan laag boven de grond hangen met zijn windvlaag van 13 m/s.

ANTWOORD

Met parachute: 6 cm zacht schuim met een plateauspanning van ongeveer 6,5 kPa over de hele bodem houdt de inhoud onder 30 g (stoot 9,3 N·s in ongeveer 16 ms). Zonder parachute zou er 78 cm schuim nodig zijn: de parachute is de sleutel.

Klopt dit? Energie: $\frac{1}{2}mv^2 + mgs = 21{,}7 + 0{,}75 = 22{,}4\,\mathrm{J}$, en $F\,s = 589 \cdot 0{,}0381 = 22{,}4\,\mathrm{J}$: het schuim neemt precies die energie op. Een pakket landt niet altijd op zijn bodem: het schuim moet rondom zitten.

Mag dat zomaar?

Nee. In de Europese regels voor drones (Uitvoeringsverordening (EU) 2019/947) mag een drone in de 'open' categorie niets laten vallen, blijft hij onder 120 m en altijd in het zicht van de piloot. Pakketten afwerpen, en zeker buiten het zicht naar een depot vliegen, kan alleen in de 'specifieke' categorie, met een risicoanalyse en een vergunning van de luchtvaartautoriteit (in België het Directoraat-generaal Luchtvaart). De bevoorrading van Habitat is een fictief scenario op een afgesloten proefterrein. Echte voorbeelden bestaan wel: in Rwanda levert Zipline sinds 2016 bloed aan ziekenhuizen met pakketjes aan een papieren parachute.

NASLAG · 9.20

Impuls en botsingen: formules en werkwijze

20/21

Werkwijze bij een botsing: (1) kies het systeem en controleer dat de uitwendige stoot verwaarloosbaar is; (2) schrijf impulsbehoud per component; (3) voeg een tweede vergelijking toe: energie (elastisch), gelijke eindsnelheid (volledig inelastisch) of e; (4) controleer met de energie of het resultaat kan.

impuls en stoot

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{J} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t = \Delta\vec{p}$$

symbool	betekenis	eenheid
$\vec{p}$	impuls	kg·m/s
$\vec{J}$	stoot	N·s

behoud van impuls (geen uitwendige kracht)

$$\sum m_i\vec{v}_i = \text{constant} = M\,\vec{v}_{\text{zw}}$$

restitutie (e = 1 elastisch, 0 volledig inelastisch)

$$v_2' - v_1' = -e\,(v_2 - v_1)$$

elastisch, 1D

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2$$

energieverlies bij een botsing (opdracht 9.14)

$$\Delta E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,(v_1 - v_2)^2\,(1 - e^2)$$

raket

$$\Delta v = v_{\text{e}} \ln\frac{m_0}{m_1}, \quad F = \dot{m}\,v_{\text{e}}$$

symbool	betekenis	eenheid
v_{e}	uitstroomsnelheid	m/s

hangende rotor (ideaal)

$$v_{\text{i}} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}}, \quad P = \frac{T^{3/2}}{\sqrt{2\rho A}}$$

remmen over een remweg

$$F_{\text{gem}} = \frac{mv^2}{2s}, \quad \Delta t = \frac{2s}{v}$$

bevoorrading van Habitat	waarde
drone	quadcopter 8,0 kg + pakket tot 2,0 kg; rotoren 4 × Ø 0,56 m; batterij 888 Wh
hangen	1144 W met pakket, 818 W zonder
vlucht naar het depot (6,0 km) en terug	±292 Wh
pakket, parachute	2,0 kg, doos 30 cm; rond, Ø 1,5 m; drop op 40 m
landing	4,7 m/s na 8,5 s; drift 22 m bij 3 m/s wind

bevoorrading van Habitat	waarde
verpakking	6 cm zacht schuim, ±6,5 kPa: hoogstens 30 g

HET GEHEEL · 9.21

Waar impuls vandaan komt en waar hij heen gaat

21/21

Impuls is de tweede wet van Newton in haar oorspronkelijke vorm, en zijn behoud is de derde wet in één zin. Samen met energiebehoud vormt hij het gereedschap voor alles wat kort en hevig is: botsingen, sprongen, ontploffingen, stromen die iets wegduwen. Hij verbindt de mechanica (K) met het modelleren (W: integralen, differentiaalvergelijkingen) en met energie (E), en in het station met ontwerpen (D) en veiligheid.

I8 De wetten van Newton
F = m a en actie en reactie: hier als dp/dt en behoud van impuls.

I9 Arbeid, energie en vermogen
Kinetische energie: wat bij een botsing wel of niet behouden blijft.

E3 Integralen: ophopen
De stoot als oppervlakte onder F(t), met de trapeziumregel uit meetwaarden.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
Scheiden van veranderlijken voor de raket; het vallende pakket met luchtweerstand.

E8 Beweging in twee dimensies
Het pakket uit een vliegende drone als worp; de drone in de wind; de sproeier.

E10 Rotatie
Impulsmoment: de draaiende tegenhanger van impuls, en hoe een drone om zijn as draait.

E12 Sterkteleer
Hoe een kreukelzone of schuim energie opneemt: spanning, rek en plastisch vervormen.

E15 De hoofdwetten van de thermodynamica
Adiabatische uitzetting van de lucht in de waterraket.

E18 Stroming van vloeistoffen en gassen
Bernoulli en debiet: de uitstroomsnelheid van water en lucht.

E33 Het lichaam als regelsysteem
Wat het lichaam verdraagt: versnellingen en krachten bij een botsing.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen
Monte-Carlosimulaties en betere integratiemethoden.

E46 Betrouwbaarheid en risico
Risicoanalyse van een drone-operatie: wat als de parachute niet opengaat?

Habitat
De bevoorradingsdrone van Habitat is nu gedimensioneerd: 8,0 kg plus een pakket tot 2,0 kg, 1,1 kW om te hangen, ±292 Wh voor een vlucht naar het depot en terug. Het pakket krijgt een ronde parachute van 1,5 m (landing met 4,7 m/s) en 6 cm zacht schuim rond de inhoud (hoogstens 30 g). De drone laat boven de wind los: bij 3 m/s 22 m van het afzetpunt. Opdracht 9.12 werkt de drop uit; hoofdstuk 46 maakt er een risicoanalyse van.

SAMENVATTING

In het kort

- Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ is een vector; de tweede wet luidt $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$. De stoot $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ (oppervlakte onder $F(t)$) is gelijk aan $\Delta\vec{p}$.

- Zonder uitwendige kracht blijft de totale impuls behouden, want inwendige krachten heffen elkaar op (derde wet); het zwaartepunt beweegt eenparig.
- Bij elke botsing blijft impuls behouden; kinetische energie alleen bij een elastische. De restitutiecoëfficiënt e meet hoeveel de relatieve snelheid overhoudt.
- Elastisch in 1D: de relatieve snelheid keert om. Gelijke massa's wisselen hun snelheden; lichte kernen remmen neutronen het best af. In 2D: per component, en bij gelijke massa's 90°.
- Raket: $\Delta v = v_\mathrm{e} \ln(m_0/m_1)$ en $F = \dot{m}\, v_\mathrm{e}$; de logaritme maakt trappen nodig. Een waterraket vliegt het hoogst met ongeveer 40 % water.
- Straalkracht $F = \dot{m}\, \Delta v$ drijft sproeiers en rotors aan; een hangende rotor vraagt $T^{3/2}/\sqrt{2\rho A}$ (ideaal).
- Dezelfde stoot over een langere tijd geeft een kleinere kracht: $F = mv^2/(2s)$. Kreukelzone, gordel, airbag, parachute en schuim werken zo.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

impuls

Het product van massa en snelheid, $\vec{p} = m\,\vec{v}$ (kg·m/s), een vector. De tweede wet van Newton zegt $\vec{F}_\mathrm{res} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$.

stoot

De integraal van een kracht over de tijd, $\vec{J} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ (N·s): de oppervlakte onder $F(t)$, gelijk aan de impulsverandering.

behoud van impuls

In een systeem waarop geen resulterende uitwendige kracht werkt, blijft de totale impuls constant: de inwendige krachten heffen elkaar op (derde wet).

elastische botsing

Een botsing waarbij ook de kinetische energie behouden blijft; de relatieve snelheid keert om met dezelfde grootte.

volledig inelastische botsing

Een botsing waarbij de voorwerpen samen verder gaan; het grootst mogelijke deel van de kinetische energie wordt warmte en vervorming.

restitutiecoëfficiënt

e = relatieve snelheid na / relatieve snelheid voor (van elkaar weg tegenover naar elkaar toe): 1 elastisch, 0 volledig inelastisch.

raketvergelijking

$\Delta v = v_\mathrm{e} \ln(m_0/m_1)$ (Tsiolkovski): de snelheidswinst hangt alleen af van de uitstroomsnelheid en de massaverhouding.

straalkracht

De kracht $F = \dot{m}\, v$ van een massastroom $\dot{m}$ die met snelheid v weggestoten wordt: raket, sproeier, rotor.

kreukelzone

Het deel van een voertuig dat bij een botsing gecontroleerd vervormt: de remweg en de botsduur worden langer, dus de kracht kleiner.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 10

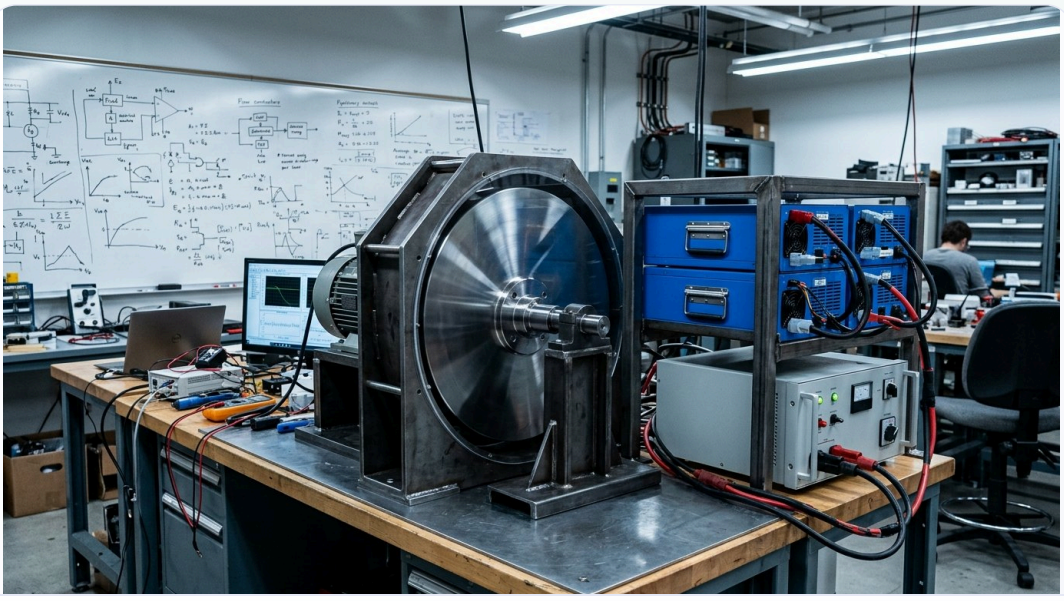
Rotatie

Van riemschijf tot vliegwiel en pirouette: wat een draaiende massa doet en bewaart

Bijna elke machine draait: een motor, een wiel, een riemschijf, een rotor. Voor draaien gelden dezelfde wetten als voor schuiven, met nieuwe grootheden: hoek, hoeksnelheid, **traagheidsmoment** en **impulsmoment**. Je leidt het traagheidsmoment af met een integraal, gebruikt $\tau = I\alpha$ om een dakraam en een dakmotor door te rekenen, ontdekt waarom een cilinder een ring verslaat op een helling, en rekent uit hoeveel energie een **vliegwiel** kan bewaren voor het uit elkaar vliegt. Voor Habitat volgt een eerlijk antwoord op de vraag of een vliegwiel een batterij kan helpen.

6× uitleg · 7× uitgewerkt voorbeeld · 2× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

K Krachten, beweging en constructies · E Energie · W Wiskundig modelleren



Een vliegwiel en een batterij bewaren allebei energie. Het ene houdt zich met staal bij elkaar, het andere met chemie.

Na dit hoofdstuk

- Je kan hoek, hoeksnelheid en hoekversnelling in radialen gebruiken, omrekenen naar toerentallen en naar de snelheid en versnelling van een punt ($v = \omega r$, tangentieel αr, centripetaal $\omega^2 r$).
- Je kan het traagheidsmoment definiëren vanuit de kinetische energie, het met een integraal afleiden voor een staaf, een ring en een schijf, en de verschuivingsstelling gebruiken.
- Je kan $\tau = I\alpha$ afleiden en toepassen, ook op een aandrijving met een overbrenging (gereduceerd traagheidsmoment).
- Je kan rotatie-energie, arbeid $\tau\theta$ en vermogen $\tau\omega$ berekenen en verklaren welk voorwerp het snelst van een helling rolt.
- Je kan de energie in een vliegwiel en de grens door de materiaalsterkte ($\sigma = \rho v^2$ in een ring) berekenen, een vliegwiel simuleren en het eerlijk vergelijken met een batterij.
- Je kan impulsmoment als $L = I\omega$ en als $r \times p$ gebruiken, $dL/dt = \tau$ toepassen en het behoud ervan verklaren bij een pirouette, een baan, een reactiewiel en een drone.

Kepler, Newton en de perkenwet

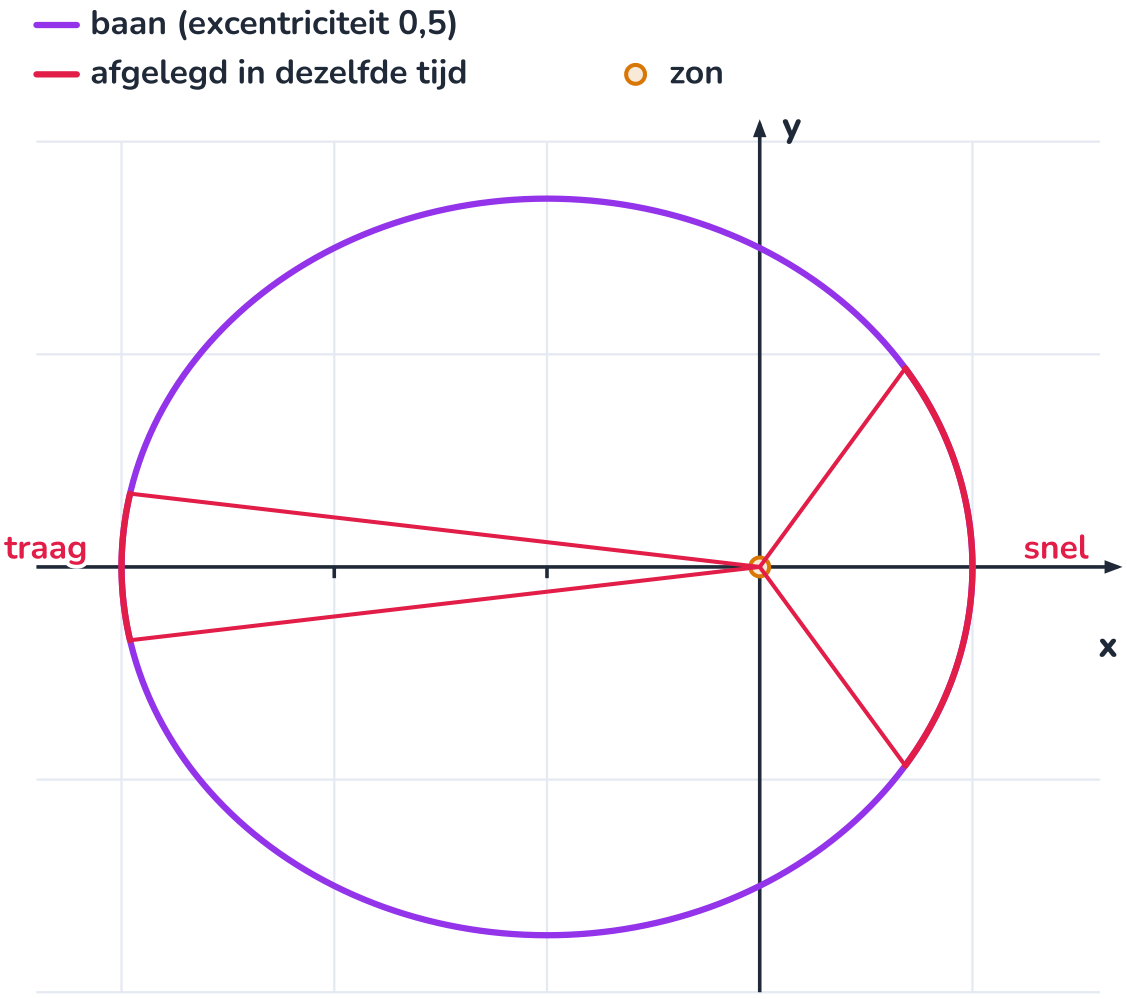
Johannes Kepler had de beste waarnemingen van zijn tijd: twintig jaar metingen van de planeet Mars door de Deense sterrenkundige Tycho Brahe, bij wie hij in Praag werkte en wiens gegevens hij na Brahes dood in 1601 kon gebruiken. Jaren rekende Kepler aan cirkels en epicykels die er telkens een paar boogminuten naast zaten. In zijn *Astronomia nova* (1609) gaf hij het op en kwam met twee wetten: een planeet beweegt op een **ellips** met de zon in een brandpunt, en de lijn van de zon naar de planeet **doorloopt in gelijke tijden gelijke oppervlakten**. Dicht bij de zon gaat de planeet dus sneller, ver weg trager. Tien jaar later, in *Harmonices mundi* (1619), volgde de derde wet over omlooptijd en afstand.

Waarom gelijke oppervlakten? Kepler dacht aan een kracht vanuit de zon die de planeet voortduwt. Het antwoord kwam van Isaac Newton. De allereerste propositie van zijn *Principia* (1687) bewijst dat elk lichaam dat getrokken wordt naar één vast punt, gelijke oppervlakten in gelijke tijden doorloopt, *welke* vorm de kracht ook heeft. Vandaag lezen we het als een behoudswet: een kracht die langs de verbindingslijn werkt, geeft geen moment, dus het **impulsmoment** $m\,\vec{r}\times\vec{v}$ blijft behouden, en de oppervlakte per seconde is precies $|\vec{r}\times\vec{v}|/2$ (verderop in dit hoofdstuk).

Dezelfde wet stuurt een kunstschaatser die haar armen intrekt, een satelliet die zich omdraait zonder brandstof, en de aarde en de maan: getijdenwerking remt de draaiing van de aarde af (de dag wordt heel langzaam langer), en het impulsmoment dat de aarde verliest, gaat naar de maan, die zich ongeveer 3,8 cm per jaar verwijdert. Dat meten telescopen met laserpulsen op spiegels die sinds 1969 op de maan staan.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het station zit vol draaiende delen: de motor van het kasdak, de pompen, de rotoren van de drone, later de windturbine en de elektrische machines (hoofdstuk 24). Wie ze wil dimensioneren, moet weten hoe een moment een massa versnelt, hoeveel energie erin zit en wanneer een draaiend onderdeel uit elkaar vliegt. En het brein moet kunnen beslissen of een vliegwiel een batterij kan helpen.



Twee stukken baan die de planeet in dezelfde tijd aflegt: dicht bij de zon kort en breed, ver weg lang en smal. De oppervlakten zijn gelijk.

UITLEG · 10.2

Wat je al weet: draaien, nu met afgeleiden

2/20

wat je al kan	wat nu komt
overbrenging, toerental en draairichting (hoofdstuk 12 van F; hoofdstuk 33 van I)	hoek, hoeksnelheid en hoekversnelling als afgeleiden
moment $M = F \cdot d$ en evenwicht (hoofdstuk 10 van I); $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (hoofdstuk 5)	wat een moment doet als er géén evenwicht is: een hoekversnelling
$F = ma$, kinetische energie, vermogen (hoofdstuk 8 en 9 van I)	de draaiende tegenhangers: $\tau = I\alpha$, $\frac{1}{2}I\omega^2$, $P = \tau\omega$
cirkelbeweging $v = \omega R$, $a = \omega^2 R$ (hoofdstuk 8); impuls (hoofdstuk 9)	een star lichaam als verzameling punten op cirkels; impulsmoment
integralen als som van kleine stukjes (hoofdstuk 3)	het traagheidsmoment van een staaf, ring, schijf en bol

Een star lichaam dat om een vaste as draait, beschrijf je met één getal: de **hoek** $\theta(t)$ waarover het gedraaid is, in **radialen**. Een punt op afstand r van de as legt dan een boog $s = r\theta$ af. Afleiden (hoofdstuk 1) geeft de draaiende tegenhangers van snelheid en versnelling:

HOEKSNELHEID, HOEKVERSNELLING EN EEN PUNT OP AFSTAND R

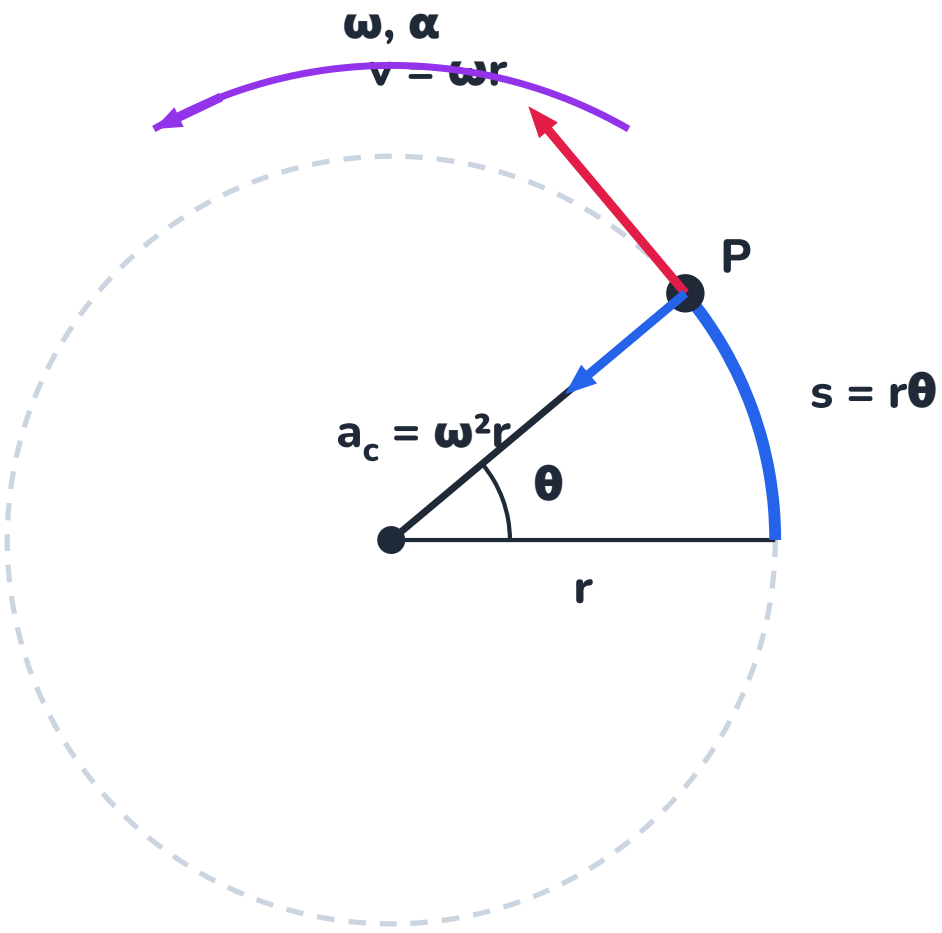
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad v = r\omega \qquad a_{\mathrm{t}} = r\alpha \qquad a_{\mathrm{c}} = r\omega^2$$

Alle punten van het lichaam hebben dezelfde θ, ω en α, maar een andere v: hoe verder van de as, hoe sneller. a_{t} verandert de snelheid van het punt, a_{c} houdt het op zijn cirkel (hoofdstuk 8). Een toerental n (toeren per minuut, tpm) is $\omega = 2\pi n/60$.

Waarom radialen? Omdat $s = r\theta$ en $v = r\omega$ alleen zonder omrekenfactor gelden als θ in radialen staat; in graden zou overal een $\pi/180$ opduiken. Een radiaal is een verhouding van twee lengtes: rad/s is eigenlijk 1/s.

Constante hoekversnelling. Precies zoals bij de eenparig versnelde beweging (hoofdstuk 7 van I):

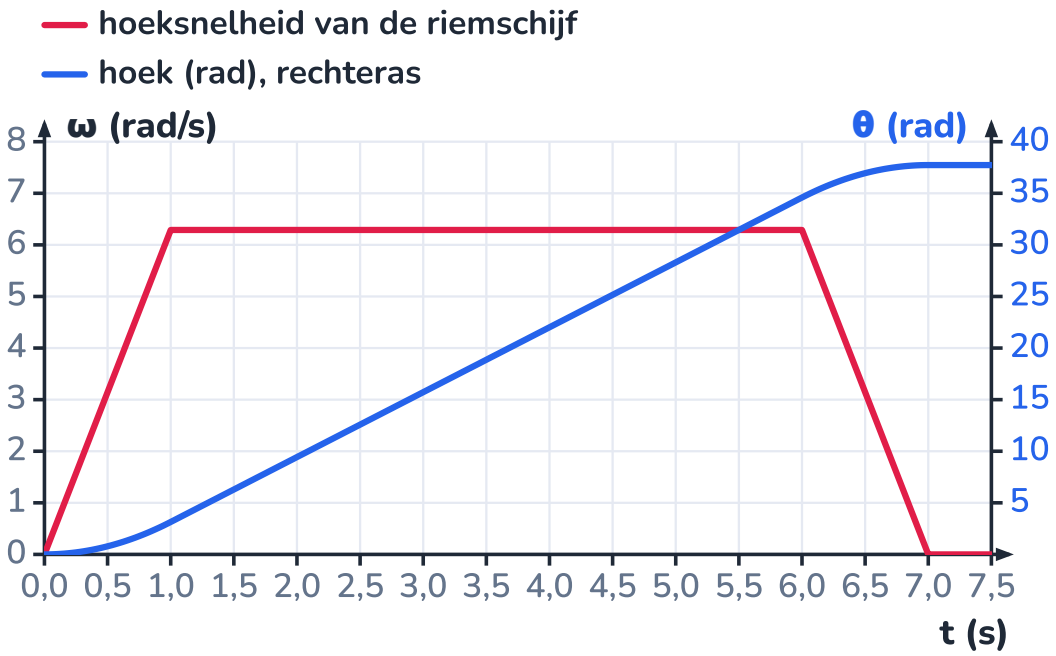
$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad \theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta.$$



Alle punten draaien over dezelfde hoek θ; een punt op afstand r legt de boog s = rθ af met snelheid v = ωr.

De riemschijf van het kasdak

De dakmotor van de klimaatmodule (hoofdstuk 26 van I) drijft een tandriemschijf met een steekdiameter van 31,8 mm aan via een wormwiel 1:50. Het schuifpaneel loopt 0,60 m, met 0,10 m/s, na 1 s aanlopen met 0,10 m/s² (hoofdstuk 7 van I). Bereken de hoeksnelheid en het toerental van de riemschijf en van de motor, de hoekversnelling bij het aanlopen, en hoeveel toeren de schijf maakt per sluiting.



Aanlopen, draaien met 6,3 rad/s en afremmen: de hoek (rechteras) is de oppervlakte onder de hoeksnelheid.

GEGEVEN

- $r = 15{,}9\,\text{mm}$, $v = 0{,}10\,\text{m/s}$, $a = 0{,}10\,\text{m/s}^2$, slag 0,60 m
- overbrenging 1:50

GEVRAAGD

- ω, n, α, aantal toeren

OPLOSSING

1. $\omega = v/r = 0{,}10/0{,}0159 = 6{,}29\,\text{rad/s}$, dus $n = 60\,\omega/(2\pi) = 60{,}1$ tpm. (Hoofdstuk 26 van I koos precies 60 tpm: 0,0999 m/s.)
2. Motor: 50 keer sneller: $\omega_\text{m} = 314\,\text{rad/s}$, 3000 tpm.
3. Aanlopen: $\alpha = a/r = 0{,}10/0{,}0159 = 6{,}29\,\text{rad/s}^2$; in die seconde draait de schijf $\tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 3{,}14\,\text{rad}$.
4. Per sluiting: $\theta = s/r = 0{,}60/0{,}0159 = 37{,}7\,\text{rad} = 6{,}01$ toeren. Het wormwiel moet dus 300 motoromwentelingen per sluiting overbrengen.

ANTWOORD

De riemschijf draait 6,29 rad/s (60 tpm), de motor 3000 tpm; aanlopen met 6,3 rad/s²; één sluiting is 6,0 toeren van de riemschijf.

Klopt dit? In de grafiek is de oppervlakte onder $\omega(t)$ de hoek: $6{,}29 \cdot (5+1) = 37{,}7\,\text{rad}$, net als s/r (hoofdstuk 3). De tanden van de riem: 20 tanden van 5 mm is 100 mm per toer, $6{,}0 \cdot 100\,\text{mm} = 0{,}60\,\text{m}$.

UITLEG · 10.4

Het traagheidsmoment

4/20

Hoeveel bewegingsenergie heeft een draaiend voorwerp? Elk stukje met massa m_i op afstand r_i van de as heeft snelheid $v_i = r_i\omega$. Tel op:

$$E_\text{k} = \sum \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\Big(\sum m_i r_i^2\Big)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2.$$

TRAAGHEIDSMOMENT OM EEN AS

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 \,\mathrm{d}m$$

In kg·m². Het speelt voor draaien de rol van de massa: het bepaalt hoe moeilijk een voorwerp om die as te versnellen is. Massa ver van de as telt kwadratisch zwaarder; hetzelfde voorwerp heeft om elke as een ander I.

Drie integralen (hoofdstuk 3), telkens met massa M:

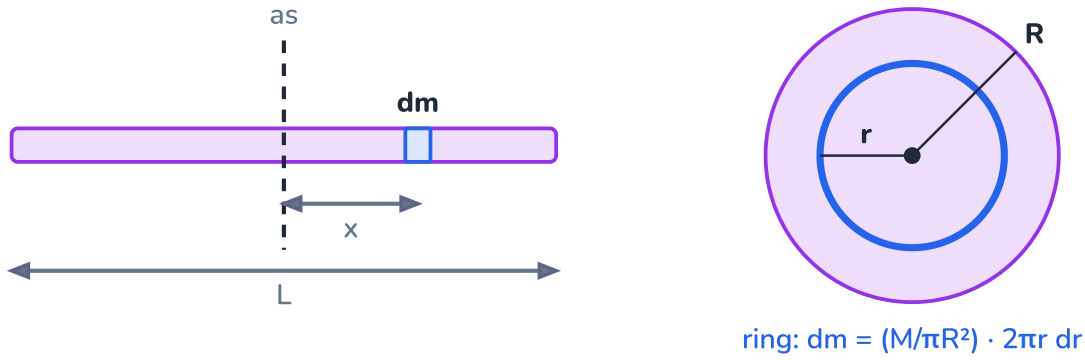
- **Staaf** (lengte L, as loodrecht door het midden). Een stukje $\mathrm{d}x$ op afstand x heeft massa $\mathrm{d}m = \dfrac{M}{L}\mathrm{d}x$: $I = \displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \,\frac{M}{L}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{L}\cdot\frac{2}{3}\Big(\frac{L}{2}\Big)^3 = \frac{1}{12}ML^2$.
- **Dunne ring** (straal R): alle massa zit op afstand R, dus $I = MR^2$. Geen integraal nodig.
- **Volle schijf** (straal R): snij ze in ringen met straal r en breedte $\mathrm{d}r$. Een ring heeft massa $\mathrm{d}m = \dfrac{M}{\pi R^2}\,2\pi r\,\mathrm{d}r$ en traagheidsmoment $r^2\,\mathrm{d}m$: $I = \displaystyle\int_0^R \frac{2M}{R^2}\,r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2M}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$.

Een schijf heeft maar half zo veel traagheidsmoment als een ring met dezelfde massa en straal: veel van haar massa zit dicht bij de as. Een lengte in de richting van de as (de dikte van de schijf, de lengte van een cilinder) doet niet mee: een lange volle cilinder is ook $\frac{1}{2}MR^2$.

voorwerp (massa M)	as	I	$k = I/(MR^2)$
puntmassa op afstand R	-	MR^2	1
dunne ring of dunwandige buis	symmetrieas	MR^2	1
volle schijf of cilinder	symmetrieas	$\frac{1}{2}MR^2$	0,5
dikwandige buis (R_1 binnen, R_2 buiten)	symmetrieas	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	tussen 0,5 en 1
volle bol	door het midden	$\frac{2}{5}MR^2$	0,4
dunne bolschil	door het midden	$\frac{2}{3}MR^2$	0,667
dunne staaf, lengte L	loodrecht, door het midden	$\frac{1}{12}ML^2$	-
dunne staaf, lengte L	loodrecht, door een uiteinde	$\frac{1}{3}ML^2$	-
rechthoekige plaat $a \times b$	loodrecht op de plaat, door het midden	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$	-

Verschuivingsstelling (Steiner). Draait een voorwerp om een as op afstand d van een evenwijdige as door zijn zwaartepunt, dan is $I = I_\text{zw} + Md^2$. Bewijs: schrijf de positie van elk stukje als $\vec{d} + \vec{r}\,'$ met $\vec{r}\,'$

gemeten vanuit het zwaartepunt (loodrecht op de as). Dan $\sum m_i|\vec{d}+\vec{r}_i'|^2 = Md^2 + 2\,\vec{d}\cdot\sum m_i\vec{r}_i' + \sum m_i r_i'^2$, en de middelste som is nul: dat is de definitie van het zwaartepunt. Voorbeeld: een staaf om een uiteinde: $\frac{1}{12}ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$.



Links: een staaf in stukjes dm = (M/L) dx op afstand x. Rechts: een schijf in dunne ringen, elk met al zijn massa op afstand r.

UITGEWERKT VOORBEELD · 10.5

Traagheidsmomenten in Habitat

5/20

Bereken het traagheidsmoment van (a) het dakraam van de meetkas (0,60 × 0,60 m, 1,2 kg) om zijn scharnier achteraan; (b) een propeller van de bevoorradingsdrone (0,56 m, 60 g, als dunne staaf) om de motoras; (c) een wiel van het inspectierobotje (Ø 65 mm, 30 g, als volle schijf).

GEGEVEN

- massa's en maten hierboven

GEVRAAGD

- I_{raam}, I_{prop}, I_{wiel}

OPLOSSING

1. (a) Het raam is een plaat die draait om een zijde. De afmeting langs het scharnier telt niet mee; loodrecht erop is het een 'staaf' van 0,60 m om een uiteinde. Om het zwaartepunt: $\frac{1}{12}\cdot 1{,}2\cdot 0{,}60^2 = 0{,}036\,\text{kg m}^2$; Steiner met $d = 0{,}30\,\text{m}$: $0{,}036 + 1{,}2\cdot 0{,}30^2 = 0{,}144\,\text{kg m}^2$.
2. (b) Staaf om het midden: $\frac{1}{12}\cdot 0{,}060\cdot 0{,}56^2 = 1{,}57\cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$. (Een echte propeller is naar de tip dunner: iets minder.)
3. (c) $\frac{1}{2}\cdot 0{,}030\cdot 0{,}0325^2 = 15{,}8\cdot 10^{-6}\,\text{kg m}^2$.

ANTWOORD

$I_{\text{raam}} = 0{,}144\,\text{kg m}^2$, $I_{\text{prop}} \approx 1{,}6\cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$, $I_{\text{wiel}} \approx 16\cdot 10^{-6}\,\text{kg m}^2$.

Klopt dit? Het raam weegt 20 keer zoveel als de propeller, maar zijn traagheidsmoment is 92 keer zo groot: de massa zit gemiddeld verder van de as. Het wieltje is duizenden keren kleiner: r^2 maakt het verschil. Bij een massief voorwerp is $I = Mk^2$ met k de *gyratiestraal*: de afstand waarop je alle massa zou kunnen samenbrengen. Voor het raam $k = \sqrt{0{,}144/1{,}2} = 0{,}346\,\text{m}$.

Moment en hoekversnelling: de tweede wet voor rotatie

Neem een massadeeltje $\mathrm{d}m$ op afstand r van de as. De kracht erop ontbindt in een radiale component (die houdt het op zijn cirkel) en een tangentiële $\mathrm{d}F_\mathrm{t}$. Alleen die laatste versnelt het langs zijn cirkel: $\mathrm{d}F_\mathrm{t} = \mathrm{d}m\, a_\mathrm{t} = \mathrm{d}m\, r\alpha$. Haar moment om de as is $r\,\mathrm{d}F_\mathrm{t} = r^2\alpha\,\mathrm{d}m$. Tel op over het hele lichaam:

$$\tau = \int r\,\mathrm{d}F_\mathrm{t} = \alpha \int r^2\,\mathrm{d}m = I\alpha.$$

De inwendige krachten tussen de deeltjes vallen weg: ze komen in paren, even groot, tegengesteld en op dezelfde lijn, dus met tegengestelde momenten. Alleen de **uitwendige** momenten tellen.

TWEEDE WET VOOR ROTATIE OM EEN VASTE AS

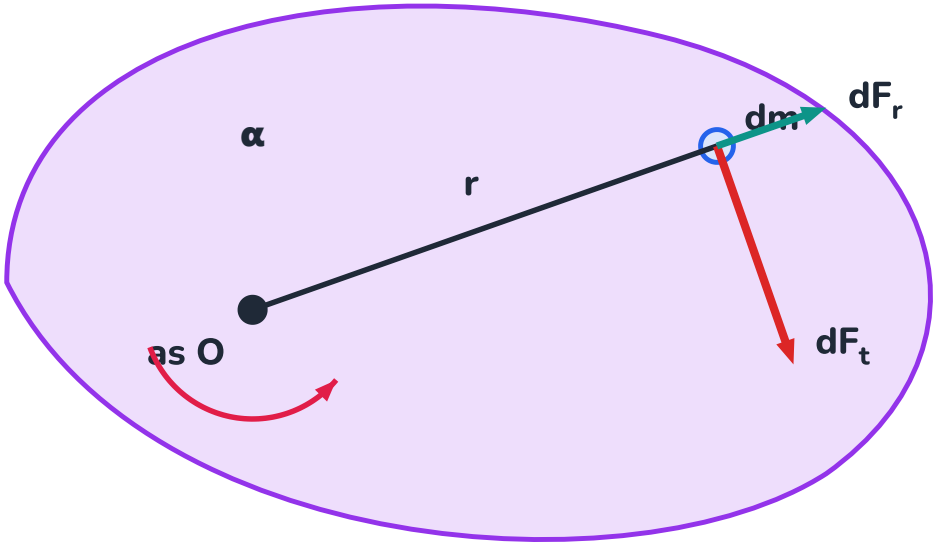
$$\sum \tau_\mathrm{uitw} = I\alpha \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad |\tau| = r\,F\sin\varphi = F\,d$$

τ (N·m) is het moment van hoofdstuk 10 van I en 5: kracht maal arm d, of als vector $\vec{r} \times \vec{F}$ (de component langs de as telt). Zonder hoekversnelling is $\sum \tau = 0$: evenwicht.

Werkwijze bij een opgave: (1) teken de krachten waar ze aangrijpen; (2) kies een draaizin als positief; (3) schrijf $\sum \tau = I\alpha$ voor wat draait en $\sum F = ma$ voor wat schuift; (4) koppel ze met een voorwaarde zoals $a = r\alpha$ (een touw dat niet slipt, een wiel dat rolt).

Een moment heeft een massa nodig die ver weg zit

Het moment hangt af van de kracht en haar arm. Het traagheidsmoment hangt af van de massa en haar afstand tot de as. Het zijn twee verschillende dingen: een lange sleutel geeft meer moment met dezelfde hand; een zware rand maakt een wiel trager om op gang te komen.

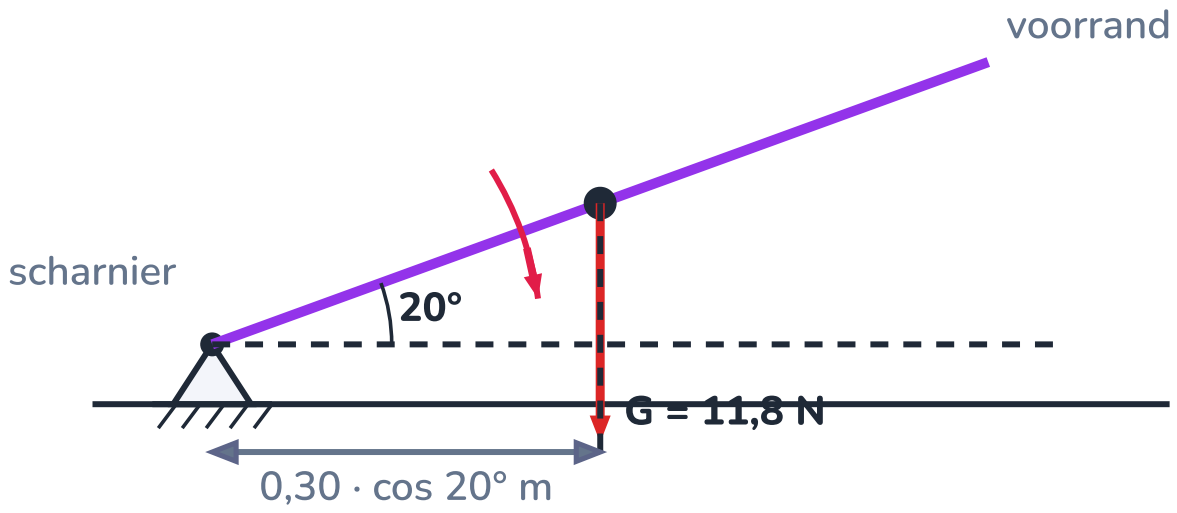


Alleen de tangentiële kracht op elk deeltje geeft een moment om de as; samen geven ze τ = Iα.

UITGEWERKT VOORBEELD · 10.7

Habitat: het dakraam valt dicht

Het dakraam van de meetkas (1,2 kg, 0,60 m diep, scharnier achteraan) staat 20° open. De pen van de duwstang schiet los. Bereken de hoekversnelling op dat ogenblik en de versnelling van de voorrand. Met welke snelheid slaat de voorrand op het frame, en hoe lang duurt de val?



Het gewicht grijpt aan in het midden van het raam; zijn arm om het scharnier is 0,30 · cos 20° m.

GEGEVEN

- $I = 0{,}144\,\text{kg m}^2$ (vorig voorbeeld), zwaartepunt op 0,30 m
- $\theta_0 = 20°$

GEVRAAGD

- α, a_{voorrand}, v bij het sluiten, de tijd

OPLOSSING

1. Moment van het gewicht om het scharnier: arm $0{,}30\cos 20°$, dus $\tau = 1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}30\cos 20° = 3{,}32\,\text{N m}$.
2. $\alpha = \tau / I = 3{,}32 / 0{,}144 = 23{,}0\,\text{rad/s}^2$. De voorrand: $a = \alpha L = 13{,}8\,\text{m/s}^2$, **meer dan** g (1,41 g).
3. Energie: het zwaartepunt zakt $0{,}30\sin 20° = 0{,}103\,\text{m}$: $\tfrac{1}{2} I\omega^2 = mg\,\Delta h = 1{,}21\,\text{J}$, dus $\omega = 4{,}10\,\text{rad/s}$ en de voorrand $v = \omega L = 2{,}46\,\text{m/s}$.
4. De hoekversnelling verandert met de hoek ($\cos\theta$): geen formule voor de tijd, wel een simulatie (Euler, stap 10 µs): $0{,}173\,\text{s}$.

ANTWOORD

$\alpha \approx 23\,\mathrm{rad/s^2}$; **de voorrand versnelt met 13,8 m/s², sneller dan een vrij vallend voorwerp, en slaat na 0,17 s met 2,5 m/s op het frame.**

Klopt dit? Waarom sneller dan g? Voor een homogene plaat om een zijde is $a_{\text{voorrand}} = \frac{3}{2} g \cos\theta$: het gewicht grijpt aan in het midden, maar het raam draait als geheel, en het deel dicht bij het scharnier 'duwt' de voorrand mee. Een steen op de voorrand zou even loskomen. Voor Habitat: 2,5 m/s op een polycarbonaatplaat is een harde klap. Een rubberen aanslag of een gasveertje (een demper) op het frame is een kleine ingreep; de regeling van het dakraam (hoofdstuk 25 van F) kan bovendien een stroomuitval opvangen door het raam gecontroleerd te sluiten.

PROEF · 10.8

Een traagheidsmoment meten

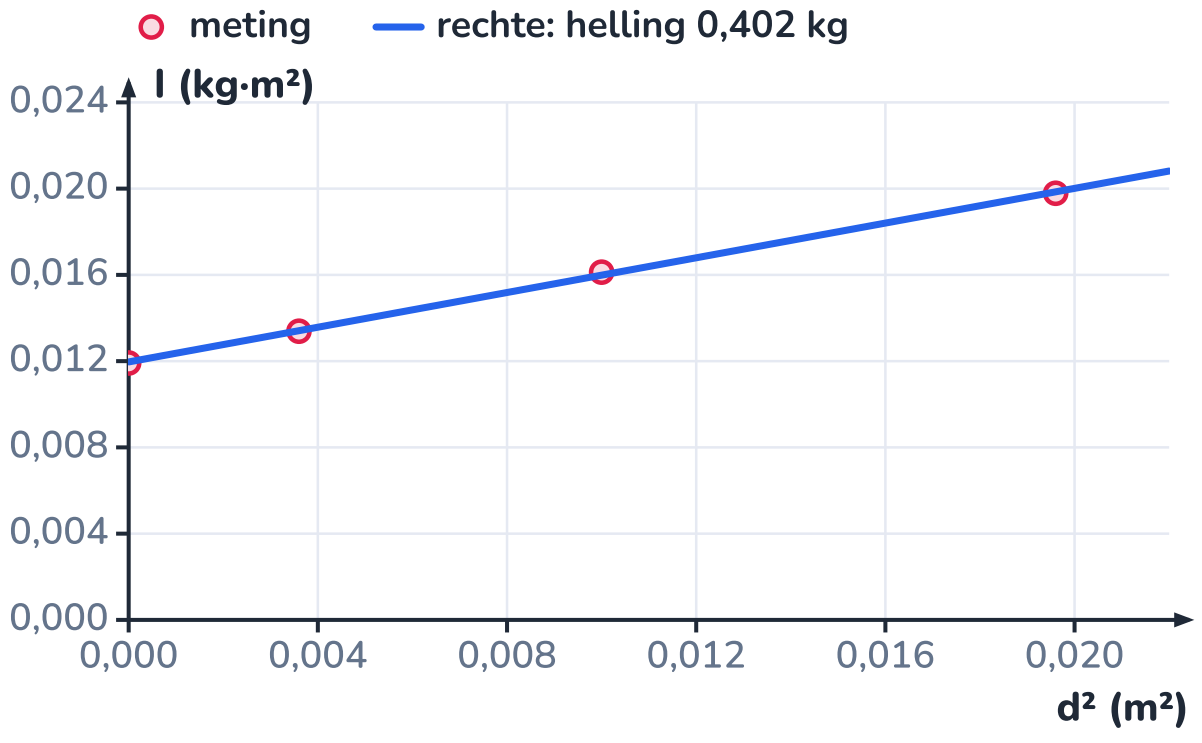
8/20

ONDERZOEKSVRAAG

Klopt $I = \sum mr^2$? Je meet het traagheidsmoment van een draaischijf met een valgewicht, en daarna met twee blokjes op verschillende afstanden van de as.

MATERIAAL

- houten draaischijf (Ø 30 cm) op een lager, met een as van 15 mm straal
- touwtje rond de as over een katrolletje, valgewicht van 100 g
- twee blokjes van 200 g
- stopwatch, meetlint



Het traagheidsmoment stijgt lineair met het kwadraat van de afstand van de blokjes: de helling is hun massa.

WERKWIJZE

1. Compenseer de wrijving: zoek het kleine extra gewichtje (een paperclip) waarmee de schijf na een zetje eenparig blijft draaien; laat het tijdens de metingen hangen.

2. Wind het touwtje op, laat het gewicht vanuit rust 1,00 m vallen en meet de tijd. Drie keer.

3. Zet de blokjes symmetrisch op 6, 10 en 14 cm van de as en herhaal.

4. Bereken per opstelling de versnelling a = 2h/t² en het traagheidsmoment I = m r²(g/a − 1).

5. Zet I uit tegen d² en vergelijk de helling met 2 · 0,200 kg.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting:

blokjes op d (m)	t (s), drie keer	$\bar{t}$ (s)	$I = mr^2\left(\frac{g\bar{t}^2}{2h} - 1\right)$ (kg·m²)
zonder	10,30; 10,48; 10,42	10,40	0,01191
0,06	10,99; 11,12; 10,96	11,02	0,01339
0,10	12,11; 12,19; 11,99	12,10	0,01613
0,14	13,46; 13,42; 13,31	13,40	0,01978

De punten liggen op een rechte met helling 0,402 kg en snijpunt 0,0120 kg·m².

VERKLARING

Waar komt de formule vandaan? Het gewicht: $mg - T = ma$. De schijf: $Tr = I\alpha$ met $\alpha = a/r$. Samen: $mg = a\,(m + I/r^2)$, dus $I = mr^2\,(g/a - 1)$, met $a = 2h/t^2$ uit de valtijd.

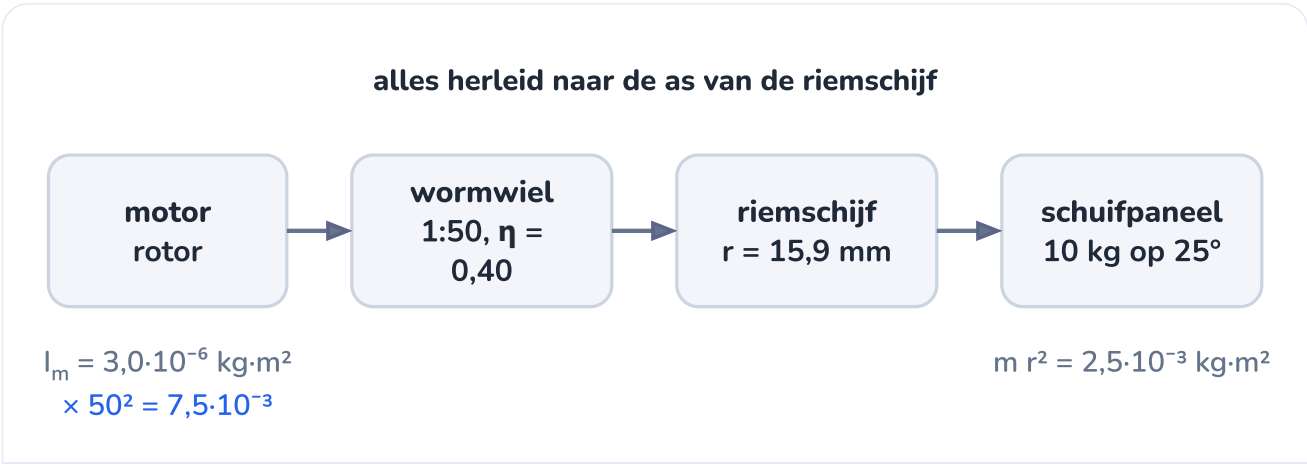
Volgens $I = I_0 + 2m_\mathrm{b}d^2$ (plus het kleine eigen traagheidsmoment van de blokjes) moet de helling $2 \cdot 0{,}200 = 0{,}400\,\mathrm{kg}$ zijn: de meting geeft 0,402 kg. Het snijpunt is het traagheidsmoment van de schijf zelf, 0,0120 kg·m²; een houten schijf van 1,07 kg en 15 cm straal zou $\frac{1}{2} \cdot 1{,}07 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}0120\,\mathrm{kg\,m^2}$ hebben. Omdat a hier klein is (I/r^2 is ongeveer 500 keer m), is $g/a - 1 \approx g/a$ en weegt een fout in de tijd dubbel: 1 % op t is 2 % op I.

UITGEWERKT VOORBEELD · 10.9

Habitat: wat moet de dakmotor versnellen?

9/20

De dakmotor moet bij het aanlopen niet alleen het paneel versnellen, maar ook zijn eigen rotor, die 50 keer sneller draait. Het traagheidsmoment van de rotor is ongeveer $3{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$ (rekenwaarde voor een motortje van 20 à 30 W). Vergelijk het versnellen van rotor en paneel met de last van 60 N aan de riem, en bereken de motorstroom (motorconstante 0,030 N·m/A, nullast 0,25 A, wormwiel 1:50 met rendement 0,40).



Door het wormwiel telt de kleine rotor 2500 keer zwaarder: herleid naar de riemschijf weegt hij meer dan het paneel.

GEGEVEN

- $m = 10\,\mathrm{kg}$, $r = 15{,}9\,\mathrm{mm}$, $\alpha = 6{,}29\,\mathrm{rad/s^2}$ aan de riemschijf
- $I_\mathrm{m} = 3{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $i = 50$, $\eta = 0{,}40$

GEVRAAGD

- de momenten aan de motoras
- de stroom met en zonder aanlopen

OPLOSSING

1. Het paneel beweegt met $v = r\omega$: zijn kinetische energie $\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(mr^2)\omega^2$. Voor de riemschijf gedraagt het zich als een traagheidsmoment $mr^2 = 2{,}53 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$.
2. De rotor draait 50 keer sneller: zijn energie $\tfrac{1}{2}I_\mathrm{m}(50\,\omega)^2$ is die van een traagheidsmoment $50^2 I_\mathrm{m} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$ aan de riemschijf: drie keer het paneel. Een overbrenging vermenigvuldigt traagheidsmomenten met het **kwadraat** van de verhouding.
3. Momenten aan de motoras: rotor versnellen $I_\mathrm{m} \cdot 50\alpha = 0{,}94\,\mathrm{mN\,m}$; paneel versnellen $mr^2\alpha/(50 \cdot 0{,}40) = 0{,}80\,\mathrm{mN\,m}$; de last van 60 N: $60 \cdot 0{,}0159/(50 \cdot 0{,}40) = 47{,}7\,\mathrm{mN\,m}$.
4. Stroom: $I = \tau/k + 0{,}25$: $1{,}84\,\mathrm{A}$ bij constante snelheid (hoofdstuk 26 van I: 1,84 A), $1{,}90\,\mathrm{A}$ tijdens het aanlopen.

ANTWOORD

Het versnellen kost 1,7 mN·m tegenover 47,7 mN·m voor de last: 3,6 % extra, en de rotor vraagt daarvan meer dan het paneel. Het zachte aanlopen van 1 s is dus niet nodig voor de motor, wel om het paneel en de riem te sparen.

Klopt dit? Mechanisch vermogen aan de riemschijf bij 60 N: $\tau\omega = 0{,}954 \cdot 6{,}28 = 6{,}0\,\mathrm{W}$, hetzelfde als $Fv = 60 \cdot 0{,}10 = 6\,\mathrm{W}$ (hoofdstuk 8 en 9 van I). Bij snelle servomotoren in robots is het omgekeerd: daar domineert het versnellen, en kiezen ontwerpers de overbrenging zo dat het gereduceerde traagheidsmoment van de last ongeveer gelijk is aan dat van de rotor.

UITLEG · 10.10

Rotatie-energie, arbeid en vermogen; rollen

10/20

Een moment dat een voorwerp over een hoek $\mathrm{d}\theta$ draait, levert de arbeid $\tau\,\mathrm{d}\theta$ (de kracht F op arm r verplaatst haar aangrijpingspunt over $r\,\mathrm{d}\theta$). Per seconde:

ROTATIE-ENERGIE, ARBEID EN VERMOGEN

$$E_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad W = \int \tau \,\mathrm{d}\theta \qquad P = \tau\,\omega$$

Met $\tau = I\alpha$ is $\tau\omega = I\omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\tfrac{1}{2}I\omega^2)/\mathrm{d}t$: het vermogen van het moment gaat in rotatie-energie. De dakmotor levert bij $60\ \mathrm{N}\ 0{,}954\ \mathrm{N\,m} \cdot 6{,}28\ \mathrm{rad/s} = 6\ \mathrm{W}$.

Rollen zonder slippen. Een wiel of bal met straal R die rolt, heeft zijn zwaartepunt met snelheid $v = R\omega$ (het contactpunt staat op elk ogenblik stil). Zijn kinetische energie is die van het zwaartepunt plus de rotatie eromheen:

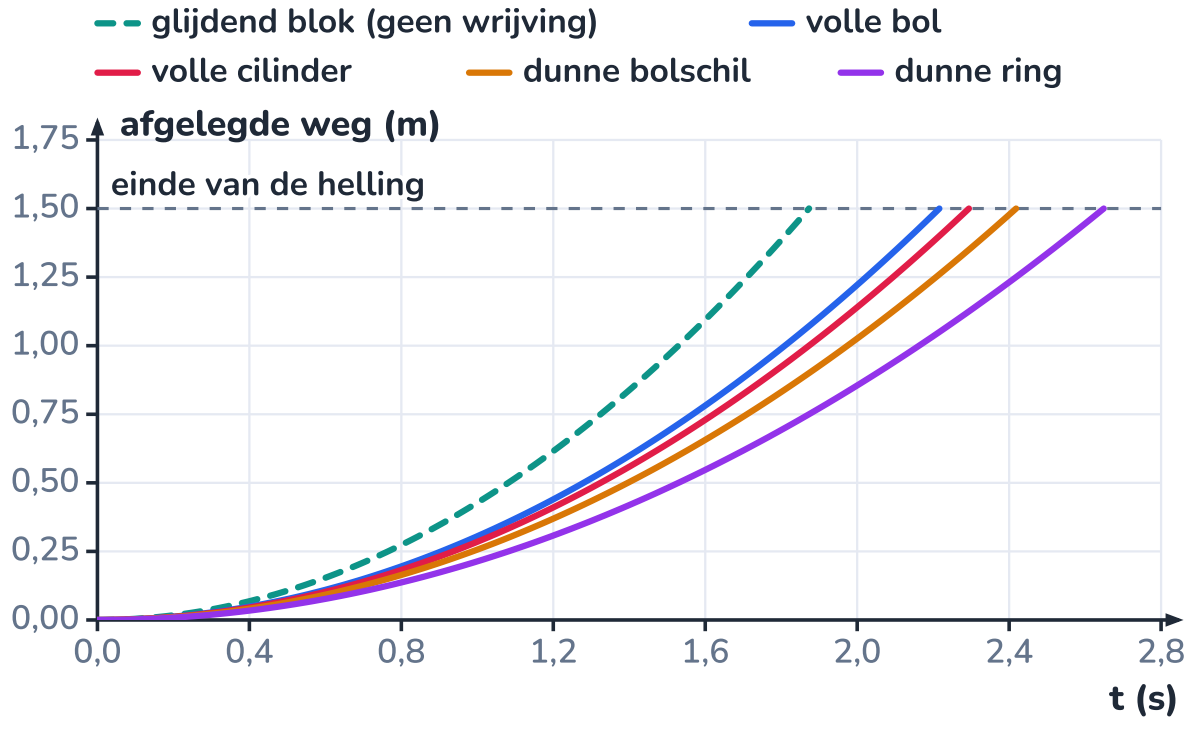
$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{zw}}\omega^2 = \tfrac{1}{2}Mv^2\,(1+k), \qquad k = \frac{I_{\text{zw}}}{MR^2}.$$

Laat het voorwerp van een helling rollen over een hoogte h: $Mgh = \tfrac{1}{2}Mv^2(1+k)$, dus $v = \sqrt{2gh/(1+k)}$ en de versnelling langs de helling is $a = \dfrac{g\sin\beta}{1+k}$. Massa en straal vallen weg; alleen de **vorm** (k) telt. Een volle bol ($k = 0{,}4$) wint van een volle cilinder (0,5), die wint van een bolschil (0,67), die wint van een ring (1). Een blok dat zonder wrijving glijdt ($k = 0$) is het snelst: niets van zijn energie gaat naar draaien.

De knikker van hoofdstuk 8 die over een goot rolt, krijgt zo $v = \sqrt{2gh/1{,}4} = \sqrt{10gh/7}$: 85 % van de snelheid van een vallende knikker. Rolweerstand verwaarlozen we; de wrijving die het rollen mogelijk maakt, doet geen arbeid, want het contactpunt staat stil.

Het zwaarste voorwerp rolt het snelst naar beneden

Massa en straal vallen weg. Een grote en een kleine volle cilinder komen samen beneden, een zware en een lichte ook. Het verschil zit in hoe de massa verdeeld is: dicht bij de as (snel) of aan de rand (traag).



Rolrace over 1,50 m: de volle bol wint van de cilinder, de ring komt laatst; een blok dat zonder wrijving glijdt, is nog sneller.

PROEF · 10.11

De rolrace

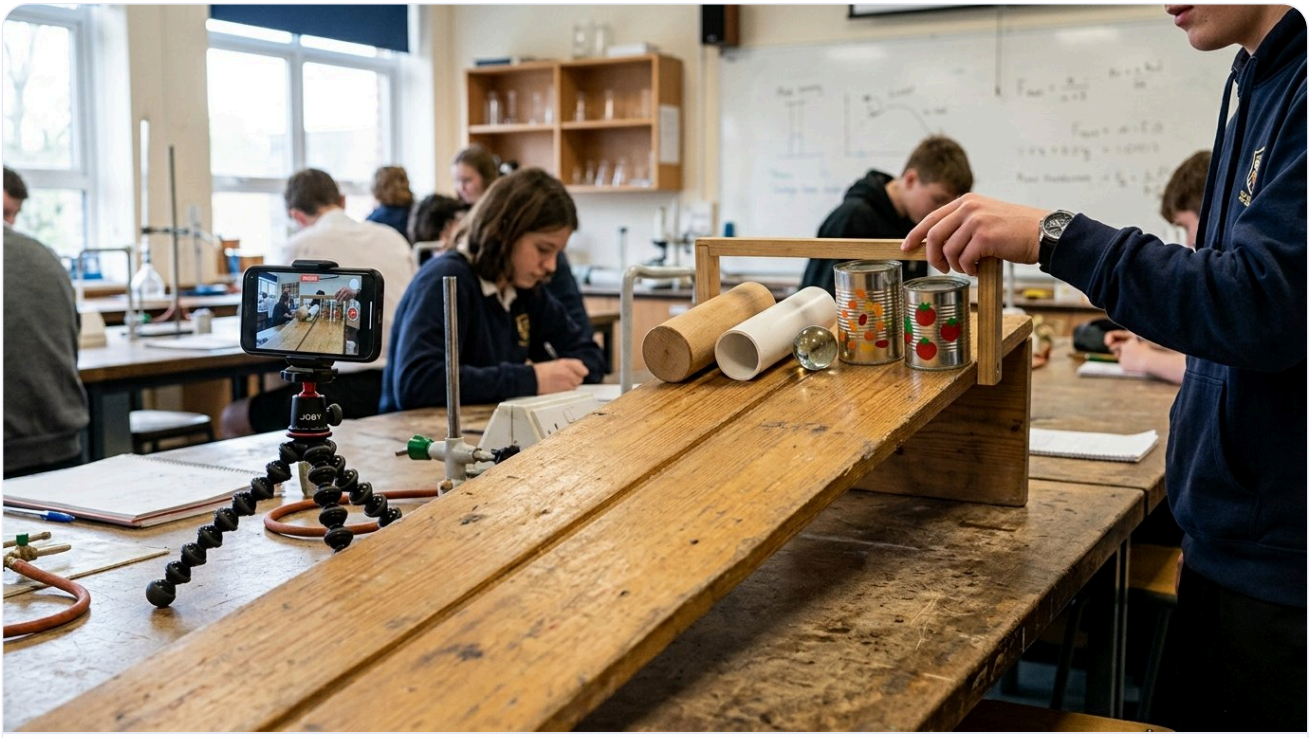
11/20

ONDERZOEKSVRAAG

Rolt een cilinder of een ring sneller? En wat doet een blik soep?

MATERIAAL

- plank van 1,50 m met een lat als startlijn, onder 5° (blokken onder één kant)
- knikker, houten cilinder, PVC-buis, een blik dunne soep, een blik bonen in dikke saus
- stopwatch (of video)



Vijf voorwerpen, één helling: wie het eerst beneden is, hangt alleen af van hoe de massa verdeeld is.

WERKWIJZE

1. Voorspel eerst met $a = g \sin\beta/(1 + k)$ de tijd voor elk voorwerp.
2. Laat telkens twee voorwerpen tegelijk los aan de startlat en noteer wie wint; meet daarna elk voorwerp drie keer apart.
3. Bereken uit de gemiddelde tijd de versnelling $a = 2s/t^2$ en daaruit $k = g \sin\beta/a - 1$.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting (voorspelling met $g \sin 5° = 0{,}855\ \mathrm{m/s^2}$):

voorwerp	verwacht k	voorspelde tijd (s)	gemeten (s)	gemiddeld	k uit de meting
knikker (volle bol)	0,40	2,22	2,20; 2,23; 2,16		
houten cilinder	0,50	2,29	2,30; 2,34; 2,31		
PVC-buis (wand 10 % van de straal)	0,91	2,59	2,57; 2,65; 2,64		
blik soep (vloeibaar)	?	?	1,97; 1,95; 2,02		
blik bonen in saus (vast)	0,50	2,29	2,22; 2,32; 2,29		

VERKLARING

Knikker, cilinder en buis komen aan in de volgorde van hun k; de gemeten k-waarden liggen binnen enkele honderdsten van de theorie. De buis met zijn dunne a als een ring.

Het blik soep verslaat alles, ook de knikker: de dunne soep draait nauwelijks mee met het blik. Alleen het blikje zelf (weinig massa, aan de rand) krijgt rotatie-energie; bijna alle massa schuift gewoon mee naar beneden, alsof ze glijdt. De gemeten $k \approx 0{,}1$. Het blik bonen in dikke saus draait als één geheel mee en gedraagt zich als een volle cilinder. Zo kan je met een rolproef zien of iets vloeibaar of vast is.

UITLEG · 10.12

Het vliegwiel als energieopslag

12/20

Een vliegwiel bewaart energie als $E = \frac{1}{2} I \omega^2$: hoe sneller, hoe meer, kwadratisch. Waarom draaien we het dan niet gewoon sneller? Omdat het materiaal de massa op haar cirkel moet houden. Bekijk een dunne ring met straal R, doorsnede A en dichtheid ρ, met randsnelheid $v = \omega R$. Een stukje ring over een hoek $\mathrm{d}\theta$ heeft massa $\rho A R\,\mathrm{d}\theta$ en heeft een middelpuntzoekende kracht $\rho A R\,\mathrm{d}\theta \cdot v^2/R$ nodig (hoofdstuk 8). Die komt van de trekkracht T in de ring aan beide uiteinden: samen wijzen ze met $T\,\mathrm{d}\theta$ naar het middelpunt. Dus $T = \rho A v^2$, en de spanning in de ring is

SPANNING IN EEN DRAAIENDE RING EN SPECIFIEKE ENERGIE

$$\sigma = \frac{T}{A} = \rho\, v^2 \qquad v_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{toel}}}{\rho}} \qquad \frac{E}{m} = \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{\sigma}{2\rho} \ \text{(dunne ring)}$$

De straal valt weg: elke dunne ring van hetzelfde materiaal breekt bij dezelfde randsnelheid. De energie per kilogram hangt alleen af van sterkte gedeeld door dichtheid. Voor andere vormen is $E/m = K\,\sigma/\rho$, met de vormfactor K: 0,5 voor een ring, $2/(3+\nu) \approx 0{,}61$ voor een volle schijf van een isotroop materiaal (waar de spanning het grootst is in het midden).

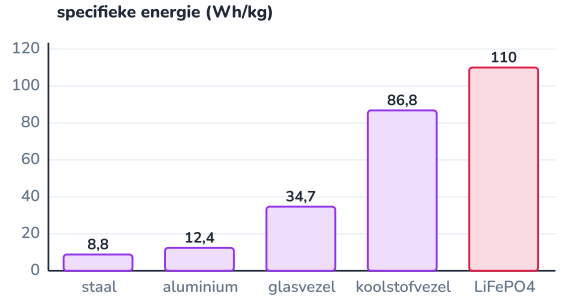
materiaal (rekenwaarde)	σ_{toel} (MPa)	ρ (kg/m³)	grootste randsnelheid $\sqrt{\sigma/\rho}$	dunne ring: $\sigma/(2\rho)$
staal	500	7850	252 m/s	8,8 Wh/kg
aluminium 7075	250	2810	298 m/s	12,4 Wh/kg
glasvezelcomposiet	500	2000	500 m/s	34,7 Wh/kg
koolstofvezelcomposiet	1000	1600	791 m/s	86,8 Wh/kg

materiaal (rekenwaarde)	σ_{toel} (MPa)	ρ (kg/m³)	grootste randsnelheid $\sqrt{\sigma/\rho}$	dunne ring: $\sigma/(2\rho)$
LiFePO4-batterij van de module (ter vergelijking)	-	-	-	110 Wh/kg (nominaal)

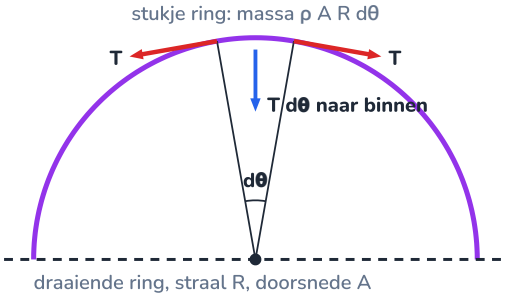
Een licht, sterk materiaal wint: koolstofvezel slaat per kilogram tien keer meer op dan staal. Daarom hebben veel moderne vliegwielen een ring van koolstofvezel, gewikkeld in de omtreksrichting (radiaal zijn vezelcomposieten zwak, dus geen volle schijf), op een lichte naaf, in een vacuümbehuizing. Maar zelfs dan: dit zijn getallen voor de rotor alleen, tot de toelaatbare spanning en helemaal leeg. Behuizing, lagers, motor en elektronica komen erbij, en wie de generator onder de halve snelheid niet meer kan gebruiken, haalt maar 75 % van de energie eruit.

De gyrobus in Gent

Van 1956 tot 1959 reden tussen Gent en Merelbeke drie gyrobussen van het Zwitserse Oerlikon. In het midden van de bus lag een stalen vliegwiel van ongeveer 1,5 ton en 1,6 m, dat bij elke halte met een elektromotor tot 3000 tpm werd opgespind, in 30 s tot 3 min. Als volle schijf is dat $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1500\cdot 0{,}8^2\cdot 314^2 \approx 24\,\text{MJ} = 6{,}6\,\text{kWh}$, bij een randsnelheid van ongeveer 900 km/h, genoeg voor een paar kilometer. De bussen verbruikten 2,9 kWh per km, tegenover 2,0 à 2,4 voor een tram, stonden vaak in panne en beschadigden het wegdek door hun gewicht.



Hoogstens op te slaan energie per kg rotor (dunne ring, rekenwaarden) tegenover de LiFePO4-batterij van de module (per kg batterij).



Een stukje ring heeft een kracht naar het middelpunt nodig; de trekkracht T aan beide uiteinden levert T dθ. Zo volgt σ = ρv².

CODE · 10.13

Een vliegwiel simuleren

13/20

Een stalen vliegwiel als 'demonstrator' voor het station: een schijf van 0,25 m straal en 5 cm dik, die tussen 3000 en 6000 tpm werkt (lager kan de generator niet nuttig leveren). Bij 6000 tpm is de randsnelheid 157 m/s en de grootste spanning (in het midden) $\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2R^2 = 80\,\text{MPa}$: ruim veilig voor staal. Het model:

$$I\omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \eta\,P_{\text{laden}} - \frac{P_{\text{leveren}}}{\eta} - P_{\text{verlies}}(\omega),$$

want $\mathrm{d}(\frac{1}{2}I\omega^2)/\mathrm{d}t = I\omega\,\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. Het verlies in stilstand komt van de lagers (ongeveer evenredig met ω) en van de lucht (ongeveer met ω^3); de rekenwaarden, 5 W en 10 W bij 6000 tpm, gelden voor een behuizing met gedeeltelijk vacuüm. Twee scenario's: een wolk van drie minuten die 500 W weghaalt, en een dag stilstand.

Python **vliegwiel.py** 61 regels

```
1  # vliegwiel.py - een stalen vliegwiel als buffer voor een wolk over de zonnepanelen
```

```python
import math

R, dikte, rho = 0.25, 0.05, 7850.0                # stalen schijf: straal en dikte (m), dichtheid (kg/m³)
m = math.pi * R**2 * dikte * rho
I = 0.5 * m * R**2
w_max, w_min = 6000 * 2 * math.pi / 60, 3000 * 2 * math.pi / 60      # 6000 en 3000 toeren per minuut, in rad/s
eta = 0.90                                        # rendement motor/generator met elektronica, per richting


def E(w):
    return 0.5 * I * w**2


def verlies(w):
    """Stilstandsverlies (W): lagers (evenredig met w) + lucht (met w³); 5 W + 10 W bij 6000 tpm (rekenwaarden)."""
    return 5.0 * (w / w_max) + 10.0 * (w / w_max)**3


def tekort(t):
    """Vermogen (W) dat het vliegwiel moet leveren: een wolk van t = 60 s tot 240 s haalt 500 W weg."""
    return 500.0 if 60.0 <= t < 240.0 else 0.0


def laden(t, w):
    """Na de wolk laadt de zon het vliegwiel weer op met 400 W, tot 6000 tpm."""
    return 400.0 if t >= 240.0 and w < w_max else 0.0


def wolk(dt=0.1, duur=900.0):
    """Euler op I w dw/dt = eta P_laden - P_tekort / eta - P_verlies; geeft tijden en toerentallen (tpm)."""
    w, t, ts, ns = w_max, 0.0, [0.0], [6000.0]
    while t < duur:
        P = eta * laden(t, w) - tekort(t) / eta - verlies(w)
        w = min(w + dt * P / (I * w), w_max)
        t += dt
        ts.append(t)
        ns.append(w * 60 / (2 * math.pi))
    return ts, ns

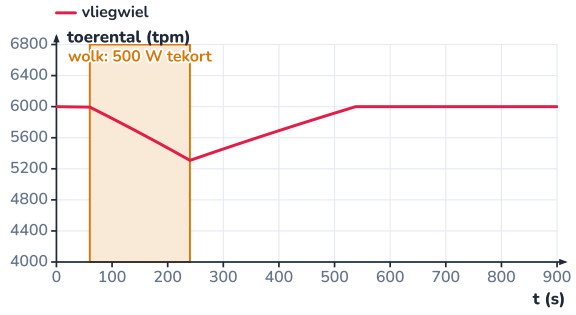

def leeglopen(uren=24, dt=1.0):
    """Het vliegwiel draait zonder last en verliest alleen door lagers en lucht; per uur het deel van de energie."""
    w, deel = w_max, [1.0]
    for uur in range(uren):
        for _ in range(round(3600 / dt)):
            w -= dt * verlies(w) / (I * w)
        deel.append(E(w) / E(w_max))
    return deel


if __name__ == "__main__":
    print(f"schijf {m:.1f} kg, I = {I:.3f} kg m², vol {E(w_max) / 3600:.0f} Wh, bruikbaar tot 3000 tpm "
          f"{(E(w_max) - E(w_min)) / 3600:.0f} Wh, randsnelheid {w_max * R:.0f} m/s")
    ts, ns = wolk()
    n_laag = min(ns)
    print(f"wolk van 3 minuten (500 W): laagste toerental {n_laag:.0f} tpm, "
          f"{100 * (1 - (n_laag / 6000)**2):.1f} % van de energie gebruikt")
    deel = leeglopen()
    for uur in (1, 2, 5, 10, 24):
        print(f"stilstand, na {uur:2d} h: nog {100 * deel[uur]:5.1f} % van de energie")
```

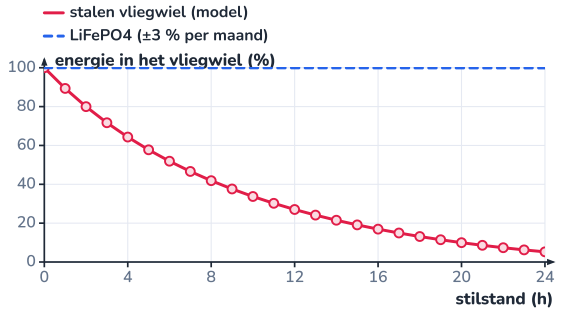
Uitvoer:

```
schijf 77.1 kg, I = 2.408 kg m², vol 132 Wh, bruikbaar tot 3000 tpm 99 Wh, randsnelheid 157 m/s
wolk van 3 minuten (500 W): laagste toerental 5308 tpm, 21.7 % van de energie gebruikt
stilstand, na  1 h: nog  89.4 % van de energie
stilstand, na  2 h: nog  80.0 % van de energie
stilstand, na  5 h: nog  57.8 % van de energie
stilstand, na 10 h: nog  33.7 % van de energie
stilstand, na 24 h: nog   5.2 % van de energie
```

De wolk kost 25 Wh aan de verbruikers, en door het rendement meer uit het vliegwiel; het toerental zakt tot 5308 tpm. Dat lukt dus. Maar in stilstand verliest het vliegwiel in een uur al 11 % en na een dag is het bijna leeg. Een batterij verliest een paar procent per *maand*. Een vliegwiel is een kortetermijnbuffer: sterk in vermogen en in aantal cycli (honderdduizenden, zonder slijtage van de chemie), zwak in energie en in het bewaren ervan.



Tijdens de wolk zakt het toerental; daarna laadt de zon het vliegwiel weer op tot 6000 tpm.



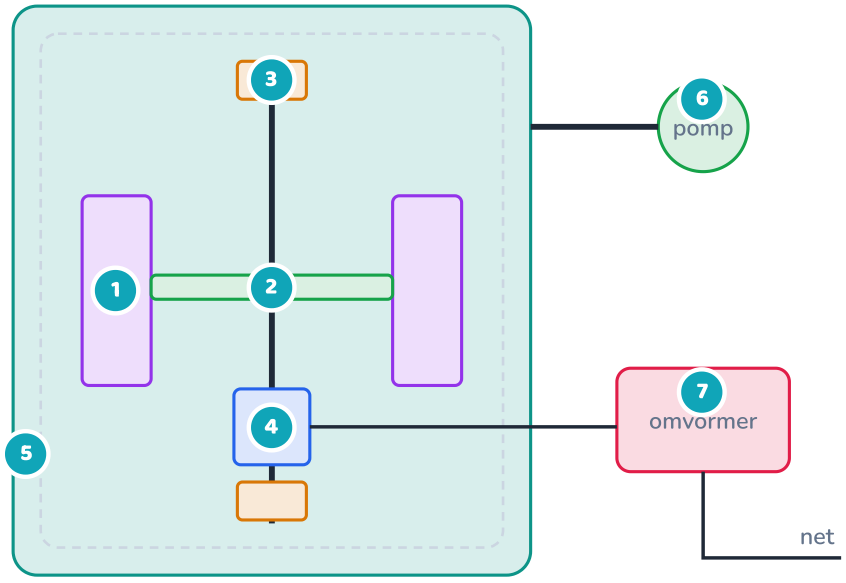
Zonder last loopt het vliegwiel in een dag bijna leeg; de batterij verliest in die tijd een tiende procent.

ONTLEED · 10.14

Een vliegwielopslag ontleed

14/20

Een moderne vliegwielopslag, schematisch in doorsnede. Elk onderdeel lost een probleem op dat uit dit hoofdstuk volgt.



Schematische doorsnede: rotor in vacuüm, op magnetische lagers, met een motor-generator op dezelfde as.

1 Rotor (ring)
Een ring van koolstofvezel, in de omtreksrichting gewikkeld: $\sigma = \rho v^2$ beperkt de randsnelheid tot honderden m/s. De massa zit aan de rand, waar ze het meeste traagheidsmoment geeft.

2 Naaf
Verbindt de ring met de as. Ze moet meerekken met de ring (die bij hoge snelheid een beetje groter wordt), anders scheurt de verbinding.

3 Magnetische lagers
Houden de rotor zwevend zonder contact: bijna geen wrijving (het lagerverlies uit de simulatie) en geen slijtage bij tienduizenden tpm.

4 Motor-generator
Eén elektrische machine op de as: als motor spint ze de rotor op (laden), als generator remt ze hem af (leveren). Het vermogen $P = \tau\omega$ bepaalt hoe snel dat kan.

5 Vacuümbehuizing en omhulling
Het vacuüm haalt het luchtverlies ($\propto \omega^3$) weg. De dikke wand moet een rotor opvangen die breekt: bij 6000 tpm zit er in de stalen demonstrator al 475 kJ, de energie van een auto van 1200 kg met 101 km/h.

6 Vacuümpomp
Houdt de druk laag; lekt de behuizing, dan stijgt het stilstandsverlies snel.

7 Omvormer
Zet de wisselspanning met een veranderlijke frequentie (het toerental verandert voortdurend) om naar het net; hoofdstuk 24.

UITGEWERKT VOORBEELD · 10.15

Habitat: een vliegwiel als kortstondige energiebuffer?

15/20

Iemand stelt voor een vliegwiel in de technische ruimte te zetten, 'voor de pieken'. Onderzoek drie taken: de aanloop van de drukpomp (hoofdstuk 7), een wolk over de panelen van de module, en een nacht overbruggen. Vergelijk met wat Habitat al heeft: twee LiFePO4-batterijen van 12,8 V en 120 Ah (2,46 kWh bruikbaar, ±28 kg) en een netomvormer die 8 kVA 5 s kan leveren.

GEGEVEN

- stalen demonstrator: 77 kg, 99 Wh bruikbaar, ±11 % verlies per uur
- LiFePO4: 110 Wh/kg nominaal, 80 % bruikbaar, een paar procent zelfontlading per maand

GEVRAAGD

- per taak: is een vliegwiel zinvol?
- een besluit voor Habitat

OPLOSSING

1 **Massa voor dezelfde energie.** 99 Wh uit LiFePO4 vraagt $99/(110 \cdot 0{,}8) = 1{,}1\,\text{kg}$ batterij, tegenover 77 kg staal (plus behuizing). Met een koolstofvezelring (87 Wh/kg rotor, systeem veel minder) wordt het beter, maar niet beter dan de batterij.

2 **Per taak:**

TAAK	WAT ER NODIG IS	WAT HABITAT AL HEEFT	VLIEGWIEL ZINVOL?
aanloop van de drukpomp (hoofdstuk 7)	±6,3 kVA gedurende een fractie van een seconde, ±1 à 3 kJ	netomvormer 8 kVA gedurende 5 s	nee: het probleem is vermogen, en dat is al opgelost
wolk over de panelen van de module	±500 W gedurende enkele minuten, ±25 Wh	2 × LiFePO4, 2,46 kWh bruikbaar	nee: 1 % van de batterij
een nacht overbruggen	±1,2 à 1,4 kWh (hoofdstuk 20 van I)	de batterijen	nee: zonder verlies al 13 stalen vliegwielen van 77 kg, en die verliezen in 12 h 73 % van hun energie
laden onder 0 °C	LiFePO4 mag dan niet laden	batterijen in de verwarmde module	alleen op een koude plek zonder verwarming (later, op een afgelegen site)

3 **Waar een vliegwiel wel wint:** heel veel korte, zware cycli (een kraan of lift die bij elke rit remenergie terugwint, de netfrequentie van een eiland regelen), een lange levensduur zonder dat de chemie veroudert, en werken in de kou. Geen van die taken speelt in het prototype op het proefterrein.

ANTWOORD

Geen vliegwiel. De batterijen dekken een wolk met 1 % van hun inhoud, de netomvormer dekt de aanloop van de pomp, en voor een nacht zou je tientallen stalen vliegwielen nodig hebben, omdat ze intussen leeglopen. Het besluit wordt heroverwogen als het station naar een koude, afgelegen plek verhuist waar de batterijen niet warm te houden zijn.

Klopt dit? Een eerlijke vergelijking gebruikt dezelfde grenzen: bruikbare energie (niet de volle), systeemmassa (niet alleen de rotor) en verlies over de tijd die de buffer moet overbruggen. Een vliegwiel dat een wolk van drie minuten opvangt, verliest in dezelfde drie minuten al 0,5 % aan stilstand; over een nacht is dat verlies groter dan de wolk zelf.

UITLEG · 10.16

Impulsmoment en zijn behoud

16/20

De draaiende tegenhanger van impuls is het **impulsmoment**. Voor een puntmassa met impuls $\vec{p}$ op plaats $\vec{r}$ (tegenover een gekozen punt) is het een vectorproduct (hoofdstuk 5); voor een star lichaam om een vaste as tel je alle deeltjes op, elk met $|\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot mr\omega$:

IMPULSMOMENT

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad L = I\omega \qquad \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

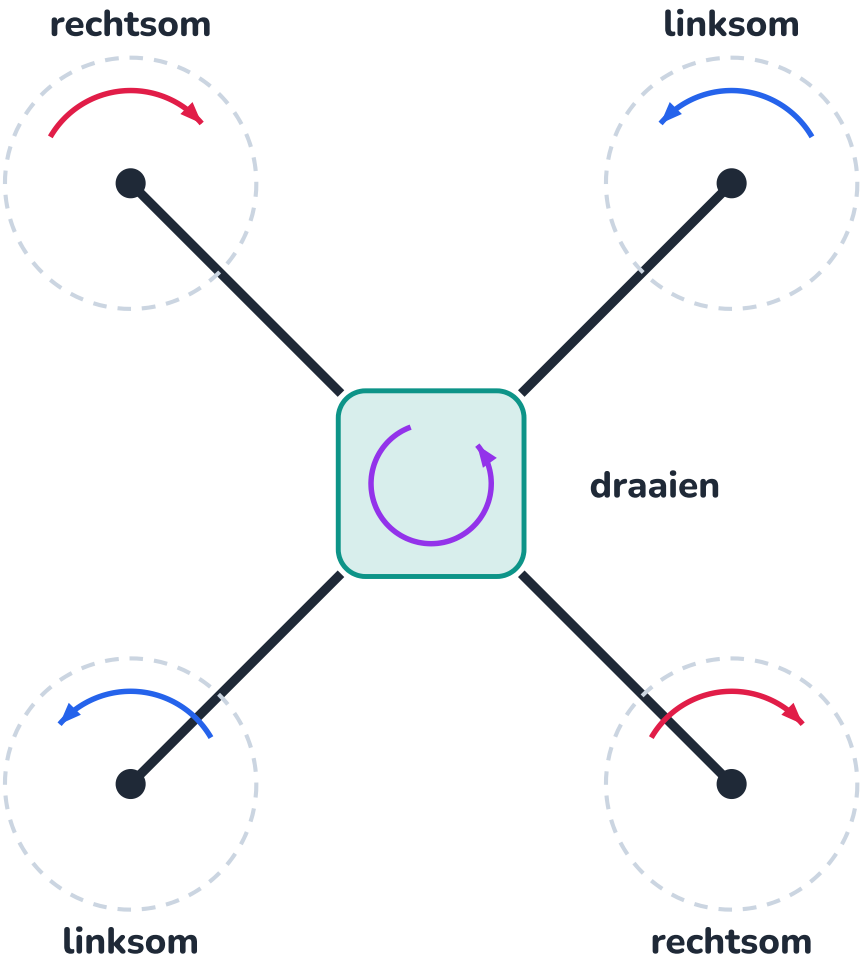
Afleiding van de laatste: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$, want een vector maal zichzelf is nul. Zonder uitwendig moment blijft $\vec{L}$ constant, in grootte én richting.

Kepler. Een centrale kracht ligt langs $\vec{r}$, dus $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ en $\vec{L}$ blijft behouden. De oppervlakte die $\vec{r}$ in een tijdje $\mathrm{d}t$ doorloopt, is een driehoekje $\frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}\,\mathrm{d}t|$, dus $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = L/(2m)$: constant. Dat is de perkenwet van het verhaal.

Iets dat zijn vorm verandert. Trekt een schaatser haar armen in, dan daalt I; zonder uitwendig moment blijft $L = I\omega$ behouden, dus stijgt ω. Haar rotatie-energie $L^2/(2I)$ stijgt ook: die arbeid leveren haar armen, die tegen de middelpuntvliedende neiging in naar binnen trekken.

Draaien zonder iets vast te pakken. Een quadcopter heeft twee rotoren die rechtsom en twee die linksom draaien: hun impulsmomenten en hun reactiemomenten heffen elkaar op. Om om zijn as te draaien, laat de drone het ene paar sneller en het andere trager draaien; het verschil in luchtweerstandsmoment en in impulsmoment van de rotoren draait het lichaam de andere kant op. Een satelliet doet hetzelfde met **reactiewielen**: de ruimtetelescoop Hubble heeft er vier. Een helikopter met één grote rotor heeft een staartrotor nodig die het reactiemoment tegenhoudt.

Een vector. Omdat $\vec{L}$ ook zijn richting bewaart, blijft een snel draaiende tol of gyroscoop in dezelfde richting wijzen. Een moment loodrecht op $\vec{L}$ draait alleen de richting van $\vec{L}$: de as beschrijft trage kegels, de **precessie** (opdracht 10.16).



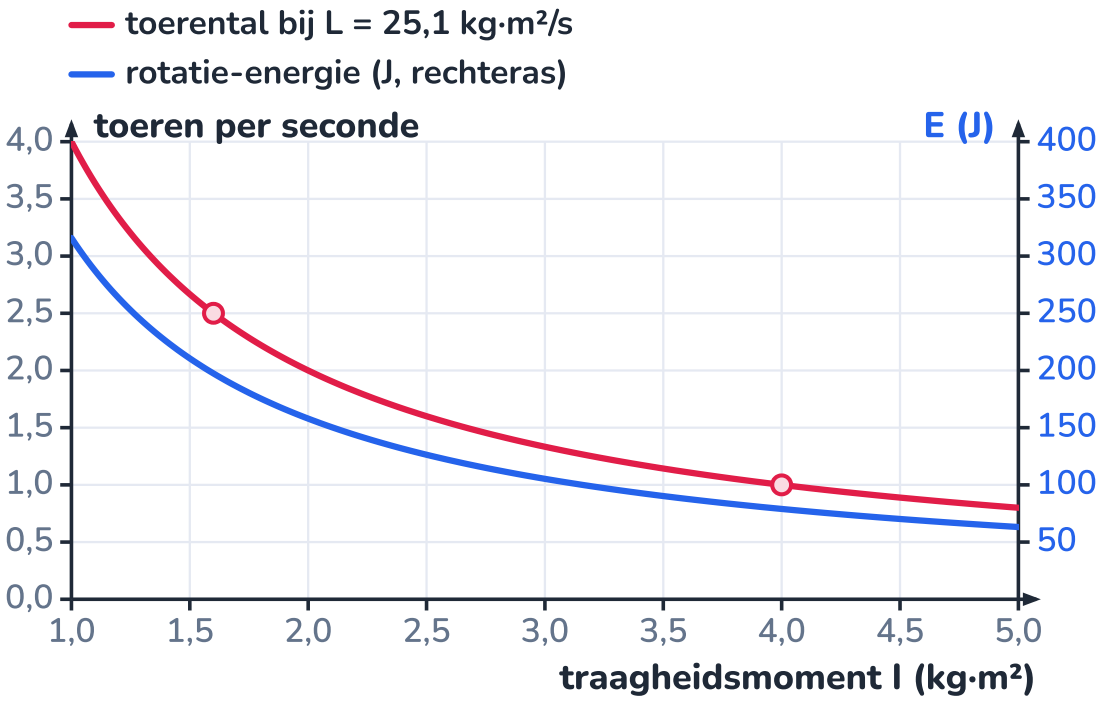
Twee rotoren rechtsom, twee linksom: hun impulsmomenten heffen elkaar op. Wie één paar sneller laat draaien, draait de drone.

UITGEWERKT VOORBEELD · 10.17

De draaistoel met halters

17/20

Je zit op een draaistoel met in elke hand een halter van 2 kg, armen gestrekt. Samen met de stoel is het traagheidsmoment 4,0 kg·m²; met de armen ingetrokken 1,6 kg·m². Je draait met 1,0 toer per seconde en trekt je armen in. Hoe snel draai je dan, en hoeveel energie leverden je armen?



Bij constant impulsmoment is het toerental omgekeerd evenredig met I, en de energie ook: armen in, sneller en meer energie.

GEGEVEN

- $I_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_2 = 1{,}6\,\mathrm{kg\,m^2}$, $n_1 = 1{,}0$ toer/s
- wrijving van de stoel verwaarloosd

GEVRAAGD

- n_2, E_1, E_2

OPLOSSING

1 Geen uitwendig moment om de as (de lagers van de stoel duwen door de as): L behouden. $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ geeft $n_2 = n_1\, I_1/I_2 = 2{,}5$ toer/s.

2 $E_1 = \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}0 \cdot (2\pi)^2 = 79\,\mathrm{J}$; $E_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot (5\pi)^2 = 197\,\mathrm{J}$.

3 Je armen leverden $118\,\mathrm{J}$: bij het intrekken moeten ze de halters naar binnen trekken tegen hun neiging om rechtdoor te gaan, en dat is arbeid. Met $E = L^2/(2I)$: $E_2/E_1 = I_1/I_2 = 2{,}5$.

ANTWOORD

Je draait 2,5 toer per seconde; de energie stijgt van 79 J naar 197 J, geleverd door je armen.

Klopt dit? Strek je je armen weer, dan zak je terug naar 1,0 toer/s en duwen de halters je armen naar buiten: je armen remmen, en de 118 J wordt warmte in je spieren. Impulsmoment behouden, energie niet: net als bij een inelastische botsing (hoofdstuk 9).

UITGEWERKT VOORBEELD · 10.18

Een reactiewiel draait een satelliet

18/20

Een kleine satelliet ($I = 40\,\mathrm{kg\,m^2}$ om de draaias) moet zich in 60 s over 90° draaien, zonder brandstof: hij versnelt 30 s en remt 30 s met een constant moment. Hij heeft een reactiewiel met $I_\mathrm{w} = 0{,}050\,\mathrm{kg\,m^2}$. Welk toerental moet het wiel halen, en welk moment moet de motor van het wiel leveren?

GEGEVEN

- $I_\mathrm{s} = 40\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_\mathrm{w} = 0{,}050\,\mathrm{kg\,m^2}$
- $\theta = \pi/2$ in 60 s, halverwege de grootste hoeksnelheid

GEVRAAGD

- $\omega_{\mathrm{s,max}}$, toerental van het wiel, moment

OPLOSSING

1. Driehoekig profiel: de hoek is de oppervlakte onder $\omega(t)$: $\tfrac{1}{2}\cdot 60\,\mathrm{s}\cdot\omega_{\max} = \pi/2$, dus $\omega_{\mathrm{s,max}} = 0{,}0524\,\mathrm{rad/s}$.
2. Impulsmoment van het geheel blijft nul: $I_\mathrm{s}\omega_\mathrm{s} + I_\mathrm{w}\omega_\mathrm{w} = 0$, dus $\omega_\mathrm{w} = -\dfrac{40}{0{,}050}\,0{,}0524 = -41{,}9\,\mathrm{rad/s}$, 400 tpm in tegengestelde zin.
3. Moment: de satelliet krijgt $\alpha = 0{,}0524/30 = 1{,}75\cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad/s^2}$, dus $\tau = I_\mathrm{s}\alpha = 70\,\mathrm{mN\,m}$; het wiel krijgt het tegengestelde moment.

ANTWOORD

Het wiel draait op zijn snelst 400 tpm, tegen de satelliet in; de motor levert 70 mN·m. Na de manoeuvre staan satelliet en wiel weer stil.

Klopt dit? Het wiel draait 800 keer sneller dan de satelliet omdat zijn traagheidsmoment 800 keer kleiner is. Uitwendige momenten (zonnedruk, het magneetveld van de aarde) laten het wiel langzaam steeds sneller draaien; af en toe moet de satelliet het 'ontladen' met magneetspoelen of kleine stuwraketten.

NASLAG · 10.19

Rotatie: formules en werkwijze

19/20

Werkwijze: (1) kies de as en een positieve draaizin; (2) zoek I in de tabel, met Steiner of met een integraal; (3) schrijf $\sum\tau = I\alpha$ en $\sum F = ma$ en koppel ze ($a = r\alpha$); (4) of gebruik energie ($\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$) of impulsmoment als er geen uitwendig moment is. Elke formule voor schuiven heeft haar tegenhanger:

translatie	rotatie om een vaste as	verband
plaats x (m)	hoek θ (rad)	$s = r\theta$
snelheid v (m/s)	hoeksnelheid ω (rad/s)	$v = r\omega$
versnelling a (m/s²)	hoekversnelling α (rad/s²)	$a_\mathrm{t} = r\alpha$
massa m (kg)	traagheidsmoment I (kg·m²)	$I = \sum mr^2$
kracht F (N)	moment τ (N·m)	$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$
$F = ma$	$\tau = I\alpha$	
$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}mv^2$	$E_\mathrm{rot} = \tfrac{1}{2}I\omega^2$	
arbeid $F\,s$, vermogen Fv	arbeid $\tau\,\theta$, vermogen $\tau\omega$	
impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	impulsmoment $L = I\omega$	$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$
$\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$	$\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$	

hoekgrootheden

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\ \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\ v = r\omega,\ a_\mathrm{t} = r\alpha,\ a_\mathrm{c} = r\omega^2$$

symbool	betekenis	eenheid
ω	hoeksnelheid	rad/s
α	hoekversnelling	rad/s²

traagheidsmoment en Steiner

$$I = \int r^2\,\mathrm{d}m, \quad I = I_\mathrm{zw} + Md^2$$

symbool	betekenis	eenheid
I	traagheidsmoment	kg·m²

tweede wet voor rotatie

$$\sum \tau = I\alpha, \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

symbool	betekenis	eenheid
τ	moment (koppel)	N·m

energie en vermogen

$$E = \tfrac{1}{2} I\omega^2, \quad P = \tau\omega, \quad W = \int \tau\,\mathrm{d}\theta$$

rollen zonder slippen

$$a = \frac{g\sin\beta}{1 + I/(MR^2)}, \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(MR^2)}}$$

gereduceerd traagheidsmoment

$I_\mathrm{gered} = i^2\, I_\mathrm{motor}$, mr^2 voor een massa aan een riem of kabel

vliegwiel (K = 0,5 ring, 0,61 schijf)

$$\sigma = \rho v^2, \quad \frac{E}{m} = K\frac{\sigma}{\rho}$$

impulsmoment

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad L = I\omega, \quad \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

symbool	betekenis	eenheid
L	impulsmoment	kg·m²/s

voorwerp (massa M)	as	I	$k = I/(MR^2)$
puntmassa op afstand R	-	MR^2	1
dunne ring of dunwandige buis	symmetrieas	MR^2	1
volle schijf of cilinder	symmetrieas	$\frac{1}{2}MR^2$	0,5
dikwandige buis (R_1 binnen, R_2 buiten)	symmetrieas	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	tussen 0,5 en 1
volle bol	door het midden	$\frac{2}{5}MR^2$	0,4
dunne bolschil	door het midden	$\frac{2}{3}MR^2$	0,667
dunne staaf, lengte L	loodrecht, door het midden	$\frac{1}{12}ML^2$	-
dunne staaf, lengte L	loodrecht, door een uiteinde	$\frac{1}{3}ML^2$	-
rechthoekige plaat $a \times b$	loodrecht op de plaat, door het midden	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	-

HET GEHEEL · 10.20

Waar rotatie vandaan komt en waar ze heen gaat

20/20

Rotatie is de mechanica van hoofdstuk 8 en 9, toegepast op een lichaam dat als geheel draait: elk deeltje beschrijft een cirkel, en alles wat voor één deeltje geldt, tel je op met een integraal. Ze verbindt krachten (K) met energie (E), en in het station met elektrische machines (L), regelen (R) en ontwerpen (D).

F12 Hefbomen en mechanismen

Tandwielen, riemen en overbrengingsverhouding: hier met hoeksnelheid en gereduceerd traagheidsmoment.

I9 Arbeid, energie en vermogen

Arbeid, energie en vermogen: nu τθ, ½Iω² en τω.

I10 Moment en evenwicht

Moment en evenwicht: τ = Iα is wat er gebeurt als het evenwicht ontbreekt.

I26 Motoren en actuatoren

De dakmotor, het wormwiel en de riemschijf, en het koppel k · I.

I16 Redox en batterijen

De LiFePO4-batterij waarmee het vliegwiel vergeleken wordt.

E3 Integralen: ophopen

Traagheidsmomenten als integralen; de hoek als oppervlakte onder ω(t).

E5 Vectoren en matrices

Moment en impulsmoment als vectorproducten.

E8 Beweging in twee dimensies

Cirkelbeweging, middelpuntzoekende kracht en de knikker die van de tafel rolt.

E9 Impuls en botsingen

Impuls en zijn behoud; de drone en zijn rotoren.

E11 Trillingen en resonantie

De fysische slinger: een traagheidsmoment dat om een as slingert; onbalans van draaiende machines.

E12 Sterkteleer

Spanning in een draaiende ring en schijf, veiligheidsfactor.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

Elektrische machines: koppel, toerental en de motor-generator van een vliegwiel.

E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Energieopslag vergeleken: batterij, waterstof, vliegwiel.

Habitat

Habitat kent nu de traagheid van zijn draaiende delen: het dakraam van de meetkas (0,144 kg·m² om het scharnier) slaat bij een losgeschoten duwstang met 2,5 m/s dicht en krijgt een zachte aanslag; de dakmotor besteedt minder dan 4 % van zijn koppel aan versnellen. Het besluit over een vliegwiel is negatief: dezelfde energie zit in 1 kg LiFePO4 in plaats van 77 kg staal, en een vliegwiel loopt in een dag leeg. Opdracht 10.12 laat je het besluit zelf onderbouwen; hoofdstuk 24 en 27 vergelijken alle opslagtechnieken van het station.

SAMENVATTING

In het kort

- Draaien om een vaste as: θ (rad), $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$; een punt op afstand r heeft $v = r\omega$, $a_\mathrm{t} = r\alpha$ en $a_\mathrm{c} = r\omega^2$.
- Het traagheidsmoment $I = \int r^2 \,\mathrm{d}m$ volgt uit de kinetische energie $\frac{1}{2}I\omega^2$: ring MR^2, schijf $\frac{1}{2}MR^2$, staaf $\frac{1}{12}ML^2$; Steiner: $I = I_\mathrm{zw} + Md^2$.
- $\sum \tau = I\alpha$, met $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$; een overbrenging i vermenigvuldigt het traagheidsmoment met i^2.
- Rotatie-energie $\frac{1}{2}I\omega^2$, vermogen $\tau\omega$. Rollen: $a = g\sin\beta/(1+k)$ met $k = I/(MR^2)$; alleen de vorm telt: bol voor cilinder voor ring.

- Een dunne draaiende ring heeft $\sigma = \rho v^2$: de energie per kg is hoogstens $\sigma/(2\rho)$. Staal ±9 Wh/kg, koolstofvezel ±90 Wh/kg (rotor), LiFePO4 ±110 Wh/kg.
- Een vliegwiel is sterk in vermogen en cycli, zwak in energie en in bewaren (procenten per uur). Voor Habitat: geen vliegwiel, de batterijen en de omvormer volstaan.
- Impulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $L = I\omega$, $\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$; zonder uitwendig moment behouden: perkenwet, pirouette, reactiewiel, drone.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

radiaal

Hoekmaat: de booglengte gedeeld door de straal, $\theta = s/r$. Een volle toer is 2π rad; 1 rad ≈ 57,3°.

hoeksnelheid

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ (rad/s); een toerental n in toeren per minuut geeft $\omega = 2\pi n/60$.

hoekversnelling

$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ (rad/s²); een punt op afstand r krijgt de tangentiële versnelling $r\alpha$.

traagheidsmoment

$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 \,\mathrm{d}m$ (kg·m²): hoe moeilijk een voorwerp om een as te versnellen is; hangt af van de massa én van hoe ver ze van de as zit.

verschuivingsstelling

$I = I_{\text{zw}} + Md^2$ (Steiner): het traagheidsmoment om een as op afstand d van een evenwijdige as door het zwaartepunt.

tweede wet voor rotatie

$\tau = I\alpha$: het resulterende moment om de as bepaalt de hoekversnelling.

rotatie-energie

$E = \frac{1}{2} I\omega^2$: de kinetische energie van alle delen van een draaiend voorwerp samen.

vliegwiel

Een draaiende massa die energie opslaat als $\frac{1}{2} I\omega^2$; de materiaalsterkte begrenst de randsnelheid ($\sigma = \rho v^2$ in een dunne ring).

impulsmoment

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$; voor een star lichaam om een vaste as $L = I\omega$. Het verandert alleen door een uitwendig moment: $\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$.

precessie

De trage draaiing van de as van een tol of wiel, doordat een moment loodrecht op $\vec{L}$ alleen de richting van $\vec{L}$ verandert.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 11

Trillingen en resonantie

Van veer en slinger tot windturbine: waarom dingen trillen, hoe hard, en hoe je ze stilhoudt

Alles wat een massa en een veer heeft, trilt: een auto, een brug, een mast, een wijnglas. Zolang je ernaast blijft duwen, is dat onschuldig. Duw je in het ritme van zijn **eigenfrequentie**, dan groeit de beweging tot alleen de **demping** ze nog tegenhoudt: **resonantie**. In dit hoofdstuk leid je de harmonische trilling af, meet je eigenfrequentie en demping, simuleer je een rotor die door een resonantie versnelt, en leer je machines zo op te stellen dat hun trillingen de vloer niet bereiken. Voor Habitat leg je de **windturbine** van het station vast en zorg je dat ze het station niet laat meetrillen.

6× uitleg · 5× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 11 lestijden

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren · L Elektriciteit en elektronica



De windturbine van het station staat op een eigen mast, vijftien meter van de woonmodule. In dit hoofdstuk ontdek je waarom.

Na dit hoofdstuk

- Je kan de bewegingsvergelijking van een massa-veersysteem opstellen, oplossen en de eigenfrequentie berekenen, ook uit een statische inzakking of een trekproef.
- Je kan de slinger (klein en groot, fysisch) beschrijven en uitleggen waarom elk stabiel evenwicht voor kleine uitwijkingen harmonisch trilt.
- Je kan demping beschrijven met de dempingsverhouding ζ, het logaritmisch decrement en de kwaliteitsfactor Q, en ze uit een meting halen, ook met Python.
- Je kan de gedwongen trilling analyseren (amplitude, fase, drie gebieden, opbouwtijd) en resonantie herkennen en vermijden.
- Je kan een Campbell-diagram opstellen en lezen voor een draaiende machine (1P, 3P) en er ontwerpregels uit afleiden.
- Je kan trillingsisolatie ontwerpen met de transmissibiliteit ($r > \sqrt{2}$, $f_n \leq f/3$) en dempers kiezen uit een catalogus.

VERHAAL · 11.1

Tacoma Narrows en de Millennium Bridge

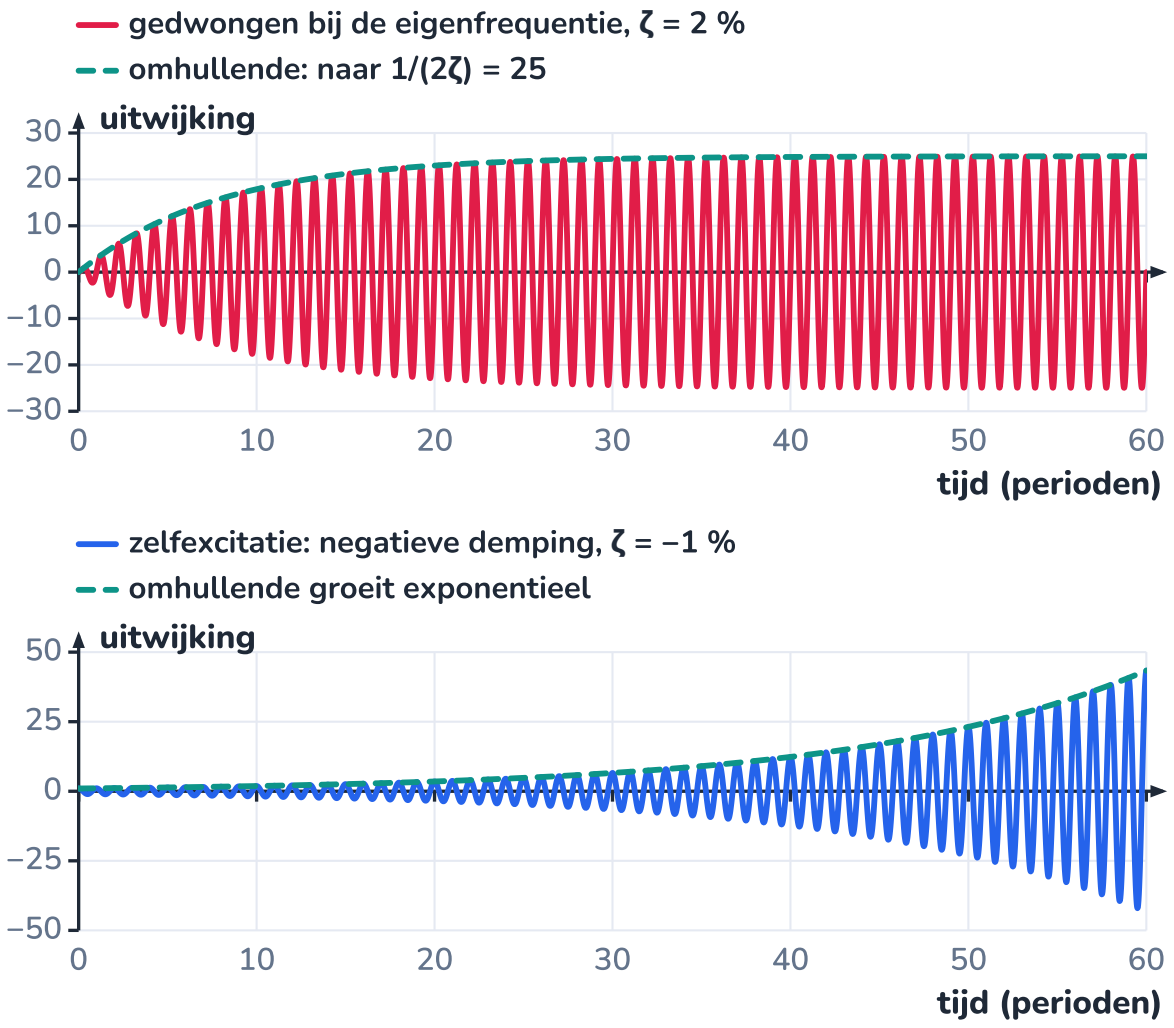
Op 1 juli 1940 ging in de Amerikaanse staat Washington de **Tacoma Narrows Bridge** open, een hangbrug met een hoofdoverspanning van 853 m. Het dek was slank: twaalf meter breed, gedragen door liggers van amper 2,4 m hoog. Al tijdens de bouw golfde het dek op en neer bij wind; de brug kreeg de bijnaam *Galloping Gertie*. Op 7 november 1940, bij een wind van ongeveer 64 km/h, sloeg de beweging om: het dek begon te **torderen**, de twee helften van de overspanning draaiden in tegengestelde zin, ongeveer twaalf keer per minuut (0,2 Hz), tot hellingen van tientallen graden. Rond 11 uur scheurde het dek los en stortte in het water. Er vielen geen mensen, wel een hond die in een achtergelaten auto zat. Het filmpje ervan is een van de bekendste beelden uit de techniek.

Vaak lees je dat de wind 'in resonantie' met de brug was. Dat klopt niet: bij 64 km/h lieten de wervels achter het dek los met een frequentie rond 1 Hz, niet 0,2 Hz. Wat gebeurde, heet **aero-elastisch fladderen**: de torsie van het dek veranderde de luchtkrachten zo, dat de lucht bij elke trilling meer energie toevoegde dan de demping afvoerde. Dat is een **negatieve demping**. Resonantie groeit tot een grens die de demping legt; zelfexcitatie groeit zonder grens (figuur). Sindsdien test men elk slank brugdek in een windtunnel. De nieuwe brug, met een stijf vakwerkdek, ging open in 1950.

Zestig jaar later, op 10 juni 2000, opende in Londen de **Millennium Bridge**, een voetgangersbrug van 325 m over de Theems. Die dag stapten er ongeveer 90 000 mensen over, tot 2000 tegelijk. De brug begon zijwaarts te slingeren, tot 70 mm, met frequenties tussen 0,5 en 1,1 Hz. Twee dagen later ging ze dicht. De oorzaak: wie over een zijwaarts bewegende vloer loopt, zet zijn voeten breder en in het ritme van de beweging. Omdat een mens bij elke stap zijwaarts duwt, met de helft van de stapfrequentie (rond 1 Hz), duwden honderden voetgangers de brug samen verder: weer een negatieve demping, nu door mensen. De ingenieurs (Arup) verhoogden de demping van ongeveer 0,5 % tot een orde van 20 %, met 37 viskeuze dempers en 52 **gestemde massadempers**. De brug heropende op 22 februari 2002 en trilt sindsdien niet meer merkbaar.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het station krijgt een windturbine: een rotor die tot vijf keer per seconde ronddraait bovenop een slanke stalen mast. Wie niet weet bij welke toerentallen de mast meetrilt, krijgt een turbine die zichzelf kapotschudt, of een woonmodule die 's nachts bromt. Dit hoofdstuk levert de getallen: eigenfrequentie, demping, de gevaarlijke toerentallen en de isolatie.



Boven: een kracht in het ritme van de eigenfrequentie laat de amplitude groeien tot 1/(2ζ) keer de statische uitwijking. Onder: bij negatieve demping groeit ze exponentieel, zonder grens.



De Millennium Bridge in Londen: zo slank dat voetgangers haar lieten slingeren. Sinds 2002 houden tientallen dempers onder het dek haar stil.

UITLEG · 11.2

De harmonische trilling: massa en veer

2/18

wat je al kan	wat nu komt
de wet van Hooke $F = k\,\Delta x$ (hoofdstuk 11 van F)	een veer met een massa: de harmonische trilling

wat je al kan	wat nu komt
$F = ma$ en de vrijlichaamsdiagrammen (hoofdstuk 8 van I)	de bewegingsvergelijking $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$
differentiaalvergelijkingen met Euler en Heun (hoofdstuk 4)	trillingen simuleren, ook waar geen formule bestaat
een sinus als projectie van een draaiende wijzer, fasoren, de karakteristieke vergelijking (hoofdstuk 7 en 8)	eigenfrequentie, demping en resonantie in één beeld
traagheidsmoment en de fysische slinger (hoofdstuk 10)	de slinger, groot en klein; onbalans van draaiende machines

Hang een massa m aan een veer met veerconstante k. In evenwicht is de veer $\delta = mg/k$ uitgerekt. Meet de uitwijking x vanaf dat evenwicht (naar onder positief). Dan geeft de veer $k(\delta + x)$ omhoog, de zwaartekracht mg omlaag, en de tweede wet van Newton wordt

$$m\ddot{x} = mg - k(\delta + x) = -kx.$$

De zwaartekracht valt weg: ze verschuift alleen het evenwicht. Welke functie is, op een factor k/m na, min haar eigen tweede afgeleide? Een sinus of een cosinus (hoofdstuk 1). Of met de methode van hoofdstuk 7: proberen met $x = \mathrm{e}^{st}$ geeft $ms^2 + k = 0$, dus $s = \pm j\omega_0$, en het reële deel is een cosinus:

HARMONISCHE TRILLING VAN EEN MASSA AAN EEN VEER

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

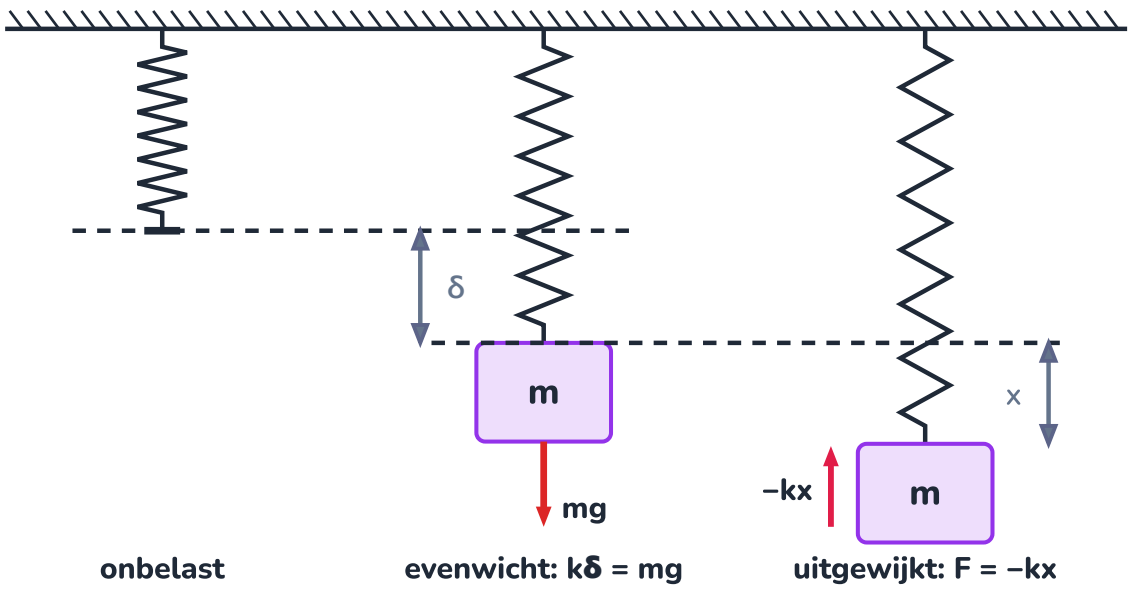
A en φ volgen uit de beginvoorwaarden (x_0, v_0); de frequentie niet. Een zwaardere massa trilt trager, een stijvere veer sneller. De periode hangt niet af van de amplitude.

Energie. Vermenigvuldig $m\ddot{x} + kx = 0$ met $\dot{x}$: dat is de afgeleide van $\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$. Die som blijft dus constant: $E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv_{\max}^2$, met $v_{\max} = A\omega_0$ en $a_{\max} = A\omega_0^2$. De energie pendelt tussen veer en massa.

Een handige vuistregel. Omdat $k/m = g/\delta$, is $\omega_0 = \sqrt{g/\delta}$: wie weet hoever een voorwerp inzakt op zijn veren, kent zijn eigenfrequentie. Met δ in millimeter:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9810}{\delta}} \approx \frac{15{,}8}{\sqrt{\delta\,[\mathrm{mm}]}}\,\mathrm{Hz}.$$

Rubberen voeten die 2 mm inzakken: ±11 Hz. Een auto die 20 cm op zijn veren zakt: ±1,1 Hz. Dat geldt alleen als de zwaartekracht in de richting van de trilling werkt; voor een mast die zijwaarts trilt, meet je k anders (volgend blad).



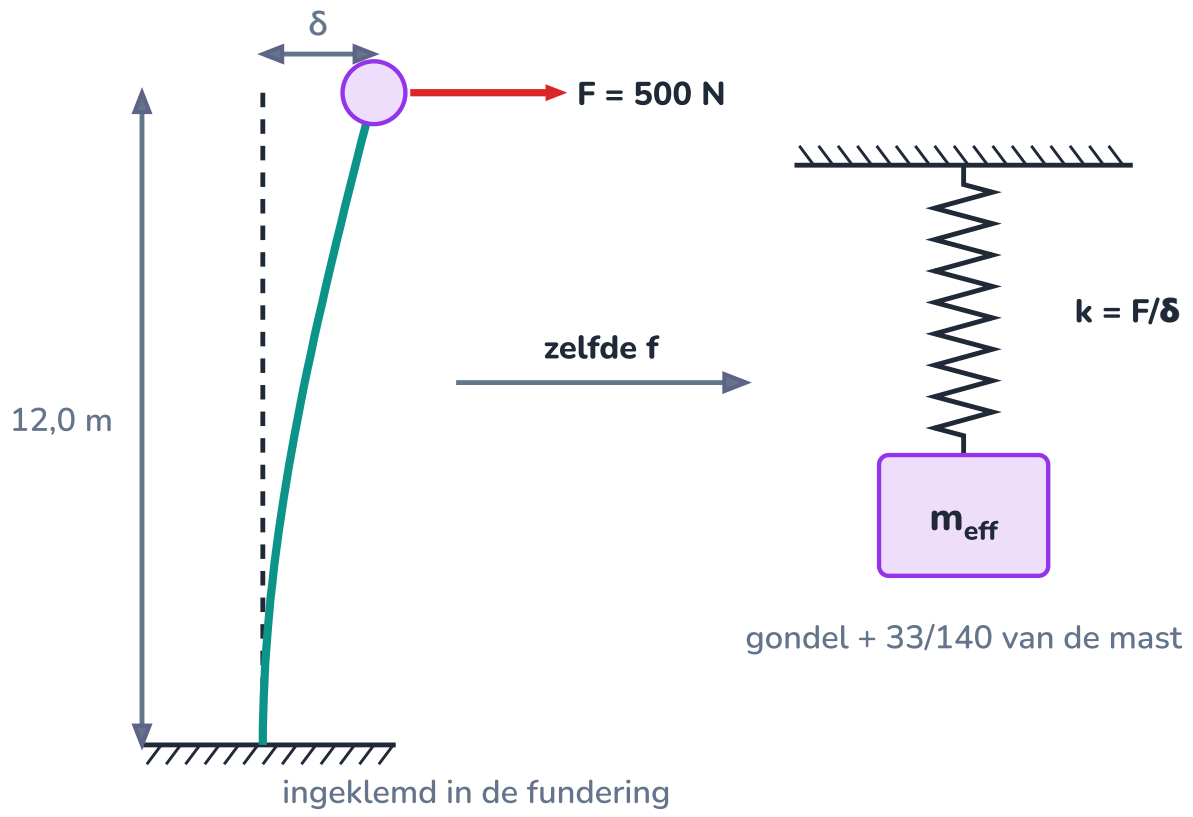
In evenwicht houdt de veer het gewicht in balans; wie de massa x verder trekt, voelt een terugroepende kracht −kx. Het gewicht verschuift alleen het nulpunt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 11.3

Habitat: de mast als massa aan een veer

3/18

De windturbine van het station (rotor Ø 4,0 m, 3,0 kW) staat op een vrijstaande stalen buis van 12,0 m, 244,5 × 5,0 mm (hoofdstuk 12 kiest die buis). Gondel en rotor wegen samen 150 kg, de mast zelf 354 kg. Bij een trekproef hangt men 500 N horizontaal aan de mastkop: die schuift 50,8 mm opzij. Bereken de eigenfrequentie van de mast met gondel.



Links de mast die onder 500 N opzij buigt (overdreven getekend); rechts het massa-veersysteem met dezelfde stijfheid en dezelfde eigenfrequentie.

GEGEVEN

- $F = 500\,\text{N}$, $\delta = 50{,}8\,\text{mm}$
- $m_{\text{gondel}} = 150\,\text{kg}$, $m_{\text{mast}} = 354\,\text{kg}$

GEVRAAGD

- k, de meebewegende massa, f_1

OPLOSSING

1 Veerconstante van de mastkop: $k = F/\delta = 500/0{,}05082 = 9839\,\text{N/m}$. (Hoofdstuk 12 leidt af dat een ingeklemde staaf onder een kracht aan de top $\delta = FL^3/(3EI)$ opzij gaat; met $EI = 5{,}67\,\text{MN m}^2$ geeft $3EI/L^3$ hetzelfde getal.)

2 Welke massa trilt mee? De gondel volledig; van de mast alleen een deel, want de voet staat stil. Met de vervormde vorm van de mast als benadering (methode van Rayleigh: de kinetische energie van elk stukje mast optellen) vind je $\frac{33}{140} = 0{,}236$ van de mastmassa: $m_{\text{eff}} = 150 + 0{,}236 \cdot 354 = 233{,}5\,\text{kg}$.

3 $f_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{9839}{233{,}5}} = 1{,}033\,\text{Hz}$, een periode van 0,97 s.

ANTWOORD

De mast met gondel trilt met ongeveer 1,03 Hz: één keer per seconde heen en weer.

Klopt dit? Een balkmodel met 80 stukjes (het idee van hoofdstuk 13) geeft 1,030 Hz: de benadering met één massa en één veer zit er 0,3 % naast. Zonder de meebewegende mastmassa (alleen de gondel) zou je 1,29 Hz vinden: 25 % te hoog. De trekproef is een echte techniek: ze meet de stijfheid van mast, flens en fundering samen, ook wat een berekening vergeet (een fundering die een beetje kantelt maakt k kleiner).

De slinger, en waarom elk evenwicht trilt

Een puntmassa m aan een touw van lengte L maakt een hoek θ met de verticaal. Langs de cirkelboog werkt de component $-mg\sin\theta$ van de zwaartekracht, en de versnelling langs de boog is $L\ddot{\theta}$:

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta \approx -\frac{g}{L}\theta.$$

Voor kleine hoeken ($\sin\theta \approx \theta$ in radialen) is dat de vergelijking van de massa aan de veer, met $\omega_0^2 = g/L$:

SLINGER (KLEINE UITWIJKING) EN FYSISCHE SLINGER

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad T_{\text{fysisch}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

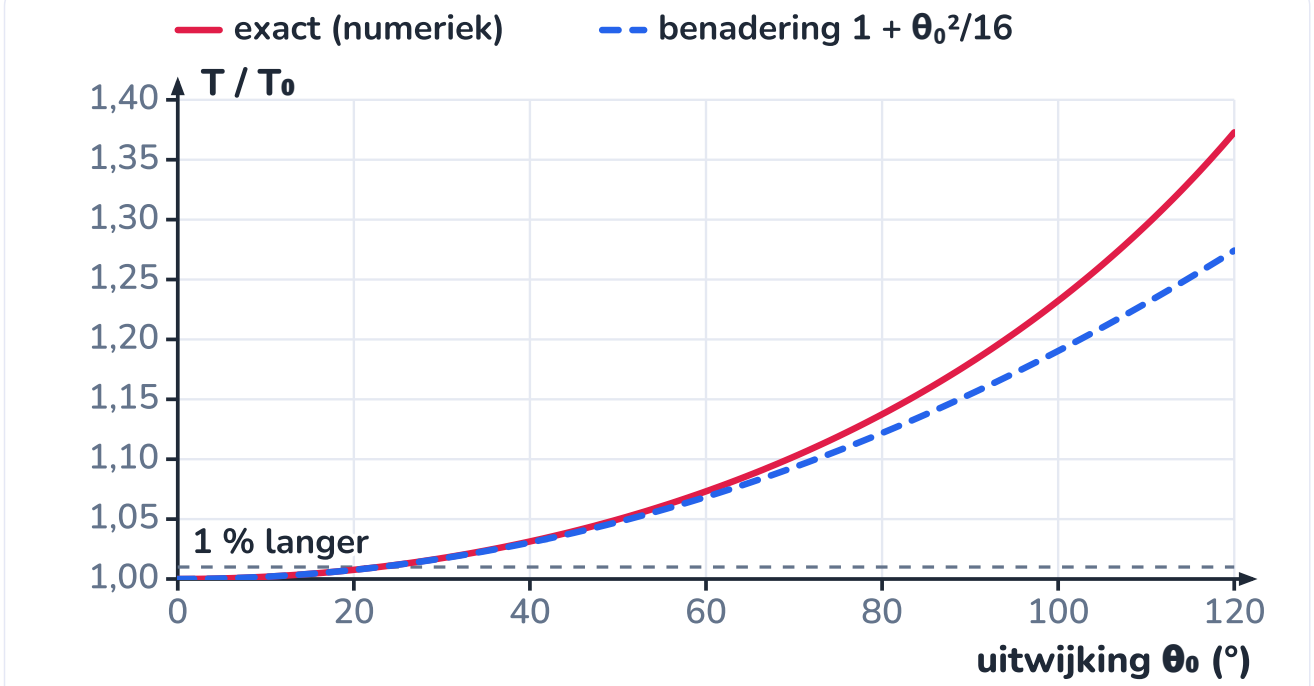
De massa valt weg: een zware en een lichte slinger zijn even snel. Een star voorwerp dat om een as O slingert (traagheidsmoment I_O, zwaartepunt op afstand d, hoofdstuk 10) volgt uit $I_O\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta$. Een meetlat van 1 m om een uiteinde: $I_O = \frac{1}{3}mL^2$, $d = L/2$, $T = 2\pi\sqrt{2L/(3g)}$.

Grote uitwijkingen. Dan is $\sin\theta$ kleiner dan θ, de terugroepende kracht zwakker en de periode langer. Er is geen formule met elementaire functies; numeriek (of met een elliptische integraal) vind je de figuur. Tot 23° wijkt de periode minder dan 1 % af, en de reeks $T \approx T_0(1 + \theta_0^2/16)$ doet het goed tot ongeveer 60°. Een slingeruurwerk houdt zijn uitwijking daarom klein en constant.

Elk stabiel evenwicht is een veer. Stel dat een voorwerp potentiële energie $U(x)$ heeft met een minimum in x_0. Dicht erbij is volgens Taylor $U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$: een parabool, precies de energie $\frac{1}{2}kx^2$ van een veer met $k = U''(x_0)$. Voor de slinger is $U = mgL(1 - \cos\theta)$ en $U'' = mgL$. Daarom trillen zoveel dingen harmonisch: een mast, een brugdek, een atoom in een kristal, een schip dat slingert. Alleen bij grote uitwijkingen merk je de rest van de kromme.

Een zwaardere slinger slingert trager

Bij een slinger trekt de zwaartekracht harder aan een zwaardere massa, maar die is ook even veel moeilijker te versnellen: m valt weg. Bij een massa aan een veer is dat niet zo: de veerkracht hangt niet af van de massa, en een zwaardere massa trilt wel trager.



Hoe groter de uitwijking, hoe langer de periode; bij 90° is ze 18 % langer. De benadering 1 + $\theta_0^2/16$ houdt tot ongeveer 60° stand.

PROEF · 11.5

Twee keer dezelfde veer: statisch en dynamisch

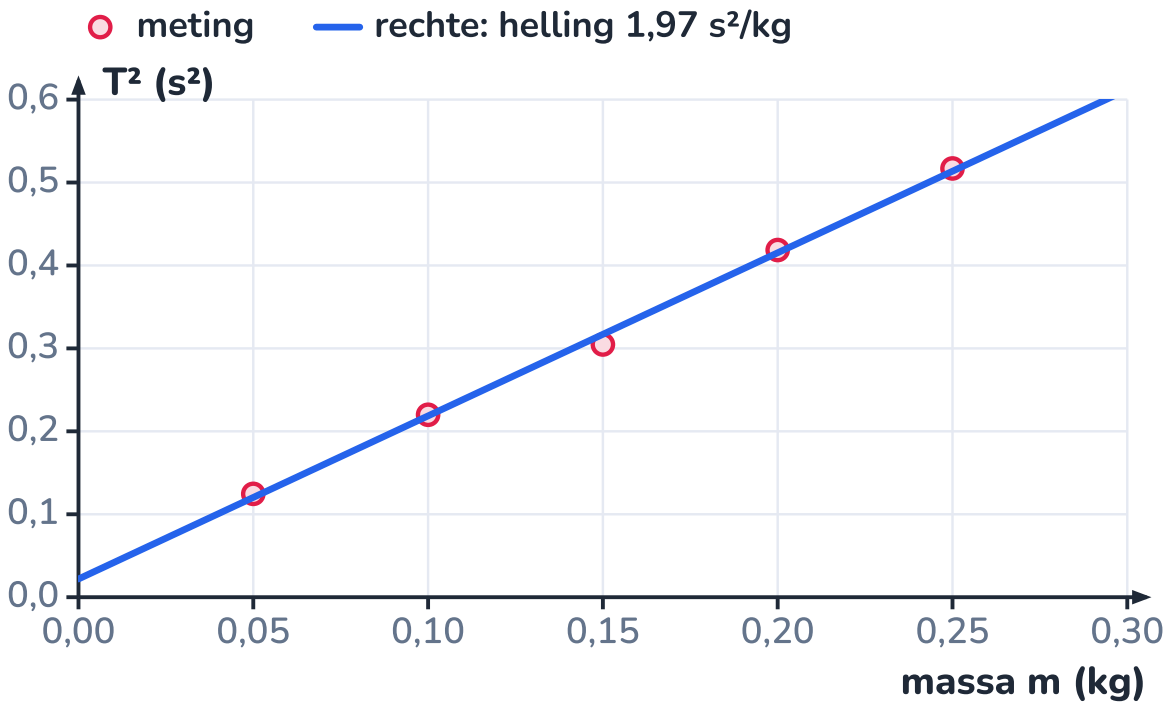
5/18

ONDERZOEKSVRAAG

Geeft de trillingstijd dezelfde veerconstante als het uitrekken? En welke rol speelt de massa van de veer zelf?

MATERIAAL

- een schroefveer (±20 N/m) aan een statief
- massa's van 50 tot 250 g
- meetlat
- stopwatch of een smartphone met een versnellingsmeter-app



T² stijgt lineair met de massa; de helling geeft de veerconstante, het snijpunt de meebewegende massa van de veer.

WERKWIJZE

1. Hang telkens een massa aan de veer en meet de verlenging in rust tegenover de veer zonder massa.
2. Trek de massa 2 à 3 cm naar beneden, laat los en meet de tijd voor 10 trillingen (start bij een doorgang door het evenwicht, niet bij een top).
3. Zet T² uit tegen m en de verlenging tegen de kracht mg; bepaal telkens een helling.
4. Bereken k uit beide hellingen en vergelijk.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting:

m (kg)	tijd voor 10 trillingen (s)	T (s)	T^2 (s²)	verlenging in rust (mm)
0,050	3,53	0,353	0,1246	25
0,100	4,69	0,469	0,2200	50
0,150	5,52	0,552	0,3047	74
0,200	6,47	0,647	0,4186	98
0,250	7,19	0,719	0,5170	123

T^2 ligt op een rechte met helling 1,967 s²/kg en snijpunt 0,0220 s². De verlenging tegenover mg geeft een helling van 49,7 mm/N.

VERKLARING

Uit $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}\,(m + m_\mathrm{v}/3)$ volgt $k = 4\pi^2/\text{helling} =$ it het uitrekken: $k = 1/0{,}04975 =$ $20{,}1\ \mathrm{N/m}$. Beide methoden geven dezelfde veer, binnen enkele procenten.

Waarom gaat de rechte niet door de oorsprong? Ook de veer zelf beweegt mee: de onderste winding beweegt met de massa, het bovenste staat stil. Net als bij de mast (vorig voorbeeld) telt een deel van haar massa mee; voor een uniforme veer is dat een derde. Het snijpunt geeft $m_\mathrm{v}/3 = 11\ \mathrm{g}$, dus een veer van ongeveer 34 g. Weeg de veer en controleer. Meet je tien trillingen in plaats van één, dan deelt je reactietijd door tien.

Een echte trilling sterft uit: wrijving in het materiaal, in verbindingen, in de lucht. Het eenvoudigste model is een **viskeuze demper**, een kracht $-c\dot{x}$ tegen de snelheid in (een schokbreker, olie die door een gaatje moet). Met $x = \mathrm{e}^{st}$ wordt de bewegingsvergelijking de karakteristieke vergelijking van hoofdstuk 7:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \;\Rightarrow\; ms^2 + cs + k = 0 \;\Rightarrow\; s = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}, \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

De **dempingsverhouding** ζ beslist alles. Is $\zeta < 1$, dan is de wortel imaginair en is $x = A\,\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \varphi)$ met $\omega_\mathrm{d} = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$: een uitdovende trilling (**ondergedempt**). Bij $\zeta = 1$ keert het systeem het snelst terug zonder door te schieten (**kritisch**); bij $\zeta > 1$ kruipt het traag terug (**overgedempt**). Deurdrangers en meetinstrumenten zitten dicht bij kritisch, constructies ver eronder.

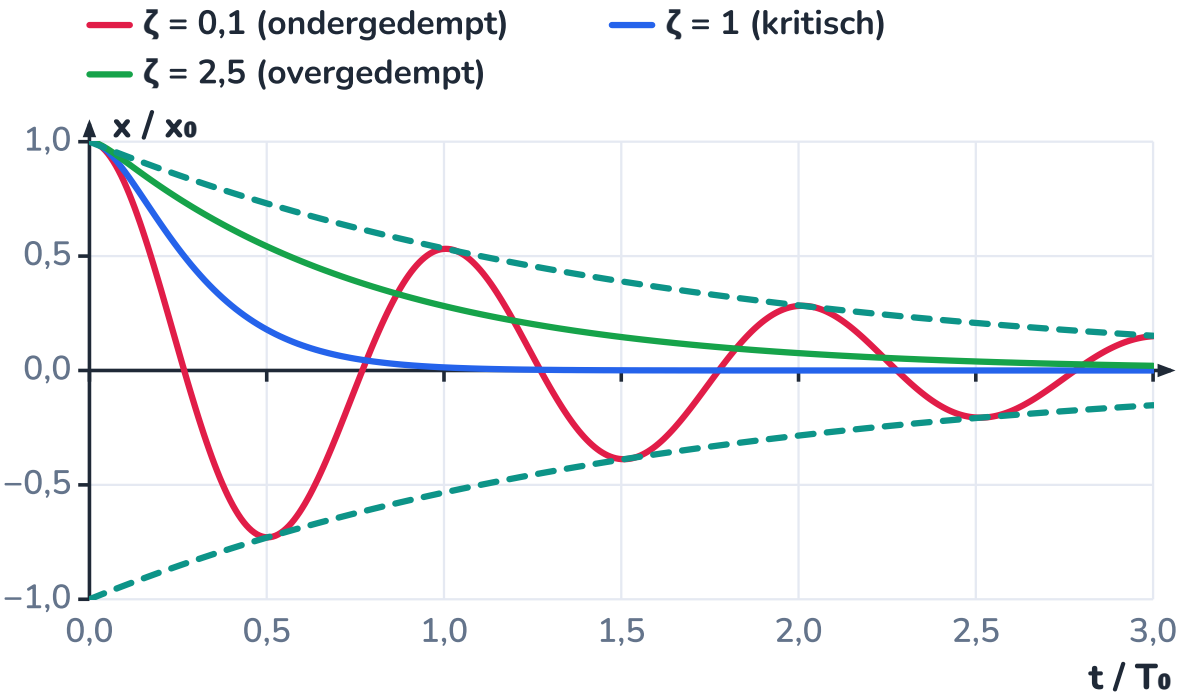
LOGARITMISCH DECREMENT EN KWALITEITSFACTOR

$$\delta = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta \qquad Q = \frac{1}{2\zeta}$$

Twee opeenvolgende toppen liggen één periode uit elkaar, en de omhullende daalt met $\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}$: hun verhouding is $\mathrm{e}^{\zeta\omega_0 T_\mathrm{d}}$. Zo meet je ζ uit een uitdovende trilling. Per periode verdwijnt ongeveer een deel $4\pi\zeta$ van de energie.

systeem (orde van grootte)	ζ	$Q = 1/(2\zeta)$
wijnglas (voorbeeld verderop)	±0,000 7	±700
gelaste stalen schoorsteen of buis	±0,002	±250
mast met gondel en boutflens, rotor stil (rekenwaarde Habitat)	0,005	100
brug of gebouw	0,005 à 0,05	100 à 10
dezelfde mast met draaiende rotor (aerodynamisch)	0,037	13
rubberen demperblok	±0,05	±10
ophanging van een auto	0,2 à 0,4	2,5 à 1,3

Een draaiende rotor dempt. De stuwkracht van een rotor is $\frac{1}{2}\rho A C_\mathrm{T} v^2$, met v de wind die de rotor voelt. Beweegt de mastkop met snelheid $\dot{x}$ mee met de wind, dan voelt de rotor $v - \dot{x}$, en de stuwkracht daalt met $\rho A C_\mathrm{T} v\,\dot{x}$: een demper met $c = \rho A C_\mathrm{T} v$. Bij 8 m/s en $C_\mathrm{T} = 0{,}8$ is dat voor de Habitat-turbine 99 N·s/m, of $\zeta = 0{,}032$: meer dan zes keer de demping van het staal. Een **stilstaande** rotor mist die demping: de ergste toestand voor de mast is dus een storm met de rotor stil.



Ondergedempt: een trilling binnen een exponentiële omhullende (stippellijnen). Kritisch: de snelste terugkeer zonder doorschieten. Overgedempt: traag terugkruipen.

CODE · 11.7

Een uitslingerproef van de mast analyseren

7/18

Na de trekproef van 500 N laat men de mastkop los. Een laserafstandsmeter op een paal ernaast meet de uitwijking 20 keer per seconde, 40 s lang (rotor stil). Het bestand `mast_uitslinger.csv` begint zo:

```
t_s,x_mm
0.00,51.07
0.05,48.28
0.10,40.75
0.15,28.85
0.20,14.14
```

Het programma zoekt de toppen, haalt de periode uit hun afstand en de demping uit de helling van $\ln(\text{top})$ tegenover het nummer van de top: volgens het vorige blad is dat een rechte met helling $-\delta$.

Python **uitslinger.py** 21 regels

```python
# uitslinger.py - eigenfrequentie en demping van de mast uit een uitslingerproef
import math
import numpy as np

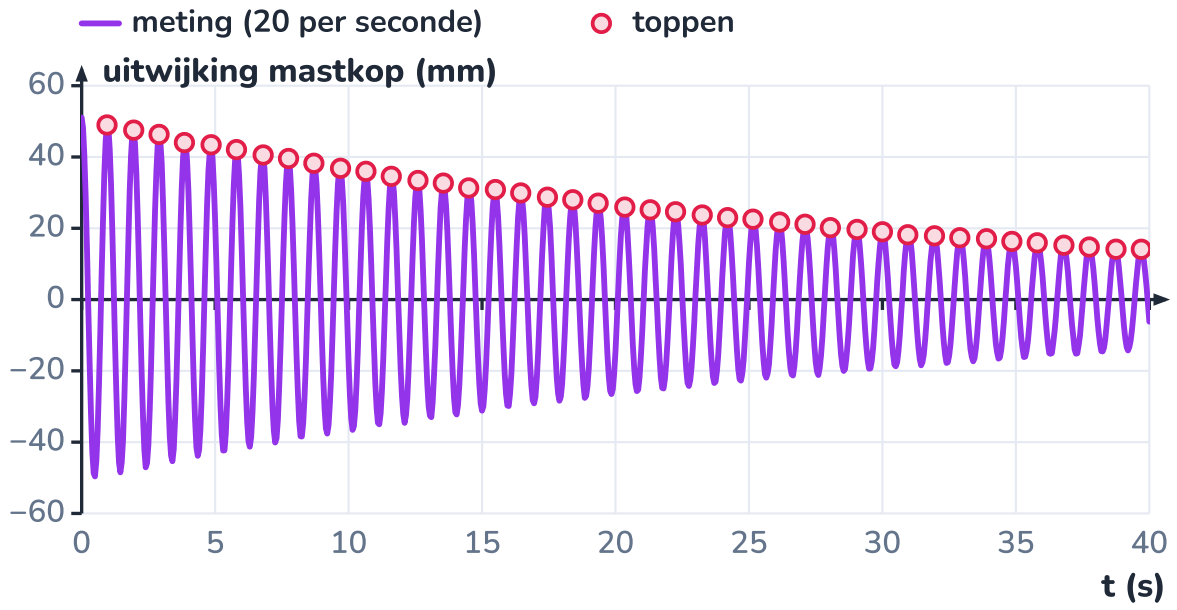
with open("mast_uitslinger.csv") as f:
    next(f)                                              # kopregel overslaan
    data = np.array([[float(v) for v in regel.split(",")] for regel in f])
t, x = data[:, 0], data[:, 1]                            # tijd (s), uitwijking mastkop (mm)

# toppen: een meting die de grootste is van haar omgeving (4 metingen links en rechts)
toppen = [i for i in range(4, len(x) - 4) if x[i] == x[i - 4:i + 5].max() and x[i] > 0]
tt, xt = t[toppen], x[toppen]

```

```python
T = (tt[-1] - tt[0]) / (len(tt) - 1)                          # gemiddelde periode
helling, _ = np.polyfit(np.arange(len(xt)), np.log(xt), 1)    # ln(top) daalt lineair per periode
delta = -helling                                              # logaritmisch decrement
zeta = delta / math.sqrt(4 * math.pi**2 + delta**2)

print(f"{len(tt)} toppen, periode {T:.3f} s, eigenfrequentie {1 / T:.3f} Hz")
print(f"logaritmisch decrement {delta:.4f}, demping zeta = {100 * zeta:.2f} %, Q = {1 / (2 * zeta):.0f}")
print(f"de amplitude halveert na {math.log(2) / delta:.0f} perioden ({math.log(2) / delta * T:.0f} s)")
```



De mastkop na het loslaten: 50,8 mm, uitdovend met $\zeta \approx 0{,}5$ %. Na 40 s is de amplitude nog ongeveer een kwart.

Uitvoer:

```
41 toppen, periode 0.969 s, eigenfrequentie 1.032 Hz
logaritmisch decrement 0.0315, demping zeta = 0.50 %, Q = 100
de amplitude halveert na 22 perioden (21 s)
```

De eigenfrequentie klopt met de trekproef en het balkmodel ($1{,}033\ \mathrm{Hz}$). De demping van ongeveer 0,5 % is klein: een kwaliteitsfactor van ongeveer 100. Wie de mast één keer een duw geeft, ziet haar een halve minuut nadeinen. Waarom een rechte fitten en niet gewoon twee toppen delen? De ruis van 0,2 mm weegt bij de kleine toppen aan het eind zwaar; de fit gebruikt alle toppen tegelijk. Het brein van het station herhaalt deze proef elk jaar: daalt f_1, dan is er iets losgekomen (flens, fundering), stijgt ζ sterk, dan wrijft er iets.

UITLEG · 11.8

Gedwongen trilling en resonantie

8/18

Duw met een sinusoïdale kracht $F_0 \cos \omega t$. De oplossing bestaat uit twee delen: de vrije trilling van het vorige blad, die uitsterft met tijdconstante $\tau = 1/(\zeta \omega_0)$, en een trilling met de **frequentie van de kracht**, die blijft. Die tweede vind je met een fasor (hoofdstuk 7): $\dot{x} \to j\omega X$, $\ddot{x} \to -\omega^2 X$:

GEDWONGEN TRILLING: AMPLITUDE EN FASEACHTERSTAND

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \qquad r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

F_0/k is de uitwijking bij een trage, even grote kracht. Bij $r = 1$ is de amplitude $Q = 1/(2\zeta)$ keer die statische uitwijking en loopt de beweging 90° achter op de kracht: de kracht duwt dan precies met de snelheid mee en levert maximaal vermogen.

Drie gebieden, drie verschillende oplossingen:

gebied	amplitude	fase	wat helpt
$r \ll 1$ (traag duwen)	$X \approx F_0/k$	mee met de kracht	een stijvere veer
$r \approx 1$ (resonantie)	$X = F_0/(c\,\omega_0)$	90° achter	demping
$r \gg 1$ (snel duwen)	$X \approx F_0/(m\omega^2)$	tegengesteld	meer massa

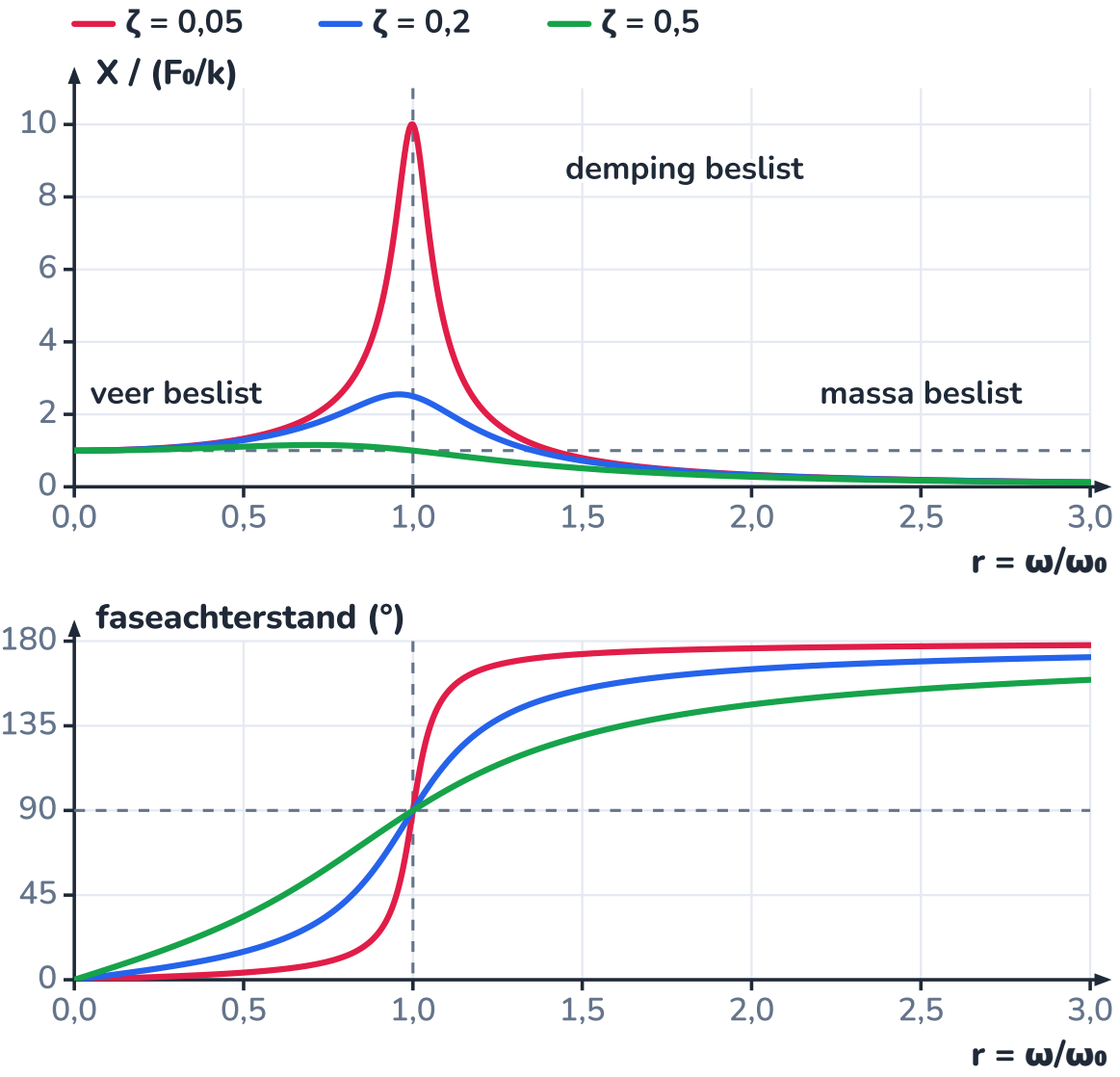
Wie een resonantie wil bestrijden met een stijvere veer of meer massa, verschuift de eigenfrequentie; alleen demping verlaagt de piek zelf.

Opbouwen kost tijd. Start een systeem in rust met een kracht precies op zijn eigenfrequentie, dan groeit de amplitude als $X_{\text{res}}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$ (verhaalblad). Een systeem met weinig demping heeft een grote piek, maar ook een lange opbouwtijd. Daar leeft de windturbine van: een rotor die snel door een kritisch toerental gaat, geeft de mast geen tijd om op te bouwen.

Van wijnglas tot brug. Een glas zingt na een tik op 500 Hz en na 2,0 s is de toon gezakt tot 1 % van zijn amplitude (voorbeeldmeting). Dan is $\zeta\omega_0 t = \ln 100$, dus $\zeta = \dfrac{\ln 100}{2\pi \cdot 500 \cdot 2{,}0} = 7{,}3 \cdot 10^{-4}$ en $Q \approx 682$. Een luidspreker die precies die toon speelt, laat het glas honderden keren verder uitwijken dan dezelfde geluidsdruk bij een andere toon; bij een luide toon breekt het. Een brug heeft een Q van tien tot honderd, maar een massa van honderden tonnen: haar vijand is niet één duw maar een ritme dat blijft duren, zoals stappende voetgangers.

Hoe meer demping, hoe beter

Bij resonantie klopt dat. Maar een zware demper maakt een systeem ook traag en geeft bij hoge frequenties méér kracht door naar de steun (verderop, bij de isolatie). Ontwerpers kiezen de demping voor een doel: een meetinstrument rond $\zeta = 0{,}7$, een autoveer rond 0,3, een trillingsisolator laag.



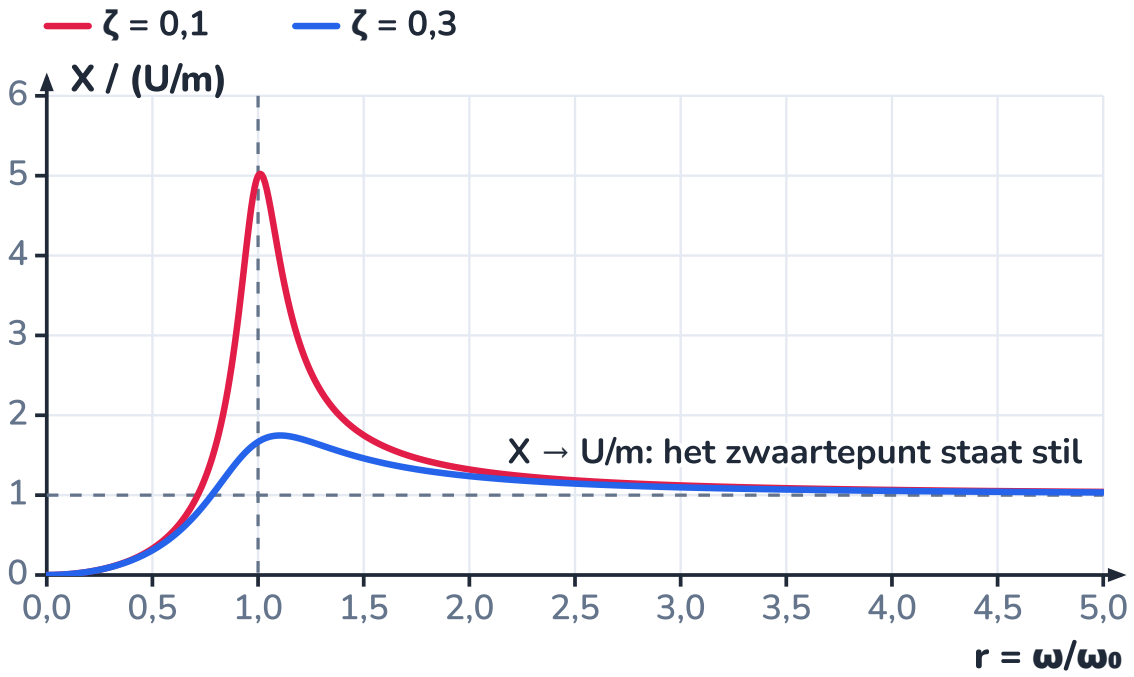
Boven: de amplitude piekt bij r = 1 tot 1/(2ζ); ver erboven daalt ze onder de statische uitwijking. Onder: de beweging loopt achter op de kracht, 90° bij resonantie, bijna 180° ver erboven.

UITGEWERKT VOORBEELD · 11.9

Onbalans: de rotor als trilbron

9/18

Geen rotor is perfect gebalanceerd. Het zwaartepunt van de rotor van de Habitat-turbine ligt een klein beetje naast de as; de onbalans is $U = m_{\mathrm{u}} e = 0{,}05\,\mathrm{kg\,m}$ (rekenwaarde: bijvoorbeeld 25 g te veel op 2 m van de as). Bereken de kracht op de mastkop en de uitwijking bij 300 tpm, en bij het toerental waarop de kracht de eigenfrequentie van de mast raakt, als de rotor daar lang zou blijven draaien.



Bij onbalans groeit de kracht met ω²: ver boven de resonantie wordt de uitwijking constant, U/m, wat het toerental ook is.

GEGEVEN

- $U = 0{,}05\,\text{kg m}$, $k = 9839\,\text{N/m}$, $m_{\text{eff}} = 233{,}5\,\text{kg}$, $f_1 = 1{,}033\,\text{Hz}$, $\zeta = 0{,}005$ (rotor stil of langzaam)

GEVRAAGD

- F en X bij 300 tpm; X bij resonantie

OPLOSSING

1 Een massa m_{u} op straal e heeft een middelpuntzoekende kracht $m_{\text{u}}e\omega^2$ nodig (hoofdstuk 8); de as levert die, en de lagers duwen dus een even grote, **ronddraaiende** kracht $U\omega^2$ op de gondel. Haar horizontale component is $U\omega^2\cos\omega t$: een gedwongen trilling met frequentie 1P.

2 Bij 300 tpm: $\omega = 31{,}42\,\text{rad/s}$, $F = 0{,}05 \cdot 31{,}42^2 = 49{,}3\,\text{N}$; $r = 5{,}00/1{,}033 = 4{,}84$. Ver boven de resonantie: $X = \dfrac{F/k}{r^2-1} = \dfrac{49{,}3/9839}{22{,}4} = 0{,}22\,\text{mm}$.

3 Algemeen: $F = U\omega^2 = U\omega_0^2 r^2$, dus $X = \dfrac{U}{m}\cdot\dfrac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ (figuur). Ver boven de resonantie wordt $X \to U/m$: de mastkop beweegt zo dat het gezamenlijke zwaartepunt van gondel en rotor stilstaat.

4 Bij resonantie (62 tpm): $F = U\omega_0^2 = 2{,}11\,\text{N}$, maar $X = F/(c\,\omega_0) = \dfrac{F/k}{2\zeta} = 21{,}4\,\text{mm}$, na een opbouwtijd van enkele keren $\tau = 1/(\zeta\omega_0) = 31\,\text{s}$.

ANTWOORD

Bij 300 tpm duwt de rotor met 49 N heen en weer, maar de mastkop beweegt maar 0,22 mm: de mast is 'zacht' tegenover 5 Hz. Bij 62 tpm is de kracht 23 keer kleiner, en toch zou de uitwijking honderd keer groter worden: 21 mm.

Klopt dit? Dimensies: kg·m · (1/s)² = N. Het resultaat laat zien waarom een zachte mast een goed idee is voor deze turbine: in bedrijf draait de rotor altijd boven de eigenfrequentie. Het gevaar zit alleen in het aanlopen en in zwakke wind; dat onderzoeken de volgende bladen.

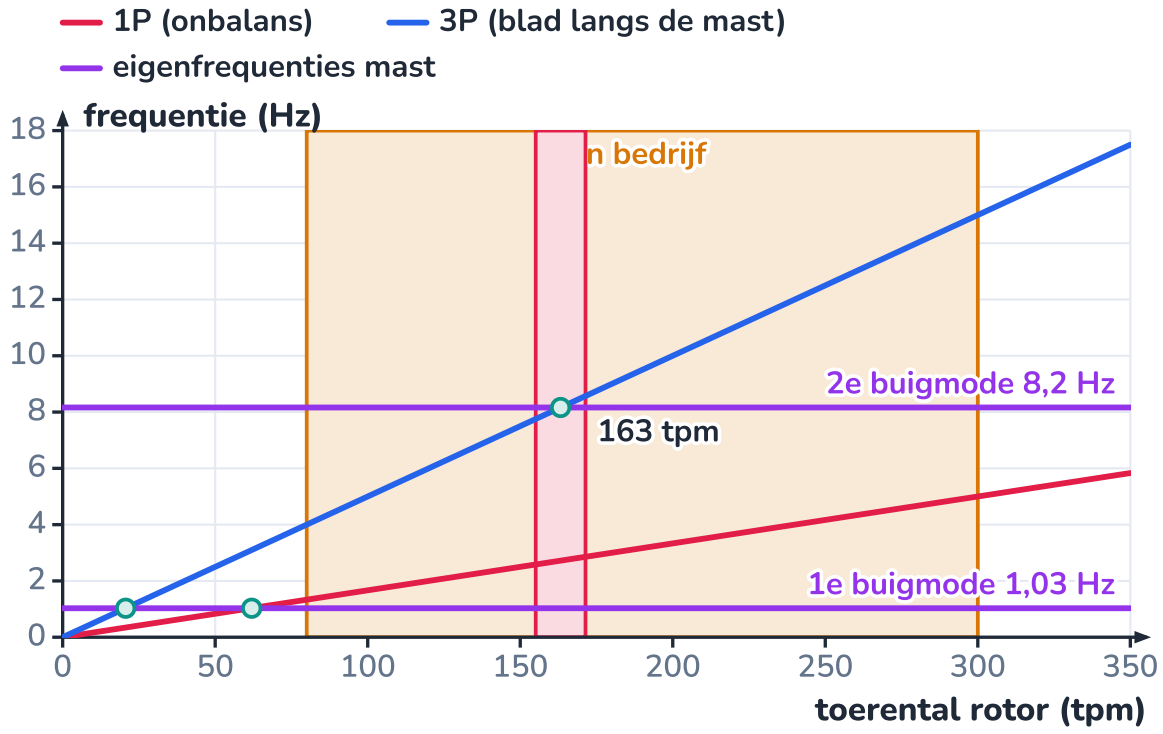
Een draaiende rotor duwt met vaste veelvouden van zijn toerental. Onbalans en een ongelijk blad geven **1P** (één keer per omwenteling). Elk blad dat voor de mast langs gaat, voelt minder wind (de mast remt de lucht af), en hoger in de lucht waait het harder dan lager: bij een rotor met drie bladen geeft dat kracht- en momentschommelingen met **3P**. Omdat de toerentallen veranderen met de wind, zijn dat geen vaste frequenties maar lijnen door de oorsprong: $f = n/60$ en $f = 3n/60$.

Een **Campbell-diagram** zet die lijnen samen met de eigenfrequenties van de constructie. Waar een lijn een eigenfrequentie snijdt, ligt een gevaarlijk toerental. De Habitat-turbine draait tussen ±80 tpm (aanloop bij 3 m/s) en 300 tpm (nominaal, vanaf 11 m/s): 1P tussen 1,33 en 5,0 Hz, 3P tussen 4,0 en 15 Hz.

Er zijn drie strategieën voor de eerste eigenfrequentie f_1 van de mast:

- **stijf-stijf**: f_1 boven 3P bij het hoogste toerental (hier boven 15 Hz). Voor een mast van 12 m zou zelfs een stalen buis zonder gondel meer dan twee meter dik moeten zijn: onmogelijk.
- **zacht-stijf**: f_1 tussen 1P en 3P over het hele werkgebied. Kan hier niet: 1P reikt tot 5 Hz en 3P begint al bij 4 Hz.
- **zacht-zacht**: f_1 onder 1P bij het laagste toerental. Dan draait de rotor in bedrijf altijd boven de resonantie, en passeert hij ze alleen bij het aanlopen en stoppen. Dat is de keuze voor Habitat: $f_1 = 1{,}03\,\mathrm{Hz}$ tegenover $1\mathrm{P} \geq 1{,}33\,\mathrm{Hz}$, een marge van 29 %.

De mast heeft ook een **tweede buigmode**, waarin ze in het midden opzij bolt terwijl de gondel bijna stilstaat (figuur op het volgende voorbeeld). Een balkmodel geeft $f_2 \approx 8{,}2\,\mathrm{Hz}$, en die ligt wel in de 3P-band: 3P raakt ze bij 163 tpm. Dat venster moet de rotor snel doorlopen.



Waar een aandrijflijn (1P, 3P) een eigenfrequentie snijdt, ligt een kritisch toerental (bolletjes): 1P raakt de eerste mode bij 62 tpm, onder het werkgebied (band); 3P raakt de tweede mode bij ±163 tpm (smalle strook).

CODE · 11.11

Een rotor versnelt door de resonantie

Hoe gevaarlijk is het passeren van 62 tpm bij het aanlopen? Het model: de mast als massa-veersysteem met demping, en een onbalanskracht $U\Omega^2 \cos\theta$ waarvan de hoeksnelheid Ω lineair stijgt van 0 tot 100 tpm. Omdat de frequentie van de kracht verandert, is er geen formule: dit is werk voor een simulatie. De toestand is (x, v, θ); Heun (hoofdstuk 4) rekent met een stap van 5 ms.

Python **aanloop.py** 38 regels

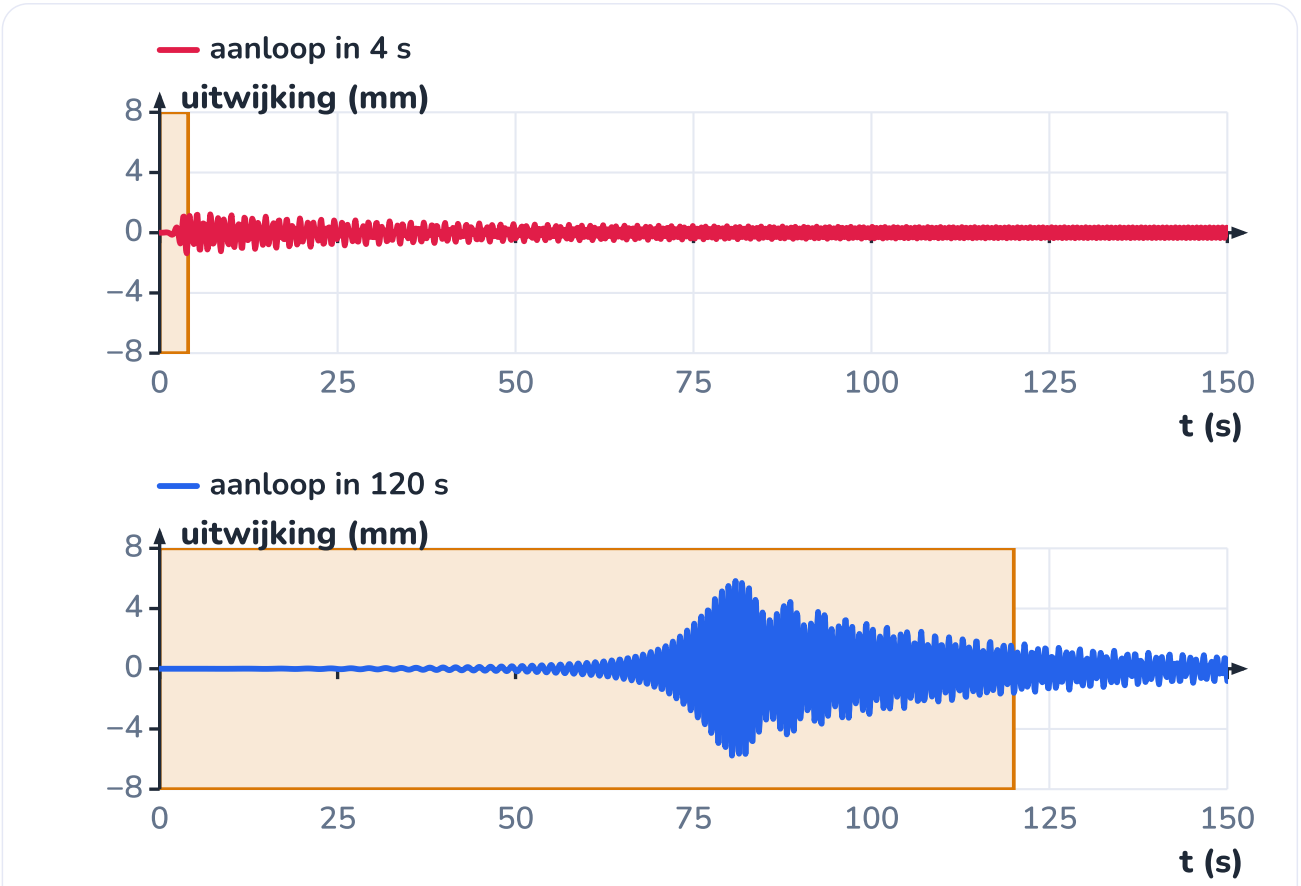
```python
# aanloop.py - de rotor versnelt door de eerste eigenfrequentie van de mast
import math

k, m, zeta = 9839.0, 233.5, 0.005          # mast als veer (N/m), meebewegende massa (kg), demping (rotor stil)
c = 2 * zeta * math.sqrt(k * m)            # dempingsconstante (N s/m)
U = 0.05                                   # onbalans van de rotor (kg m): de kracht is U * W**2
w0 = math.sqrt(k / m)


def afgeleide(t, s, T_op, W_eind):
    """s = (x, v, hoek van de rotor); de rotor versnelt lineair tot W_eind in T_op seconden."""
    x, v, hoek = s
    W = W_eind * min(t / T_op, 1.0)
    return (v, (U * W**2 * math.cos(hoek) - c * v - k * x) / m, W)


def aanloop(T_op, n_eind=100, duur=150.0, h=0.005):
    """Heun (hoofdstuk 4): Euler als voorspeller, het gemiddelde van twee hellingen als verbeteraar."""
    W_eind = 2 * math.pi * n_eind / 60
    s, t, spoor = (0.0, 0.0, 0.0), 0.0, []
    while t < duur:
        a = afgeleide(t, s, T_op, W_eind)
        p = tuple(si + h * ai for si, ai in zip(s, a))
        b = afgeleide(t + h, p, T_op, W_eind)
        s = tuple(si + h / 2 * (ai + bi) for si, ai, bi in zip(s, a, b))
        t += h
        spoor.append((t, s[0]))
    return spoor


if __name__ == "__main__":
    print(f"eigenfrequentie {w0 / (2 * math.pi):.3f} Hz = {60 * w0 / (2 * math.pi):.0f} tpm, tijdconstante {1 / (zeta * w0):.0f} s")
    for T_op in (4, 30, 120):
        spoor = aanloop(T_op)
        tmax, xmax = max(spoor, key=lambda p: abs(p[1]))
        print(f"van 0 naar 100 tpm in {T_op:3d} s: grootste uitwijking {1000 * abs(xmax):4.1f} mm (na {tmax:5.1f} s)")
    F = U * w0**2
    print(f"blijft de rotor op {60 * w0 / (2 * math.pi):.0f} tpm draaien: {1000 * F / (c * w0):.1f} mm (evenwichtstoestand)")
```



De mastkop tijdens een aanloop van 4 s (boven) en 120 s (onder). De gekleurde strook is de aanlooptijd. Trager aanlopen geeft de resonantie meer tijd.

Uitvoer:

```
eigenfrequentie 1.033 Hz = 62 tpm, tijdconstante 31 s
van 0 naar 100 tpm in   4 s: grootste uitwijking  1.4 mm (na   3.8 s)
van 0 naar 100 tpm in  30 s: grootste uitwijking  3.3 mm (na  22.0 s)
van 0 naar 100 tpm in 120 s: grootste uitwijking  5.9 mm (na  81.4 s)
blijft de rotor op 62 tpm draaien: 21.4 mm (evenwichtstoestand)
```

Een snelle aanloop (4 s) laat een uitwijking van 1,4 mm na: de mast kreeg niet de tijd om op te bouwen. Hoe trager, hoe groter, en wie op het kritische toerental blijft hangen, krijgt na een paar minuten 21 mm, vijftien keer meer dan bij de snelle aanloop. In de figuur zie je na het passeren een trilling op de eigenfrequentie die traag uitsterft ($\zeta = 0{,}5$ %), met de snelle 100 tpm-trilling van de onbalans erbovenop.

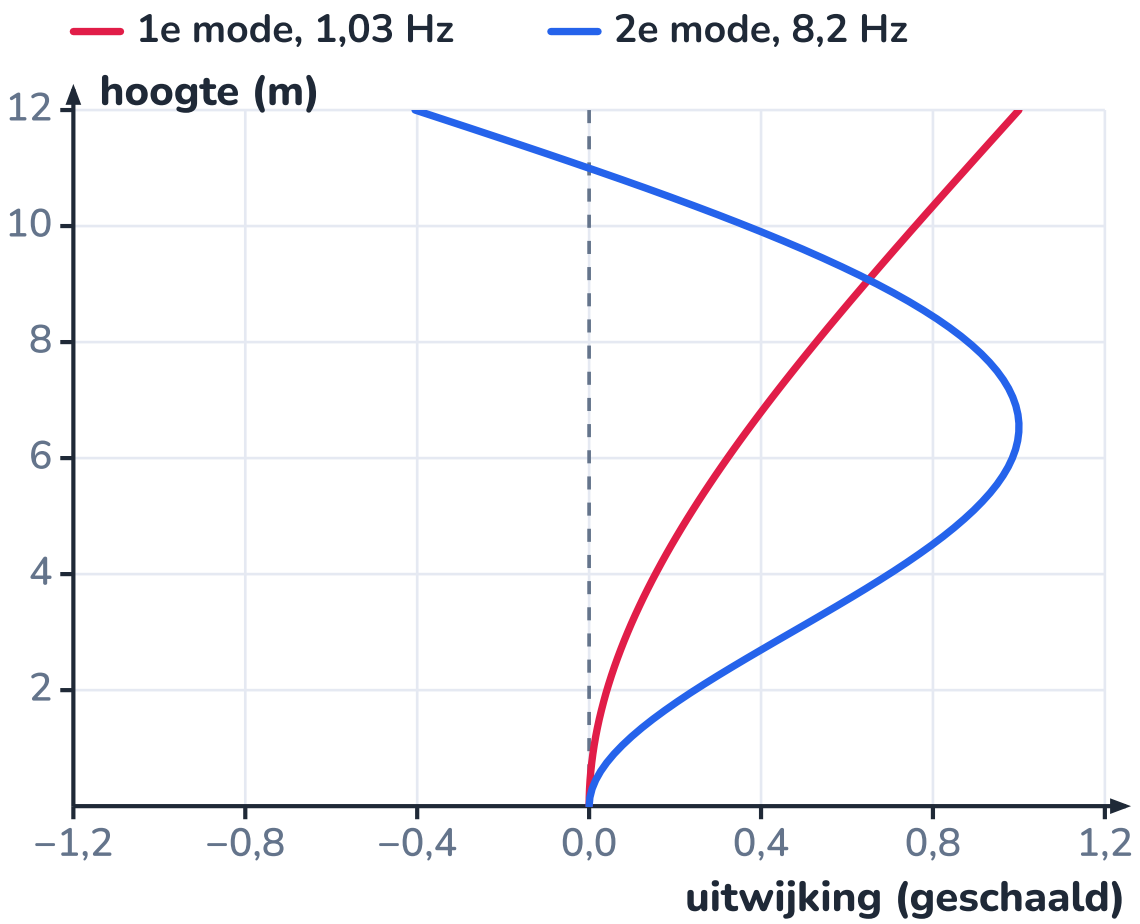
Een windturbine in echte wind versnelt niet netjes lineair: in zwakke wind kan een rotor zonder last minutenlang rond 60 tpm hangen. Daarom houdt de regelaar hem daar weg (volgend blad).

UITGEWERKT VOORBEELD · 11.12

Habitat: de windturbine en haar mast

12/18

Vat samen voor het dossier van het station: is de mast (buis 244,5 × 5,0 mm, 12,0 m) geschikt voor de turbine, welke toerentallen zijn kritisch, hoeveel marge is er, en welke regels krijgt de regelaar van de turbine mee?



De eerste twee buigmodes van de mast met gondel, uit een balkmodel met 80 elementen. In de tweede mode beweegt het midden meer dan de top.

GEGEVEN

- $f_1 = 1{,}03\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 8{,}2\,\mathrm{Hz}$ (balkmodel); werkgebied 80 tot 300 tpm
- $\zeta = 0{,}005$ stil, $0{,}037$ in bedrijf (bij 8 m/s)
- onbalans $U = 0{,}05\,\mathrm{kg\,m}$

GEVRAAGD

- kritische toerentallen en marges
- regels voor de regelaar

OPLOSSING

1. **Kritische toerentallen.** 1P raakt f_1 bij $60 \cdot 1{,}030 = 62$ tpm, 3P raakt f_1 bij 21 tpm (daar is de kracht verwaarloosbaar), 3P raakt f_2 bij $20 \cdot 8{,}16 = 163$ tpm. 1P raakt f_2 nooit (dat zou 490 tpm vragen).

2. **Marges.** Bij het laagste toerental in bedrijf is 1P $1{,}29$ keer f_1: 29 % marge, meer dan de 10 à 20 % die men gewoonlijk aanhoudt. Bij 300 tpm is $r = 4{,}9$ en beweegt de mastkop door de onbalans maar 0,22 mm.

3. **Modevormen.** In de eerste mode beweegt vooral de gondel; in de tweede bolt de mast halverwege uit terwijl de gondel veel minder beweegt (figuur). Een kracht aan de mastkop wekt de tweede mode dus minder op dan de eerste, maar niet nul: een rotor die urenlang op 163 tpm draait (bij ±6 m/s, een heel gewone windsnelheid), zou de mast in het midden laten trillen, precies waar de las van een versterking zou zitten.

4 **Regels voor de regelaar** (de windturbine krijgt een eigen regelaar; het brein van het station bewaakt):

REGEL VOOR DE TURBINE	WAAROM
niet langer dan enkele seconden tussen 56 en 68 tpm (1P op de eerste mode)	de amplitude bouwt op met een tijdconstante van 31 s; wie snel voorbij is, merkt niets
in zwakke wind: de rotor niet vrij laten rondtrillen onder 80 tpm (lichte generatorbelasting of rem)	anders kan hij minutenlang op 62 tpm hangen: 21 mm aan de mastkop
het venster 155 tot 171 tpm snel doorlopen (3P op de tweede mode)	een 'sprong' in het toerental, zoals grote turbines doen
een versnellingsmeter in de gondel; stoppen als de trilling bij 1,03 Hz een grens overschrijdt	een ijsafzetting of een beschadigd blad verhoogt de onbalans; het brein merkt het eerst

ANTWOORD

De mast is geschikt als 'zachte' mast: in bedrijf draait de rotor altijd boven de eerste eigenfrequentie (1,03 Hz). Kritisch zijn 62 tpm (aanlopen, zwakke wind) en 163 tpm (3P op de tweede mode); de regelaar vermijdt beide en het brein bewaakt de trilling van de gondel.

Klopt dit? Een stijvere mast lijkt veiliger, maar is het niet: een buis van 273,0 × 6,3 mm zou f_1 naar ±1,27 Hz brengen, vlak onder 1P bij 80 tpm (1,33 Hz), met maar 5 % marge (opdracht 11.11). Bij trillingen is 'sterker' niet automatisch 'beter': het gaat om waar de eigenfrequenties liggen tegenover de aandrijving.

UITLEG · 11.13

Trillingsisolatie

13/18

Een machine op verende voeten duwt niet meer rechtstreeks op de vloer: wat doorkomt, is de kracht in de veren en dempers, $kx + c\dot{x}$. Met de fasor van de gedwongen trilling (X en $j\omega X$) volgt de verhouding tussen de kracht die doorkomt en de kracht die de machine opwekt:

TRANSMISSIBILITEIT

$$T = \frac{|F_\mathrm{T}|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad r = \frac{f}{f_\mathrm{n}}$$

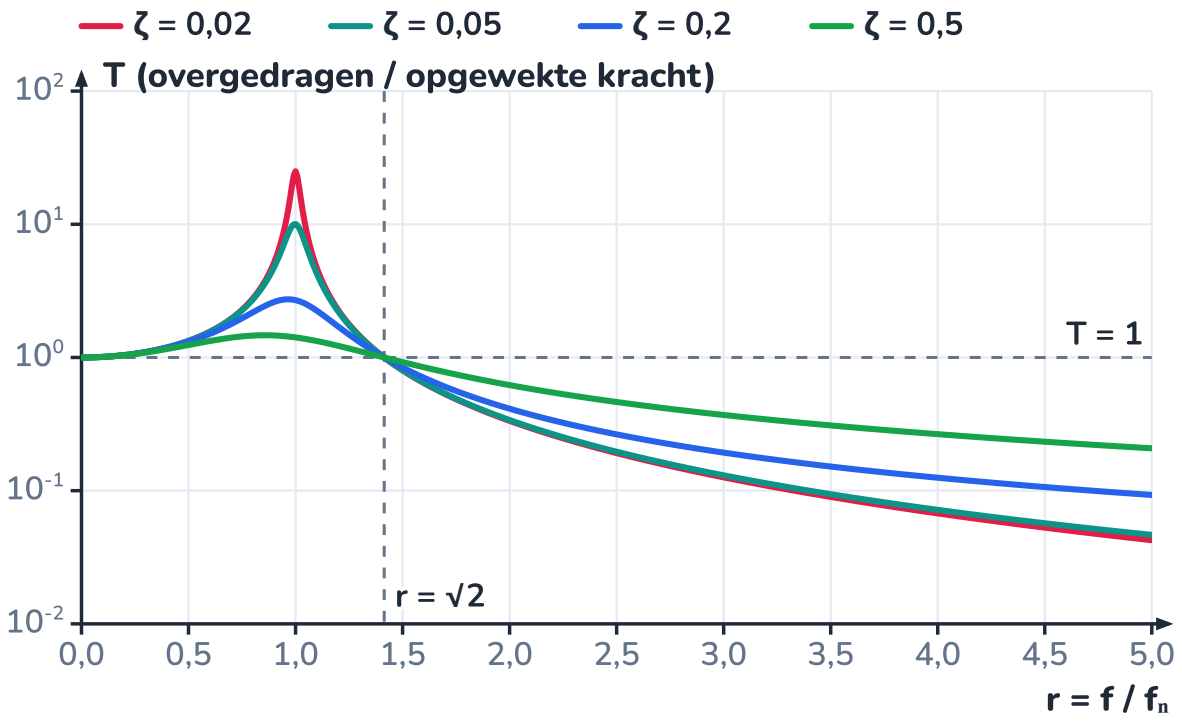
Dezelfde formule geldt omgekeerd: een gevoelig toestel op een trillende vloer beweegt met T keer de vloer mee. Bij $r = \sqrt{2}$ is $T = 1$, voor elke demping.

Drie ontwerpregels volgen rechtstreeks uit de figuur:

1. **Isoleren kan pas boven $\sqrt{2}\, f_\mathrm{n}$.** Daaronder komt er meer kracht door dan zonder veren. De eigenfrequentie van de opstelling moet dus ruim *onder* de laagste storende frequentie liggen.
2. **Vuistregel:** $f_\mathrm{n} \leq f/3$. Dan is $T \approx 1/(r^2 - 1) = 1/8$: nog ongeveer 12 % komt door. Bij $f/4$: 7 %.
3. **Weinig demping isoleert beter** boven $\sqrt{2}$ (de demper duwt zelf ook op de vloer), maar bij het aanlopen, als de machine door f_n gaat, is wat demping welkom. Rubber, met $\zeta \approx 0{,}05$, is een goed compromis.

Zachte veren betekenen inzakken: met de vuistregel van het eerste blad hoort bij $f_\mathrm{n} = 10\,\mathrm{Hz}$ een statische inzakking van 2,5 mm, bij 3 Hz al 28 mm. Voor lage storende frequenties wordt isoleren daardoor snel onpraktisch.

De ventilatie-unit van hoofdstuk 7 (12 kg op rubberen voeten van samen 30 kN/m, ventilator op 25 Hz): $f_\mathrm{n} = 7{,}96\,\mathrm{Hz}$, $r = 3{,}14$, en met $\zeta = 0{,}1$ is $T = 0{,}133$: 13 % van de trillingskracht bereikt de vloer.



Onder r = √2 versterken veren de trilling; erboven isoleren ze, en minder demping isoleert daar beter. Let op de logaritmische schaal.

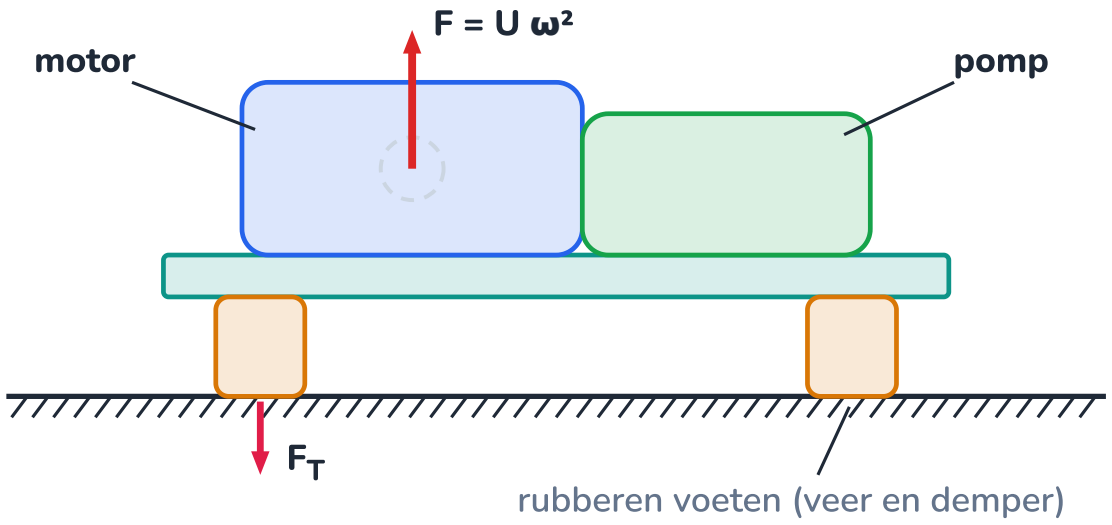
UITGEWERKT VOORBEELD · 11.14

Rubberdempers voor de drukpomp

14/18

De drukpomp van het drinkwater (hoofdstuk 7: 0,75 kW) staat met haar motor op een stalen grondplaat in de technische ruimte, samen 28 kg. De motor draait 2900 tpm. De houten vloer van de woonmodule geeft trillingen goed door (je hoort een pomp dan in de slaapkamer). Kies vier rubberen voeten uit de catalogus en bereken hoeveel van de trillingskracht nog doorkomt.

type (voorbeeldcatalogus)	stijfheid per voet	grootste last per voet	opbouw
A	25 kN/m	60 N	zacht rubber, drukbelast
B	40 kN/m	100 N	rubber, drukbelast
C	90 kN/m	250 N	rubber, drukbelast
D	250 kN/m	600 N	hard rubber, drukbelast
E	45 kN/m	250 N	rubber op afschuiving (duurder)



De draaiende delen wekken een kracht op; door de rubberen voeten komt maar een klein deel ervan op de vloer.

GEGEVEN

- $m = 28\,\text{kg}$ op vier voeten, $f = 2900/60 = 48{,}3\,\text{Hz}$, rubber $\zeta \approx 0{,}05$

GEVRAAGD

- een keuze, met f_n, T en de inzakking

OPLOSSING

1 **Eis.** Met de vuistregel $f_\text{n} \le f/3 = 16{,}1\,\text{Hz}$. Last per voet: $28 \cdot 9{,}81/4 = 68{,}7\,\text{N}$.

2 **Alle types doorgerekend** ($f_\text{n} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4k_1/m}$, T met $\zeta = 0{,}05$, inzakking $mg/(4k_1)$):

4 VOETEN VAN TYPE	F_N (HZ)	R	T	INZAKKING (MM)	LAST PER VOET
A	9,5	5,08	4,5 %	2,75	te zwaar (69 N)
B	12,0	4,02	7,1 %	1,72	in orde
C	18,0	2,68	16,8 %	0,76	in orde
D	30,1	1,61	63,7 %	0,27	in orde
E	12,8	3,79	8,0 %	1,53	in orde

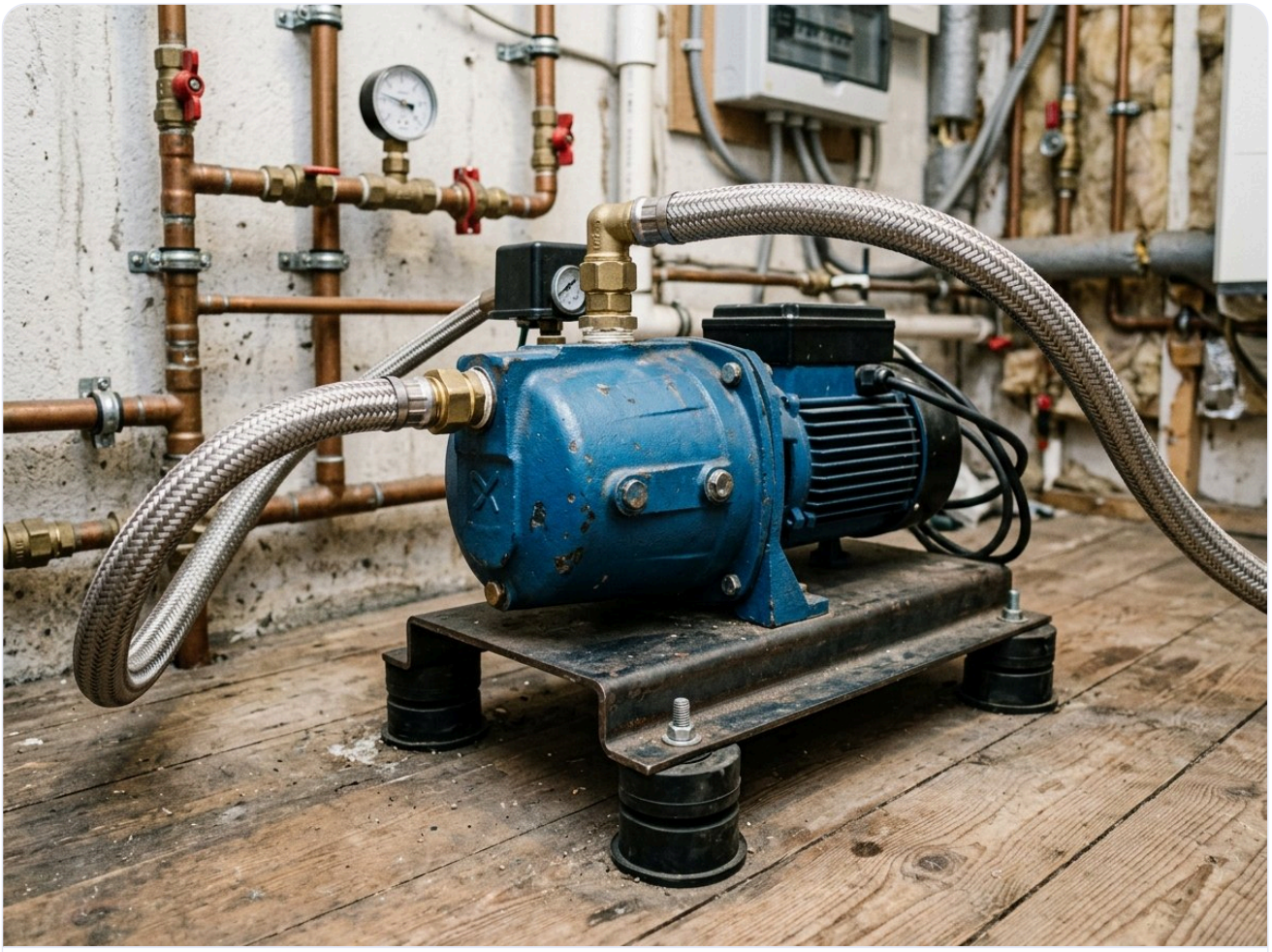
3 **Keuze.** Type A isoleert het best, maar is overbelast: rubber dat te zwaar belast wordt, kruipt en veroudert snel. C en D zijn te stijf. B en E voldoen allebei; B is eenvoudiger en goedkoper: $f_\text{n} = 12{,}0\,\text{Hz}$, $T = 0{,}071$, inzakking 1,7 mm.

4 **Aanlopen.** De motor gaat in minder dan een seconde door 12 Hz: te snel voor een opbouw ($\tau = 1/(\zeta\omega_\text{n}) = 0{,}26\,\text{s}$, maar de doorgang duurt maar een fractie daarvan). Leidingen sluit je aan met een stukje flexibele slang: een stijve buis zou de veren kortsluiten.

ANTWOORD

Vier voeten van type B: de pomp staat op 12,0 Hz, en nog 7 % van de trillingskracht bereikt de vloer. De pomp zakt 1,7 mm in.

Klopt dit? Snelle controle met $f_n \approx 15{,}8/\sqrt{\delta} = 15{,}8/\sqrt{1{,}72} = 12{,}0\ \text{Hz}$: klopt. Een pomp met een frequentieregelaar die ook traag kan draaien (bv. 20 Hz), zou met dezelfde voeten maar $T \approx 0{,}57$ halen: hoe lager de laagste storende frequentie, hoe zachter de voeten moeten zijn.



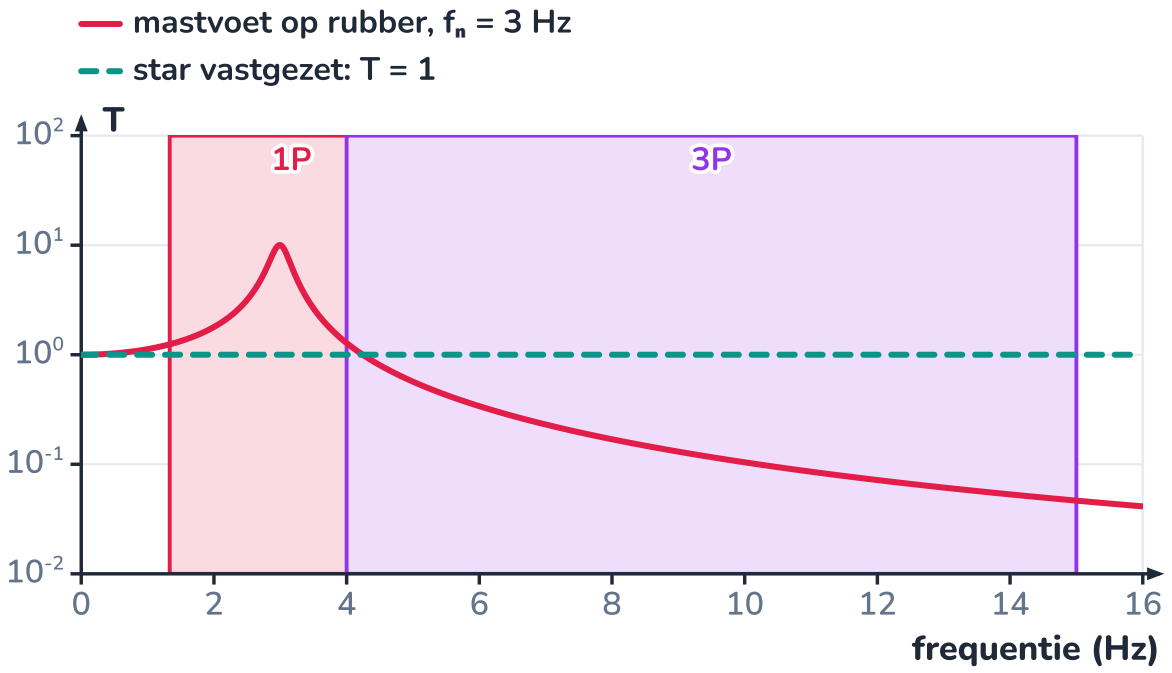
Rubberen voeten onder de pomp en flexibele slangen naar de leidingen: zo blijft de trilling bij de machine.

UITGEWERKT VOORBEELD · 11.15

Habitat: de windturbine isoleren van het station

15/18

Iemand stelt voor de turbine op het dak van de woonmodule te zetten, op een kort mastje met rubberen dempers eronder: geen fundering, een korte kabel. Kan dat de trillingen van de rotor (1P: 1,33 tot 5,0 Hz; 3P: 4,0 tot 15 Hz) van het station isoleren? Zo nee, hoe dan wel?



Met rubber onder de mastvoet (f_n = 3 Hz) komt in de hele 1P-band meer kracht door dan zonder (T > 1); pas in het hoge deel van de 3P-band helpt het.

GEGEVEN

- frequentiebanden 1P en 3P in bedrijf
- rubber $\zeta = 0{,}05$
- houtskelet: een lichte constructie die trillingen goed doorgeeft

GEVRAAGD

- de vereiste f_n en inzakking
- een besluit voor Habitat

OPLOSSING

1. **Alles isoleren.** Isoleren kan pas boven $\sqrt{2}\,f_n$; de laagste storende frequentie is 1P bij 80 tpm, 1,33 Hz. Dus $f_n < 1{,}33/\sqrt{2} = 0{,}94\,\text{Hz}$, en dat betekent een statische inzakking van $g/\omega_n^2 = 28\,\text{cm}$. Een turbine die op zulke zachte veren staat, kantelt bij de eerste windstoot om.

2. **Alleen 3P isoleren.** Dan moet $f_n < 2{,}83\,\text{Hz}$: nog altijd 31 mm inzakking, en de 1P-band zou er juist middenin liggen. Met realistische voeten (bv. $f_n = 3\,\text{Hz}$) toont de figuur het resultaat: bij 80 tpm komt 1,2 keer de kracht door, rond 3 Hz tien keer, en pas vanaf 5,2 Hz minder dan de helft.

3. **Zonder rubber**, star vastgezet: alle kracht komt door ($T = 1$), en een houten dak heeft zelf eigenfrequenties in de buurt van de 3P-band. Bovendien is de wind boven een dak turbulent: minder opbrengst, meer wisselende lasten.

4. **Besluit.** De beste isolatie is geen verbinding. De turbine krijgt een eigen mast en een eigen fundering op 15 m van de woonmodule (meer dan de valafstand: 12 m mast + 2 m blad). De enige verbinding is de kabel, ondergronds in een mantelbuis met een lus bij de mastvoet. Rubberdempers komen waar ze wél werken: onder de machines ín het station (vorig voorbeeld, en later de warmtepomp).

ANTWOORD

Op het dak isoleren is onmogelijk: voor 1P zou de turbine 28 cm moeten inzakken. De turbine staat daarom op een eigen mast met eigen fundering, 15 m van de woonmodule; alleen een kabel verbindt ze met het station.

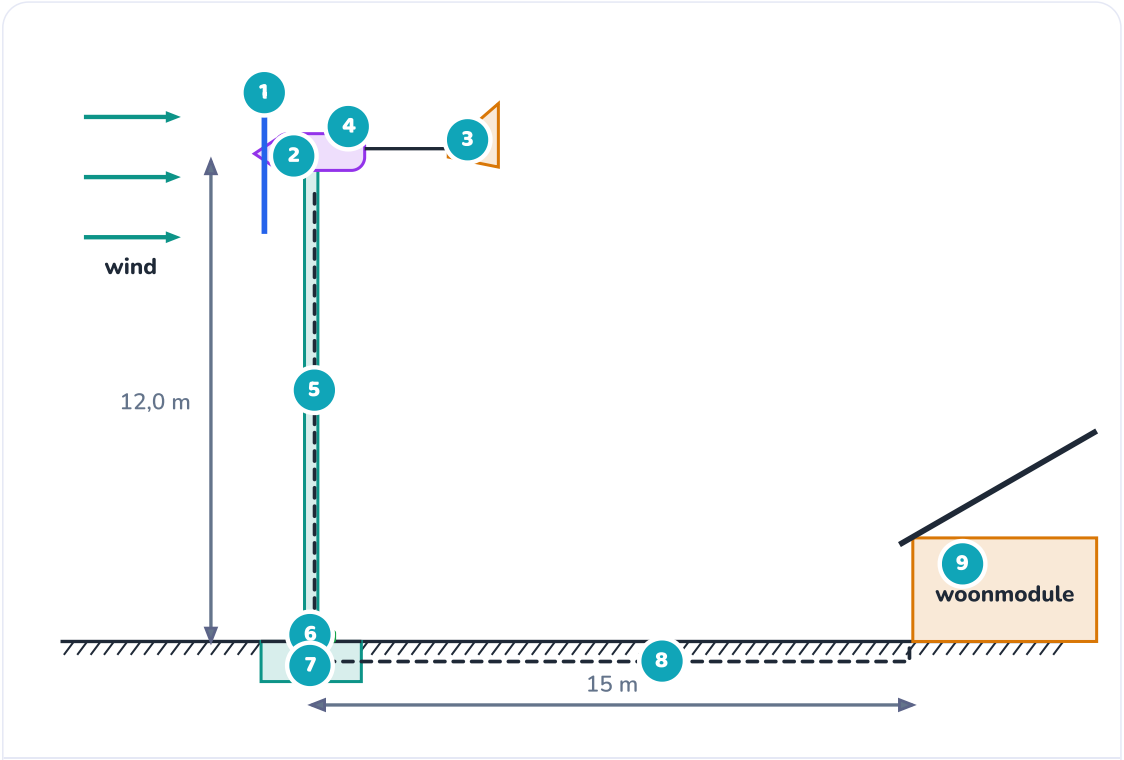
Klopt dit? Dit is een algemene les: isoleren werkt goed tegen hoge frequenties (pompen, ventilatoren, compressoren: 25 tot 100 Hz) en slecht tegen lage (een rotor van een paar hertz, voetgangers, verkeer). Tegen lage frequenties helpen afstand, massa en demping aan de bron. Praktijkproeven met kleine turbines op daken gaven bovendien teleurstellend weinig energie.

ONTLEED · 11.16

De windturbine van het station ontleed

16/18

Elk onderdeel van de turbine heeft een rol in het trillingsverhaal van dit hoofdstuk: als bron, als veer, als massa, als demper of als bewaker.



Zijaanzicht (schematisch, afstanden op schaal): de wind komt van links; de rotor draait vóór de mast.

1 Rotor (Ø 4,0 m, 3 bladen)
Bron van 1P (onbalans, een blad dat anders is) en 3P (elk blad passeert de mast en ziet andere wind boven en onder). In bedrijf dempt hij de mast ook: ±3 %.

2 Gondel met generator (150 kg samen met de rotor)
De grootste massa van het systeem: ze bepaalt samen met de stijfheid van de mast de eerste eigenfrequentie. De generator werkt hoofdstuk 19 uit.

3 Windvaan en uit-de-windmechanisme
Houdt de rotor in de wind en draait hem boven ±15 m/s weg: zo blijven toerental en stuwkracht begrensd.

4 Versnellingsmeter
Meet de trilling van de gondel. Het brein kijkt naar het niveau bij f_1 en bij 1P: een blad met ijs of schade verhoogt de onbalans; dan stopt de turbine.

5 Mast (buis 244,5 × 5,0 mm, 12,0 m)
De veer van het systeem (9,8 kN/m aan de top) en een deel van de massa. Ze is bewust 'zacht' gekozen: eigenfrequentie onder 1P in bedrijf.

6 Flens en ankerbouten
Verbinden mast en fundering. Hier is het buigmoment het grootst en wisselt het honderden miljoenen keren in de levensduur: vermoeiing (hoofdstuk 12 en 46).

7 Eigen fundering
Een betonblok dat de mast inklemt. Géén verbinding met de fundering van het station: dat is de eigenlijke trillingsisolatie.

8 Kabel in een mantelbuis
De enige verbinding met het station: ondergronds, met een lus bij de voet, zodat ze geen trillingen of trekkrachten doorgeeft.

9 Woonmodule op 15 m
Verder dan de valafstand (12 m mast + 2 m blad). Rubberdempers staan hier wel: onder de pomp, de ventilatie-unit en later de warmtepomp.

NASLAG · 11.17

Trillingen: formules en werkwijze

17/18

Werkwijze: (1) zoek de massa en de veer (stijfheid uit een formule, een inzakking of een trekproef; meebewegende massa); (2) bereken f_n; (3) zoek alle aandrijffrequenties (toerental, 1P, 3P, netfrequentie, stappen) en hun bereik; (4) vergelijk: marge tegenover resonantie, of $r > \sqrt{2}$ voor isolatie; (5) schat de demping en reken de amplitude of de doorgegeven kracht; (6) simuleer wat geen formule heeft.

bewegingsvergelijking

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

symbool	betekenis	eenheid
m	massa	kg
c	dempingsconstante	N·s/m
k	veerconstante	N/m

eigenfrequentie

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}, \quad f_0 \approx 15{,}8/\sqrt{\delta_\mathrm{mm}}$$

symbool	betekenis	eenheid
ω_0	eigenhoekfrequentie	rad/s
δ	statische inzakking	mm

slinger en fysische slinger

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}, \quad T = 2\pi\sqrt{I_O/(mgd)}$$

demping

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad \omega_\mathrm{d} = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad Q = \frac{1}{2\zeta}$$

symbool	betekenis	eenheid
ζ	dempingsverhouding	-

gedwongen trilling

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}, \quad \tan\varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

symbool	betekenis	eenheid
r	frequentieverhouding ω/ω_0	-

onbalans

$$F = U\omega^2, \quad \frac{X}{U/m} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

symbool	betekenis	eenheid
U	onbalans $m_\mathrm{u}e$	kg·m

transmissibiliteit

$$T = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}, \quad T < 1 \text{ als } r > \sqrt{2}$$

ingeklemde mast met topmassa

$$k = \frac{3EI}{L^3}, \quad m_\mathrm{eff} = m_\mathrm{top} + \tfrac{33}{140}m_\mathrm{mast}$$

aerodynamische demping van een rotor

$$c_\mathrm{aero} = \rho A C_\mathrm{T} v$$

gebied	amplitude	fase	wat helpt
$r \ll 1$ (traag duwen)	$X \approx F_0/k$	mee met de kracht	een stijvere veer
$r \approx 1$ (resonantie)	$X = F_0/(c\,\omega_0)$	90° achter	demping
$r \gg 1$ (snel duwen)	$X \approx F_0/(m\omega^2)$	tegengesteld	meer massa

HET GEHEEL · 11.18

Waar trillingen vandaan komen en waar ze heen gaan

18/18

Trillingen brengen samen wat de vorige hoofdstukken apart opbouwden: de tweede wet van Newton als differentiaalvergelijking, de sinus als draaiende wijzer, de fasor, de simulatie met Heun. Dezelfde wiskunde komt terug in de elektrische kring met spoel en condensator (een LC-kring trilt, een RLC-kring resoneert), in regelsystemen (tweedeordesystemen met doorschot) en in signaalverwerking (frequenties in een meting). In constructies (K) en ontwerpen (D) is het een vraag die bij elke machine terugkomt.

F11 Krachten
De wet van Hooke: een veer met veerconstante k.

I8 De wetten van Newton
F = ma en het vrijlichaamsdiagram: de basis van de bewegingsvergelijking.

I31 Regelsystemen
Een regeling kan zelf gaan trillen: hysterese en vertraging.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
Euler en Heun, tweede orde als stelsel: zo simuleer je een trilling.

E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren
Fasoren, de karakteristieke vergelijking en de gedwongen trilling in één regel.

E8 Beweging in twee dimensies
Een eenparige cirkelbeweging geprojecteerd op een as is een harmonische trilling; de middelpuntzoekende kracht van een onbalans.

E10 Rotatie
Traagheidsmoment en de fysische slinger; draaiende machines.

E12 Sterkteleer
De stijfheid van de mast (k = 3EI/L³), haar dimensionering en de knik (dezelfde differentiaalvergelijking).

E13 Vakwerken en constructieanalyse
Het idee van de eindige-elementenmethode: het balkmodel dat f_2 gaf.

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie
De generator van de windturbine.

E20 Wisselstroom
De RLC-kring: resonantie en kwaliteitsfactor in de elektrotechniek.

E21 Filters en signaalverwerking
Frequenties in een meting: het spectrum van de versnellingsmeter in de gondel.

E38 Dynamische systemen modelleren
Tweedeordesystemen, doorschot en de overdrachtsfunctie.

E46 Betrouwbaarheid en risico
Vermoeiing en faalwijzen van trillende onderdelen.

Habitat
Habitat heeft nu een windturbine: 3,0 kW bij 11 m/s, rotor Ø 4,0 m, 80 tot 300 tpm, gondel en rotor 150 kg, op een vrijstaande stalen buis van 12,0 m (244,5 × 5,0 mm) met een eigen fundering op 15 m van de woonmodule. De mast is 'zacht': eerste eigenfrequentie 1,03 Hz, tweede 8,2 Hz; de regelaar vermijdt 62 en 163 tpm, een versnellingsmeter

in de gondel meldt trillingen aan het brein. De drukpomp staat op vier rubberen voeten (12 Hz, 7 % doorgang). Hoofdstuk 12 dimensioneert de mast, hoofdstuk 19 de generator.

SAMENVATTING

In het kort

- Een massa aan een veer trilt harmonisch: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ met $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; het gewicht verschuift alleen het evenwicht, en $f_0 \approx 15{,}8/\sqrt{\delta_{\text{mm}}}$.
- Een slinger heeft $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ voor kleine hoeken; elk stabiel evenwicht gedraagt zich dichtbij als een veer met $k = U''(x_0)$.
- Demping: $\zeta = c/(2\sqrt{km})$; onder 1 dooft de trilling uit met $\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}$; uit een meting volgt ζ uit het logaritmisch decrement $\delta \approx 2\pi\zeta$; $Q = 1/(2\zeta)$.
- Een gedwongen trilling volgt de frequentie van de kracht; bij $r = 1$ is de amplitude Q keer de statische, en de opbouw duurt enkele keren $1/(\zeta\omega_0)$.
- Onbalans geeft $U\omega^2$ (1P); bladen die de mast passeren geven 3P. Een Campbell-diagram toont de kritische toerentallen.
- Isoleren kan pas boven $\sqrt{2}\,f_{\text{n}}$; kies $f_{\text{n}} \le f/3$. Tegen lage frequenties helpen afstand, massa en demping, niet rubber.
- Habitat: de windturbine (3 kW, Ø 4 m) staat op een zachte mast ($f_1 \approx 1{,}03$ Hz) met een eigen fundering op 15 m van het station.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

harmonische trilling
Een beweging $x = A\cos(\omega t + \varphi)$; ze ontstaat als de terugroepende kracht evenredig is met de uitwijking ($F = -kx$).

eigenfrequentie
De frequentie waarmee een systeem uit zichzelf trilt; voor een massa aan een veer $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$.

dempingsverhouding
$\zeta = c/(2\sqrt{km})$: de demping gedeeld door de kritische demping; onder 1 trilt het systeem uit, vanaf 1 kruipt het terug.

logaritmisch decrement
$\delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$: het natuurlijk logaritme van de verhouding van twee opeenvolgende toppen.

kwaliteitsfactor
$Q = 1/(2\zeta)$: hoeveel keer groter de amplitude bij resonantie is dan bij een even grote, trage kracht.

resonantie
Het sterke meetrillen van een systeem dat aangedreven wordt met (bijna) zijn eigenfrequentie; alleen de demping begrenst de amplitude.

onbalans
Een draaiend deel waarvan het zwaartepunt niet op de as ligt; het geeft een draaiende kracht $U\omega^2$ met $U = m_{\text{u}}e$.

Campbell-diagram
Grafiek van de aandrijffrequenties van een draaiende machine (1P, 2P, 3P …) tegenover het toerental, samen met de eigenfrequenties: de snijpunten zijn de gevaarlijke toerentallen.

transmissibiliteit

T: de verhouding van de kracht (of beweging) die door een verende steun doorkomt tot die aan de bron; kleiner dan 1 pas als $f > \sqrt{2}\, f_{\mathrm{n}}$.

gestemde massademper

Een kleine massa op een veer met demping, afgestemd op de eigenfrequentie van een constructie; ze trilt tegen de constructie in en neemt energie weg.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 12

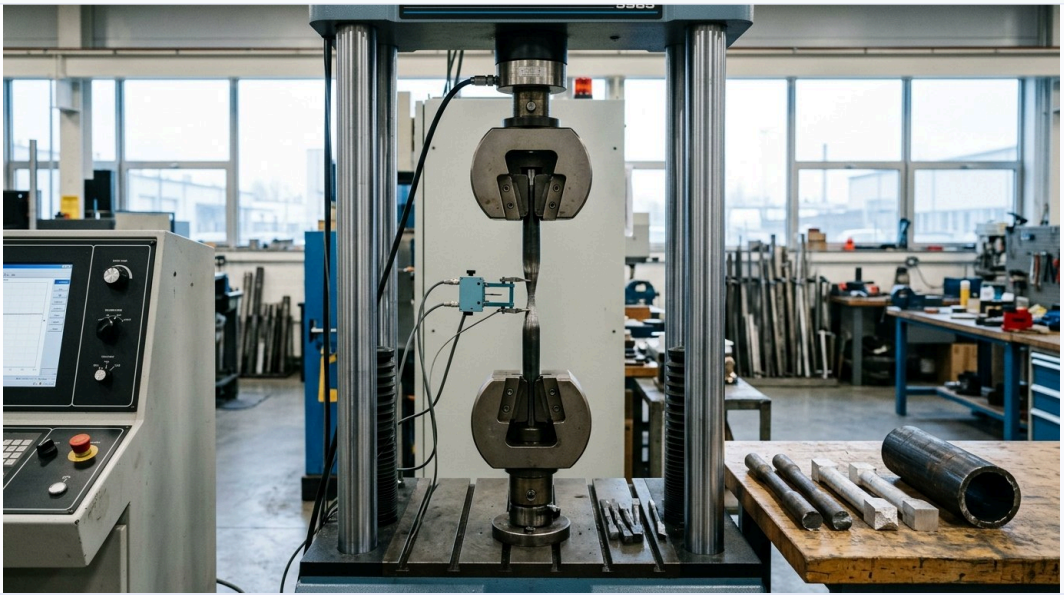
Sterkteleer

Wat er in een staaf, een balk en een mast gebeurt als je ze belast, en hoe dik ze moeten zijn

Een constructie moet drie dingen: niet breken, niet te ver doorbuigen en niet knikken. **Sterkteleer** rekent dat uit. Je leert **spanning** en **rek** kennen en wat een materiaal ermee doet in het **spanning-rekdiagram**, hoe ingenieurs met een **veiligheidsfactor** onzekerheid opvangen, hoe een balk buigt (moment, traagheidsmoment, doorbuiging) en waarom een slanke drukstaaf plots opzij springt (**knik**, Euler). Voor Habitat controleer je de vloerbalk onder het reservoir, het kasframe onder sneeuw en de weermast, en kies je de buis van de mast van de windturbine.

7× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

K Krachten, beweging en constructies · M Materie en chemie · D Ontwerpen en maken



Een trekproef: de staaf wordt langer, dunner in het midden, en breekt. Uit die ene proef haal je de getallen waarmee dit hoofdstuk rekent.

Na dit hoofdstuk

- Je kan normaalspanning, rek en de elasticiteitsmodulus gebruiken om te berekenen hoeveel een staaf rekt en welke doorsnede ze nodig heeft.
- Je kan een spanning-rekdiagram lezen (elastisch, vloeien, versteviging, insnoering, breuk) en taaie en brosse materialen onderscheiden.
- Je kan een veiligheidsfactor, een toelaatbare spanning en de partiële factoren van de Eurocode verklaren en toepassen.
- Je kan dwarskracht en buigmoment van een balk bepalen, de buigspanning My/I afleiden en traagheidsmomenten van doorsneden berekenen, ook met de verschuivingsstelling.
- Je kan de doorbuiging van een balk berekenen met de elastische lijn, met formules voor standaardgevallen en numeriek in Python.
- Je kan de kniklast van Euler afleiden en toepassen met de juiste kniklengte en slankheid, en een mast volledig dimensioneren.

VERHAAL · 12.1

Euler en de knik

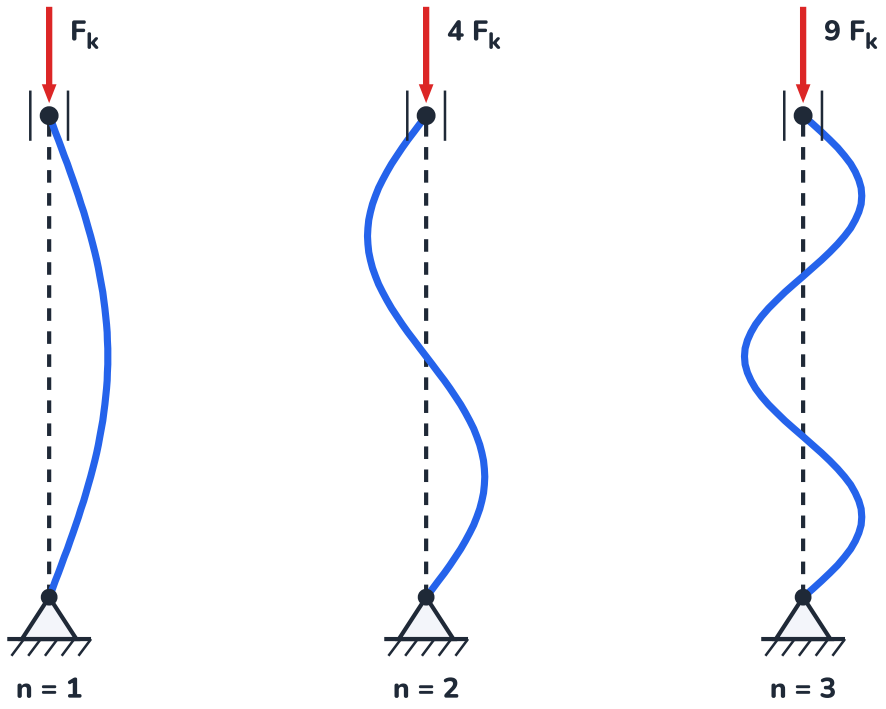
In 1742 schreef Daniel Bernoulli aan zijn vriend Leonhard Euler een idee: een gebogen elastische staaf neemt de vorm aan waarbij de som van de kwadraten van haar kromming zo klein mogelijk is. Euler werkte het uit met de variatierekening en publiceerde het in 1744, als bijlage *De curvis elasticis* bij een boek over krommen met een extreme eigenschap. Hij vond alle vormen die een gebogen staaf kan aannemen, en daartussen een merkwaardig resultaat: een rechte staaf die op druk belast wordt, blijft recht tot een bepaalde kracht, en daarboven bestaat er plots een gebogen evenwicht. In 1757 schreef hij er een apart stuk over, *Sur la force des colonnes*. Dat is de **kniklast** die nog altijd zijn naam draagt.

Euler rekende met een 'absolute elasticiteit' van de staaf. Pas later kon men die opsplitsen in een materiaaleigenschap (de elasticiteitsmodulus, Thomas Young, 1807) en een eigenschap van de vorm van de doorsnede (het traagheidsmoment, in de buigtheorie van Claude Navier, 1826): samen EI. Ingenieurs vertrouwden de formule lang niet, want hun proeven op korte, dikke kolommen klopten er niet mee: die bezwijken door verbrijzelen of vloeien, niet door knik. Pas zorgvuldige proeven in de negentiende eeuw toonden dat Euler gelijk heeft voor slanke staven, en dat daartussen een overgangsgebied ligt.

Hoe duur het is om knik te vergeten, toonde de **Quebec Bridge** (hoofdstuk 13 van F). Op 29 augustus 1907 knikten de onderste drukstaven van de half gebouwde brug, en 75 van de 86 arbeiders kwamen om. Het onderzoek wees twee oorzaken aan. De overspanning was verlengd tot ongeveer 549 m zonder het eigengewicht opnieuw te berekenen, zodat de staven zwaarder belast waren dan ontworpen. En de reusachtige drukstaven bestonden uit vier platen die met een rooster van lichte strippen verbonden waren; dat rooster was te zwak, zodat de staaf zich niet als één geheel gedroeg maar als vier slanke platen. Knik hangt niet alleen af van hoeveel materiaal er is, maar van hoe het samenwerkt: van I.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Elk onderdeel van Habitat moet een getal krijgen: hoe dik, welk profiel, welk materiaal. De windturbine van hoofdstuk 11 staat op een mast van 12 m die een storm moet doorstaan zonder te breken, zonder te ver te wijken en zonder dat haar eigenfrequentie in de verkeerde band belandt. Dat vraagt spanningen, doorbuigingen en knik in één berekening.



kniklast van de n-de vorm: $n^2\,\pi^2\,EI / L^2$

Een staaf op druk blijft recht tot de kniklast van Euler; hogere knikvormen vragen 4, 9, … keer meer kracht, maar een staaf kiest altijd de eerste.

UITLEG · 12.2

Spanning, rek en de elasticiteitsmodulus

2/20

wat je al kan	wat nu komt
trek, druk, buiging, knik als verschijnsel; het stijfheidsgetal bh^3 (hoofdstuk 13 van F)	spanning, rek, traagheidsmoment $bh^3/12$ en de kniklast in getallen
materiaaleigenschappen, de wet van Hooke voor een veer (hoofdstuk 10 en 11 van F)	de wet van Hooke voor een materiaal: $\sigma = E\varepsilon$
evenwicht, reacties en de vloerbalk onder het reservoir (hoofdstuk 10 van I)	wat er *in* de balk gebeurt: moment, spanning, doorbuiging
afgeleiden en integralen (hoofdstuk 1 en 3), staafkrachten van een vakwerk (hoofdstuk 5)	$\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$, de elastische lijn, en welke doorsnede een staafkracht aankan

Trek aan een staaf met een kracht F. Een twee keer zo dikke staaf rekt half zoveel; een twee keer zo lange staaf rekt twee keer zoveel. Om over het *materiaal* te kunnen praten, los van de afmetingen, deel je de kracht door de doorsnede en de verlenging door de lengte:

NORMAALSPANNING, REK EN DE WET VAN HOOKE VOOR EEN MATERIAAL

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad \sigma = E\,\varepsilon \qquad \Delta L = \frac{FL}{EA}$$

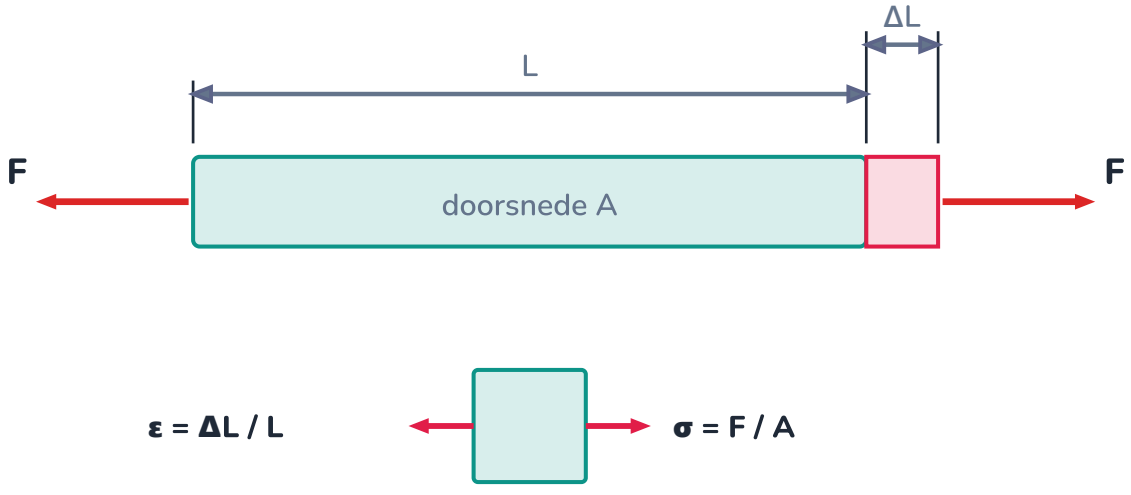
σ in N/mm² = MPa (1 MPa = 10^6 Pa); ε zonder eenheid. E is de elasticiteitsmodulus: de helling van het rechte begin van het spanning-rekdiagram. EA/L is de veerconstante van de staaf.

Druk is dezelfde formule met een minteken: $\sigma < 0$, de staaf wordt korter. Terwijl een staaf langer wordt, wordt ze ook iets dunner: de **dwarscontractie** $\varepsilon_{\text{dwars}} = -\nu\varepsilon$, met $\nu \approx 0{,}3$ voor metalen (coëfficiënt van Poisson). Een kracht *evenwijdig* aan een doorsnede geeft een **schuifspanning** $\tau = F/A$: zo reken je een bout die op afschuiving belast wordt.

Een tank onder druk. Snij een dunwandige cilinder (straal r, wanddikte t, overdruk p) in gedachten in de lengte door. Op een stuk van lengte L duwt de druk de helften uit elkaar met $p \cdot 2rL$; twee wanden houden ze samen met $2tL\sigma$. Dus is de **ringspanning** $\sigma = pr/t$. Voor de drinkwatertank van het station (hoofdstuk 2) is de druk onderaan $\rho g h = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}05 = 10{,}3\,\text{kPa}$; met $r = 0{,}39\,\text{m}$ en een wand van 8 mm (rekenwaarde) is $\sigma = 0{,}50\,\text{MPa}$, ver onder wat HDPE op lange termijn verdraagt (enkele MPa). De wand is dus dik om andere redenen: stijfheid, hanteren, het gietproces. Bij grote stalen opslagtanks beslist de ringspanning wel, en daarom zijn die breed en laag (opdracht 2.13).

materiaal (rekenwaarden)	E (GPa)	vloeigrens of $R_{p0,2}$ (MPa)	treksterkte R_m (MPa)	rek bij breuk	ρ (kg/m³)
staal S235	210	≥ 235	360 à 510	≥ 26 %	7850
staal S355	210	≥ 355	470 à 630	≥ 22 %	7850
aluminium 6063-T6 (profielen, kasframe)	70	≥ 170	≥ 215	±10 %	2700
vuren C24, langs de vezel (karakteristiek)	11 (gemiddeld)	-	trek 14,5; buiging 24; druk 21	klein	±420
beton C30/37	±33	-	druk 30; trek ±2,9	bros	2400
PETG, 3D-geprint (orde van grootte)	±2	-	±50 langs de lijnen, minder tussen de lagen	enkele %	1270

Let op de orde van grootte: een rek van 10^{-3} (0,1 %) is voor staal al 210 MPa, bijna de vloeigrens. In het elastische gebied veranderen metalen onderdelen dus maar duizendsten van hun lengte. Hout is 19 keer soepeler dan staal, en ook 19 keer lichter.



Spanning is kracht per oppervlakte, rek is verlenging per lengte. Hun verhouding is een materiaaleigenschap: de elasticiteitsmodulus.

UITGEWERKT VOORBEELD · 12.3

Habitat: de staven van de paneelsteun

3/20

Hoofdstuk 5 rekende de staafkrachten van de steun van het zonnepaneel bij storm (wind en gewicht). We maken de steun uit aluminium kokers 30 × 30 × 2 mm (6063-T6) en verbinden de staven met bouten M8. Bereken voor elke staaf de spanning, de rek en de verlenging, en de schuifspanning in de bout van de zwaarst belaste staaf.

GEGEVEN

- koker 30 × 30 × 2 mm: $A = 30^2 - 26^2 = 224\,\text{mm}^2$, $E = 70\,\text{GPa}$
- staafkrachten bij storm (hoofdstuk 5, trek positief); bout M8 in enkele afschuiving

GEVRAAGD

- σ, ε, ΔL per staaf; τ in de bout

OPLOSSING

1 Per staaf $\sigma = F/A$, $\varepsilon = \sigma/E$ en $\Delta L = \varepsilon L$:

STAAF	LENGTE (MM)	KRACHT (N)	$\Sigma = F/A$ (MPA)	$E = \Sigma/E$	ΔL (MM)
AC voorpaal	200	−542	−2,42	$-35{\cdot}10^{-6}$	−0,0069
CD paneelregel	1000	−429	−1,91	$-27{\cdot}10^{-6}$	−0,0273
BD achterpaal	1066	372	1,66	$24{\cdot}10^{-6}$	0,0253
AB grondregel	500	−429	−1,91	$-27{\cdot}10^{-6}$	−0,0137
BC diagonaal	538	462	2,06	$29{\cdot}10^{-6}$	0,0159

2 De voorpaal draagt het meest: $\sigma = -541{,}6/224 = -2{,}42\,\text{MPa}$. De bout die hem vasthoudt, wordt afgeschoven over zijn doorsnede $\pi \cdot 8^2/4 = 50{,}3\,\text{mm}^2$: $\tau = 541{,}6/50{,}3 = 10{,}8\,\text{MPa}$ (de schroefdraad buiten de snede gelaten).

3 Is een drukstaaf ook stabiel? De paneelregel is de langste drukstaaf (1,00 m, 429 N). Het verderop in dit hoofdstuk afgeleide knikgetal $\pi^2 EI/L^2$ geeft met $I = (30^4 - 26^4)/12 = 29\,419\,\text{mm}^4$: $F_\text{k} = 20{,}3\,\text{kN}$, 47 keer de belasting.

ANTWOORD

De grootste spanning is 2,4 MPa, tegenover een vloeigrens van minstens 170 MPa: een factor 70. De staven worden hoogstens enkele honderdsten van een millimeter langer of korter.

Klopt dit? Zulke grote marges zijn normaal voor kleine constructies. Het profiel wordt gekozen om andere redenen: stijfheid (het paneel mag niet meetrillen), knik, ruimte voor bouten, stevigheid bij het monteren en tegen een klap, en de verbindingen. Dat de doorsnede hier 'te groot' is, is geen verspilling maar gezond verstand. Bij grote constructies (de mast verderop, een brug) is het anders: daar telt elke kilogram.

UITLEG · 12.4

Het spanning-rekdiagram

4/20

In een **trekproef** trekt een machine een proefstaaf langzaam uit tot ze breekt, en meet ze kracht en verlenging. Gedeeld door de oorspronkelijke doorsnede en lengte geeft dat het spanning-rekdiagram

(volgend blad). Het begin, uitvergroot in de figuur, is een rechte met helling E: het **elastische gebied**. Laat je daar los, dan keert de staaf terug naar haar lengte.

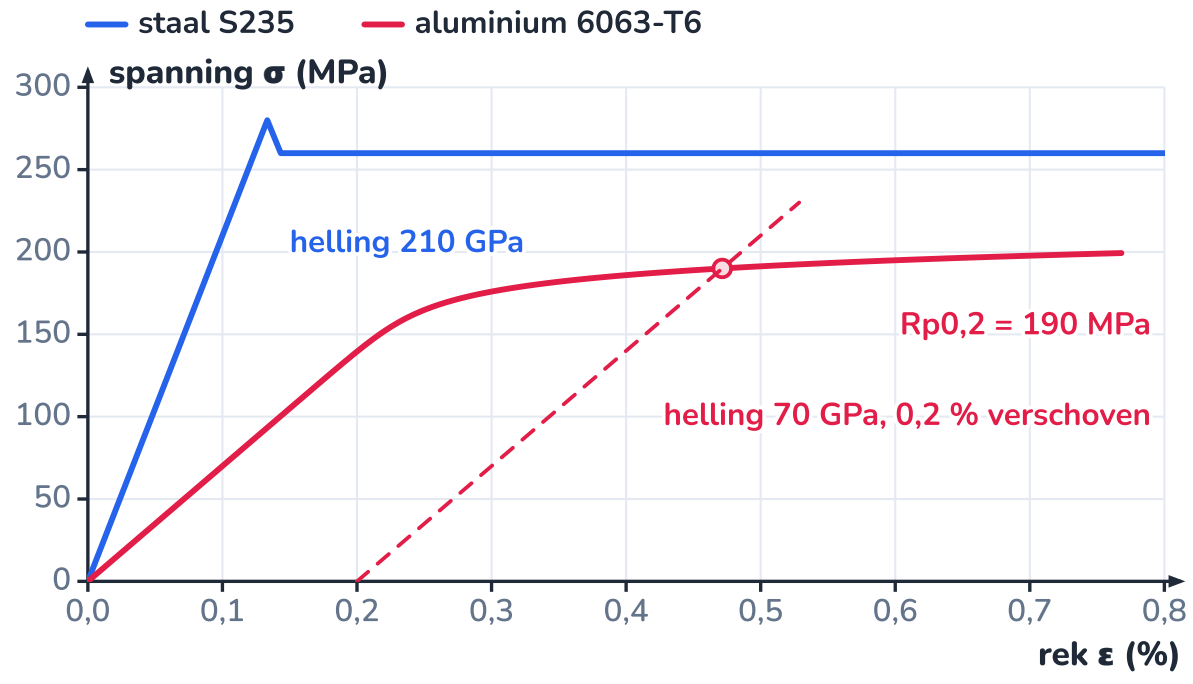
Bouwstaal (S235, S355) heeft daarna een scherpe **vloeigrens**: de staaf rekt verder zonder dat de kracht stijgt. Aluminium en de meeste andere metalen gaan geleidelijk over; daar kiest men als grens de spanning waarbij na ontlasten 0,2 % blijvende rek overblijft, $R_{\mathrm{p0,2}}$: het snijpunt van de kromme met een rechte met helling E door 0,2 %. Daarna volgt **versteviging**: het materiaal wordt harder naarmate het vervormt, tot de **treksterkte** R_{m}. Dan snoert de staaf plaatselijk in en breekt ze. De blijvende rek bij breuk heet de **breukrek** A.

Taai en bros. Staal en aluminium zijn *taai*: ze vervormen zichtbaar voor ze breken, en ze waarschuwen. Glas, beton onder trek, gietijzer en een 3D-print tussen zijn lagen zijn *bros*: ze breken in het rechte stuk van het diagram. Een taai onderdeel verdeelt bovendien pieken: waar de spanning plaatselijk de vloeigrens haalt (rond een gat, in een hoek), vloeit het materiaal een beetje en neemt de omgeving over. Een bros onderdeel scheurt daar.

Energie. De oppervlakte onder het diagram is de arbeid per volume, $\int \sigma \, \mathrm{d}\varepsilon$ (hoofdstuk 3). Tot aan de breuk is dat voor het staal van het model ongeveer 103 MJ/m³ (MPa maal rek): de reden waarom een kreukelzone (hoofdstuk 9) uit dun staal bestaat dat plooit en vloeit.

Een sterker staal is ook stijver

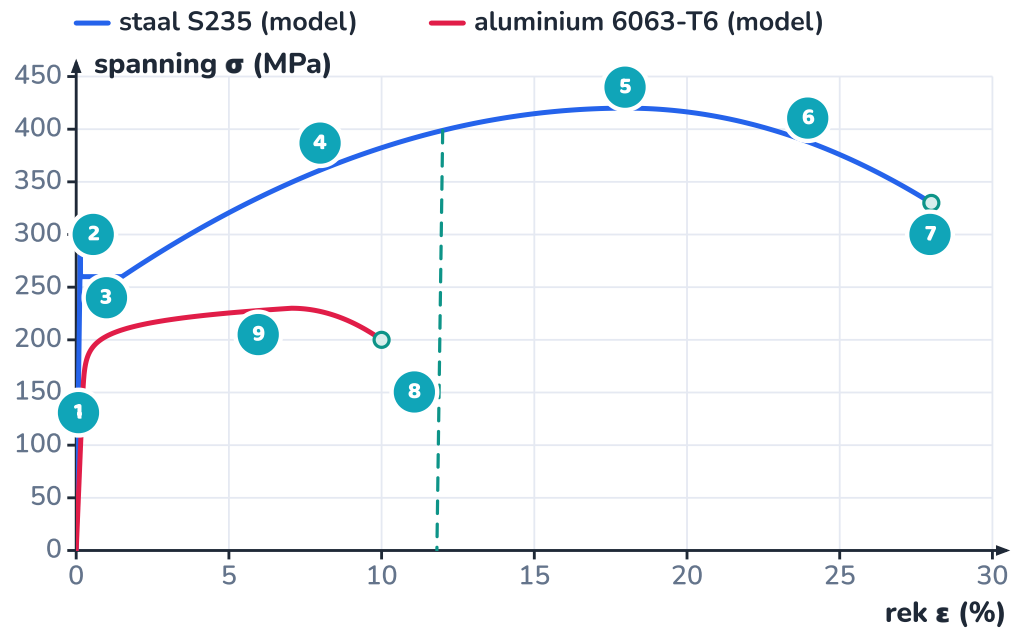
S355 is 50 % sterker dan S235, maar precies even stijf: $E = 210\,\mathrm{GPa}$ voor alle staalsoorten. Wie een mast of balk moet verstijven (minder doorbuiging, hogere eigenfrequentie), heeft niets aan een sterkere staalsoort; alleen een grotere I helpt. Sterkte en stijfheid zijn verschillende dingen.



Het begin van het diagram: rechte lijnen met helling E. Staal vloeit bij een scherpe grens; bij aluminium neem je het snijpunt met een rechte die 0,2 % verschoven is.

Het spanning-rekdiagram ontleed

De volledige diagrammen van een staaf S235 en een staaf aluminium 6063-T6. Het zijn modelkrommen met waarden zoals een echte trekproef ze geeft (een echte staaf ligt meestal boven de minimale waarden uit de norm).



Op deze schaal is het elastische stuk een bijna verticale lijn bij ε ≈ 0: de blijvende vervorming is honderd keer groter dan de elastische.

1 Elastisch gebied
Rechte met helling E = 210 GPa, tot een rek van ongeveer 0,13 %. Alles wat Habitat normaal belast, blijft hier.

2 Bovenste en onderste vloeigrens
Bouwstaal houdt eerst iets meer (280 MPa), springt dan terug naar een plateau (260 MPa). De norm eist voor S235 minstens 235 MPa.

3 Vloeiplateau
Tot ±1,5 % rekt de staaf verder bij dezelfde kracht: banden van vloeiend materiaal lopen door de staaf.

4 Versteviging
Het materiaal wordt harder naarmate het vervormt (roosterfouten raken in elkaar verstrikt, hoofdstuk 28).

5 Treksterkte Rm
De top: 420 MPa. Hier begint de staaf plaatselijk in te snoeren.

6 Insnoering
De doorsnede wordt plaatselijk kleiner; de kracht daalt, al stijgt de echte spanning in de hals nog.

7 Breuk
Na ±28 % rek (de norm eist voor S235 minstens 26 %): een taai materiaal dat ruim waarschuwt.

8 Ontlasten
Wie bij 12 % loslaat, zakt langs een rechte met helling E terug: bijna 12 % blijft. Opnieuw belasten gaat langs dezelfde rechte: het staal is sterker geworden (koud vervormd).

9 Aluminium 6063-T6
Geen vloeiplateau, Rp0,2 ±190 MPa, Rm ±230 MPa, breuk bij ±10 %: minder taai dan staal, en drie keer zo soepel (E = 70 GPa).

Buiging: dwarskracht en buigmoment

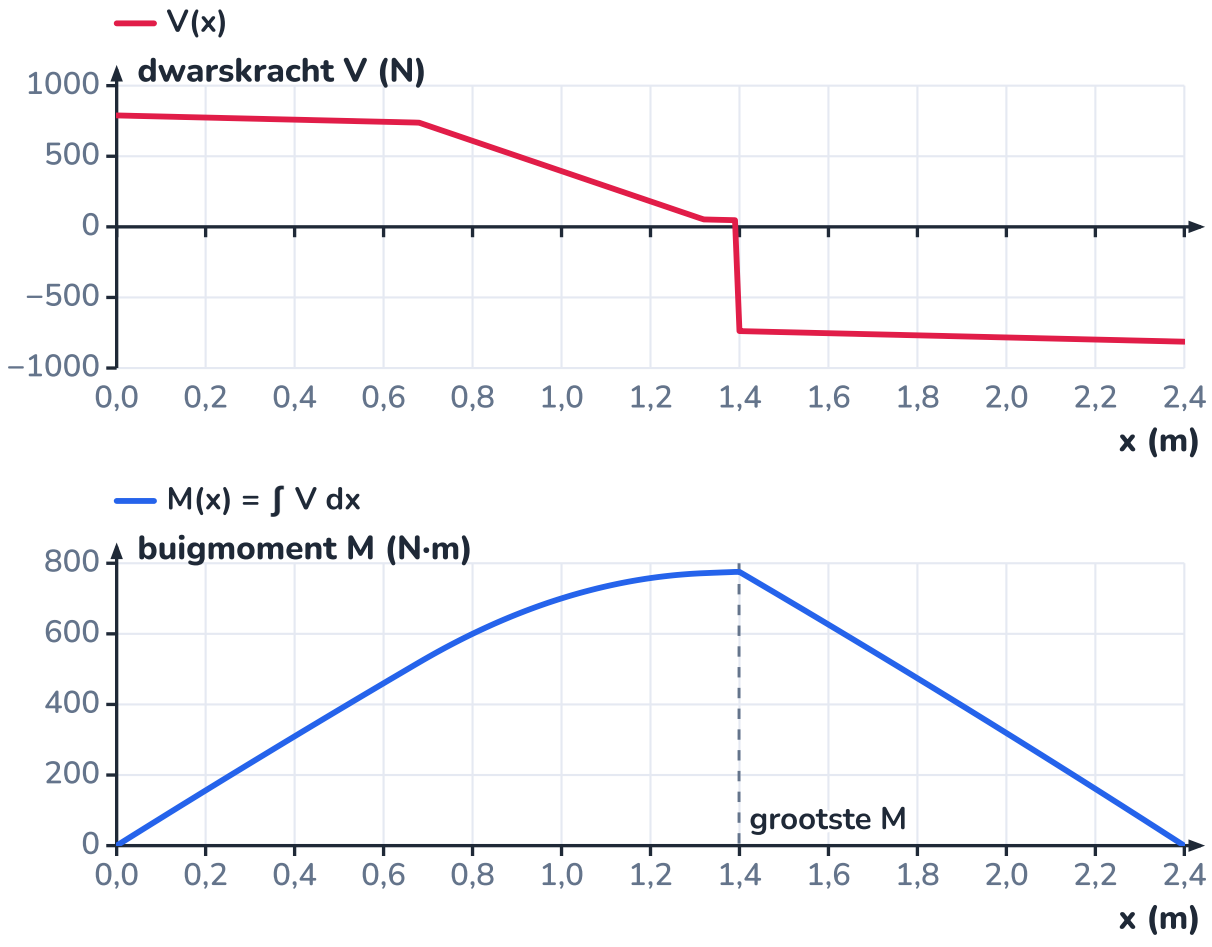
Een balk draagt lasten dwars op zijn as. Snij hem in gedachten door op plaats x: het linkerdeel oefent op het rechterdeel een **dwarskracht** $V(x)$ en een **buigmoment** $M(x)$ uit, precies genoeg om het rechterdeel in evenwicht te houden (hoofdstuk 10 van I). Evenwicht van een dun schijfje $\mathrm{d}x$ met een verdeelde last q geeft:

VERBAND TUSSEN LAST, DWARSKRACHT EN MOMENT

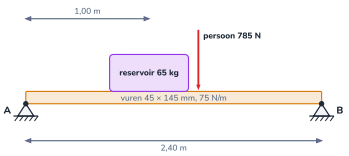
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -q \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V \qquad M(x) = \int_0^x V\,\mathrm{d}x$$

Het moment is de oppervlakte onder de dwarskrachtlijn (hoofdstuk 3). Waar V door nul gaat, heeft M een extremum (hoofdstuk 1 en 2): daar zit de gevaarlijkste doorsnede. Een puntlast doet V verspringen en geeft een knik in M.

Voor de vloerbalk van de klimaatmodule (vuren 45 × 145 mm, 2,40 m, 75 N/m eigengewicht) met het reservoir (65 kg op 0,64 m, midden op 1,00 m van A, zoals hoofdstuk 10 van I aanraadde) en iemand van 80 kg op 1,40 m die het bijvult, geeft dat de figuur. De reacties zijn $R_A = 789\,\mathrm{N}$ en $R_B = 813\,\mathrm{N}$; V daalt lineair onder de verdeelde lasten, verspringt onder de persoon en gaat daar door nul. Het grootste moment, 776 N·m, ligt dus onder de voeten van de persoon.



Boven: de dwarskracht daalt onder het reservoir en verspringt onder de persoon. Onder: het moment is de oppervlakte eronder en piekt waar V door nul gaat.



De lasten op de vloerbalk: eigengewicht, reservoir en een persoon die het bijvult.

UITLEG · 12.7

Buigspanning en het traagheidsmoment van een doorsnede

Wat doet een moment *in* een balk? Het idee van Navier: **vlakke doorsneden blijven vlak** en draaien ten opzichte van elkaar. Buigt de balk tot een boog met kromtestraal ρ, dan wordt een vezel op afstand y van de **neutrale lijn** langer of korter met rek $\varepsilon = y/\rho$ (aan de ene kant trek, aan de andere druk). Met Hooke: $\sigma = Ey/\rho$, lineair over de hoogte (figuur).

Twee voorwaarden leggen alles vast. (1) Er is geen trekkracht in de balk: $\int \sigma \,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int y \,\mathrm{d}A = 0$: de neutrale lijn gaat door het **zwaartepunt** van de doorsnede. (2) De spanningen geven samen het moment: $M = \int \sigma y \,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int y^2 \,\mathrm{d}A$. Die laatste integraal is het **traagheidsmoment van de doorsnede** I (niet te verwarren met het massatraagheidsmoment van hoofdstuk 10, al lijkt de integraal op elkaar). Dus $M = EI/\rho$, en samen:

BUIGSPANNING, WEERSTANDSMOMENT EN KROMMING

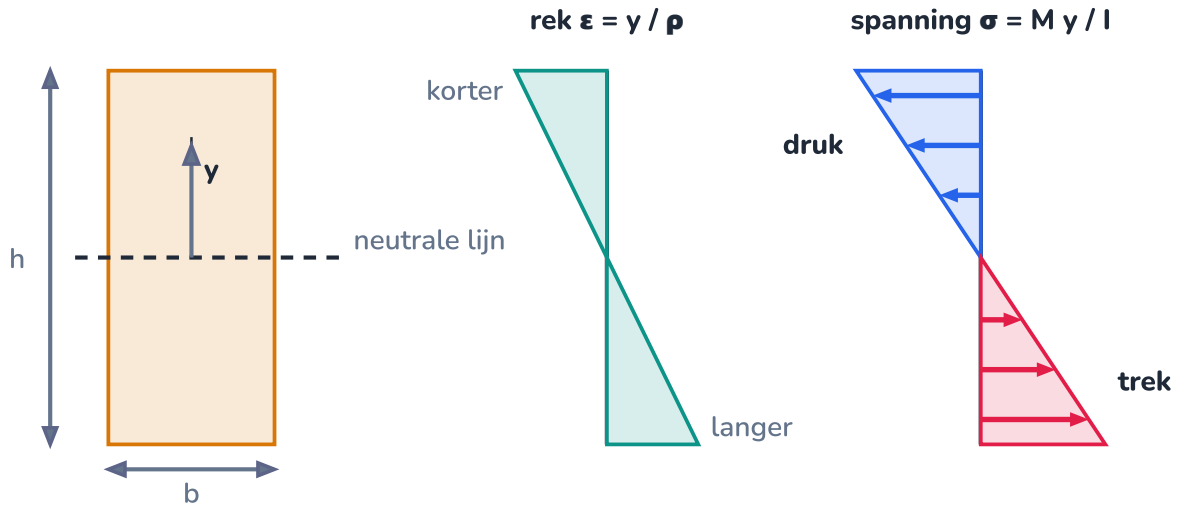
$$\sigma = \frac{M\,y}{I} \qquad \sigma_{\max} = \frac{M}{W},\ W = \frac{I}{e_{\max}} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad I = \int y^2 \,\mathrm{d}A$$

$e_{\max}$ is de afstand van de neutrale lijn tot de verste vezel. EI heet de buigstijfheid.

Een rechthoek $b \times h$: $I = \int_{-h/2}^{h/2} y^2\, b \,\mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}$. Het stijfheidsgetal bh^3 van hoofdstuk 13 van F was dus twaalf keer het traagheidsmoment. Materiaal ver van de neutrale lijn telt met het kwadraat van zijn afstand: daarom zijn I-profielen, kokers en buizen zo efficiënt.

doorsnede	I om de horizontale as	$W = I/e$
rechthoek $b \times h$	$bh^3/12$	$bh^2/6$
volle cirkel, diameter d	$\pi d^4/64$	$\pi d^3/32$
buis $D \times t$ ($d = D - 2t$)	$\pi(D^4 - d^4)/64$	$2I/D$
vierkante koker $B \times t$ ($b = B - 2t$)	$(B^4 - b^4)/12$	$2I/B$
samengesteld (I, T, U)	$\sum(I_{\text{eigen}} + A\,d^2)$ (Steiner)	$I/e_{\max}$

Samengestelde doorsneden reken je met de verschuivingsstelling, net als in hoofdstuk 10: $I = \sum(I_{\text{eigen}} + Ad^2)$, met d de afstand van het zwaartepunt van elk deel tot de neutrale lijn van het geheel.



Vlakke doorsneden blijven vlak: de rek, en dus de spanning, verandert lineair van druk boven naar trek onder, met nul op de neutrale lijn door het zwaartepunt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 12.8

Traagheidsmomenten: plank, koker, I-profiel en buis

8/20

Bereken het traagheidsmoment van (a) een plank van 100 × 20 mm, plat en op zijn kant; (b) de koker van het kasframe, 20 × 20 × 1,5 mm, en een volle vierkante staaf met dezelfde doorsnede; (c) een I-profiel IPE 100 (hoogte 100, flensbreedte 55, flens 5,7, lijf 4,1 mm); (d) de buis van de mast, 244,5 × 5,0 mm.

GEGEVEN

- afmetingen hierboven

GEVRAAGD

- I in mm^4 of cm^4 ($1\,\text{cm}^4 = 10^4\,\text{mm}^4$)

OPLOSSING

1. (a) Plat: $100 \cdot 20^3/12 = 66\,667\,\text{mm}^4$; op zijn kant: $20 \cdot 100^3/12 = 1\,666\,667\,\text{mm}^4$, 25 keer meer (de verhouding $(h_2/h_1)^2 = 5^2$). Zo legt een timmerman een balk.
2. (b) Koker: $(20^4 - 17^4)/12 = 6373\,\text{mm}^4$ met $A = 20^2 - 17^2 = 111\,\text{mm}^2$. Een volle staaf met dezelfde A heeft zijde $\sqrt{111} = 10{,}5\,\text{mm}$ en $I = 10{,}5^4/12 = 1027\,\text{mm}^4$: de koker is 6,2 keer zo stijf met evenveel aluminium.
3. (c) Twee flenzen en een lijf, met Steiner: flens $55 \cdot 5{,}7^3/12 + 55 \cdot 5{,}7 \cdot 47{,}15^2$, twee keer, plus het lijf $4{,}1 \cdot 88{,}6^3/12$: $I = 163\,\text{cm}^4$. De flenzen leveren 85 %. De tabel van de fabrikant geeft 171 cm^4: de afrondingen tussen flens en lijf voegen nog 5 % toe.
4. (d) $\pi(244{,}5^4 - 234{,}5^4)/64 = 2699\,\text{cm}^4$, met $W = 2I/D = 221\,\text{cm}^3$ en $A = 3762\,\text{mm}^2$ (29,5 kg per meter).

ANTWOORD

Plank: 66 667 en 1 666 667 mm⁴; koker 6373 mm⁴ (6,2 keer een volle staaf); IPE 100: 163 cm⁴ zonder afrondingen (171 in de tabel); buis: 2699 cm⁴.

Klopt dit? De IPE 100 weegt 7,8 kg/m (tabel: 8,1 kg/m, met de afrondingen). Een volle staalstaf van 100 mm hoog met dezelfde massa zou maar 9,9 mm breed zijn en $I = 83\,\text{cm}^4$ hebben: de I-vorm wint een factor twee, en is bovendien niet zo

slap zijdelings. Vorm telt meer dan materiaal (hoofdstuk 13 van F).

UITLEG · 12.9

Veiligheidsfactor en toelaatbare spanning

9/20

Een berekening is nooit exact. Lasten spreiden (een storm is sterker dan gemiddeld), materialen spreiden (een staaf ligt boven of onder de gemiddelde sterkte), modellen vereenvoudigen, en de uitvoering is niet perfect. Daarom eist men een marge tussen wat een onderdeel *kan* dragen en wat het *moet* dragen.

VEILIGHEIDSFACTOR EN TOELAATBARE SPANNING

$$n = \frac{\text{sterkte}}{\text{belasting}} \qquad \sigma \le \sigma_{\text{toel}} = \frac{\sigma_{\text{grens}}}{n}$$

σ_{grens} is de vloeigrens voor een taai materiaal (blijvende vervorming is al falen), de breuksterkte voor een bros materiaal (met een grotere n, want er is geen waarschuwing).

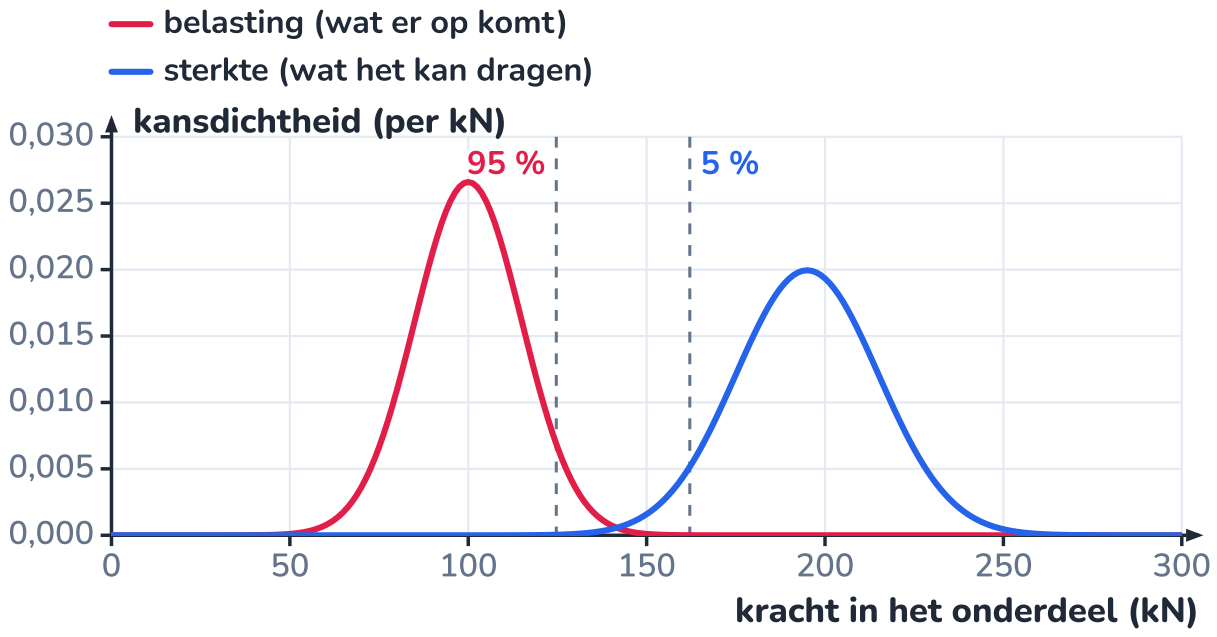
Een voorbeeld uit laag 1: een proefsteun van de plantentafel bezweek bij 900 N; in gebruik draagt elke steun ±277 N (hoofdstuk 13 van F). De veiligheidsfactor is $900/277 = 3{,}2$.

Waarom dan geen $n = 10$ overal? Omdat materiaal geld, gewicht en energie kost. Een vliegtuig vliegt met factoren rond 1,5, dankzij nauwkeurige lasten, gecontroleerd materiaal en inspecties; een hijskabel krijgt 5 of meer, omdat hij slijt en mensen eronder staan. De factor weerspiegelt dus hoe goed je de spreiding kent en hoe erg falen is.

Zo werkt de Eurocode. In plaats van één factor gebruikt ze **partiële factoren**. Elke last krijgt een **karakteristieke waarde** (voor wind en sneeuw: eens in de 50 jaar) en een factor ($\gamma_{\text{G}} = 1{,}35$ op het eigen gewicht, $\gamma_{\text{Q}} = 1{,}5$ op veranderlijke lasten). Elk materiaal krijgt als karakteristieke sterkte het **5 %-fractiel**: de waarde waar 95 % van de proefstukken boven ligt (hoofdstuk 6), en een eigen factor γ_{M} (staal 1,0 op de vloeigrens, hout 1,3, met een factor k_{mod} die rekening houdt met de duur van de last). De eis is: rekenwaarde van de belasting $\le$ rekenwaarde van de sterkte.

werkwijze	wat je vergelijkt	typische factor
toelaatbare spanning (klassiek)	$\sigma \le \sigma_{\text{toel}} = \sigma_{\text{grens}}/n$	taai staal op de vloeigrens $n \approx 1{,}5$; brosse materialen op de breuksterkte $n = 3$ à 5; hijskabels 5 en meer
partiële factoren (Eurocode)	$\gamma_{\text{G}} G_{\text{k}} + \gamma_{\text{Q}} Q_{\text{k}}$ tegenover $f_{\text{k}}/\gamma_{\text{M}}$	$\gamma_{\text{G}} = 1{,}35$ (eigen gewicht), $\gamma_{\text{Q}} = 1{,}5$ (wind, sneeuw, personen); staal $\gamma_{\text{M0}} = 1{,}0$; hout $\gamma_{\text{M}} = 1{,}3$ met k_{mod}
betrouwbaarheid	faalkans $P(R < S)$	gewone gebouwen: $\beta = 3{,}8$ over 50 jaar, $P_{\text{f}} \approx 7 \cdot 10^{-5}$

De figuur toont waarom: belasting en sterkte zijn allebei verdelingen. Falen gebeurt waar ze overlappen. Zijn beide normaal verdeeld, dan is de faalkans $P(R < S) = \Phi(-\beta)$ met $\beta = (\mu_R - \mu_S)/\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$. In de figuur is $\beta = 3{,}8$ en $P_{\text{f}} = 7{,}2 \cdot 10^{-5}$: de overlap is te klein om te zien. Wie de spreiding kleiner maakt (betere metingen, gecontroleerd materiaal), mag de gemiddelden dichter bij elkaar leggen bij dezelfde faalkans.



Belasting en sterkte als normale verdelingen. De karakteristieke belasting (125 kN) wordt in 95 % van de gevallen niet overschreden, de karakteristieke sterkte (162 kN) door 95 % van de stukken gehaald.

UITLEG · 12.10

Doorbuiging: de elastische lijn

10/20

Voor een licht gebogen balk met doorbuiging $w(x)$ is de kromming $1/\rho \approx w''$. Met het vorige blad:

DE ELASTISCHE LIJN

$$EI\,w''(x) = M(x)$$

Twee keer integreren (hoofdstuk 3) geeft de hoek w' en de doorbuiging w; de twee integratieconstanten volgen uit de opleggingen (een inklemming: $w = 0$ en $w' = 0$; een steunpunt: $w = 0$). Het teken hangt af van de afspraak: hier is w positief in de richting waarin het moment de balk buigt.

Afleiding voor de mast. Een ingeklemde staaf van lengte L met een kracht F aan de top, met z de hoogte boven de inklemming: $M(z) = F(L - z)$. Integreren met $w(0) = 0$ en $w'(0) = 0$:

$$EI\,w' = F\Big(Lz - \frac{z^2}{2}\Big), \qquad EI\,w = F\Big(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\Big), \qquad w(L) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

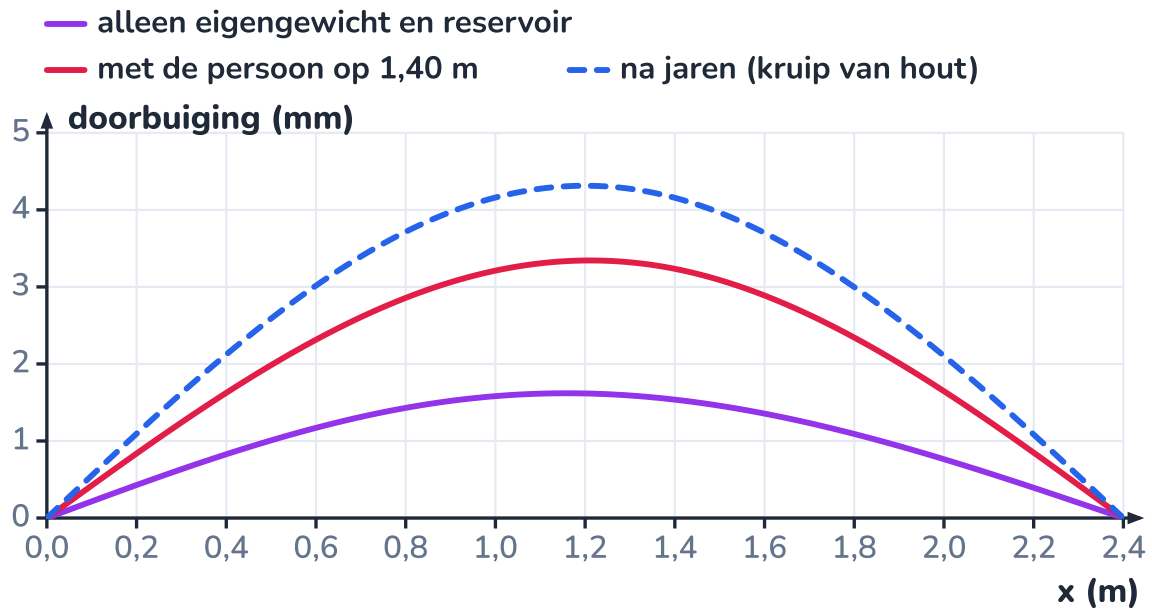
Dat is de veerconstante $k = 3EI/L^3$ die hoofdstuk 11 met een trekproef mat. Voor een gelijkmatige last q is $M = q(L - z)^2/2$ en $w(L) = qL^4/(8EI)$. Omdat de vergelijking lineair is, mag je lastgevallen optellen (**superpositie**).

geval	grootste moment	grootste doorbuiging
ingeklemd, kracht F aan het vrije uiteinde	FL (aan de inklemming)	$\frac{FL^3}{3EI}$
ingeklemd, verdeelde last q	$qL^2/2$	$\frac{qL^4}{8EI}$
twee steunpunten, kracht F in het midden	$FL/4$	$\frac{FL^3}{48EI}$
twee steunpunten, verdeelde last q	$qL^2/8$	$\frac{5qL^4}{384EI}$

geval	grootste moment	grootste doorbuiging
beide uiteinden ingeklemd, kracht F in het midden	$FL/8$	$\dfrac{FL^3}{192EI}$

Let op de macht van L: een twee keer zo lange balk buigt acht (puntlast) of zestien keer (verdeelde last) zoveel door. Ook de opleggingen tellen: een balk die aan beide uiteinden ingeklemd is, buigt vier keer minder door dan een balk op twee steunpunten.

Hout kruipt. Onder een blijvende last buigt hout na jaren verder door. Eurocode 5 vermenigvuldigt de doorbuiging door blijvende lasten met $1 + k_{\text{def}}$, met $k_{\text{def}} = 0{,}6$ voor hout binnen in een verwarmd gebouw. De gebruikelijke eis voor een vloer is een doorbuiging van hoogstens $L/300$.



De doorbuiging van de vloerbalk, berekend op het volgende blad; de stippellijn houdt rekening met de kruip van het hout.

CODE · 12.11

Een balk numeriek doorrekenen

11/20

Met formules lukt het voor één last. Voor een echte balk met een verdeelde last op een stuk, een eigengewicht en een persoon is een numerieke aanpak eenvoudiger en algemener: tel alles op met de trapeziumregel. Het programma berekent de reacties (momentenevenwicht), V als integraal van de last, M als integraal van V, en de doorbuiging door $M/(EI)$ twee keer te integreren. De integratieconstanten zijn nul in A; een rechte die we aftrekken, zorgt dat ook $w(L) = 0$ in B.

Python **balk.py** 36 regels

```python
# balk.py - reacties, dwarskracht, moment en doorbuiging van een balk op twee steunpunten (numeriek)
import numpy as np

L, E, b, h = 2.40, 11000e6, 0.045, 0.145          # vloerbalk (m), vuren C24 (Pa), doorsnede (m)
I, W = b * h**3 / 12, b * h**2 / 6
x = np.linspace(0, L, 2401)                        # 1 mm per stap


def integreer(y):
    """Trapeziumregel van 0 tot elke x (hoofdstuk 3)."""
    return np.concatenate([[0.0], np.cumsum((y[1:] + y[:-1]) / 2 * np.diff(x))])
```

```python


def balk(q, puntlasten):
    """q: verdeelde last (N/m) in elk punt; puntlasten: [(F, a)]. Geeft RA, RB, V, M, w."""
    F_tot = integreer(q)[-1] + sum(F for F, a in puntlasten)
    M_A = integreer(q * x)[-1] + sum(F * a for F, a in puntlasten)
    RB = M_A / L                                  # momenten om A
    RA = F_tot - RB
    V = RA - integreer(q) - sum(F * (x >= a) for F, a in puntlasten)
    M = integreer(V)                              # dM/dx = V
    hoek = integreer(M / (E * I))                 # w'' = M/(EI): twee keer integreren
    w = integreer(hoek)
    w = w - w[-1] * x / L                         # een rechte optellen zodat w(L) = 0 (steunpunt B)
    return RA, RB, V, M, -w                       # doorbuiging naar beneden positief


reservoir = np.where(abs(x - 1.00) <= 0.32, 65 * 9.81 / 0.64, 0.0)       # 65 kg over 0,64 m
eigen = np.full_like(x, 75.0)
persoon = [(80 * 9.81, 1.40)]

for naam, gG, gQ in (("gebruik (karakteristiek)", 1.0, 1.0), ("rekenwaarde 1,35 G + 1,5 Q", 1.35, 1.5)):
    RA, RB, V, M, w = balk(gG * (eigen + reservoir), [(gQ * F, a) for F, a in persoon])
    i = np.argmax(M)
    print(f"{naam}: RA = {RA:6.1f} N, RB = {RB:6.1f} N, Mmax = {M[i]:6.1f} N m op {x[i]:.2f} m, "
          f"sigma = {M[i] / W / 1e6:4.2f} MPa, doorbuiging {1000 * w.max():4.2f} mm")
```

Uitvoer:

```
gebruik (karakteristiek): RA =  789.1 N, RB =  813.4 N, Mmax =  775.8 N m op 1.40 m, sigma = 4.92 MPa, doorbuiging 3.34 mm
rekenwaarde 1,35 G + 1,5 Q: RA = 1114.3 N, RB = 1166.7 N, Mmax = 1116.0 N m op 1.40 m, sigma = 7.08 MPa, doorbuiging 4.77 mm
```

De reacties kloppen met hoofdstuk 10 van I (met het reservoir op 1,00 m en de persoon op 1,40 m). Het volgende voorbeeld beoordeelt de getallen. In opdracht 12.13 laat je de persoon over de balk wandelen en zoek je de ongunstigste plaats.

UITGEWERKT VOORBEELD · 12.12

Habitat: is de vloerbalk sterk en stijf genoeg?

12/20

Beoordeel de vloerbalk onder het reservoir (vuren C24, 45 × 145 mm, 2,40 m) volgens de Eurocode: sterkte met en zonder de persoon, en de doorbuiging, ook na jaren kruip. Hoofdstuk 10 van I rekende alleen de reacties; nu kijken we in de balk.

GEGEVEN

- $W = bh^2/6 = 157{,}7\,\mathrm{cm}^3$, $I = bh^3/12 = 1143\,\mathrm{cm}^4$, $E = 11\,\mathrm{GPa}$
- C24: $f_{\mathrm{m,k}} = 24\,\mathrm{MPa}$, $\gamma_{\mathrm{M}} = 1{,}3$; $k_{\mathrm{mod}} = 0{,}6$ (permanent), 0,9 (kort: een persoon)
- uitvoer van `balk.py`

GEVRAAGD

- σ_{Ed} tegenover $f_{\mathrm{m,d}}$; doorbuiging tegenover $L/300$

OPLOSSING

1. **Met de persoon** (1,35 G + 1,5 Q): $M_{\mathrm{Ed}} = 1116\,\mathrm{N\,m}$, $\sigma = M/W = 7{,}08\,\mathrm{MPa}$; toelaatbaar $f_{\mathrm{m,d}} = 0{,}9 \cdot 24/1{,}3 = 16{,}6\,\mathrm{MPa}$. Benutting 43 %.

2. **Alleen blijvende lasten** (1,35 G, hout houdt minder lang): $M = 507\,\mathrm{N\,m}$, $\sigma = 3{,}22\,\mathrm{MPa}$ tegenover $0{,}6 \cdot 24/1{,}3 = 11{,}1\,\mathrm{MPa}$: 29 %.

3. **Doorbuiging** (karakteristieke lasten): 1,6 mm door eigengewicht en reservoir, 3,3 mm met de persoon erbij. Na jaren kruip: $1{,}62 \cdot 1{,}6 + 1{,}72 = 4{,}3\,\mathrm{mm}$, tegenover $L/300 = 8{,}0\,\mathrm{mm}$.

ANTWOORD

De balk is ruim sterk genoeg (43 % van wat toegelaten is) en stijf genoeg (4,3 mm na jaren, de eis is 8 mm), zelfs als hij alles alleen draagt. Het reservoir mag op 1,00 m van A blijven, zoals hoofdstuk 10 van I aanraadde; de balkdragers bleven daar de beperkende factor.

Klopt dit? Met de formule $5qL^4/(384EI)$ voor alleen het eigengewicht (75 N/m): $5 \cdot 75 \cdot 2{,}4^4/(384 \cdot 11 \cdot 10^9 \cdot 11{,}432 \cdot 10^{-6}) = 0{,}26\,\mathrm{mm}$; het programma geeft voor dat deel hetzelfde. Voor een woonvloer let men ook op trillingen: een vloer met een eigenfrequentie onder ±8 Hz voelt verend aan als je erover loopt (hoofdstuk 11).

PROEF · 12.13

Een lat doorbuigen: E en het traagheidsmoment

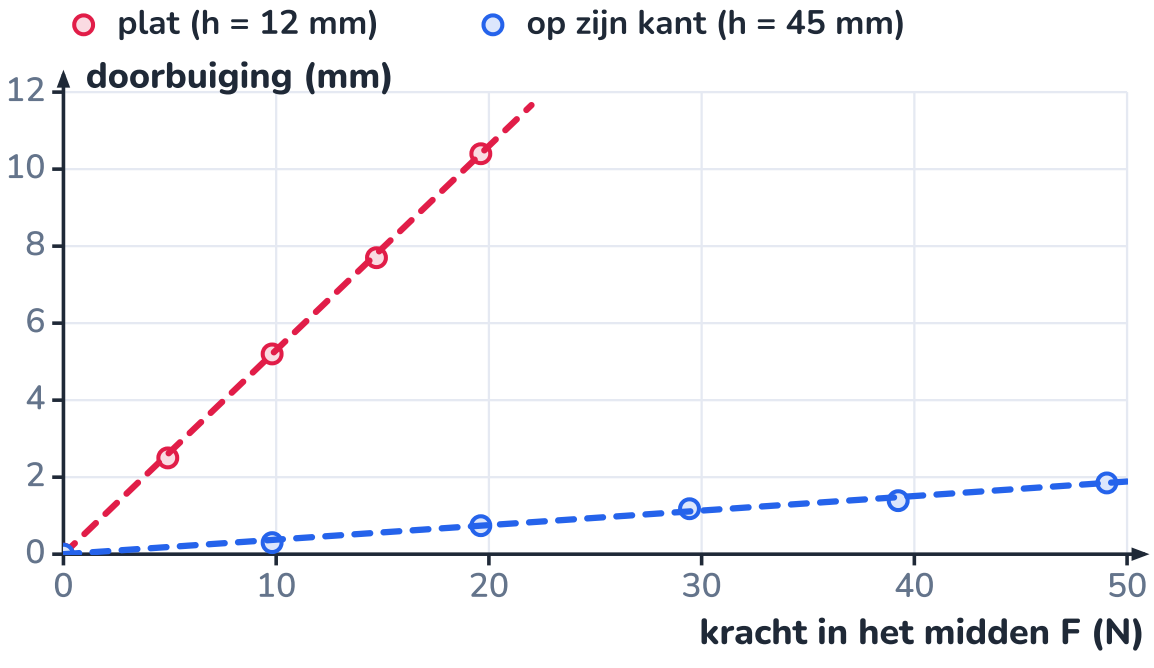
13/20

ONDERZOEKSVRAAG

Klopt $\delta = FL^3/(48EI)$? Hoeveel stijver is een lat op haar kant dan plat? En welke E heeft het hout?

MATERIAAL

- een rechte houten lat, ±12 × 45 mm en 1,3 m lang (meet b en h met een schuifmaat)
- twee steunen op 1,20 m
- een haakje in het midden en gewichten tot 5 kg
- een meetklok of schuifmaat en een vaste lat om van af te lezen



De doorbuiging stijgt lineair met de kracht (elastisch); op haar kant is de lat veertien keer stijver.

WERKWIJZE

1. Leg de lat plat op de steunen en lees de hoogte van het midden af zonder last.
2. Hang 0,5; 1,0; 1,5 en 2,0 kg in het midden en lees telkens de doorbuiging af. Haal de gewichten weg en controleer of de lat terugkomt.
3. Leg de lat op haar kant en herhaal met 1 tot 5 kg.
4. Zet de doorbuiging uit tegen de kracht; bereken E uit de helling met I = bh³/12.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting (lat 12,0 × 45,0 mm, overspanning 1200 mm):

massa (kg)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
plat: doorbuiging (mm)	0,0	2,5	5,2	7,7	10,4	-
op zijn kant: doorbuiging (mm)	0,00	0,30	0,74	1,18	1,39	1,85

Hellingen: plat 0,530 mm/N, op zijn kant 0,0377 mm/N: een verhouding van 14,0.

VERKLARING

Uit $\delta/F = L^3/(48EI)$: $E = L^3/(48 \cdot \text{helling} \cdot I)$. Plat ($I = 45 \cdot 12^3/12 = 6480\,\text{mm}^4$): $E = 10\,481\,\text{MPa}$; op zijn kant ($I = 12 \cdot 45^3/12 = 91\,125\,\text{mm}^4$): $E = 10\,466\,\text{MPa}$. Beide ±10,5 GPa, iets onder de 11 GPa van C24 (een lat is geen gesorteerde balk).

De verhouding van de hellingen is $(45/12)^2 = 14{,}1$: zelfde hout, zelfde oppervlakte, veertien keer stijver. De kleine afwijking komt van de meetfout op de kleine doorbuigingen op zijn kant. Wie h een tiende millimeter verkeerd meet, maakt op h^3 een fout van 2,5 %: meet de dikte op meerdere plaatsen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 12.14

Habitat: het kasframe onder sneeuw

14/20

Het platte dak van de meetkas (1,20 × 0,60 m) draagt sneeuw. In België is de karakteristieke sneeuwlast op de grond $s_k = 0{,}5\,\text{kN/m}^2$ (tot 100 m hoogte); op een plat dak telt de Eurocode daarvan 80 %. De polycarbonaatplaten overspannen de 0,60 m tussen de voorste en achterste bovenregel, twee aluminium kokers van 20 × 20 × 1,5 mm en 1,20 m. Bereken de spanning en de doorbuiging van een bovenregel.

GEGEVEN

- $s = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}40\,\text{kN/m}^2$; elke regel draagt een strook van 0,30 m
- koker: $I = 6373\,\text{mm}^4$, $W = I/10 = 637\,\text{mm}^3$, $E = 70\,\text{GPa}$; 6063-T6

GEVRAAGD

- σ_{max}, δ_{max}

OPLOSSING

1. Last op de regel: $q = 0{,}40\,\text{kN/m}^2 \cdot 0{,}30\,\text{m} = 120\,\text{N/m} = 0{,}12\,\text{N/mm}$.
2. Twee steunpunten (de hoekstijlen): $M = qL^2/8 = 0{,}12 \cdot 1200^2/8 = 21\,600\,\text{N mm}$; $\sigma = M/W = 33{,}9\,\text{MPa}$. Met $\gamma_Q = 1{,}5$: 51 MPa, tegenover $R_{p0,2} \geq 170\,\text{MPa}$: in orde.

3 $\delta = \dfrac{5qL^4}{384EI} = \dfrac{5 \cdot 0{,}12 \cdot 1200^4}{384 \cdot 70\,000 \cdot 6373} = 7{,}3\,\text{mm}$, of $L/165$.

ANTWOORD

De regel is sterk genoeg (34 MPa), maar buigt 7,3 mm door onder een volle sneeuwlast. Dat is zichtbaar, maar onschadelijk voor een kas; wie dat niet wil, zet een lichte middenstijl of legt een dwarsregel in het midden van het dak (de doorbuiging daalt dan met minstens een factor 16).

Klopt dit? Het is typisch voor aluminium: sterk genoeg, maar drie keer zo soepel als staal. Een stalen koker van dezelfde maat zou 2,4 mm doorbuigen. De sneeuwlast heeft een terugkeerperiode van 50 jaar; een gewone winter geeft veel minder.

UITLEG · 12.15

Knik: de formule van Euler

15/20

Een rechte staaf op druk is in evenwicht. Maar is dat evenwicht *stabiel*? Stel dat ze een beetje uitbuigt, met $w(x)$. De drukkracht F werkt dan met een arm w: het moment $M = F\,w$ buigt de staaf verder. Met de elastische lijn, voor een staaf die aan beide uiteinden scharniert:

$$EI\,w'' = -F\,w \quad\Longrightarrow\quad w'' + k^2 w = 0, \qquad k^2 = \frac{F}{EI}.$$

Dat is de vergelijking van de harmonische trilling uit hoofdstuk 11, met de plaats x in de rol van de tijd. De oplossing is $w = A\sin kx + B\cos kx$. Uit $w(0) = 0$ volgt $B = 0$; uit $w(L) = 0$ volgt $A\sin kL = 0$. Is $A = 0$, dan is de staaf recht. Een uitgebogen evenwicht ($A \neq 0$) kan alleen als $kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ De kleinste kracht waarbij dat kan, is de **kniklast**:

KNIKLAST VAN EULER, KRITISCHE SPANNING EN SLANKHEID

$$F_\text{k} = \frac{\pi^2 EI}{L_\text{k}^2} \qquad \sigma_\text{k} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \lambda = \frac{L_\text{k}}{i},\; i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

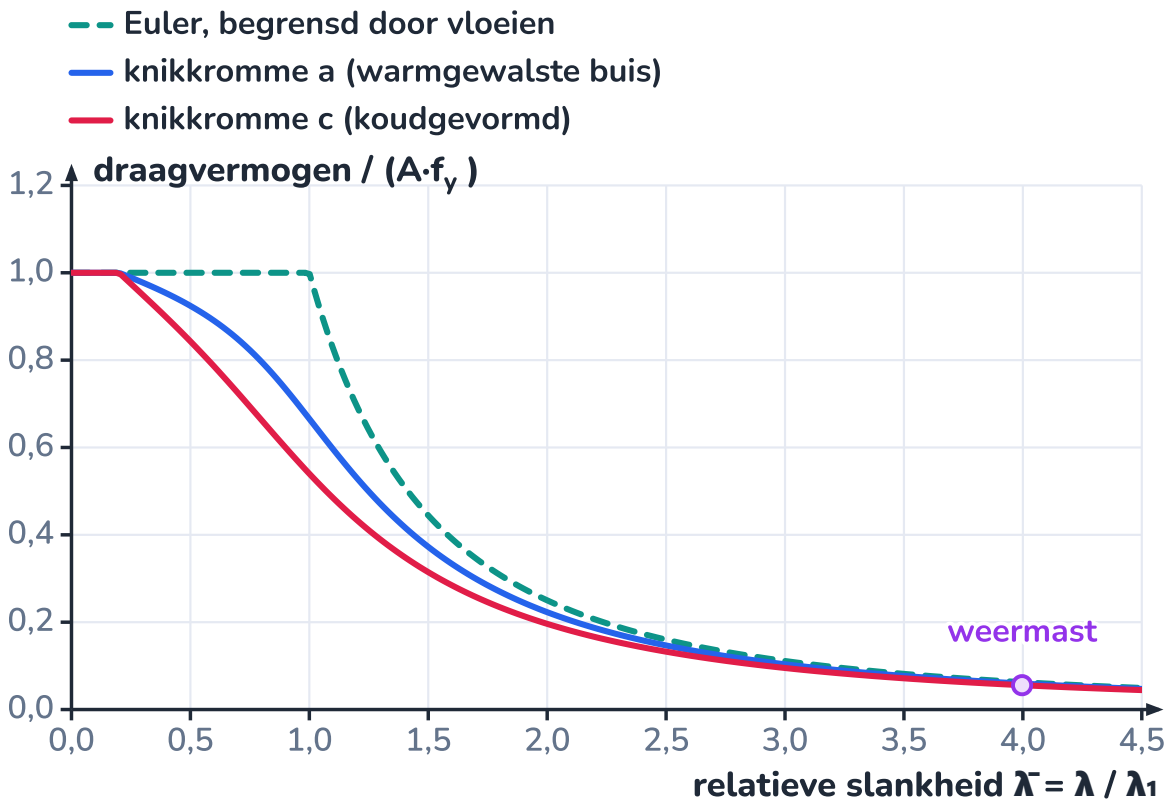
L_k is de kniklengte (tabel), I het kleinste traagheidsmoment van de doorsnede (een staaf knikt in haar slapste richting), i de traagheidsstraal. De kniklast hangt af van de stijfheid E, niet van de sterkte.

opleggingen	kniklengte L_k	voorbeeld
onderaan ingeklemd, bovenaan vrij	$2L$	vrijstaande mast, vlaggenstok
beide uiteinden scharnierend, zijdelings vastgehouden	L	staaf in een vakwerk, getuide mast
ingeklemd en scharnierend	$0{,}7L$	kolom op een fundering met een scharnierende ligger erop
beide uiteinden ingeklemd	$0{,}5L$	staander tussen twee stijve vloeren

Waar Euler ophoudt. Voor een korte, dikke staaf zou σ_k boven de vloeigrens liggen: dan vloeit ze voor ze knikt. De grens ligt waar $\pi^2 E/\lambda^2 = f_\text{y}$, bij $\lambda_1 = \pi\sqrt{E/f_\text{y}} = 93{,}9$ voor S235. De **relatieve slankheid** is $\bar\lambda = \lambda/\lambda_1$. Echte staven zijn nooit perfect recht en hebben restspanningen van het walsen of lassen; daardoor knikken ze al vroeger, vooral rond $\bar\lambda \approx 1$. De Eurocode gebruikt daarom **knikkrommen** (figuur): het draagvermogen is $\chi A f_\text{y}$, met χ uit $\Phi = \tfrac{1}{2}[1 + \alpha(\bar\lambda - 0{,}2) + \bar\lambda^2]$ en $\chi = 1/(\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar\lambda^2})$; α is groter voor profielen met meer onvolkomenheden.

Knik is een sterkteprobleem

Knik is een stijfheidsprobleem. Een slanke staaf uit S355 knikt bij precies dezelfde kracht als een uit S235: E is gelijk. Aluminium (E drie keer kleiner) knikt drie keer vroeger dan even dik staal. Wat helpt: een grotere I (buis in plaats van staaf), een kortere kniklengte (een steun halverwege halveert L_k en verviervoudigt F_k) of een stijver materiaal.



Voor slanke staven ($\bar{\lambda}$ groot) geldt Euler; voor dikke begrenst de vloeigrens het draagvermogen. Daartussen liggen de knikkrommen lager dan beide, door onvolkomenheden.

UITGEWERKT VOORBEELD · 12.16

Habitat: knikt de weermast?

16/20

De weermast van het station (hoofdstuk 5) is 6,0 m hoog en wordt bovenaan door drie tuidraden met elk 400 N voorspanning naar ankers op 3,0 m getrokken. Hoofdstuk 5 vond dat de tuien de mast samen met 1073 N naar beneden duwen. Welke buis kies je: een aluminium buis Ø 50 × 2 mm of een stalen steigerbuis Ø 48,3 × 3,2 mm?



De weermast: een gewone steigerbuis, getuid met drie draden. Hij draagt bijna niets, maar moet niet knikken.

GEGEVEN

- mast onderaan scharnierend, bovenaan zijdelings vastgehouden door de tuien: $L_k = L = 6{,}0\,\mathrm{m}$
- drukkracht: 1073 N (tuien) + eigengewicht + ±30 N instrumenten

GEVRAAGD

- F_k voor beide buizen; veiligheid; controle met de knikkromme

OPLOSSING

1 **Staal** 48,3 × 3,2: $I = \pi(48{,}3^4 - 41{,}9^4)/64 = 115\,857\,\mathrm{mm}^4$, $A = 453\,\mathrm{mm}^2$ (3,56 kg/m, 21 kg in totaal). $F_k = \pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 115\,857/6000^2 = 6670\,\mathrm{N}$.

2 Drukkracht onderaan: $1073 + 209 + 30 = 1313\,\mathrm{N}$. Veiligheid tegen Euler: $6670/1313 = 5{,}1$.

3 **Aluminium** Ø 50 × 2: $I = 87\,010\,\mathrm{mm}^4$, maar $E = 70\,\mathrm{GPa}$: $F_k = 1670\,\mathrm{N}$, veiligheid 1,27. Een windstoot die de tuien aan de windzijde strakker trekt, of een iets kromme buis, en de mast knikt.

4 **Eurocode** voor de stalen buis: $i = \sqrt{I/A} = 16{,}0\,\mathrm{mm}$, $\lambda = 6000/16{,}0 = 375$, $\bar{\lambda} = 4{,}00$ (zeer slank). Een steigerbuis is koudgevormd en gelast: knikkromme c, $\chi = 0{,}056$, draagvermogen $\chi A f_y = 5938\,\mathrm{N}$ tegenover $1{,}35 \cdot 1313 = 1772\,\mathrm{N}$: in orde.

ANTWOORD

De stalen steigerbuis: 5,1 keer veilig tegen knik. De aluminium buis zou maar 1,27 keer veilig zijn: afgewezen. De weermast wordt een steigerbuis 48,3 × 3,2 mm (S235), gegalvaniseerd.

Klopt dit? De spanning in de buis is maar $1313/453 = 2{,}9\,\mathrm{MPa}$: sterkte speelt geen rol, alleen stijfheid. Een extra stel tuien halverwege zou de kniklengte halveren en F_k verviervoudigen. En de voorspanning van de tuien is niet gratis: elke newton trek in de tuien duwt de mast verder in elkaar. Meer spanning dan nodig is om de tuien strak te houden, is dus ongunstig.

CODE · 12.17

Habitat: de buis voor de windturbinemast kiezen

17/20

De mast van de windturbine (hoofdstuk 11) is een ingeklemde stalen buis van 12,0 m. De lasten (karakteristiek):

- op de mastkop 1,5 kN horizontaal. Dat is de stuwkracht van de rotor in bedrijf, $C_\mathrm{T}\,\frac{1}{2}\rho A v^2$ met $C_\mathrm{T} = 8/9$ (de optimale waarde van Betz) bij 15 m/s: 1539 N, net voor de rotor uit de wind draait. In een storm staat de rotor stil en uit de wind; dan duwt de wind op rotor, gondel en staart samen ongeveer evenveel ($1{,}0\,\mathrm{kPa} \times 1{,}5\,\mathrm{m}^2$);
- wind op de mast zelf: $w = q_\mathrm{p} c_\mathrm{f} D$, met piekstuwdruk $q_\mathrm{p} = 1{,}0\,\mathrm{kPa}$ (een orde van grootte voor 12 m hoogte in open terrein in België, waar de basiswindsnelheid volgens de plaats 23 tot 26 m/s is; de nationale bijlage van de Eurocode geeft de echte waarde) en vormfactor $c_\mathrm{f} = 0{,}7$ voor een ronde buis.

Het programma probeert gangbare buismaten en houdt drie eisen aan: **sterkte** met $\gamma_\mathrm{Q} = 1{,}5$ op de wind, **geen plaatselijk plooien** ($D/t \le 50$: een dunnere wand deukt in voor het staal vloeit) en de **trillingseis** uit hoofdstuk 11 (eerste eigenfrequentie minstens 10 % onder 1P bij 80 tpm).

Een ontwerpberekening, geen vergunning

Dit is een leerrijke voorstudie met afgeronde lasten. Een echte mast wordt berekend met de Eurocode en de norm voor kleine windturbines (IEC 61400-2), door een ingenieur die tekent, en gecontroleerd op vermoeiing en op de fundering.

Python **mast.py** 31 regels

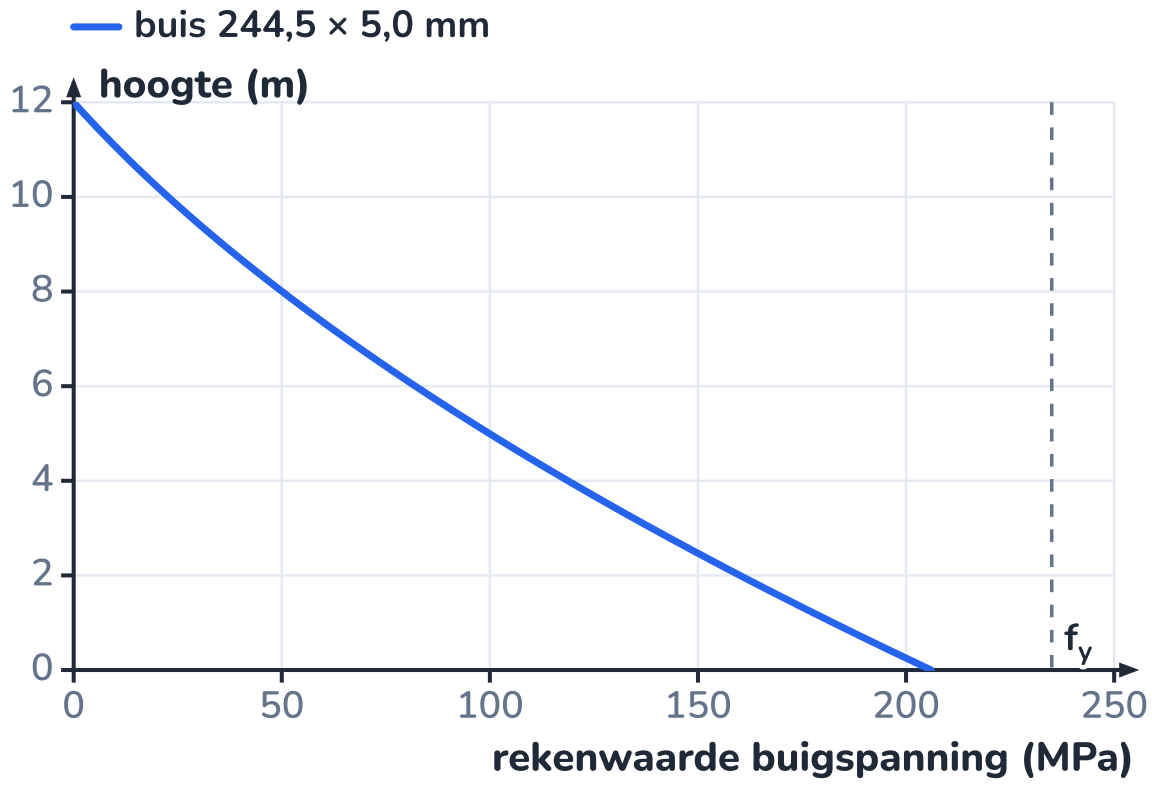
```python
# mast.py - de lichtste stalen buis voor de mast van de windturbine
import math

L, E, rho, fy = 12.0, 210e9, 7850.0, 235e6          # mast (m), staal S235 (Pa, kg/m3, Pa)
F_kop, q_p, c_f = 1500.0, 1000.0, 0.7               # kracht op de mastkop (N), piekstuwdruk (Pa), vormfactor buis
m_top, gamma = 150.0, 1.5                            # gondel + rotor (kg), belastingsfactor (wind)
f_1P_min = 80 / 60                                   # 1P bij het laagste toerental in bedrijf (Hz)
buizen = [(D, t) for D in (193.7, 219.1, 244.5, 273.0) for t in (4.0, 5.0, 6.3, 8.0)]   # mm


def controle(D_mm, t_mm):
    D, t = D_mm / 1000, t_mm / 1000
    I = math.pi / 64 * (D**4 - (D - 2 * t)**4)
    A = math.pi / 4 * (D**2 - (D - 2 * t)**2)
    M = F_kop * L + q_p * c_f * D * L**2 / 2         # buigmoment aan de voet (N m)
    sigma = gamma * M / (I / (D / 2))                # rekenwaarde van de buigspanning (Pa)
    massa = rho * A * L
    f1 = math.sqrt(3 * E * I / L**3 / (m_top + 33 / 140 * massa)) / (2 * math.pi)
    eisen = {"sterkte": sigma <= fy, "plooien": D / t <= 50, "trilling": f1 <= f_1P_min / 1.1}
    return massa, sigma, f1, [naam for naam, ok in eisen.items() if not ok]


goed = []
for D, t in buizen:
    massa, sigma, f1, fout = controle(D, t)
    if not fout:
        goed.append((massa, D, t))
```

```
    oordeel = "in orde" if not fout else "faalt: " + ", ".join(fout)
    print(f"{D:5.1f} x {t:3.1f} mm: {massa:4.0f} kg, sigma {sigma / 1e6:4.0f} MPa, f1 {f1:4.2f} Hz {oordeel}")
massa, D, t = min(goed)
print(f"lichtste buis die aan alle eisen voldoet: {D} x {t} mm ({massa:.0f} kg)")
```



De rekenwaarde van de buigspanning neemt van boven naar onder toe, sneller dan lineair door de wind op de mast.

Uitvoer:

```
193.7 x 4.0 mm:  225 kg, sigma  376 MPa, f1 0.70 Hz  faalt: sterkte
193.7 x 5.0 mm:  279 kg, sigma  305 MPa, f1 0.75 Hz  faalt: sterkte
193.7 x 6.3 mm:  349 kg, sigma  247 MPa, f1 0.80 Hz  faalt: sterkte
193.7 x 8.0 mm:  440 kg, sigma  200 MPa, f1 0.86 Hz  in orde
219.1 x 4.0 mm:  255 kg, sigma  305 MPa, f1 0.83 Hz  faalt: sterkte, plooien
219.1 x 5.0 mm:  317 kg, sigma  248 MPa, f1 0.89 Hz  faalt: sterkte
219.1 x 6.3 mm:  397 kg, sigma  200 MPa, f1 0.95 Hz  in orde
219.1 x 8.0 mm:  500 kg, sigma  161 MPa, f1 1.01 Hz  in orde
244.5 x 4.0 mm:  285 kg, sigma  254 MPa, f1 0.96 Hz  faalt: sterkte, plooien
244.5 x 5.0 mm:  354 kg, sigma  206 MPa, f1 1.03 Hz  in orde
244.5 x 6.3 mm:  444 kg, sigma  166 MPa, f1 1.10 Hz  in orde
244.5 x 8.0 mm:  560 kg, sigma  134 MPa, f1 1.17 Hz  in orde
273.0 x 4.0 mm:  318 kg, sigma  213 MPa, f1 1.12 Hz  faalt: plooien
273.0 x 5.0 mm:  397 kg, sigma  172 MPa, f1 1.20 Hz  faalt: plooien
273.0 x 6.3 mm:  497 kg, sigma  138 MPa, f1 1.27 Hz  faalt: trilling
273.0 x 8.0 mm:  627 kg, sigma  111 MPa, f1 1.35 Hz  faalt: trilling
lichtste buis die aan alle eisen voldoet: 244.5 x 5.0 mm (354 kg)
```

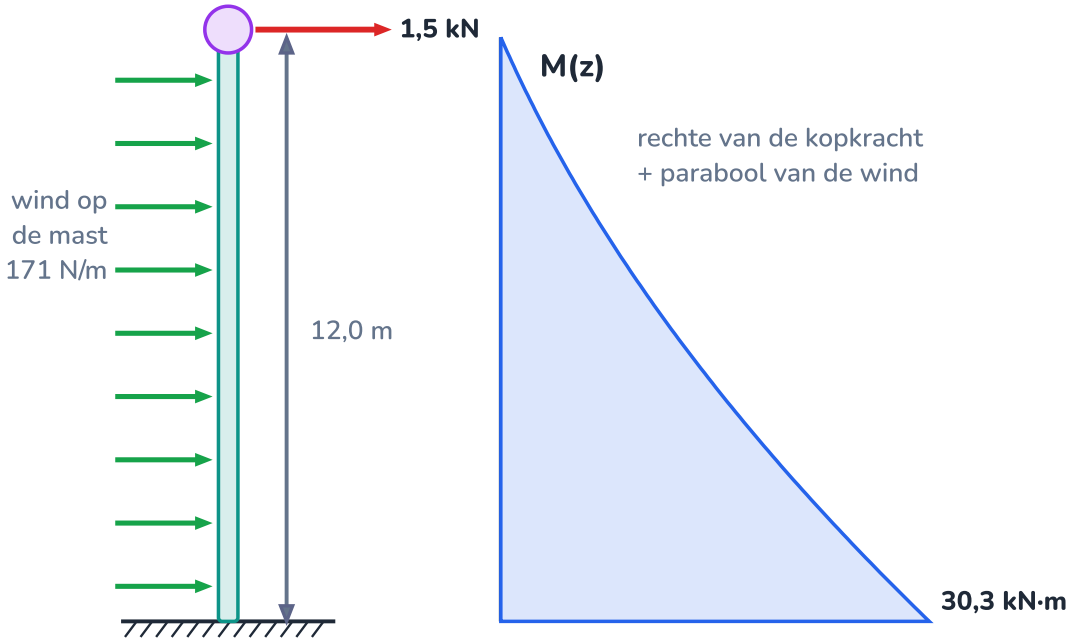
Dunne, brede buizen zijn het lichtst, maar plooien; smalle buizen met een dunne wand falen op sterkte; de buizen van 273 mm met een dikke wand zijn zo stijf dat ze in de 1P-band van de rotor komen. De buis van 244,5 × 5,0 mm is de lichtste die overblijft. De figuur toont de spanning langs de mast: onderaan het hoogst, bovenaan bijna nul. Een tapse mast (onder breed, boven smal) gebruikt het staal beter (opdracht 12.16).

UITGEWERKT VOORBEELD · 12.18

Habitat: de mast van de windturbine, nagerekend

18/20

Controleer de gekozen buis 244,5 × 5,0 mm (S235) met de hand: momentenlijn, spanning, veiligheid, doorbuiging van de kop, knik door het eigen gewicht, plooien en eigenfrequentie. Welke controles horen er nog bij?



De kopkracht geeft een moment dat lineair toeneemt naar de voet; de wind op de mast voegt een parabool toe. Samen 30,3 kN·m aan de voet.

GEGEVEN

- $L = 12{,}0\,\mathrm{m}$, $F = 1{,}5\,\mathrm{kN}$ op de kop, $w = 1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2445 = 171\,\mathrm{N/m}$
- $I = 2699\,\mathrm{cm^4}$, $W = 220{,}7\,\mathrm{cm^3}$, $A = 3762\,\mathrm{mm^2}$, $EI = 5{,}67\,\mathrm{MN\,m^2}$; gondel 150 kg, mast 354 kg

GEVRAAGD

- alle controles in een tabel

OPLOSSING

1 **Momentenlijn**: $M(z) = F(L - z) + w(L - z)^2/2$, aan de voet $1500 \cdot 12 + 171 \cdot 144/2 = 30\,323\,\mathrm{N\,m}$ (figuur). De dwarskracht aan de voet is $3554\,\mathrm{N}$; de schuifspanning die ze geeft (±2,8 MPa) is verwaarloosbaar.

2 **Alle controles:**

CONTROLE	BEREKENING	EIS	OORDEEL
sterkte aan de voet	$\sigma_{\mathrm{Ed}} = 1{,}5 \cdot 30{,}3\,\mathrm{kN\,m} / 221\,\mathrm{cm}^3 = 206\,\mathrm{MPa}$ (+ 1,8 MPa druk van het gewicht)	$\leq 235\,\mathrm{MPa}$	0,88 van het toelaatbare
veiligheid (klassiek)	$n = 235/137 = 1{,}71$ op de vloeigrens	$\geq 1{,}5$	in orde
doorbuiging kop	$\frac{FL^3}{3EI} + \frac{wL^4}{8EI} = 231\,\mathrm{mm}$, kanteling 1,6°	geen norm; rotor blijft vrij van de mast	aanvaardbaar (L/52)
knik door eigengewicht	veiligheid ±38 (Euler + Greenhill)	$\gg 1$	geen probleem
plaatselijk plooien	$D/t = 48{,}9$	≤ 50	in orde
eigenfrequentie (hoofdstuk 11)	$f_1 = 1{,}03\,\mathrm{Hz}$	$\leq 1{,}21\,\mathrm{Hz}$	in orde

3 **Knik door het eigen gewicht.** Een vrijstaande mast heeft $L_{\mathrm{k}} = 2L$: voor de gondel alleen $\pi^2 EI/(4L^2) = 97{,}1\,\mathrm{kN}$. Voor het eigen gewicht van een staaf gaf Greenhill (1881) $(qL)_{\mathrm{k}} = 7{,}84\,EI/L^2 = 308\,\mathrm{kN}$. Samen (regel van Dunkerley: de verhoudingen optellen) is de veiligheid $1/(0{,}0152 + 0{,}0113) = 38$. Knik speelt geen rol; het gewicht vergroot het moment door de uitwijking (het P-deltaeffect) met maar $1/(1 - 1/38) = 1{,}027$.

4 **Wat nog ontbreekt.** (1) *Vermoeiing*: 1P en 3P geven de voet in twintig jaar honderden miljoenen kleine spanningswisselingen; lassen en boutgaten verdragen daarvan veel minder dan de vloeigrens (hoofdstuk 46). (2) De *flens, de ankerbouten en de fundering* (opdracht 12.12). (3) De *dynamische vergroting* door windstoten op een zachte mast; de Eurocode heeft daar een factor voor.

ANTWOORD

De buis 244,5 × 5,0 mm voldoet: rekenwaarde 206 MPa tegenover 235 MPa, de kop wijkt 231 mm uit in de ontwerpstorm, knik en plooien zijn geen probleem en de eigenfrequentie (1,03 Hz) blijft onder 1P. De mast weegt 354 kg zonder flens.

Klopt dit? De productfiche van een vergelijkbare kleine turbine (2,5 kW, rotor Ø 3,5 m) vermeldt een vrijstaande, tapse mast van 11 m die 445 kg weegt: dezelfde orde van grootte. Merk op hoe de eisen elkaar raken: sterkte vraagt een grote W, plooien een niet te dunne wand, en de trilling verbiedt een te stijve mast. Ontwerpen is het smalle venster vinden waar alle eisen tegelijk kloppen.



De voet van de mast: flens, ankerbouten en fundering. Hier is het buigmoment het grootst.

NASLAG · 12.19

Sterkteleer: formules en werkwijze

19/20

Werkwijze: (1) lasten en hun karakteristieke waarden; (2) vrijlichaamsdiagram en reacties; (3) inwendige krachten: N, V, M langs het onderdeel; (4) de doorsnede: A, I, W, i; (5) controles: sterkte ($\sigma \leq \sigma_{\text{toel}}$, of rekenwaarden), stijfheid (doorbuiging), stabiliteit (knik, plooien), trilling; (6) wat het model niet zegt: verbindingen, vermoeiing, uitvoering.

trek en druk

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad \Delta L = \frac{FL}{EA}$$

symbool	betekenis	eenheid
σ	normaalspanning	MPa
ε	rek	-
E	elasticiteitsmodulus	GPa

schuifspanning (bout)

$$\tau = \frac{F}{A}$$

symbool	betekenis	eenheid
τ	schuifspanning	MPa

ringspanning in een dunwandige cilinder

$$\sigma = \frac{p\,r}{t}$$

symbool	betekenis	eenheid
p	overdruk	Pa
r	straal	m
t	wanddikte	m

veiligheid

$$\sigma \le \frac{\sigma_{\text{grens}}}{n}, \quad \gamma_{\text{G}} G_{\text{k}} + \gamma_{\text{Q}} Q_{\text{k}} \le \frac{f_{\text{k}}}{\gamma_{\text{M}}}$$

moment en dwarskracht

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -q$$

symbool	betekenis	eenheid
M	buigmoment	N·m
V	dwarskracht	N

buiging

$$\sigma = \frac{My}{I}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{W}, \quad I = \int y^2 \,\mathrm{d}A, \quad I = \sum (I_{\text{eigen}} + A d^2$$

symbool	betekenis	eenheid
I	traagheidsmoment van de doorsnede	mm⁴
W	weerstandsmoment	mm³

doorbuiging

$$EI\,w'' = M, \quad \frac{FL^3}{3EI}, \quad \frac{qL^4}{8EI}, \quad \frac{FL^3}{48EI}, \quad \frac{5qL^4}{384EI}$$

knik (Euler, Greenhill)

$$F_{\text{k}} = \frac{\pi^2 EI}{L_{\text{k}}^2}, \quad \lambda = \frac{L_{\text{k}}}{i}, \quad \lambda_1 = \pi\sqrt{E/f_{\text{y}}}, \quad (qL)_{\text{k}} = 7{,}84\frac{EI}{L^2}$$

symbool	betekenis	eenheid
L_k	kniklengte	m
i	traagheidsstraal $\sqrt{I/A}$	mm

doorsnede	I om de horizontale as	$W = I/e$
rechthoek $b \times h$	$bh^3/12$	$bh^2/6$
volle cirkel, diameter d	$\pi d^4/64$	$\pi d^3/32$
buis $D \times t$ ($d = D - 2t$)	$\pi(D^4 - d^4)/64$	$2I/D$
vierkante koker $B \times t$ ($b = B - 2t$)	$(B^4 - b^4)/12$	$2I/B$
samengesteld (I, T, U)	$\sum(I_{\text{eigen}} + A\,d^2)$ (Steiner)	$I/e_{\max}$

geval	grootste moment	grootste doorbuiging
ingeklemd, kracht F aan het vrije uiteinde	FL (aan de inklemming)	$\frac{FL^3}{3EI}$
ingeklemd, verdeelde last q	$qL^2/2$	$\frac{qL^4}{8EI}$
twee steunpunten, kracht F in het midden	$FL/4$	$\frac{FL^3}{48EI}$
twee steunpunten, verdeelde last q	$qL^2/8$	$\frac{5qL^4}{384EI}$
beide uiteinden ingeklemd, kracht F in het midden	$FL/8$	$\frac{FL^3}{192EI}$

opleggingen	kniklengte L_{k}	voorbeeld
onderaan ingeklemd, bovenaan vrij	$2L$	vrijstaande mast, vlaggenstok

opleggingen	kniklengte L_k	voorbeeld
beide uiteinden scharnierend, zijdelings vastgehouden	L	staaf in een vakwerk, getuide mast
ingeklemd en scharnierend	$0{,}7L$	kolom op een fundering met een scharnierende ligger erop
beide uiteinden ingeklemd	$0{,}5L$	staander tussen twee stijve vloeren

HET GEHEEL · 12.20

Waar sterkteleer vandaan komt en waar ze heen gaat

20/20

Sterkteleer verbindt krachten (K) met materialen (M) en ontwerpen (D). Evenwicht vertelt welke krachten er werken; sterkteleer vertelt wat ze met het materiaal doen, en welke vorm en doorsnede nodig zijn. De wiskunde is die van de eerste hoofdstukken: integralen voor I en voor de elastische lijn, een differentiaalvergelijking voor knik, en statistiek voor de veiligheid.

F10 Materialen en hun eigenschappen
Sterkte, stijfheid en taaiheid als begrip; nu in getallen.

F13 Constructies: sterk en stabiel
Trek, druk, buiging en knik; het stijfheidsgetal bh³ wordt bh³/12; de Quebecbrug.

I10 Moment en evenwicht
Reacties van de vloerbalk; nu het moment, de spanning en de doorbuiging erin.

I17 Polymeren en composieten
PETG en ASA voor geprinte onderdelen; de mengregel voor E.

E3 Integralen: ophopen
I = ∫y²dA, M = ∫V dx en de elastische lijn door twee keer te integreren.

E5 Vectoren en matrices
De staafkrachten van de paneelsteun en de tuien van de weermast.

E6 Statistiek en meetonzekerheid
Het 5 %-fractiel en de normale verdeling achter de veiligheid.

E9 Impuls en botsingen
Een kreukelzone neemt energie op door te vloeien: de oppervlakte onder het diagram.

E10 Rotatie
Steiner, en de spanning σ = ρv² in een draaiende ring.

E11 Trillingen en resonantie
k = 3EI/L³ van de mast; knik en trilling volgen dezelfde vergelijking.

E13 Vakwerken en constructieanalyse
De staafkrachten van het dakvakwerk, en welke doorsneden ze vragen (trek, druk, knik).

E28 Materiaalkunde
Waarom staal vloeit en verstevigt; materiaal kiezen met Ashby-diagrammen.

E46 Betrouwbaarheid en risico
Faalkans, vermoeiing en faalwijzen van onderdelen.

Habitat

Habitat heeft nu gecontroleerde dragende delen: de vloerbalk onder het reservoir is sterk en stijf genoeg (4,3 mm na jaren, eis 8 mm); het kasframe draagt een volle sneeuwlast met 7,3 mm doorbuiging; de paneelsteun (kokers 30 × 30 × 2 mm) heeft ruime marges; de weermast wordt een stalen steigerbuis 48,3 × 3,2 mm (aluminium zou knikken). De mast van de windturbine is een stalen buis 244,5 × 5,0 mm (S235, 12,0 m, 354 kg) op een fundering van 2,5 × 2,5 × 1,0 m met 8 ankerbouten M20. Hoofdstuk 13 rekent het dakvakwerk van de woonmodule.

SAMENVATTING

In het kort

- Spanning $\sigma = F/A$ en rek $\varepsilon = \Delta L/L$; elastisch geldt $\sigma = E\varepsilon$ (E: staal 210, aluminium 70, hout ±11 GPa).
- Het spanning-rekdiagram toont het elastische gebied, de vloeigrens (of $R_{\mathrm{p0,2}}$), versteviging, treksterkte, insnoering en breuk; taaie materialen waarschuwen, brosse niet.
- Een veiligheidsfactor vangt spreiding op: $\sigma \leq \sigma_{\mathrm{grens}}/n$, of in de Eurocode factoren op de lasten (1,35 en 1,5) en op het materiaal.
- In een balk is $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$; de buigspanning is My/I, de grootste M/W. Materiaal ver van de neutrale lijn telt kwadratisch: I-profielen, kokers, buizen.
- De doorbuiging volgt uit $EI\,w'' = M$; standaardgevallen $FL^3/(3EI)$, $5qL^4/(384EI)$ ...; numeriek door twee keer te integreren. Hout kruipt.
- Een drukstaaf knikt bij $F_{\mathrm{k}} = \pi^2 EI/L_{\mathrm{k}}^2$: een stijfheidsprobleem, geen sterkteprobleem; de Eurocode gebruikt knikkrommen.
- Habitat: de windturbinemast is een stalen buis 244,5 × 5,0 mm; ontwerpen is het venster zoeken waar sterkte, plooien, knik en trilling samen kloppen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

normaalspanning

$\sigma = F/A$ (Pa of N/mm² = MPa): kracht loodrecht op een doorsnede, gedeeld door die doorsnede.

rek

$\varepsilon = \Delta L/L$: de relatieve verlenging, zonder eenheid (vaak in % of in 10^{-6}).

elasticiteitsmodulus

$E = \sigma/\varepsilon$ in het elastische gebied: hoe stijf een materiaal is (staal 210 GPa, aluminium 70 GPa).

vloeigrens

De spanning waarbij een metaal blijvend begint te vervormen; zonder duidelijke grens neemt men $R_{\mathrm{p0,2}}$: de spanning met 0,2 % blijvende rek.

treksterkte

R_{m}: de grootste spanning in een trekproef, betrokken op de oorspronkelijke doorsnede.

veiligheidsfactor

De verhouding tussen wat een onderdeel kan dragen en wat het moet dragen; ze vangt de spreiding van lasten, materiaal en model op.

buigmoment

Het moment $M(x)$ dat de ene kant van een balk op de andere uitoefent; $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$ (de dwarskracht).

traagheidsmoment van een doorsnede

$I = \int y^2 \,\mathrm{d}A$ (m^4 of mm^4): hoe ver het materiaal van de neutrale lijn ligt; rechthoek $bh^3/12$.

weerstandsmoment

$W = I/e_{\max}$: de grootste buigspanning is M/W.

knik

Het plots zijdelings uitwijken van een slanke drukstaaf; kniklast van Euler $F_{\mathrm{k}} = \pi^2 EI/L_{\mathrm{k}}^2$.

slankheid

$\lambda = L_{\mathrm{k}}/i$ met $i = \sqrt{I/A}$: hoe slanker, hoe minder een drukstaaf draagt.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 13

Vakwerken en constructieanalyse

Driehoek na driehoek: de kracht in elke staaf, met de hand, als matrix en als eindige elementen

Een vakwerk draagt grote lasten met weinig materiaal, omdat elke staaf alleen trek of druk krijgt. Om het te ontwerpen, moet je weten hoe groot die krachten zijn. Je leert wanneer evenwicht alleen volstaat (**statisch bepaald**), rekent staafkrachten uit met de **knooppuntenmethode** en de **snedemethode**, herkent trek- en drukstaven zonder te rekenen, en schrijft een programma dat elk vakwerk oplost. Tot slot bouw je hetzelfde vakwerk op als een **stijfheidsmodel**: het idee achter de eindige-elementenmethode, die ook rekent waar evenwicht alleen niet volstaat. Voor Habitat reken je het **dakvakwerk** van de woonmodule door en kies je de doorsneden.

5× uitleg · 3× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 11 lestijden

K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren · D Ontwerpen en maken



Acht spanten, ongeveer om de 0,60 m, dragen het dak van de woonmodule. Elke staaf is een lat van 45 mm dik: genoeg, omdat ze alleen trek of druk krijgt.

Na dit hoofdstuk

- Je kan nagaan of een vakwerk statisch bepaald is (m + r = 2k en een regelmatige matrix) en een mechanisme, een overtallig vakwerk en een kritische vorm herkennen.
- Je kan staafkrachten berekenen met de knooppuntenmethode, nulstaven herkennen en het resultaat controleren.
- Je kan met de snedemethode de kracht in één staaf berekenen en ze interpreteren als M/h en V/sin θ.
- Je kan zonder te rekenen voorspellen welke staven trek en welke druk dragen, en dat vertalen naar de vorm van de staven.
- Je kan een vakwerk algemeen oplossen met een programma en een dakspant doorrekenen met lasten volgens de Eurocode, tot en met de keuze van de doorsneden.

- Je kan het idee van de eindige-elementenmethode uitleggen (element, assembleren, randvoorwaarden, oplossen, nabewerken) en toepassen op een staaf en een vakwerk, ook als dat statisch onbepaald is.

VERHAAL · 13.1

De Forth Bridge: trek en druk om te zien

1/14

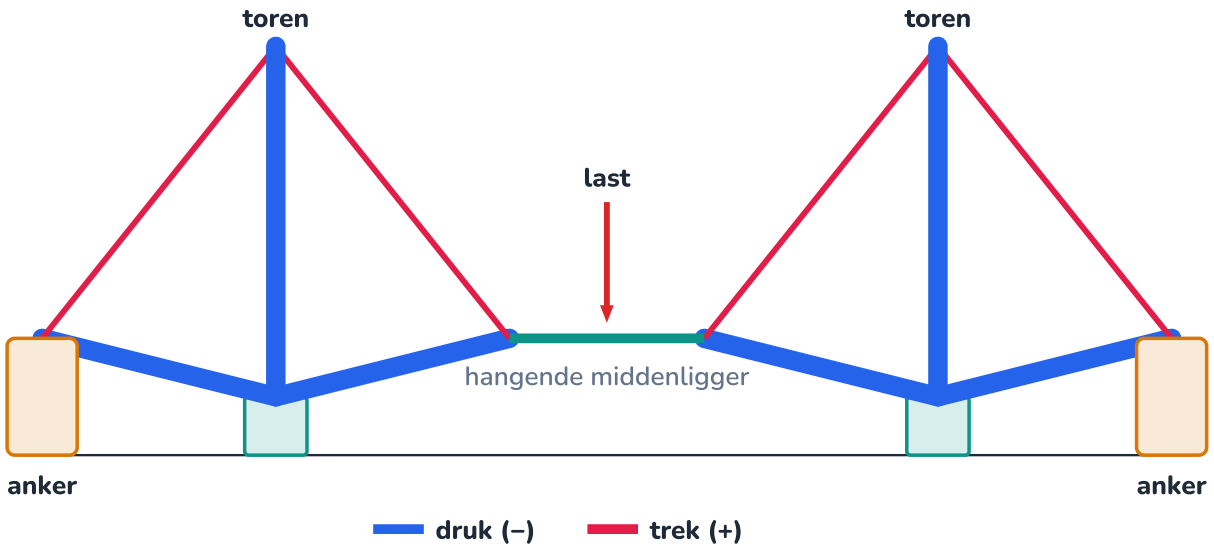
Op 28 december 1879 stortte in Schotland in een storm een deel van de Tay Bridge in, met een trein erop. Dezelfde ingenieur, Thomas Bouch, was begonnen aan een hangbrug over de Firth of Forth, iets zuidelijker. Na de ramp werd zijn ontwerp geschrapt. John Fowler en Benjamin Baker kregen de opdracht. Na de ramp wilde men een brug die vooral stijf was en er ook stevig uitzag.

Ze bouwden een **uitkragende vakwerkbrug** van 2467 m, met twee hoofdoverspanningen van ongeveer 520 m, uit ongeveer 55 000 ton staal en 6,5 miljoen klinknagels. Ze ging open op 4 maart 1890. Wat haar bijzonder maakt: je ziet welke staven trek en welke druk dragen. De drukstaven zijn reusachtige **buizen**, tot 3,66 m (12 voet) doorsnede, want een drukstaaf moet een grote I hebben om niet te knikken (hoofdstuk 12). De trekstaven zijn **lichte vakwerkliggers**: een trekstaaf kan niet knikken, en materiaal ver van de as is daar nutteloos.

Baker legde het principe in 1887 uit met een **menselijk model**: twee mannen op een stoel, de armen gestrekt naar stokken die schuin tegen de stoelen steunden, en tussen hen, op een plank, de Japanse ingenieur Kaichi Watanabe, die toen in Schotland studeerde. De armen van de mannen waren de trekstaven, de stokken de drukstaven, de stoelen de pijlers en de gewichten aan de buitenkant de ankers. Wie in de armen van de mannen de kracht voelde, begreep de brug. Sinds 5 juli 2015 is de Forth Bridge werelderfgoed.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Het dak van de woonmodule wordt gedragen door lichte houten spanten: vakwerken uit latten van 45 mm, met metalen nagelplaten in de knopen. Of ze sneeuw dragen, welke staven kunnen knikken en of een tussenwand eronder mag komen, volgt uit de staafkrachten. En de methode waarmee je een vakwerk als stijfheidsmodel oplost, is de kern van elk programma voor constructieberekening.



Schematisch: de drukstaven (dik) lopen van de voet van elke toren naar de uiteinden van de armen; de trekstaven (dun) hangen die uiteinden aan de toren op. De middenligger hangt aan de twee uitkragingen.



De Forth Bridge: dikke buizen voor druk, lichte vakwerkliggers voor trek.

UITLEG · 13.2

Het ideale vakwerk en statisch bepaald

2/14

wat je al kan	wat nu komt
de driehoek als stijf element, trek- en drukstaven aanwijzen (hoofdstuk 13 van F)	de kracht in elke staaf berekenen
evenwicht: som van de krachten en van de momenten nul; statisch bepaald (hoofdstuk 10 van I)	evenwicht per knoop (knooppuntenmethode) en per deel (snedemethode)
een vakwerk als stelsel $A\vec{s} = -\vec{F}$ (hoofdstuk 5)	een algemeen programma, en de stijfheidsmethode: het idee van de eindige elementen
spanning, knik en doorsneden (hoofdstuk 12)	van staafkracht naar profiel

Een **ideaal vakwerk** steunt op drie afspraken: (1) de staven zijn recht, (2) ze zijn in de knopen **scharnierend** verbonden, en (3) de lasten grijpen alleen in de knopen aan. Een staaf met een scharnier aan elk uiteinde en geen last ertussen, kan dan alleen een kracht langs haar as dragen: momentenevenwicht om het ene scharnier laat geen dwarskracht toe. Die **staafkracht** S noemen we positief bij trek.

Echte vakwerken hebben geklonken, gelaste of genagelde knopen en lasten tussen de knopen (het eigen gewicht, een dak op de bovenrand). Toch is het ideale model meestal goed, omdat de staven slank zijn: de momenten door stijve knopen blijven klein. Lasten tussen de knopen reken je apart als buiging van die ene staaf (verderop, bij het dakspant).

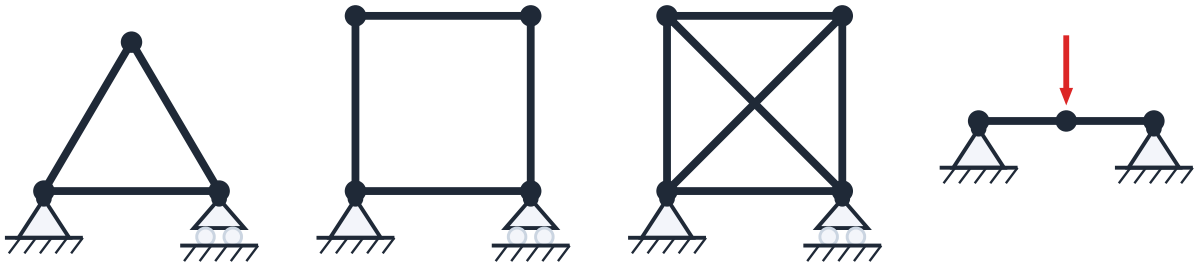
VOORWAARDE VOOR EEN STATISCH BEPAALD VLAK VAKWERK

$$m + r = 2k$$

k knopen geven $2k$ evenwichtsvergelijkingen ($\sum F_x = 0$ en $\sum F_y = 0$ per knoop); de onbekenden zijn de m staafkrachten en de r reacties. Tellen is nodig, maar niet voldoende: de matrix A van hoofdstuk 5 moet ook regelmatig zijn ($\det A \neq 0$).

Vier gevallen (figuur). Een **driehoek** op een scharnier (2 reacties) en een rol (1): $3 + 3 = 6 = 2 \cdot 3$, bepaald. Een **vierkant** zonder diagonaal: te weinig staven, een **mechanisme** dat scheef zakt. Een vierkant met twee diagonalen: één staaf te veel, **statisch onbepaald** (overtallig): de krachten hangen dan af van hoe stijf de staven zijn, en evenwicht alleen volstaat niet meer. Twee staven op één rechte lijn tussen twee scharnieren, met een last in de middelste knoop, tellen goed ($2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$), maar geen van beide staven kan een verticale kracht in die knoop opnemen: de vergelijking $\sum F_y = 0$ wordt $0 = F$. Dat is een **kritische vorm**: $\det A = 0$. In werkelijkheid zakt de knoop tot de staven genoeg uitrekken, met enorme krachten (opdracht 13.15). Zo'n fout zie je aan een programma dat een singuliere matrix meldt.

Overtallige staven zijn in de praktijk niet slecht: een tweede diagonaal maakt een constructie robuuster (als er één bezwijkt, neemt de andere over). Alleen vraagt ze een andere rekenmethode: de stijfheidsmethode aan het eind van dit hoofdstuk.



$3 + 3 = 2 \cdot 3$	$4 + 3 < 2 \cdot 4$	$6 + 3 > 2 \cdot 4$	$2 + 4 = 2 \cdot 3$
bepaald	**mechanisme**	**overtallig**	**kritisch**

Tellen (m + r tegenover 2k) toont het mechanisme en het overtallige vakwerk. Het laatste telt goed, maar twee staven op één lijn kunnen geen verticale last in hun middelste knoop dragen.

UITLEG · 13.3

De knooppuntenmethode

3/14

Snij één knoop los uit het vakwerk. Op die knoop werken de staafkrachten van alle staven die er samenkomen, de lasten en eventueel reacties. In evenwicht is hun som nul, in x en in y. Werkwijze:

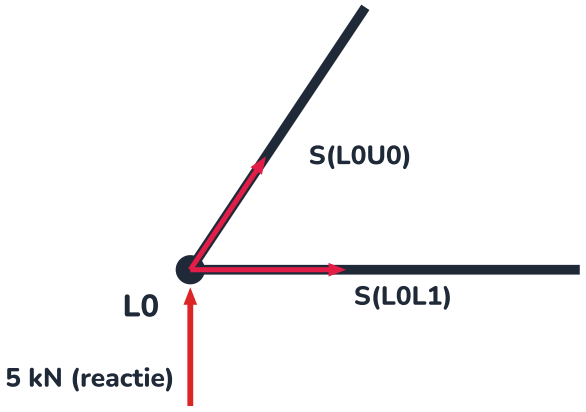
1. Bereken eerst de **reacties** met het evenwicht van het hele vakwerk (hoofdstuk 10 van I).

2. Teken elke onbekende staafkracht als **trek**: een pijl die van de knoop wegwijst, langs de staaf. Komt er een negatief getal uit, dan is de staaf op druk belast. Zo hoef je nooit vooraf te raden.
3. Begin bij een knoop met hoogstens **twee onbekenden** (meestal een oplegging) en ga knoop na knoop verder.
4. Controleer met de laatste knoop: daar zijn alle krachten al bekend, en de vergelijkingen moeten vanzelf kloppen.

Nulstaven zie je zonder te rekenen: (a) komen in een onbelaste knoop twee staven samen die niet op één lijn liggen, dan zijn beide nul; (b) komen in een onbelaste knoop drie staven samen waarvan er twee op één lijn liggen, dan is de derde nul. Een nulstaaf is niet overbodig: ze houdt een lange drukstaaf halverwege vast tegen knik, of draagt bij een ander lastgeval wel.

Met de hand of met de computer

Knoop na knoop rekenen is het gereedschap om een resultaat te begrijpen en te controleren. Voor een vakwerk met honderd staven schrijf je alle knopen samen als één stelsel (hoofdstuk 5); de computer lost het in een fractie van een seconde op. De vergelijkingen zijn dezelfde.



elke staafkracht getekend als trek: een pijl die van de knoop wegtrekt

ΣFy = 0:
$S(L0U0) \cdot \sin\theta + 5 = 0$

ΣFx = 0:
$S(L0L1) + S(L0U0) \cdot \cos\theta = 0$

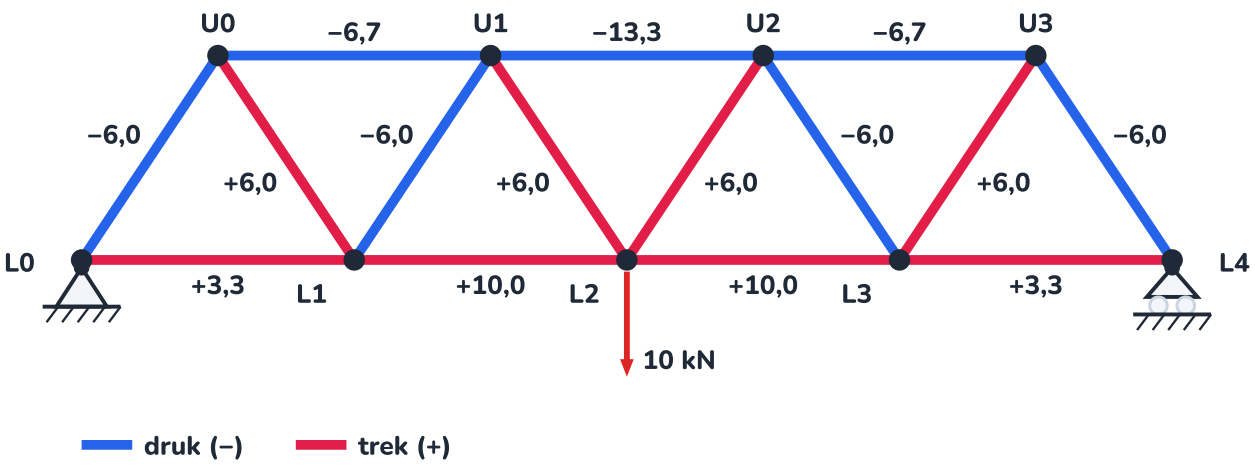
Knoop L0 van de brug op het volgende blad, los getekend. Met alle staafkrachten als trek volgen twee vergelijkingen voor twee onbekenden.

UITGEWERKT VOORBEELD · 13.4

De vakwerkbrug van F13, nu met getallen

4/14

In hoofdstuk 13 van F kleurde je de trek- en drukstaven van een vakwerkbrug met een last in het midden. Bereken nu de staafkrachten: vier vakken van 2,0 m, 1,5 m hoog (de bovenknopen liggen boven het midden van elk vak), 10 kN in de middelste onderknoop L2.



De krachten in kN: blauw druk, rood trek. De bovenrand wordt naar het midden toe zwaarder belast.

GEGEVEN

- knopen L0 … L4 op $y = 0$, U0 … U3 op $y = 1{,}5\,\text{m}$; scharnier in L0, rol in L4
- schuine staven: lengte $\sqrt{1{,}0^2 + 1{,}5^2} = 1{,}803\,\text{m}$, $\sin\theta = 0{,}832$, $\cos\theta = 0{,}555$

GEVRAAGD

- alle staafkrachten; trek of druk

OPLOSSING

1 **Tellen.** $k = 9$, $m = 15$, $r = 3$: $15 + 3 = 18 = 2 \cdot 9$. **Reacties**: symmetrisch, $A_y = B_y = 5\,\text{kN}$, $A_x = 0$.

2 **Knoop L0** (figuur vorig blad): $\sum F_y$: $S_{\text{L0U0}} \sin\theta + 5 = 0$, dus $S_{\text{L0U0}} = -5/0{,}832 = -6{,}01\,\text{kN}$ (druk). $\sum F_x$: $S_{\text{L0L1}} + S_{\text{L0U0}} \cos\theta = 0$, dus $S_{\text{L0L1}} = 3{,}33\,\text{kN}$ (trek).

3 **Knoop U0**: de schuine staaf van L0 duwt $(-6{,}01)$, de staaf naar L1 en de bovenrand zijn onbekend. $\sum F_y$: de twee schuine staven moeten elkaars verticale deel opheffen, dus $S_{\text{U0L1}} = +6{,}01\,\text{kN}$ (trek). $\sum F_x$: $S_{\text{U0U1}} = -2 \cdot 6{,}01 \cdot 0{,}555 = -6{,}67\,\text{kN}$ (druk).

4 Zo verder over L1, U1 en L2; de rechterhelft volgt uit de symmetrie. Alle krachten (het programma van verderop geeft dezelfde):

STAAF	L0L1	L1L2	L2L3	L3L4	U0U1	U1U2	U2U3
kracht (kN)	+3,33	+10,00	+10,00	+3,33	−6,67	−13,33	−6,67

STAAF	L0U0	U0L1	L1U1	U1L2	L2U2	U2L3	L3U3	U3L4
kracht (kN)	−6,01	+6,01	−6,01	+6,01	+6,01	−6,01	+6,01	−6,01

5 **Controle in L2**: twee schuine staven met elk $+6{,}01\,\text{kN}$ trekken samen $2 \cdot 6{,}01 \cdot 0{,}832 = 10{,}0\,\text{kN}$ omhoog: precies de last. De onderranden links en rechts $(+10{,}0)$ heffen elkaar op.

ANTWOORD

Onderrand trek (3,3 en 10 kN), bovenrand druk (6,7 en 13,3 kN), de schuine staven afwisselend druk en trek (6,01 kN), zoals de kleuren in hoofdstuk 13 van F.

Klopt dit? De grootste randkracht zit in het midden: het moment is daar $5\,\mathrm{kN} \cdot 4\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{kN\,m}$, en de randen vormen samen een koppel met arm 1,5 m: $20/1{,}5 = 13{,}3\,\mathrm{kN}$, precies de kracht in de bovenrand U1U2 erboven. De onderrand in het midden draagt 10,0 kN: het moment om de bovenknoop U1 ($x = 3\,\mathrm{m}$) is $5 \cdot 3 = 15\,\mathrm{kN\,m}$, en $15/1{,}5 = 10$. Een vakwerk is een balk waarvan de randen het moment dragen en de diagonalen de dwarskracht (blad 'Trek en druk herkennen').

UITLEG · 13.5

De snedemethode

Wie maar één staafkracht nodig heeft, bijvoorbeeld de zwaarst belaste staaf midden in een lange brug, hoeft niet alle knopen door te rekenen. Snij het vakwerk door langs een lijn die **hoogstens drie staven** met onbekende kracht snijdt, en schrijf het evenwicht van één deel (links of rechts) op: drie vergelijkingen, drie onbekenden.

De truc van August Ritter (1862): neem de momenten om het punt waar **twee** van de drie staven elkaar snijden. Die twee hebben geen arm, en de derde volgt meteen. Voor een brug met evenwijdige randen op hoogte h geeft dat:

SNEDEMETHODE BIJ EEN VAKWERK MET EVENWIJDIGE RANDEN

$$S_{\text{boven}} = -\frac{M_{\text{onderknoop}}}{h} \qquad S_{\text{onder}} = \frac{M_{\text{bovenknoop}}}{h} \qquad S_{\text{diag}} \sin\theta = V_{\text{vak}}$$

M is het buigmoment van het hele vakwerk (als balk) om de knoop waar de andere twee staven samenkomen; V de dwarskracht in het doorgesneden vak. De randen dragen het moment, de diagonalen de dwarskracht.

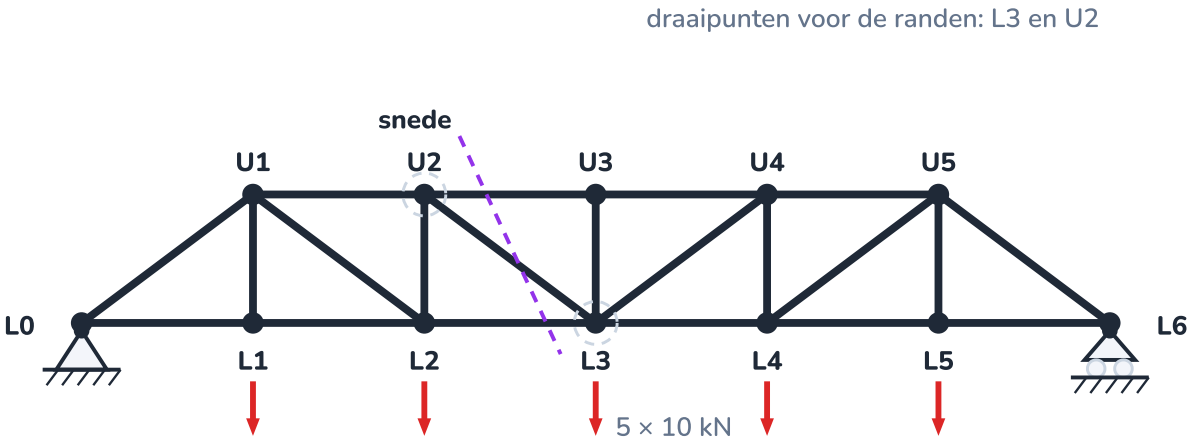
De Pratt-brug van de figuur is 12 m lang, zes vakken van 2,0 m, 1,5 m hoog, met 10 kN in elke onderknoop (reacties 25 kN). Snij door het derde vak: bovenrand U2U3, diagonaal U2L3 en onderrand L2L3.

- Momenten om L3 (daar komen diagonaal en onderrand samen): $M_{\text{L3}} = 25 \cdot 6 - 10 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 90\,\mathrm{kN\,m}$, dus $S_{\text{U2U3}} = -90/1{,}5 = -60{,}0\,\mathrm{kN}$ (druk).
- Momenten om U2: $M_{\text{U2}} = 25 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 80\,\mathrm{kN\,m}$, dus $S_{\text{L2L3}} = 80/1{,}5 = 53{,}3\,\mathrm{kN}$ (trek).
- Verticaal evenwicht: $V = 25 - 10 - 10 = 5\,\mathrm{kN}$; de diagonaal loopt omlaag naar het midden met $\sin\theta = 1{,}5/2{,}5 = 0{,}6$: $S_{\text{U2L3}} = 5/0{,}6 = 8{,}33\,\mathrm{kN}$ (trek).

Invloedslijnen. Rijdt een last over de brug, dan verandert de kracht in elke staaf met de plaats van de last. Een grafiek daarvan heet een **invloedslijn** (hoofdstuk 10 van I noemde ze al). Bruggenbouwers zoeken er de ongunstigste plaats van een vrachtwagen mee; een diagonaal kan zelfs van teken wisselen (opdracht 13.8).

Tekenen in plaats van rekenen: Maxwell en Cremona

Voor er computers waren, tekenden ingenieurs de krachten. James Clerk Maxwell toonde in 1864 dat bij elk vakwerk een 'wederkerige figuur' hoort waarin elke staafkracht een lijnstuk is; Luigi Cremona maakte er in 1872 een werkwijze van. Met passer en lat toonde zo'n krachtenplan snel alle staafkrachten van een dakspant. De Eiffeltoren en de spoorbruggen van de negentiende eeuw zijn zo berekend.



Een snede door drie staven. Momenten om L3 geven de bovenrand, om U2 de onderrand; verticaal evenwicht geeft de diagonaal.

UITLEG · 13.6

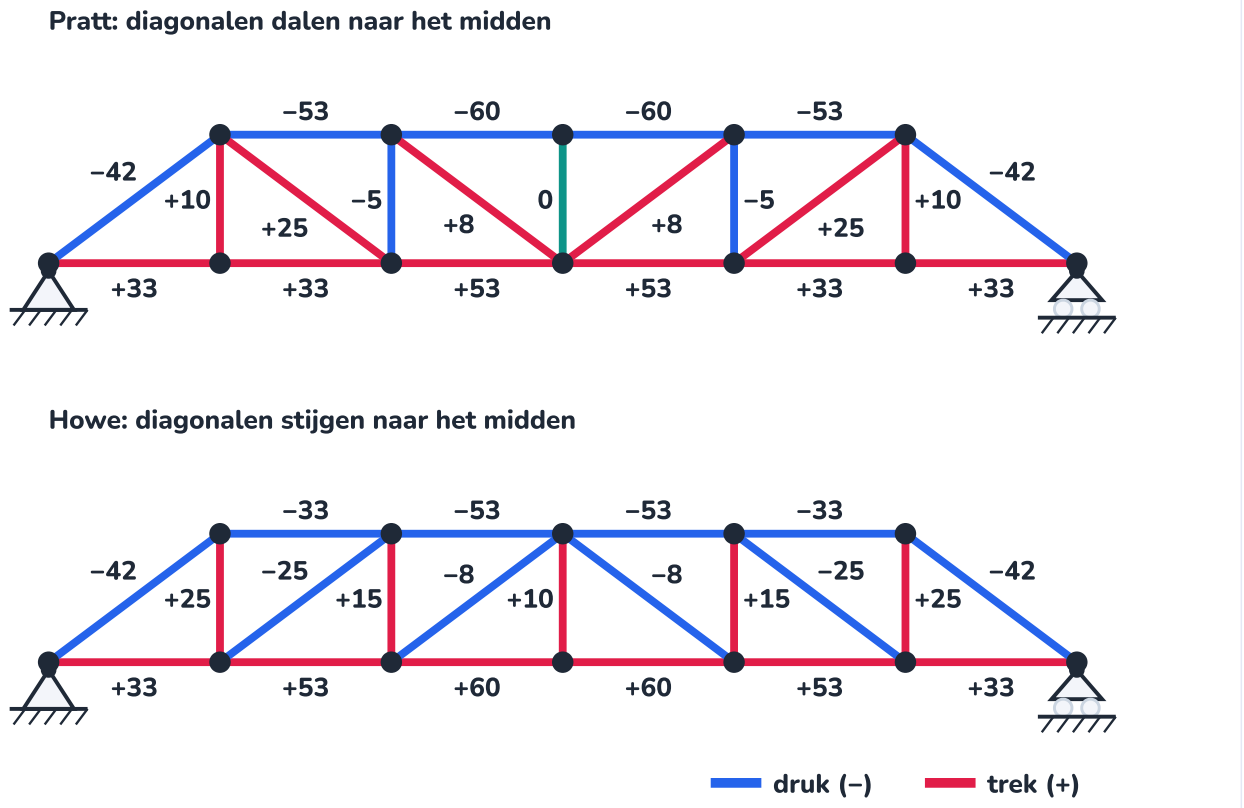
Trek en druk herkennen

6/14

Een ervaren ontwerper ziet de tekens van de staafkrachten voor hij rekent. Vier redeneringen:

1. **Een vakwerk is een balk.** Onder zwaartekracht, op twee steunen, buigt het als een balk door: de **bovenrand** wordt samengedrukt, de **onderrand** uitgerekt (hoofdstuk 12: druk boven, trek onder). De randkracht is ongeveer M/h, het grootst waar het moment het grootst is. Bij een **uitkraging** (een balkon, de armen van de Forth Bridge) is het omgekeerd: boven trek, onder druk.
2. **De diagonalen dragen de dwarskracht** naar de steunen. Hangt een diagonaal vanaf de kant van de steun naar beneden, zoals een touw waaraan de last hangt, dan is ze op trek belast; staat ze vanaf die kant omhoog, als een schoor, dan is ze op druk belast. In een **Pratt**-vakwerk dalen de diagonalen naar het midden: trek, en de verticalen druk. In een **Howe** is het omgekeerd (figuur).
3. **Een knoop met weinig staven** verraadt zich: een onbelaste knoop met twee staven op een lijn en een derde ernaast, geeft een nulstaaf (U3L3 in de Pratt).
4. **Kijk wat er zou gebeuren als je de staaf wegneemt.** Zouden de knopen uit elkaar gaan, dan hield de staaf ze samen: trek. Zouden ze naar elkaar toe komen, dan hield de staaf ze uit elkaar: druk.

Vorm volgt kracht. Trekstaven mogen slank zijn: een staaf, een kabel, een strip. Drukstaven moeten tegen knik een grote I hebben, en worden kort, dik of hol gemaakt. Daarom kozen bruggenbouwers vaak een Pratt voor staal (de lange diagonalen op trek, de korte verticalen op druk) en een Howe voor hout met ijzeren trekstangen (de houten diagonalen op druk, de verticalen als stangen op trek). En daarom zijn de drukstaven van de Forth Bridge buizen.



Dezelfde brug, dezelfde lasten: in de Pratt staan de diagonalen op trek en de verticalen op druk, in de Howe omgekeerd. De randen veranderen niet.

CODE · 13.7

Een programma voor elk vakwerk

7/14

Hoofdstuk 5 loste de steun van het zonnepaneel op als stelsel $A\vec{s} = -\vec{F}$. Hier wordt dat een algemene functie: je geeft knopen, staven, steunen en lasten, en ze controleert eerst of het vakwerk statisch bepaald is (tellen én de rang van de matrix) voor ze oplost. Elke kolom van A is een staaf: haar eenheidsvector staat in de rijen van haar twee knopen, met tegengestelde tekens.

We passen ze meteen toe op het dakspant van de woonmodule (volgende bladen): een **Fink-spant** van 6,0 m met een helling van 30°. De bovenrand heeft een knoop halverwege elk dakvlak (D en E), de onderrand knopen op een derde (F en G), en de diagonalen vormen een W. Bij 30° staat DF precies loodrecht op de bovenrand.

Python **vakwerk.py** 47 regels

```python
# vakwerk.py - staafkrachten van een statisch bepaald vakwerk (evenwicht per knoop, als stelsel: hoofdstuk 5)
import math
import numpy as np

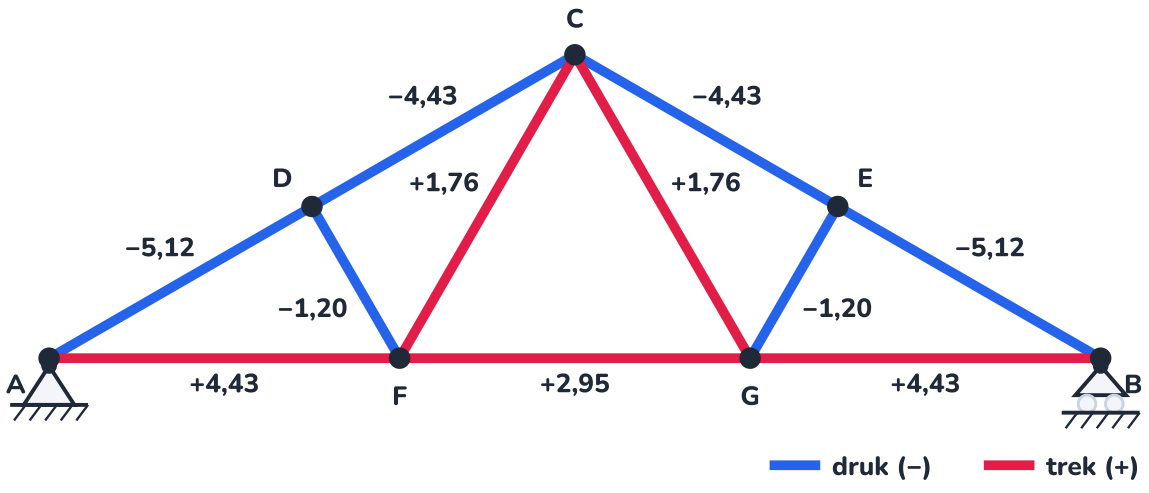

def vakwerk(knopen, staven, steunen, lasten):
    """knopen {naam: (x, y)} in m; staven [(p, q)]; steunen [(knoop, richting)]; lasten {knoop: (Fx, Fy)} in kN.
    Geeft de staafkrachten (trek positief) en de reacties."""
    rij = {k: 2 * i for i, k in enumerate(knopen)}          # rij 2i: evenwicht in x, rij 2i+1: in y
    m, r, k = len(staven), len(steunen), len(knopen)
    if m + r != 2 * k:
        raise ValueError(f"m + r = {m + r} en 2k = {2 * k}: niet statisch bepaald")
    A = np.zeros((2 * k, m + r))
```

```
    for j, (p, q) in enumerate(staven):
        e = np.subtract(knopen[q], knopen[p])
        e = e / np.linalg.norm(e)                       # eenheidsvector van p naar q
        A[rij[p]:rij[p] + 2, j] += e                    # een trekkracht trekt p naar q ...
        A[rij[q]:rij[q] + 2, j] -= e                    # ... en q naar p
    for j, (knoop, richting) in enumerate(steunen):
        A[rij[knoop]:rij[knoop] + 2, m + j] += richting
    if np.linalg.matrix_rank(A) < 2 * k:
        raise ValueError("singuliere matrix: een mechanisme of een kritische vorm")
    F = np.zeros(2 * k)
    for knoop, f in lasten.items():
        F[rij[knoop]:rij[knoop] + 2] += f
    x = np.linalg.solve(A, -F)                          # A x + F = 0 in elke knoop
    return x[:m], x[m:]


# het dakspant van de woonmodule: Fink, 6,0 m, 30 graden, spanten om de 0,60 m
h = math.tan(math.radians(30))
knopen = {"A": (0, 0), "D": (1.5, 1.5 * h), "C": (3, 3 * h), "E": (4.5, 1.5 * h), "B": (6, 0), "F": (2, 0),
"G": (4, 0)}
staven = [("A", "D"), ("D", "C"), ("C", "E"), ("E", "B"), ("A", "F"), ("F", "G"), ("G", "B"),
          ("D", "F"), ("F", "C"), ("C", "G"), ("G", "E")]
steunen = [("A", (1, 0)), ("A", (0, 1)), ("B", (0, 1))]      # scharnier in A, rol in B

# rekenwaarden 1,35 G + 1,5 S per spant, in kN per meter horizontaal
q_boven = 1.35 * 0.60 / math.cos(math.radians(30)) * 0.60 + 1.5 * 0.40 * 0.60
q_onder = 1.35 * 0.30 * 0.60
lasten = {"D": (0, -1.5 * q_boven), "C": (0, -1.5 * q_boven), "E": (0, -1.5 * q_boven),
          "F": (0, -2.0 * q_onder), "G": (0, -2.0 * q_onder),
          "A": (0, -0.75 * q_boven - q_onder), "B": (0, -0.75 * q_boven - q_onder)}

krachten, reacties = vakwerk(knopen, staven, steunen, lasten)
for (p, q), s in zip(staven, krachten):
    print(f"staaf {p}{q}: {s:6.2f} kN  {'trek' if s > 0 else 'druk'}")
print(f"reacties: Ay = {reacties[1]:.2f} kN, By = {reacties[2]:.2f} kN (Ax = 0: geen horizontale last)")
```



De staafkrachten van het spant: de bovenrand draagt tot 5,1 kN druk, de onderrand tot 4,4 kN trek.

Uitvoer:

```
staaf AD:  -5.12 kN  druk
staaf DC:  -4.43 kN  druk
staaf CE:  -4.43 kN  druk
staaf EB:  -5.12 kN  druk
staaf AF:   4.43 kN  trek
staaf FG:   2.95 kN  trek
staaf GB:   4.43 kN  trek
staaf DF:  -1.20 kN  druk
staaf FC:   1.76 kN  trek
staaf CG:   1.76 kN  trek
staaf GE:  -1.20 kN  druk
reacties: Ay = 3.49 kN, By = 3.49 kN (Ax = 0: geen horizontale last)
```

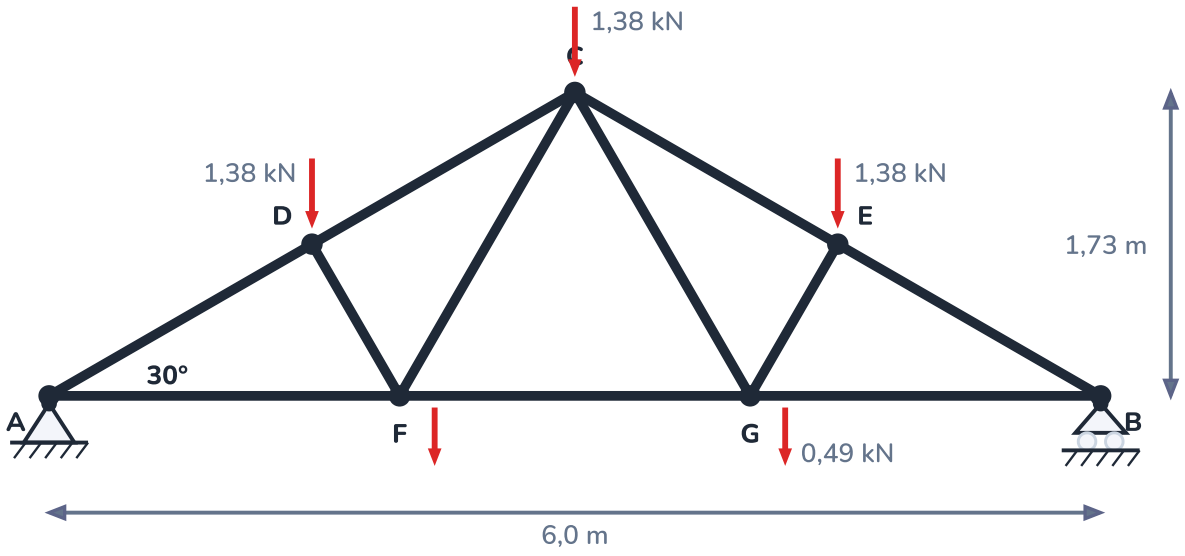
De tekens volgen de regels van het vorige blad: bovenrand druk, onderrand trek, de korte diagonalen DF en GE (schoren die de bovenrand halverwege ondersteunen) druk, de lange FC en CG (die de onderrand aan de nok ophangen) trek. Wie een staaf vergeet of een steun verkeerd kiest, krijgt geen fout getal maar een duidelijke melding.

UITGEWERKT VOORBEELD · 13.8

Habitat: de lasten op het dakspant

8/14

Het dak van de woonmodule (binnen 6,0 × 4,0 m) is een zadeldak met een helling van 30°. De spanten overspannen 6,0 m en staan om de 0,60 m (acht spanten over de 4,0 m); de nok loopt evenwijdig aan de korte zijde, zodat één dakvlak op het zuiden kijkt (later misschien zonnepanelen). Bepaal de knooplasten op één spant volgens de Eurocode, met eigengewicht en sneeuw.



Het Fink-spant met de knooplasten (rekenwaarden per spant). Bij 30° staan de korte diagonalen loodrecht op de bovenrand.

GEGEVEN

- dakbedekking met latten, onderdak en spant: $0{,}60\,\mathrm{kN/m^2}$ dakvlak; plafond met isolatie: $0{,}30\,\mathrm{kN/m^2}$

GEVRAAGD

- lijnlasten per spant en de knooplasten

- sneeuw: $s_k = 0{,}5\,\mathrm{kN/m^2}$ (België, tot 100 m hoogte), vormfactor $\mu_1 = 0{,}8$ tot 30°; per m² horizontaal
- combinatie $1{,}35\,G + 1{,}5\,S$; h.o.h. 0,60 m

OPLOSSING

1 **Eigengewicht dak** per m horizontaal: een dakvlak van 1 m horizontaal is $1/\cos 30° = 1{,}155\,\mathrm{m}$ lang, dus $0{,}60 \cdot 1{,}155 \cdot 0{,}60 = 0{,}416\,\mathrm{kN/m}$. **Plafond**: $0{,}30 \cdot 0{,}60 = 0{,}18\,\mathrm{kN/m}$. **Sneeuw**: $s = \mu_1 s_k = 0{,}40\,\mathrm{kN/m^2}$ horizontaal, $0{,}40 \cdot 0{,}60 = 0{,}24\,\mathrm{kN/m}$.

2 **Rekenwaarden**: bovenrand $q = 1{,}35 \cdot 0{,}416 + 1{,}5 \cdot 0{,}24 = 0{,}921\,\mathrm{kN/m}$; onderrand $1{,}35 \cdot 0{,}18 = 0{,}243\,\mathrm{kN/m}$.

3 **Naar de knopen**: elke knoop krijgt de last van de halve vakken ernaast. Bovenrand (vakken van 1,5 m horizontaal): D, C en E elk $1{,}5 \cdot 0{,}921 = 1{,}38\,\mathrm{kN}$. Onderrand (vakken van 2,0 m): F en G elk $0{,}49\,\mathrm{kN}$. De rest gaat rechtstreeks in de opleggingen A en B.

4 **Asymmetrische sneeuw.** Wind blaast sneeuw van één dakvlak: de norm laat ook $0{,}5\,\mu_1$ op één vlak en μ_1 op het andere nakijken. Beide gevallen (het tweede met de halve sneeuw op het noordvlak):

STAAF	LENGTE (M)	SYMMETRISCHE SNEEUW (KN)	SNEEUW HALF OP HET NOORDVLAK (KN)
AD	1,732	−5,12	−4,58
DC	1,732	−4,43	−4,02
CE	1,732	−4,43	−4,16
EB	1,732	−5,12	−4,85
AF	2,000	+4,43	+3,96
FG	2,000	+2,95	+2,72
GB	2,000	+4,43	+4,20
DF	1,000	−1,20	−0,96
FC	2,000	+1,76	+1,52
CG	2,000	+1,76	+1,76
GE	1,000	−1,20	−1,20

ANTWOORD

Per spant: 1,38 kN in D, C en E, 0,49 kN in F en G (rekenwaarden). Symmetrische sneeuw is hier het zwaarste geval; de reacties zijn elk 3,49 kN.

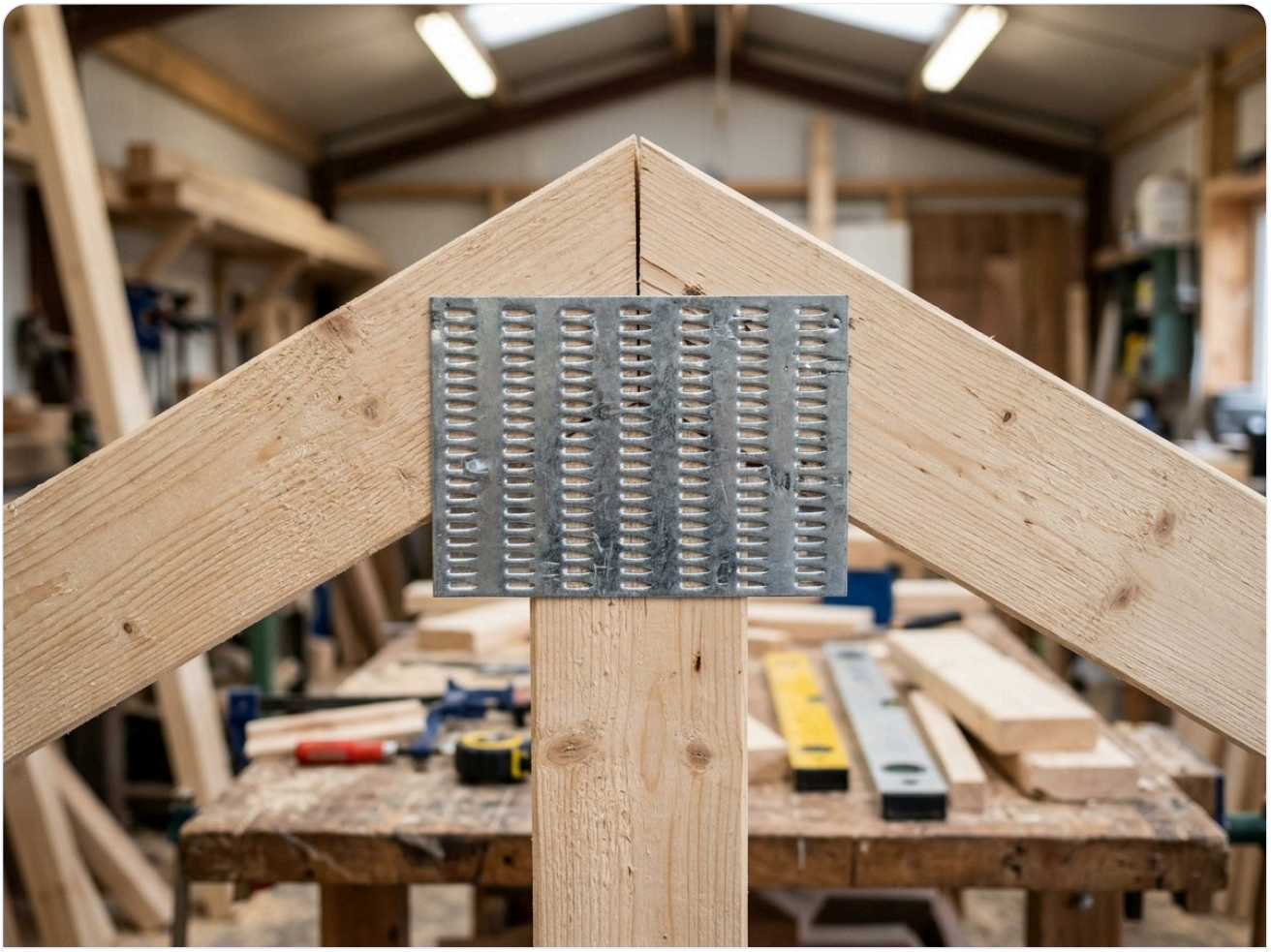
Klopt dit? Totaal: $6{,}0 \cdot (0{,}921 + 0{,}243) = 6{,}99\,\mathrm{kN}$, en $2 \cdot 3{,}493 = 6{,}99\,\mathrm{kN}$. In België is sneeuw licht (in de bergen vaak tien keer zwaarder), maar ze telt hier toch voor bijna een derde van de rekenlast. De echte waarden (ook voor wind: zuiging kan de krachten omkeren, opdracht 13.9) geeft de nationale bijlage van de Eurocode.

UITGEWERKT VOORBEELD · 13.9

Habitat: de doorsneden van het spant kiezen

9/14

Kies de doorsneden van het spant in vuren C24: de randen 45 × 95 mm, de diagonalen 45 × 70 mm. Controleer trek, druk met knik, en de bovenrand, die ook de dakbedekking tussen de knopen draagt (buiging, hoofdstuk 12).



Een nagelplaat in de nok: de knoop die het model een scharnier noemt.

GEGEVEN

- staafkrachten van `vakwerk.py` (rekenwaarden)
- C24: $f_{c,0,k} = 21$, $f_{t,0,k} = 14{,}5$, $f_{m,k} = 24\,\mathrm{MPa}$; sneeuw is een korte last: $k_{mod} = 0{,}9$, $\gamma_M = 1{,}3$; voor knik de lage waarde $E_{0,05} = 7{,}4\,\mathrm{GPa}$
- de panlatten houden de bovenrand zijdelings vast; het plafond de onderrand

GEVRAAGD

- een controle per staaftype

OPLOSSING

1 **Rekenwaarden van de sterkte**: $f_{c,0,d} = 0{,}9 \cdot 21/1{,}3 = 14{,}5\,\mathrm{MPa}$, $f_{t,0,d} = 10{,}0\,\mathrm{MPa}$, $f_{m,d} = 16{,}6\,\mathrm{MPa}$.

2 **Buiging van de bovenrand**: de last $q = 0{,}921\,\mathrm{kN/m}$ (horizontaal gemeten) geeft loodrecht op de schuine rand $q\cos^2 30^\circ = 0{,}691\,\mathrm{kN/m}$ per m rand; over een vak van 1,732 m als balk op twee steunen $M = qL^2/8 = 0{,}259\,\mathrm{kN\,m}$ (een doorlopende rand minder).

3 Alle controles:

STAAF	KRACHT	DOORSNEDE	CONTROLE	BENUTTING
bovenrand AD (druk + buiging)	−5,12 kN; $M = 0{,}259\,\mathrm{kN\,m}$	45 × 95	$(\sigma_c/f_{c,0,d})^2 + \sigma_m/f_{m,d}$: $(1{,}20/14{,}5)^2 + 3{,}83/16{,}6$	0,24
bovenrand AD (knik in het vlak)	−5,12 kN	45 × 95, $L = 1{,}73\,\mathrm{m}$	$F_k = \pi^2 E_{0{,}05} I/L^2 = 78\,\mathrm{kN}$	0,07
onderrand AF (trek)	+4,43 kN	45 × 95	$\sigma_t = 1{,}04\,\mathrm{MPa} \le 10{,}0\,\mathrm{MPa}$	0,10
diagonaal DF (druk, knik uit het vlak)	−1,20 kN	45 × 70, $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$	$F_k = 38{,}8\,\mathrm{kN}$ (zwakke as)	0,03
diagonaal FC (trek)	+1,76 kN	45 × 70	$\sigma_t = 0{,}56\,\mathrm{MPa}$	0,06

ANTWOORD

Randen 45 × 95 mm en diagonalen 45 × 70 mm in C24 voldoen ruim; de bovenrand is het zwaarst benut (0,24), vooral door de buiging tussen de knopen, niet door de staafkracht.

Klopt dit? Waarom dan niet dunner? Omdat de **verbindingen** beslissen: een nagelplaat heeft een minimale houtbreedte en -dikte nodig om zijn tanden in te drukken, en het spant moet het dragen en monteren overleven. Echte fabriekspanten van deze overspanning zijn meestal 35 à 47 mm dik en 70 à 120 mm hoog: dezelfde orde. De doorbuiging volgt op het volgende blad.

UITLEG · 13.10

Het idee van de eindige-elementenmethode

De knooppunten- en snedemethode gebruiken alleen evenwicht. Voor een overtallig vakwerk, een schaal, een motorblok of een windturbineblad volstaat dat niet: dan moet je ook weten hoe elk deel **vervormt**. De **eindige-elementenmethode** (EEM, in het Engels FEM) doet dat in vijf stappen:

1. **Opdelen** in eenvoudige stukken (elementen), verbonden in knopen. De onbekenden zijn de **verplaatsingen** van de knopen (de vrijheidsgraden).
2. **Elke element** krijgt een stijfheidsmatrix: welke krachten horen bij welke verplaatsingen van zijn knopen. Voor een staaf op trek of druk is dat de veer van hoofdstuk 12: $k = EA/L$.
3. **Assembleren**: tel alle elementmatrices op in één grote matrix K, op de plaatsen van hun knopen.
4. **Randvoorwaarden** (steunen: verplaatsing nul) invullen en $K\vec{u} = \vec{F}$ **oplossen**.
5. **Nabewerken**: uit de verplaatsingen volgen de rek, de krachten en de spanningen in elk element.

Een voorbeeld in één dimensie: de mast van de windturbine (hoofdstuk 11 en 12) als drie staafelementen van 4,0 m die op druk werken, met het gewicht van de gondel bovenaan en het eigen gewicht van elk stuk half in elke knoop. Elk element geeft $\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ met $k = EA/L = 197{,}5\,\mathrm{MN/m}$. Opgeteld en met knoop 0 vast ontstaat de matrix van de figuur. Oplossen geeft verplaatsingen van 22,1, 38,4 en 48,8 µm (naar beneden: staal is stijf), en de krachten in de elementen $k(u_i - u_{i-1})$: −4,37, −3,21 en −2,05 kN druk, precies het gewicht boven elk element. Voor een statisch bepaalde constructie geeft de EEM dus hetzelfde als evenwicht, plus de vervorming.

EEN STAAFELEMENT IN HET VLAK

$$k_\mathrm{e} = \frac{EA}{L}\,\vec{b}\,\vec{b}^{\mathsf{T}}, \quad \vec{b} = (-c, -s, c, s) \qquad K = \sum_\mathrm{e} k_\mathrm{e} \qquad K\vec{u} = \vec{F} \qquad S = \frac{EA}{L}\,\vec{b}\cdot\vec{u}_\mathrm{e}$$

(c, s) is de eenheidsvector van de staaf. De verlenging is de verplaatsing van de ene knoop min die van de andere, geprojecteerd op de staaf: $\vec{b}\cdot\vec{u}_\mathrm{e}$. Vermenigvuldigd met EA/L is dat de staafkracht.

Een echt EEM-programma gebruikt ook balkelementen (die buigen: zo vond hoofdstuk 11 de tweede eigenfrequentie van de mast), platen, schalen en volume-elementen, soms met miljoenen vrijheidsgraden. Het principe blijft: kleine stukken, één stelsel. Een fout in de invoer (een vergeten steun, een verkeerde eenheid) geeft vrolijk een verkeerd antwoord: controleer altijd met een handberekening zoals die van dit hoofdstuk.



$$k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ -F_3 \end{bmatrix}$$

k = EA / L per element; knoop 0 zit vast ($u_0 = 0$)
elk element voegt [k −k; −k k] toe op zijn twee knopen

Drie elementen, drie onbekende verplaatsingen: elke element voegt zijn stijfheid toe op de diagonaal van zijn twee knopen en −k ertussen.

CODE · 13.11

Habitat: het spant als stijfheidsmodel

11/14

Hetzelfde spant, nu met de stijfheidsmethode. Elke staaf krijgt haar echte EA (vuren, $E = 11\,\mathrm{GPa}$ gemiddeld; randen 45 × 95, diagonalen 45 × 70 mm). Het programma maakt de 14×14-matrix K, schrapt de drie vaste vrijheidsgraden (A in x en y, B in y) en lost op. Daarna een tweede geval: een **dragende tussenwand** onder knoop F, zoals iemand die zou voorstellen om het spant 'te helpen'. Dan zijn er vier reacties: statisch onbepaald, en evenwicht alleen volstaat niet meer.

Python **fem_vakwerk.py** 55 regels

```python
# fem_vakwerk.py - het dakspant als stijfheidsmodel: K u = F (het idee van de eindige-elementenmethode)
import math
import numpy as np

h = math.tan(math.radians(30))
knopen = {"A": (0, 0), "D": (1.5, 1.5 * h), "C": (3, 3 * h), "E": (4.5, 1.5 * h), "B": (6, 0), "F": (2, 0), "G": (4, 0)}
staven = [("A", "D"), ("D", "C"), ("C", "E"), ("E", "B"), ("A", "F"), ("F", "G"), ("G", "B"),
          ("D", "F"), ("F", "C"), ("C", "G"), ("G", "E")]
E = 11e6                                                    # vuren C24, gemiddeld (kN/m2)
EA = {st: E * (0.045 * 0.095 if i < 7 else 0.045 * 0.070) for i, st in enumerate(staven)}   # randen en diagonalen (kN)
```

```python
idx = {k: i for i, k in enumerate(knopen)}

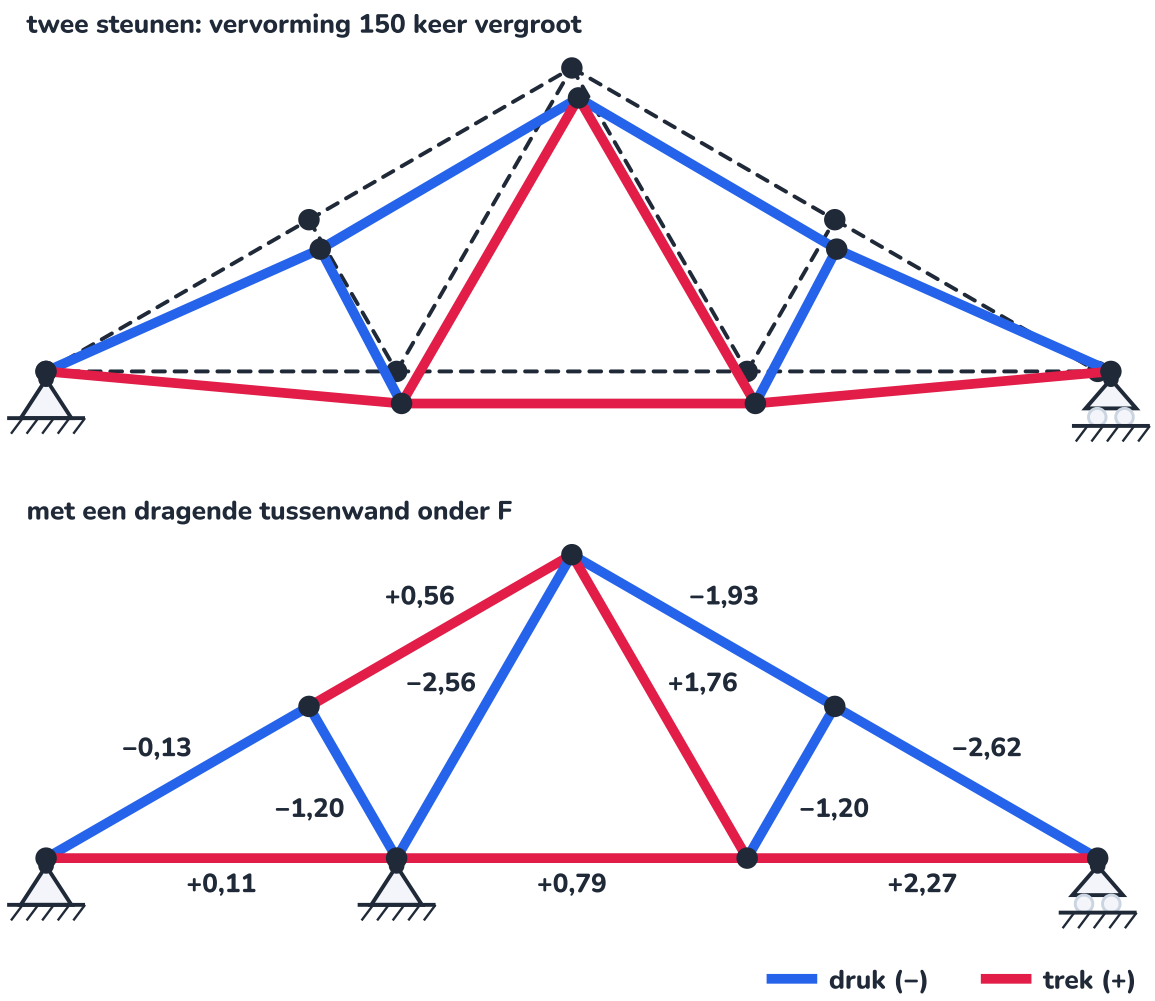

def spantlasten(q_links, q_rechts, q_onder):
    return {"D": (0, -1.5 * q_links), "C": (0, -0.75 * (q_links + q_rechts)), "E": (0, -1.5 * q_rechts),
            "F": (0, -2.0 * q_onder), "G": (0, -2.0 * q_onder),
            "A": (0, -0.75 * q_links - q_onder), "B": (0, -0.75 * q_rechts - q_onder)}


def element(p, q):
    """Een staaf van p naar q: rek = b . (u_p, u_q) / L, dus stijfheid EA/L * b b^T met b = (-c, -s, c, s)."""
    d = np.subtract(knopen[q], knopen[p])
    L = np.linalg.norm(d)
    b = np.concatenate([-d / L, d / L])
    vg = [2 * idx[p], 2 * idx[p] + 1, 2 * idx[q], 2 * idx[q] + 1]   # de vier vrijheidsgraden van de staaf
    return L, b, vg


def los(vaste_vg, lasten):
    n = 2 * len(knopen)
    K, F = np.zeros((n, n)), np.zeros(n)
    for st in staven:                                       # 1. elementen maken en 2. assembleren
        L, b, vg = element(*st)
        K[np.ix_(vg, vg)] += EA[st] / L * np.outer(b, b)
    for knoop, f in lasten.items():
        F[2 * idx[knoop]:2 * idx[knoop] + 2] += f
    vrij = [i for i in range(n) if i not in vaste_vg]       # 3. randvoorwaarden: vaste vrijheidsgraden weg
    u = np.zeros(n)
    u[vrij] = np.linalg.solve(K[np.ix_(vrij, vrij)], F[vrij])  # 4. oplossen
    krachten = [EA[st] / element(*st)[0] * element(*st)[1] @ u[element(*st)[2]] for st in staven]   # 5. nabewerken
    return u, np.array(krachten), K @ u - F


q_b = 0.60 / math.cos(math.radians(30)) * 0.60              # eigengewicht dak (kN/m, horizontaal)
q_s, q_o = 0.40 * 0.60, 0.30 * 0.60                         # sneeuw en plafond
steunen = [0, 1, 2 * idx["B"] + 1]                          # A vast in x en y, B alleen in y

u, s1, R = los(steunen, spantlasten(1.35 * q_b + 1.5 * q_s, 1.35 * q_b + 1.5 * q_s, 1.35 * q_o))
print("rekenwaarden, twee steunen:  " + " ".join(f"{p}{q} {x:5.2f}" for (p, q), x in zip(staven, s1)))
u_k, _, _ = los(steunen, spantlasten(q_b + q_s, q_b + q_s, q_o))
print(f"doorbuiging (karakteristiek): nok {-1000 * u_k[2 * idx['C'] + 1]:.2f} mm, "
      f"onderrand in F {-1000 * u_k[2 * idx['F'] + 1]:.2f} mm, rol B schuift {1000 * u_k[2 * idx['B']]:.2f} mm")
u_w, s2, R2 = los(steunen + [2 * idx["F"] + 1], spantlasten(1.35 * q_b + 1.5 * q_s, 1.35 * q_b + 1.5 * q_s, 1.35 * q_o))
print("met tussenwand onder F:      " + " ".join(f"{p}{q} {x:5.2f}" for (p, q), x in zip(staven, s2)))
print(f"reacties met tussenwand: A {R2[1]:.2f}, F {R2[2 * idx['F'] + 1]:.2f}, B {R2[2 * idx['B'] + 1]:.2f} kN")
```



Boven: de vervorming met twee steunen, 150 keer vergroot (stippellijn: onvervormd; kleuren zoals ervoor). Onder: met een dragende tussenwand onder F wisselen diagonaal FC en bovenrand DC van teken (krachten in kN).

Uitvoer:

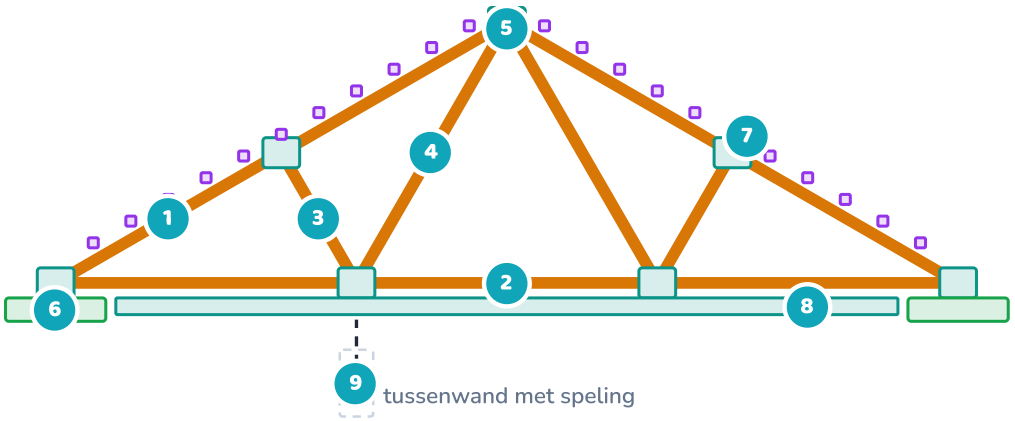
```
rekenwaarden, twee steunen:  AD -5.12 DC -4.43 CE -4.43 EB -5.12 AF  4.43 FG  2.95 GB  4.43 DF
-1.20 FC  1.76 CG  1.76 GE -1.20
doorbuiging (karakteristiek): nok 0.82 mm, onderrand in F 0.88 mm, rol B schuift 0.36 mm
met tussenwand onder F:      AD -0.13 DC  0.56 CE -1.93 EB -2.62 AF  0.11 FG  0.79 GB  2.27 DF
-1.20 FC -2.56 CG  1.76 GE -1.20
reacties met tussenwand: A 1.00, F 3.74, B 2.24 kN
```

Twee steunen: de krachten zijn dezelfde als die van `vakwerk.py` (de verschillen zijn afrondingsfouten van de computer). Nieuw is de vervorming: onder de karakteristieke lasten zakt de nok 0,82 mm en schuift de rol 0,36 mm weg, omdat de onderrand langer wordt. In werkelijkheid zakt een spant meer: de tanden van de nagelplaten geven wat mee (slip). Een doorbuiging van een paar millimeter over 6 m is ruim binnen $L/300 = 20\,\mathrm{mm}$.

Met een tussenwand neemt de wand 3,74 kN op, meer dan de muren zelf (A 1,00, B 2,24 kN). Diagonaal FC slaat om van +1,76 kN trek naar −2,56 kN druk, en de bovenrand DC van druk naar trek. Die staven zijn daar niet voor ontworpen: een nagelplaatverbinding op trek die plots op druk werkt, of een trekstaaf die kan knikken. Daarom geldt voor spanten een eenvoudige regel: tussenwanden krijgen een speling van enkele millimeter onder de onderrand en dragen het dak niet (opdracht 13.13).

Een nagelplaatspant ontleed

Een fabrieksspant voor het dak van de woonmodule: de staven van het model, en wat het model niet toont.



Schematisch: het spant (Fink, 6,0 m, 30°) op de muurplaten, met nagelplaten, panlatten en plafond.

1 Bovenrand
Druk (tot 5,1 kN) en buiging door de dakbedekking tussen de knopen. De panlatten houden hem zijdelings vast: uit het vlak knikt hij niet.

2 Onderrand
Trek (tot 4,4 kN): de trekband die de twee dakvlakken samenhoudt, zodat de muren geen spatkracht krijgen. Draagt ook het plafond.

3 Korte diagonaal
Druk: een schoor die de bovenrand halverwege ondersteunt en zijn kniklengte halveert.

4 Lange diagonaal
Trek: hangt de onderrand aan de nok op. Met een dragende tussenwand eronder zou ze op druk komen.

5 Nagelplaat
Een verzinkte stalen plaat met tanden, in beide zijden van de knoop geperst. De knoop is geen echt scharnier, maar slank hout maakt het verschil klein.

6 Oplegging op de muurplaat
Beide uiteinden worden vastgezet (tegen wind die het dak wil optillen). Omdat de onderrand de horizontale kracht zelf opneemt, duwt het spant niet tegen de muren.

7 Panlatten
Dragen de pannen naar de spanten en verbinden alle spanten in de lengte. Samen met een schuin windverband houden ze de spanten rechtop.

8 Plafond met isolatie
0,30 kN/m² op de onderrand; in de knopen F en G als last, ertussen als buiging van de onderrand.

9 Tussenwand met speling
Draagt het dak niet: enkele millimeter ruimte onder de onderrand, zodat het spant vrij kan doorbuigen (vorig blad).

NASLAG · 13.13

Vakwerken: formules en werkwijze

13/14

Werkwijze: (1) tellen en de vorm nakijken (bepaald, mechanisme, overtallig, kritisch); (2) lasten naar de knopen brengen; (3) reacties; (4) krachten met de knooppuntenmethode (alles), de snedemethode (één staaf) of een programma; (5) tekens controleren met de regels (randen $\approx \pm M/h$, diagonalen $\approx V/\sin\theta$); (6) doorsneden: trek op sterkte, druk op sterkte en knik, lasten tussen de knopen als buiging; (7) bij een overtallig vakwerk of als de vervorming telt: de stijfheidsmethode.

statisch bepaald vlak vakwerk

$$m + r = 2k, \ \det A \neq 0$$

symbool	betekenis	eenheid
m	aantal staven	-
r	aantal reacties	-
k	aantal knopen	-

knooppuntenmethode

$$\sum_{\text{staven}} S\,\hat{e} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0} \text{ per knoop}$$

symbool	betekenis	eenheid
S	staafkracht (trek +)	kN

snedemethode (evenwijdige randen)

$$S_{\text{rand}} = \pm\frac{M}{h}, \quad S_{\text{diag}} = \frac{V}{\sin\theta}$$

stijfheidsmethode

$$k_e = \frac{EA}{L}\vec{b}\vec{b}^{\mathsf{T}}, \quad K\vec{u} = \vec{F}, \quad S = \frac{EA}{L}\vec{b}\cdot\vec{u}_e$$

sneeuw en lastcombinatie (Eurocode)

$$s = \mu_1 s_k, \quad 1{,}35\,G + 1{,}5\,Q$$

HET GEHEEL · 13.14

Waar vakwerken vandaan komen en waar ze heen gaan

14/14

Vakwerken brengen samen wat deel E2 opbouwde: evenwicht, vectoren en matrices, spanning en knik. De stijfheidsmethode is de brug naar de numerieke wiskunde (grote stelsels, conditie) en naar elk modern ontwerpprogramma. Ontwerpen (D) is hier letterlijk: de vorm van een constructie volgt de krachten.

F13 Constructies: sterk en stabiel
De driehoek, vakwerkbruggen en trek- en drukstaven aanwijzen: nu met getallen.

I10 Moment en evenwicht
Evenwicht, reacties en statisch bepaald; de invloedslijn van de vloerbalk.

E5 Vectoren en matrices
Het vakwerk als stelsel A s = –F, Gauss en numpy; conditie van een matrix.

E2 Optimaliseren
De hoogte van een brug met het minste materiaal (opdracht 13.14).

E11 Trillingen en resonantie
Het balkmodel van de mast met eindige elementen: de tweede eigenfrequentie.

E12 Sterkteleer
Van staafkracht naar doorsnede: trek, druk, knik en buiging van de bovenrand.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

E28 Materiaalkunde
Hout, staal en composieten kiezen voor staven op trek en druk.

E45 Systems engineering en het V-model

Grote stelsels oplossen en de nauwkeurigheid van numerieke modellen.

Eisen (lasten, doorbuiging) en verificatie van een ontwerp met een model.

E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

Hout of staal voor het dak: de milieu-impact van de keuze.

Habitat

Habitat heeft nu een dak: acht Fink-spanten van 6,0 m onder 30°, om de 0,60 m, uit vuren C24 (randen 45 × 95, diagonalen 45 × 70 mm) met nagelplaten. Bij de rekenlast van sneeuw en eigengewicht draagt de bovenrand hoogstens 5,1 kN druk en de onderrand 4,4 kN trek; de nok zakt minder dan een millimeter plus de slip van de verbindingen. Tussenwanden krijgen speling. Het zuidvlak kan zonnepanelen dragen (opdracht 13.11); hoofdstuk 24 dimensioneert het zonnepark van het station.

SAMENVATTING

In het kort

- Een ideaal vakwerk heeft rechte staven, scharnierende knopen en lasten in de knopen: elke staaf draagt alleen trek of druk.
- Statisch bepaald als $m + r = 2k$ én de evenwichtsmatrix regelmatig is; anders een mechanisme, een kritische vorm of een overtallig vakwerk.
- Knooppuntenmethode: evenwicht per knoop, onbekende krachten als trek getekend, beginnen bij een knoop met twee onbekenden; nulstaven zie je zonder rekenen.
- Snedemethode: snij door drie staven en neem momenten om het snijpunt van twee ervan; randen $\approx M/h$, diagonalen $V/\sin\theta$.
- Onder zwaartekracht op twee steunen: bovenrand druk, onderrand trek; diagonalen volgen de dwarskracht (Pratt trek, Howe druk). Trekstaven slank, drukstaven stijf.
- De eindige-elementenmethode: elementen met stijfheid EA/L, assembleren tot K, randvoorwaarden, $K\vec{u} = \vec{F}$ oplossen, krachten nabewerken; ze werkt ook als evenwicht alleen niet volstaat.
- Habitat: het Fink-spant (6,0 m, 30°) in C24 45 × 95 en 45 × 70 mm draagt de sneeuw ruim; een dragende tussenwand zou krachten doen omslaan.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

ideaal vakwerk

Rechte staven, scharnierend verbonden in knopen, met de lasten alleen in de knopen: elke staaf draagt dan alleen een kracht langs zichzelf.

statisch bepaald

Alle staafkrachten en reacties volgen uit evenwicht alleen: $m + r = 2k$ en de evenwichtsmatrix is regelmatig.

mechanisme

Een constructie die kan bewegen zonder dat een staaf van lengte verandert: te weinig staven of steunen, of een ongelukkige schikking.

knooppuntenmethode

Evenwicht van de krachten in elke knoop, knoop na knoop of als één stelsel.

snedemethode

Het vakwerk in gedachten doorsnijden door hoogstens drie staven en het evenwicht van één deel gebruiken, vaak met een momentenvergelijking om het snijpunt van twee staven (Ritter).

nulstaaf

Een staaf die bij een bepaalde belasting geen kracht draagt; ze is er voor stabiliteit, andere lastgevallen of om knik te beletten.

invloedslijn

Grafiek van een kracht in één staaf (of een reactie) tegenover de plaats van een last die over de constructie beweegt.

eindige-elementenmethode

Een constructie opdelen in eenvoudige stukken (elementen) met een eigen stijfheidsmatrix, die samen één stelsel K u = F vormen; oplossen geeft verplaatsingen, daaruit volgen krachten en spanningen.

stijfheidsmatrix

K in $K\vec{u} = \vec{F}$: kolom j geeft de krachten die nodig zijn om alleen vrijheidsgraad j een eenheid te verplaatsen.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 14

Gassen en de gaswetten

Wat de lucht in het station doet: van botsende moleculen tot een ventilatie die klopt

Twee bewoners in een woonmodule van 62 m³ ademen elke dag 2 kg CO_2 en 4 kg waterdamp uit en halen er 1,7 kg zuurstof uit. Hoe snel wordt dat een probleem, en hoeveel verse lucht is er nodig? Om dat te beantwoorden leer je de taal van gassen: druk, volume, temperatuur en hoeveelheid, de ideale gaswet, en waar die wet vandaan komt: miljarden botsingen per seconde. Je rekent met partiële drukken en luchtvochtigheid, ziet wanneer een gas niet meer ideaal is (een CO_2-fles), en je legt vast hoe het station zijn lucht bewaakt.

7× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 2× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 11 lestijden

E Energie · M Materie en chemie · B Leven en systemen



Een klein kastje aan de wand meet wat je niet ziet: CO_2, zuurstof, luchtvochtigheid en luchtdruk. Het brein van het station beslist ermee hoeveel verse lucht er binnenkomt.

Na dit hoofdstuk

- Je kan druk, volume, temperatuur en hoeveelheid van een gas omrekenen en de ideale gaswet pV = nRT = NkT toepassen, ook op het station.
- Je kan de wet van Boyle met een meting toetsen en een systematische fout (de dode ruimte) uit de gegevens halen.
- Je kan de druk van een gas afleiden uit de botsingen van moleculen en het verband tussen temperatuur en kinetische energie gebruiken.
- Je kan de verdeling van Maxwell en Boltzmann interpreteren en er de meest waarschijnlijke, de gemiddelde en de rms-snelheid mee berekenen.
- Je kan met molfracties, ppm en partiële drukken rekenen (wet van Dalton) en de invloed van hoogte en luchtdruk uitleggen.
- Je kan een massabalans voor CO_2, O_2 en waterdamp opstellen en er een ventilatiedebiet mee ontwerpen.
- Je kan relatieve vochtigheid, absolute vochtigheid en dauwpunt berekenen (Magnus) en condens op een oppervlak voorspellen.
- Je kan uitleggen wanneer een gas niet meer ideaal is (compressibiliteitsfactor, Van der Waals, kritisch punt) en wat dat betekent voor een gasfles.

VERHAAL · 14.1

Van gas sylvestre tot pV = nRT

1/21

Het woord **gas** komt uit Brussel. Rond 1600 onderzocht de Brusselse arts en scheikundige Jan Baptista van Helmont (geboren rond 1580, gestorven in 1644 in Vilvoorde) wat er vrijkomt als je houtskool verbrandt of druiven laat gisten. Het was geen lucht en geen damp, en hij verzon er een nieuw woord voor, naar het Griekse *chaos*: gas. Wat uit brandende houtskool en gistend sap kwam, noemde hij *gas sylvestre*, 'wild gas'. Vandaag heet het koolstofdioxide. Zijn werk verscheen pas na zijn dood, in 1648, uitgegeven door zijn zoon.

In 1662 beschreef Robert Boyle in Oxford hoe lucht zich laat samendrukken. Met een luchtpomp die zijn assistent Robert Hooke had gebouwd en een J-vormige buis met kwik toonde hij dat een ingesloten hoeveelheid lucht een half zo groot volume inneemt als je de druk verdubbelt: pV is constant. Edme Mariotte vond hetzelfde in 1676 in Frankrijk; daarom spreekt men in België vaak van de wet van Boyle-Mariotte.

Een eeuw later vulde Jacques Charles een ballon met waterstof en steeg er op 1 december 1783 zelf mee op, boven Parijs. Rond 1787 mat hij dat gassen bij verwarmen allemaal evenveel uitzetten, maar hij publiceerde het niet. Joseph Louis Gay-Lussac deed het wel, in 1802, en noemde Charles als eerste ontdekker. In 1808 vond Gay-Lussac dat gassen in eenvoudige volumeverhoudingen reageren (twee volumes waterstof en één volume zuurstof geven twee volumes waterdamp), en in 1811 verklaarde Amedeo Avogadro dat: gelijke volumes gas bevatten bij dezelfde druk en temperatuur evenveel deeltjes.

De Franse ingenieur Émile Clapeyron smeedde die wetten in 1834 samen tot één vergelijking, $pv = R\,(267 + t)$: de 267 was de beste waarde van toen voor wat wij 273,15 noemen. Waarom gassen zo eenvoudig doen, had Daniel Bernoulli al in 1738 geraden: een gas is een zwerm kleine deeltjes die tegen de wanden botsen. Pas in 1860 werkte James Clerk Maxwell dat idee wiskundig uit, met een verdeling van de snelheden die Ludwig Boltzmann daarna verder uitbouwde.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Een station met bewoners is een gesloten doos lucht. Zonder verse lucht zou de CO_2 in minder dan een uur boven 1000 ppm stijgen en na zes uur boven de alarmgrens. Het brein van het station moet dus weten hoeveel moleculen er zijn, hoe snel ze bijkomen en verdwijnen, en wat een sensor eigenlijk meet. Dat is de ideale gaswet, toegepast.



Een luchtpomp zoals die van Boyle en Hooke: met zulke toestellen werd lucht voor het eerst een meetbaar ding.

UITLEG · 14.2

Wat je al weet: druk, temperatuur en deeltjes

wat je al kan	wat nu komt
deeltjesmodel: gasdeeltjes bewegen, botsen en vullen elke ruimte; warmer = sneller (hoofdstuk 6 van F)	de kinetische gastheorie: druk en temperatuur kwantitatief uit die beweging
druk $p = F/A$, pascal en bar, luchtdruk en overdruk (hoofdstuk 11 van I)	de toestand van een gas: p, V, T en n in één vergelijking
de mol, molaire massa, molair volume 24,1 L/mol bij 20 °C (hoofdstuk 14 van I)	waarom dat molair volume voor elk gas hetzelfde is, en wanneer niet meer
CO_2 en O_2 van planten en bewoners, alarmgrenzen (hoofdstuk 14 van I, hoofdstuk 29 van F)	partiële druk, ppm en het ontwerp van de ventilatie
dauwpunt en condens (hoofdstuk 6 van F, hoofdstuk 19 van I); differentiaalvergelijkingen (hoofdstuk 4)	de formule van Magnus, en de luchtbalans van de woonmodule als simulatie

Vier grootheden beschrijven de **toestand** van een gas:

- **Druk** p in pascal ($1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$; $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$; $1\,\mathrm{hPa} = 100\,\mathrm{Pa}$). In gaswetten altijd de **absolute** druk. Een bandenmeter of de manometer op een fles toont de **overdruk** tegenover de luchtdruk: '2 bar' in een fietsband is ongeveer 3 bar absoluut.

- **Volume** V in m³ ($1\,\mathrm{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$).
- **Temperatuur** T in kelvin: $T = t + 273{,}15$. Een temperatuurverschil is in K en °C hetzelfde; een temperatuur zelf niet. 20 °C is geen 'twee keer zo warm' als 10 °C: 293 K tegenover 283 K.
- **Hoeveelheid**: n mol of $N = n\,N_\mathrm{A}$ moleculen, met $N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

De standaardluchtdruk is $p_0 = 1013{,}25\,\mathrm{hPa}$. In België schommelt de luchtdruk met het weer tussen ongeveer 970 en 1040 hPa; dat is belangrijk voor sensoren die een partiële druk meten (verderop).

Temperatuur in graden Celsius in de gaswet

Wie 20 °C en 10 °C in $pV = nRT$ invult, krijgt een gas dat bij 0 °C geen druk meer heeft. Gebruik altijd kelvin. Alleen in een verschil (ΔT) mag je °C laten staan.

UITLEG · 14.3

De gaswetten en de ideale gaswet

Drie historische wetten beschrijven een vaste hoeveelheid gas als je telkens één grootheid vasthoudt:

- **Boyle-Mariotte** (T constant): $pV =$ constant. De isothermen in de figuur zijn hyperbolen.
- **Charles en Gay-Lussac** (p constant): $V/T =$ constant; en bij constant volume $p/T =$ constant. Trek je de rechten van een gasthermometer door naar lage temperatuur, dan snijden ze de as allemaal bij −273,15 °C: het **absolute nulpunt** (tweede figuur). Kelvin koos dat punt in 1848 als nulpunt van zijn schaal.
- **Avogadro**: bij dezelfde p en T bevatten gelijke volumes evenveel moleculen: $V \sim n$.

Samen: $pV/(nT)$ is voor elk gas dezelfde constante R.

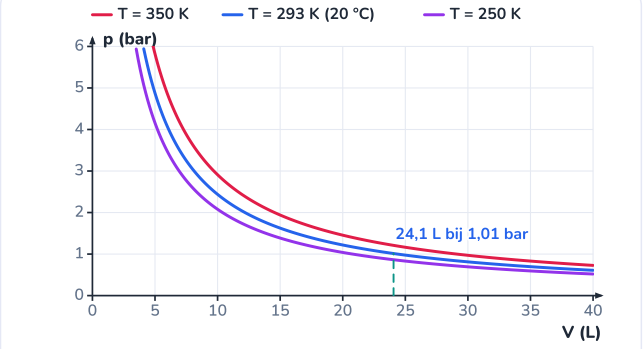
DE IDEALE GASWET

$$pV = nRT = NkT \qquad R = N_\mathrm{A}\,k = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)} \qquad k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$

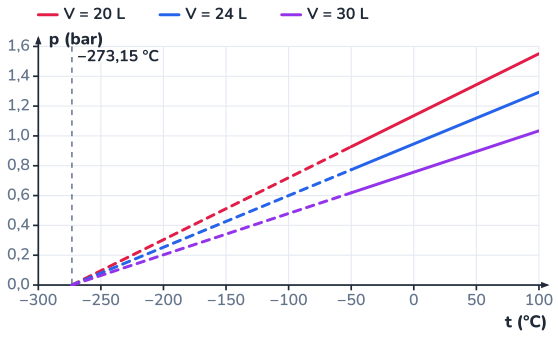
p in Pa, V in m³, T in K. De constante van Boltzmann k is sinds 2019 exact vastgelegd: ze definieert de kelvin. Handige vormen: molair volume $V_\mathrm{m} = RT/p$ ($24{,}06\,\mathrm{L/mol}$ bij 20 °C) en dichtheid $\rho = pM/(RT)$.

Een gas is **ideaal** als de moleculen klein zijn tegenover de afstand tussen hen en elkaar niet aantrekken. Voor lucht bij gewone druk en temperatuur klopt de wet tot op een paar promille; bij 200 bar of dicht bij het vloeibaar worden niet meer (verderop).

De dichtheid $\rho = pM/(RT)$ verklaart meteen twee dingen in het station. Koude buitenlucht is zwaarder: bij −8 °C $1{,}331\,\mathrm{kg/m^3}$ tegenover $1{,}204\,\mathrm{kg/m^3}$ bij 20 °C, en daarom zakt ze door een open deur naar binnen langs de vloer. En CO_2 ($M = 44$) is 1,5 keer zo zwaar als lucht ($M = 29$): een lek van een CO_2-fles verzamelt zich eerst laag bij de grond.



Hoe warmer het gas, hoe hoger de isotherm: bij hetzelfde volume duwen snellere moleculen harder. Eén mol bij 20 °C en 1 atm neemt 24,1 L in.



Bij constant volume stijgt de druk lineair met de temperatuur; doorgetrokken komen alle rechten samen in −273,15 °C.

UITGEWERKT VOORBEELD · 14.4

De lucht in de woonmodule

4/21

De woonmodule is binnen 6,0 × 4,0 × 2,6 m. Bereken bij 20 °C en 1013 hPa hoeveel mol lucht erin zit, hoeveel die weegt en hoeveel zuurstof ze bevat. Hoe lang zou die zuurstof twee bewoners voeden als je ze helemaal kon opgebruiken? En wat zou er gebeuren als de module luchtdicht was en je haar opwarmde van −8 °C tot 20 °C?

GEGEVEN

- $V = 62{,}4\,\mathrm{m^3}$, $T = 293{,}15\,\mathrm{K}$, $p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
- lucht $M = 28{,}97\,\mathrm{g/mol}$, 20,95 % O_2; een bewoner verbruikt 0,84 kg O_2 per dag

GEVRAAGD

- n, massa en zuurstofvoorraad
- hoe lang de zuurstof volstaat
- de druk in een luchtdichte module

OPLOSSING

1 $n = \dfrac{pV}{RT} = \dfrac{101\,325 \cdot 62{,}4}{8{,}314 \cdot 293{,}15} = 2594\,\mathrm{mol}$. Massa: $2594 \cdot 0{,}028\,97 = 75{,}1\,\mathrm{kg}$: de lucht in de module weegt zoveel als een volwassene.

2 Zuurstof: $0{,}2095 \cdot 2594 = 543\,\mathrm{mol}$, of $17{,}4\,\mathrm{kg}$. Twee bewoners verbruiken $1{,}68\,\mathrm{kg}$ per dag: genoeg voor $10{,}4$ dagen, als je alle zuurstof kon opgebruiken.

3 Maar dat kan niet: bij 19,5 % gaat het alarm al, en lang daarvoor is er een ander probleem (de CO_2, verderop). De voorraad zegt dus weinig; wat telt, is hoe snel de samenstelling verandert.

4 Luchtdicht opwarmen is **isochoor**: p/T blijft constant. $p_2 = p_1 \dfrac{T_2}{T_1} = 1013 \cdot \dfrac{293{,}15}{265{,}15} = 1120\,\mathrm{hPa}$: $107\,\mathrm{hPa}$ overdruk. Op een deur van 0,90 × 2,10 m is dat $10\,700 \cdot 1{,}89 = 20{,}2\,\mathrm{kN}$, het gewicht van ongeveer twee ton.

ANTWOORD

$2594\,\mathrm{mol}$ lucht of $75\,\mathrm{kg}$, waarvan $17{,}4\,\mathrm{kg}$ zuurstof: in theorie 10 dagen voor twee bewoners. Luchtdicht opwarmen zou 107 hPa overdruk geven.

Klopt dit? Een echt gebouw is nooit luchtdicht: bij opwarmen zet de lucht uit (isobaar) en ontsnapt 10,6 % van het volume door kieren en de ventilatie. Een ruimtestation daarentegen *is* luchtdicht; daar regelt men druk en temperatuur samen. Snelle controle van de orde van grootte: 1 m³ lucht weegt ongeveer 1,2 kg.

PROEF · 14.5

De wet van Boyle met een spuit en een druksensor

ONDERZOEKSVRAAG

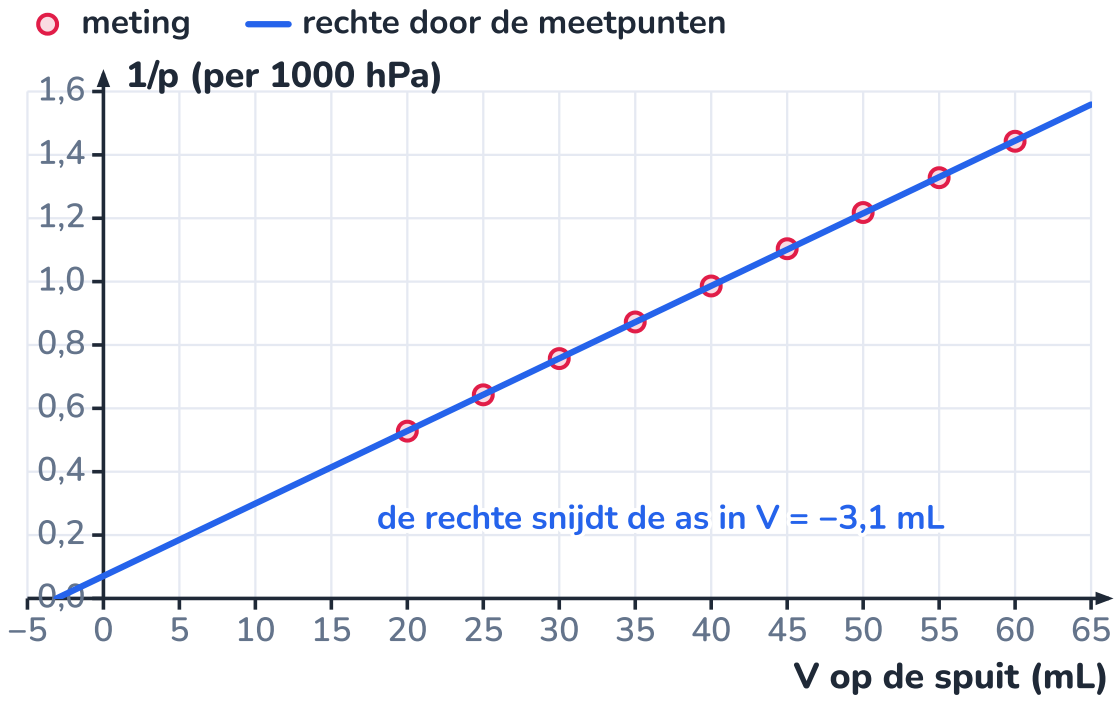
Is pV constant voor een ingesloten hoeveelheid lucht als je ze langzaam samendrukt of uitrekt?

MATERIAAL

- spuit van 60 mL (Ø ±27 mm) met een kort slangetje
- absolute druksensor (bv. MPX5700AP, 15-700 kPa) op een Arduino, of een digitale manometer
- rekenblad of Python

Veiligheid

Duw niet verder dan 20 mL: de spuit kan losschieten van het slangetje. Gebruik geen glazen spuit.



1/p ligt op een rechte in V, maar die snijdt de as niet in 0: het slangetje en de sensor voegen een dode ruimte toe.

WERKWIJZE

1. Zet de zuiger op 40 mL, sluit het slangetje aan op de sensor en noteer de druk (de luchtdruk van de dag).
2. Trek de zuiger in stappen tot 60 mL, en duw hem daarna in stappen tot 20 mL. Wacht bij elke stand tien seconden: de lucht moet terug op kamertemperatuur komen.
3. Noteer telkens het volume op de schaal van de spuit en de druk.
4. Zet $1/p$ uit tegen V en trek een rechte door de punten.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting:

V op de spuit (mL)	60	55	50	45	40	35	30	25	20
p (hPa)	693	753	821	906	1014	11			
$p \cdot V$ (hPa·L)	41,6	41,4	41,0	40,8	40,6	40			
$p \cdot (V + V_\mathrm{d})$ (hPa·L)	43,7	43,7	43,6	43,6	43,7	43			

Het product $p \cdot V$ is niet constant: het daalt van 41,6 naar 37,9 hPa·L. Toch liggen de punten van $1/p$ tegen V mooi op een rechte, maar die gaat niet door de oorsprong.

VERKLARING

De spuit is niet het hele volume: ook het slangetje en de sensor bevatten lucht, een **dode ruimte** V_d die de …geldt voor het echte volume: $p\,(V + V_\mathrm{d}) = C$, dus $\dfrac{1}{p} = \dfrac{V}{C} + \dfrac{V_\mathrm{d}}{C}$: een rechte met helling $1/C$ die de V-as snijdt in $-V_\mathrm{d}$. De rechte door de meetpunten (kleinste kwadraten) geeft $V_\mathrm{d} = 3{,}1\,\mathrm{mL}$ en $C = 43{,}7\,\mathrm{hPa \cdot L}$. Met die correctie is $p(V + V_\mathrm{d})$ constant op minder dan een halve procent (laatste rij van de tabel).

Dat is een typische **systematische fout** (hoofdstuk 6): ze verschuift alle metingen in dezelfde richting en verdwijnt niet door meer te meten, wel door een beter model. Uit C volgt ook hoeveel lucht er in het systeem zit: $n = C/(RT) = 1{,}79\,\mathrm{mmol}$.

Duw je snel, dan warmt de lucht op (hoofdstuk 15) en is de druk even hoger: daarom wacht je tien seconden. Bij 20 mL duw je al met ongeveer 50 N op de zuiger.

UITLEG · 14.6

Druk uit botsingen: de kinetische gastheorie

6/21

Waarom gedraagt elk gas zich hetzelfde? Neem een kubus met ribbe L en N moleculen met massa m. De moleculen zijn punten die niet met elkaar botsen, alleen elastisch met de wanden (de botsingen onderling veranderen de uitkomst niet, alleen wie welke snelheid heeft).

Eén molecule. Botst ze tegen de rechterwand, dan keert v_x om: haar impuls verandert met $-2mv_x$, en de wand krijgt $+2mv_x$. Ze komt terug na een heen-en-weertje van $2L$, dus na $\Delta t = 2L/v_x$. De gemiddelde kracht op de wand is impuls per tijd (hoofdstuk 9):

$$F_1 = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}.$$

Alle moleculen. Tel op en deel door de oppervlakte L^2: $p = \dfrac{m}{L^3}\sum v_x^2 = \dfrac{Nm\overline{v_x^2}}{V}$. Geen richting is bijzonder, dus $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \tfrac{1}{3}\overline{v^2}$:

DRUK UIT BOTSINGEN

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\,m\,\overline{v^2} \quad\Longleftrightarrow\quad pV = \frac{2}{3}\,N \cdot \tfrac{1}{2}m\overline{v^2}$$

De druk is evenredig met het aantal moleculen per volume en met hun gemiddelde kinetische energie. Over de soort gas zegt de formule niets.

Temperatuur. Vergelijk met $pV = NkT$: dan moet

TEMPERATUUR IS GEMIDDELDE KINETISCHE ENERGIE

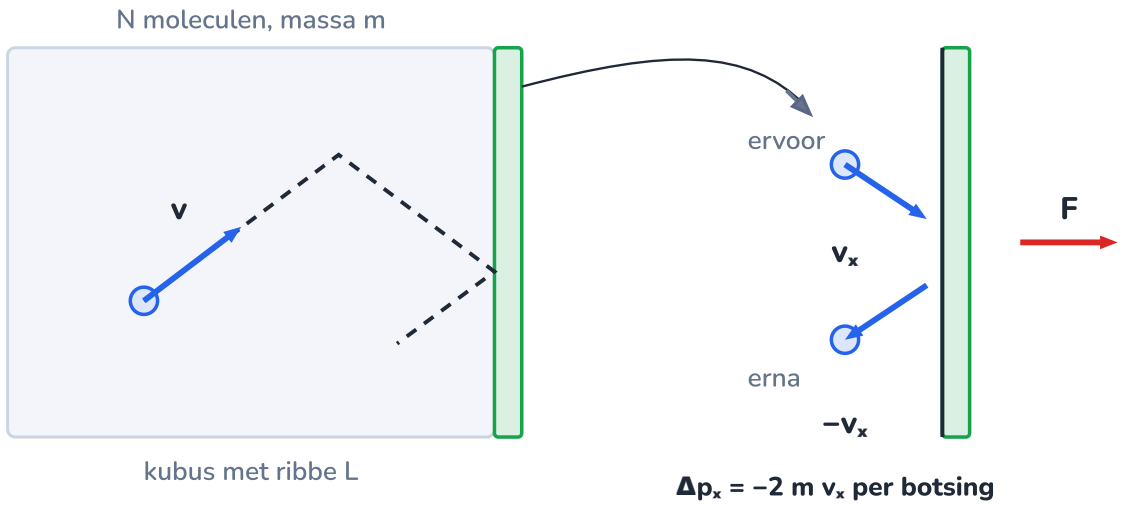
$$\overline{E_{\text{kin}}} = \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}\,kT \qquad v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Bij 20 °C heeft elke molecule gemiddeld $\tfrac{3}{2}kT = 6{,}07 \cdot 10^{-21}\,\text{J}$ aan bewegingsenergie, welk gas ook. Zware moleculen zijn daardoor trager: bij dezelfde T is $v_{\text{rms}} \sim 1/\sqrt{M}$.

Dat is de diepere betekenis van temperatuur: een maat voor de gemiddelde bewegingsenergie van de deeltjes. Het absolute nulpunt is waar die beweging (klassiek gezien) stilvalt. Moleculen met meer atomen kunnen ook draaien en trillen; die energie telt mee in de inwendige energie, maar niet in de druk (hoofdstuk 15).

Meer druk betekent snellere moleculen

Niet bij dezelfde temperatuur. In een fles van 200 bar bij 20 °C bewegen de zuurstofmoleculen even snel als in de kamer; er zijn er alleen 200 keer zoveel per liter, die dus 200 keer vaker tegen de wand botsen.



Links: een molecule die heen en weer vliegt. Rechts: bij een elastische botsing keert alleen v_x om; de wand krijgt 2 m v_x impuls.

UITLEG · 14.7

Temperatuur is beweging: de verdeling van Maxwell en Boltzmann

7/21

Niet alle moleculen zijn even snel: botsingen herverdelen voortdurend de energie. Maxwell (1860) vond de verdeling in evenwicht. Het idee: elke snelheidscomponent is normaal verdeeld (hoofdstuk 6) met gemiddelde 0 en variantie kT/m, onafhankelijk van de andere. De kans op een snelheid tussen v en $v + \mathrm{d}v$ is dan de kans om in een bolschil met straal v en dikte $\mathrm{d}v$ te zitten, met oppervlakte $4\pi v^2$:

VERDELING VAN MAXWELL EN BOLTZMANN

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\, \mathrm{e}^{-mv^2/(2kT)} \qquad \int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v = 1$$

De factor v^2 maakt dat bijna geen molecule stilstaat; de exponentiële factor (de factor van Boltzmann, $\mathrm{e}^{-E/kT}$) maakt hoge snelheden zeldzaam.

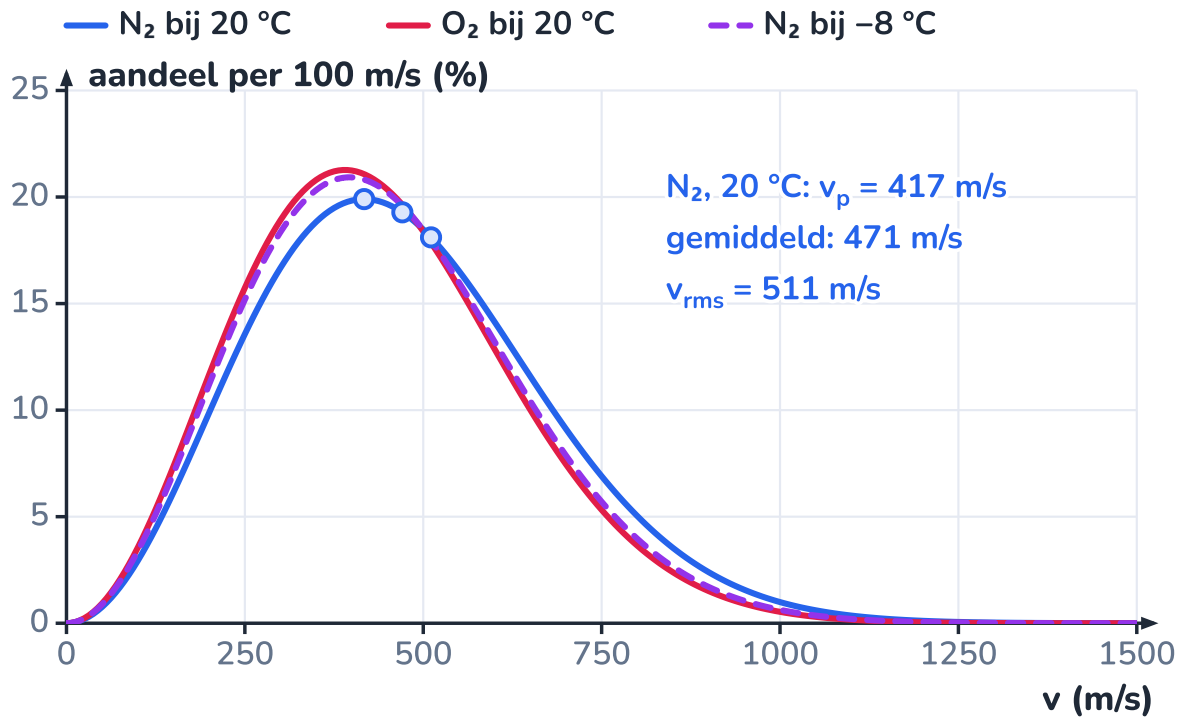
Drie kenmerkende snelheden volgen uit f (met hoofdstuk 1 en 3):

- **meest waarschijnlijk**: $f'(v) = 0$ geeft $v_\mathrm{p} = \sqrt{2kT/m}$;
- **gemiddeld**: $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{8kT/(\pi m)}$;
- **rms**: $v_\mathrm{rms} = \sqrt{3kT/m}$, die van de druk.

Voor stikstof bij 20 °C: $v_\mathrm{p} = 417$, $\bar{v} = 471$ en $v_\mathrm{rms} = 511\,\mathrm{m/s}$, sneller dan het geluid (343 m/s). Zuurstof is iets zwaarder en iets trager ($v_\mathrm{rms} = 478\,\mathrm{m/s}$), CO_2 nog trager (408 m/s), waterstof veel sneller (1904 m/s). Bij −8 °C schuift de hele verdeling naar links: de top ligt op 397 m/s. Ongeveer 0,9 % van de stikstofmoleculen is sneller dan 1000 m/s.

Waarom een geur dan toch traag de kamer doorkruist

In 1 m³ lucht zitten $p/(kT) = 2{,}50 \cdot 10^{25}$ moleculen, gemiddeld 3,4 nm uit elkaar. Met een doorsnede van ongeveer 0,37 nm legt een stikstofmolecule tussen twee botsingen gemiddeld $\lambda = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^2 p} \approx 66\,\mathrm{nm}$ af, de **gemiddelde vrije weglengte**, en botst ze 7 miljard keer per seconde. Een geurmolecule zigzagt dus in een willekeurige wandeling (diffusie); wat een geur echt verspreidt, is stroming van de lucht.



Zuurstof is iets zwaarder dan stikstof en dus iets trager; in de kou schuift de verdeling naar lagere snelheden. De drie punten zijn vp, v̄ en vrms van stikstof.

CODE · 14.8

Moleculen in een doos

8/21

Klopt de afleiding? Laat de computer het tellen. Het programma trekt eerst 100 000 snelheden zoals Maxwell ze veronderstelt (elke component normaal verdeeld) en vergelijkt het gemiddelde met de formules. Daarna zet het 10 000 stikstofmoleculen in een kubus van 10 cm en laat ze 2 ms lang heen en weer vliegen in stapjes van 1 µs. Elke keer dat een molecule de rechterwand raakt, telt het programma de impuls $2m|v_x|$. Impuls per tijd per oppervlakte is druk.

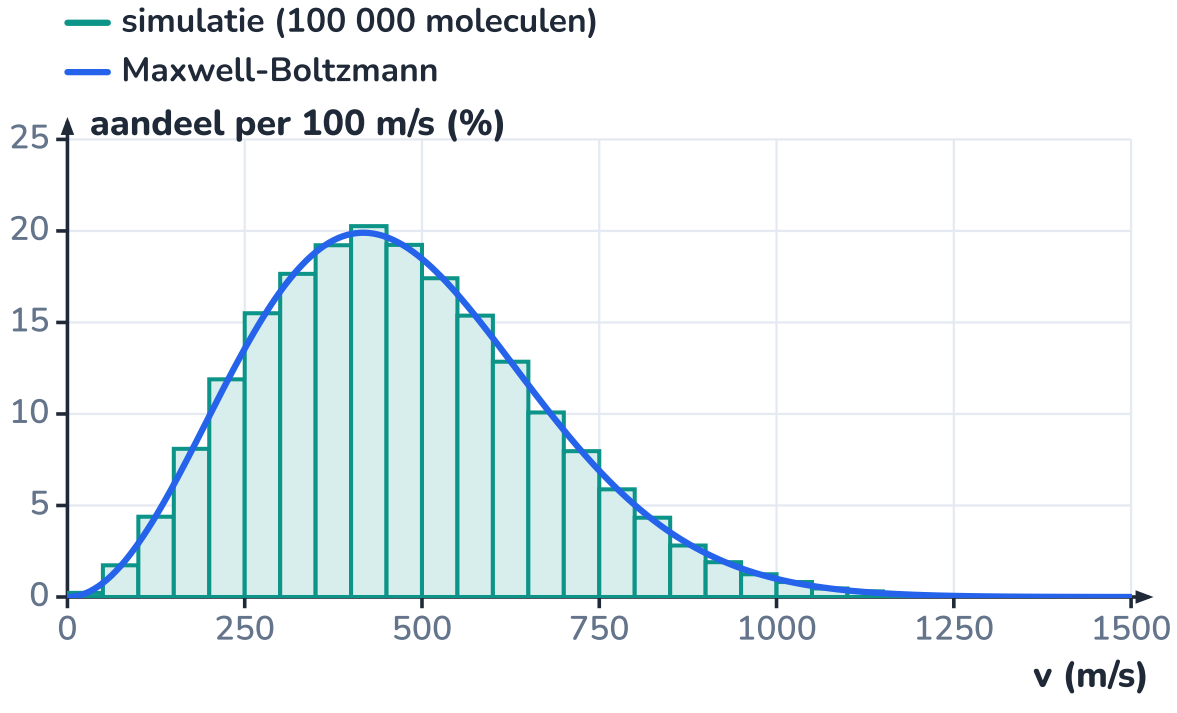
Python doos.py 34 regels

```python
# doos.py - moleculen stikstof in een doos: snelheden en druk uit botsingen tegen de wand
import numpy as np

k = 1.380649e-23                    # constante van Boltzmann (J/K)
NA = 6.02214076e23                  # getal van Avogadro (1/mol)
m = 28.014e-3 / NA                  # massa van één N2-molecule (kg)
T = 293.15                          # 20 °C
rng = np.random.default_rng(1)

# 1. snelheden: elke component normaal verdeeld met standaardafwijking sqrt(kT/m)
N = 100_000
v = rng.normal(0.0, np.sqrt(k * T / m), size=(N, 3))
s = np.linalg.norm(v, axis=1)       # grootte van de snelheid
print(f"gemiddeld {s.mean():.1f} m/s, rms {np.sqrt((s**2).mean()):.1f} m/s, "
      f"sneller dan 1000 m/s: {100 * (s > 1000).mean():.2f} %")
print(f"theorie:  {np.sqrt(8 * k * T / (np.pi * m)):.1f} m/s, rms {np.sqrt(3 * k * T / m):.1f} m/s")

# 2. druk: 10 000 moleculen in een kubus van 10 cm, 2 ms lang, stapjes van 1 µs
n, L, dt, stappen = 10_000, 0.10, 1e-6, 2000
x = rng.uniform(0.0, L, n)
vx = v[:n, 0].copy()
impuls = 0.0
for _ in range(stappen):
    x += vx * dt
    rechts = x > L                  # botsing met de rechterwand
    impuls += 2 * m * np.abs(vx[rechts]).sum()
    x[rechts] = 2 * L - x[rechts]
    vx[rechts] *= -1
    links = x < 0                   # de linkerwand: gewoon terugkaatsen
    x[links] = -x[links]
    vx[links] *= -1
p_sim = impuls / (stappen * dt) / L**2
p_gas = n * k * T / L**3
print(f"druk uit botsingen {p_sim:.4e} Pa, uit pV = NkT {p_gas:.4e} Pa, verhouding {p_sim / p_gas:.3f}")
```



Snelheden met normaal verdeelde componenten vormen vanzelf de verdeling van Maxwell en Boltzmann.

Uitvoer:

```
gemiddeld 470.0 m/s, rms 510.2 m/s, sneller dan 1000 m/s: 0.96 %
theorie:  470.7 m/s, rms 510.9 m/s
druk uit botsingen 4.0400e-14 Pa, uit pV = NkT 4.0474e-14 Pa, verhouding 0.998
```

De gesimuleerde druk van een handvol moleculen is piepklein (ongeveer $4 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{Pa}$), maar hij klopt met $pV = NkT$ op een procent: de kinetische gastheorie werkt, ook met moleculen die niet onderling botsen. Met meer moleculen of een langere tijd wordt het verschil kleiner (het is ruis: hoofdstuk 6). Het histogram van de 100 000 snelheden ligt precies onder de kromme van Maxwell en Boltzmann.

UITLEG · 14.9

Gasmengsels: de wet van Dalton en de partiële druk

9/21

In een mengsel van ideale gassen botst elk soort molecule tegen de wanden alsof de andere er niet waren. De totale druk is dus de som van de **partiële drukken**, en elke partiële druk is evenredig met het aantal moleculen van dat gas (John Dalton, 1801):

WET VAN DALTON

$$p = \sum_i p_i \qquad p_i = x_i\, p \qquad x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{V_i}{V}$$

De molfractie x_i is ook de volumefractie. 'ppm' betekent bij gassen een molfractie van 10^{-6}: 1000 ppm CO_2 is $x = 0{,}001$ en bij 1013 hPa een partiële druk van 101 Pa.

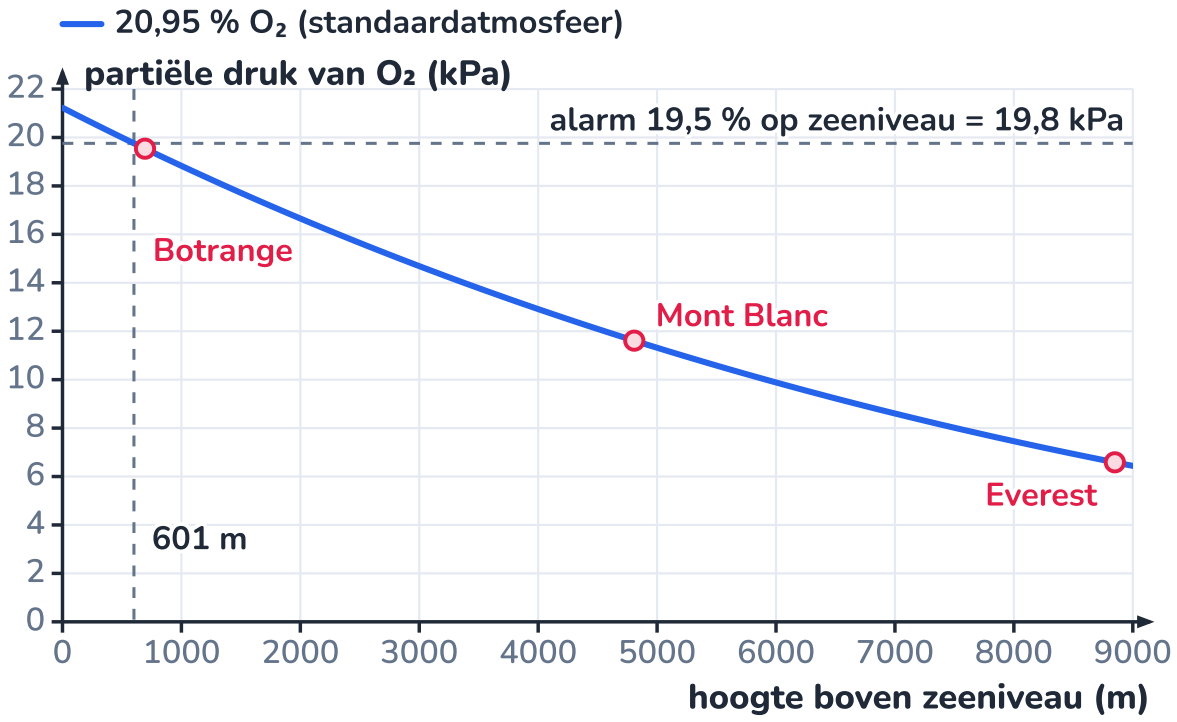
gas	volume- = molfractie	partiële druk bij 1013 hPa	massa per m³ bij 20 °C
stikstof N_2	78,08 %	791 hPa	909 g
zuurstof O_2	20,95 %	212 hPa	279 g
argon Ar	0,930 %	9,42 hPa	15,4 g
koolstofdioxide CO_2	0,042 %	0,43 hPa	0,8 g
waterdamp (20 °C, 50 %)	1,15 %	11,7 hPa	8,6 g

Omrekenen naar massa per volume doe je met de ideale gaswet: $c = x\,pM/(RT)$. Zo is 1000 ppm CO_2 bij 20 °C $1830\,\mathrm{mg/m^3}$. Grenswaarden voor de werkplek staan vaak in beide eenheden.

Wat je lichaam 'meet', is de partiële druk. Zuurstof gaat in je longen van de lucht naar het bloed omdat de partiële druk er hoger is dan in het bloed. Hoger in de bergen is er nog altijd 20,95 % zuurstof, maar minder druk, dus minder zuurstof per ademteug. Omgekeerd: het alarm van 19,5 % op zeeniveau komt overeen met de zuurstof die je inademt op 601 m hoogte. Dat is niet gevaarlijk; het alarm bestaat omdat een dalend percentage betekent dat een ander gas de lucht verdringt, en dat gas (CO_2, stikstof uit een lek, rook) kan zelf wel gevaarlijk zijn.

⚠ **Een zuurstofsensor meet een partiële druk**

Een elektrochemische zuurstofcel geeft een stroom die evenredig is met de partiële druk van O_2, niet met het percentage. Daalt de luchtdruk bij een storm van 1013 naar 973 hPa, dan toont een cel die bij 1013 hPa geijkt is $20{,}95 \cdot 973/1013 = 20{,}12$ %: bijna een vol procentpunt te weinig. Daarom hoort bij de zuurstofsensor van het station een barometer (opdracht 14.15).



De partiële druk van zuurstof daalt met de hoogte. Het alarm van 19,5 % op zeeniveau komt overeen met ongeveer 600 m hoogte; op de Botrange is er al iets minder.

UITGEWERKT VOORBEELD · 14.10

Wat je inademt en wat je uitademt

10/21

Een bewoner verbruikt per dag 0,84 kg zuurstof en ademt 1,0 kg CO_2 uit (hoofdstuk 14 van I). Bereken het ademhalingsquotiënt. Uitgeademde lucht bevat nog ongeveer 16 % zuurstof. Hoeveel liter lucht adem je dan per minuut in? Welke partiële druk heeft de zuurstof als de ingeademde lucht in je luchtwegen verzadigd raakt met waterdamp van 37 °C?

	ingeademd (buitenlucht)	uitgeademd (orde van grootte)
O_2	20,95 %	±16 %
CO_2	0,04 %	±4 %
N_2 + Ar	79,0 %	±79 %
waterdamp	wisselend (±1 %)	verzadigd bij 37 °C: 6,3 kPa (±6 %)
temperatuur	de kamer	±34 °C aan de mond

GEGEVEN

- $m_{O_2} = 0{,}84\,\mathrm{kg/dag}$, $m_{CO_2} = 1{,}0\,\mathrm{kg/dag}$
- in 20,95 % O_2, uit ±16 % O_2
- $p_s(37\,^\circ\mathrm{C}) = 6{,}27\,\mathrm{kPa}$ (Magnus)

GEVRAAGD

- het ademhalingsquotiënt
- het ademvolume per minuut
- de partiële druk van O_2 in de luchtwegen

OPLOSSING

1 Mol per dag: O_2 $840/31{,}998 = 26{,}3\,\text{mol}$, CO_2 $1000/44{,}009 = 22{,}7\,\text{mol}$. Ademhalingsquotiënt $RQ = 22{,}7/26{,}3 = 0{,}87$. Bij het verbranden van alleen suiker is dat 1 ($C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2 \rightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O$), van alleen vet ongeveer 0,7: dit is een gemengd dieet.

2 Volume zuurstof per dag bij 20 °C: $26{,}3 \cdot 24{,}06 = 631\,\text{L}$. Elke liter ingeademde lucht staat $0{,}2095 - 0{,}16 = 0{,}0495\,\text{L}$ zuurstof af (het volume van in- en uitgeademde lucht is bijna gelijk). Dus $631/0{,}0495 = 12\,757\,\text{L}$ per dag, of $8{,}9\,\text{L/min}$.

3 In de luchtwegen neemt de waterdamp 6,3 kPa van de totale druk in; de rest wordt verdeeld volgens de droge samenstelling: $p_{O_2} = 0{,}2095 \cdot (101{,}3 - 6{,}3) = 19{,}9\,\text{kPa}$.

ANTWOORD

$RQ \approx 0{,}87$; ongeveer 9 L lucht per minuut; in de luchtwegen $p_{O_2} \approx 20\,\text{kPa}$ (in de longblaasjes zakt ze verder tot ongeveer 13 kPa, omdat er ook CO_2 in de lucht zit die niet vervangen is).

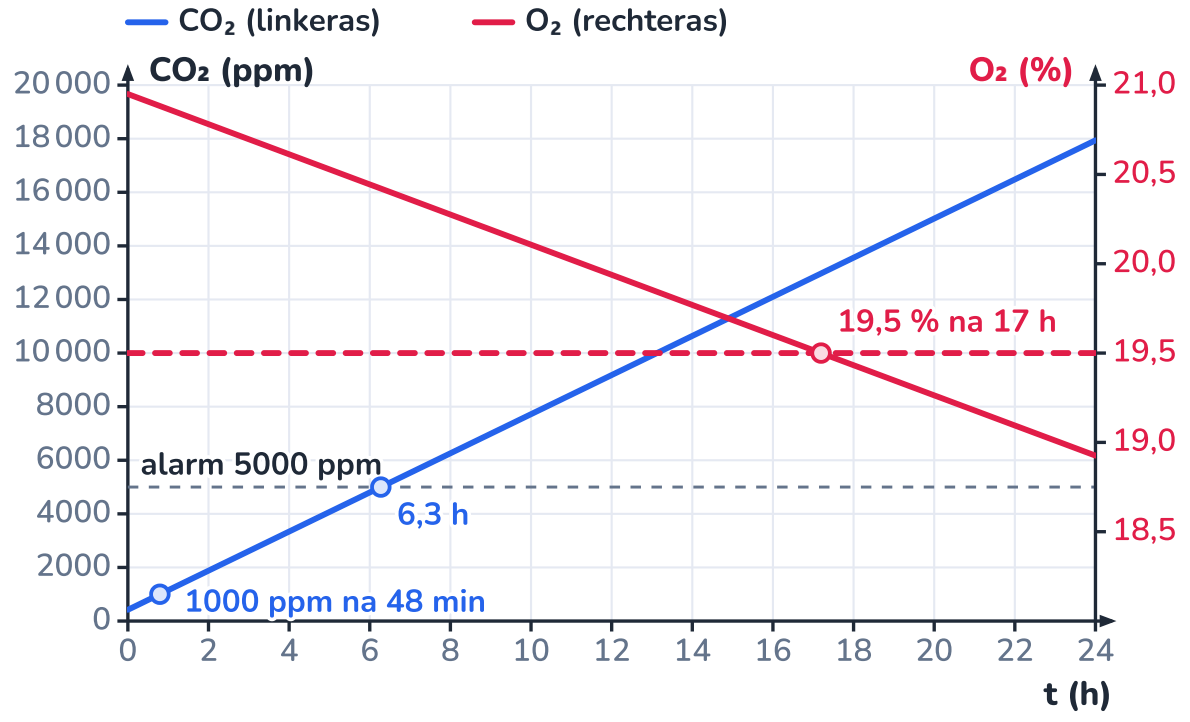
Klopt dit? Een volwassene in rust ademt 6 à 8 liter per minuut, bij inspanning veel meer: 9 L/min is een plausibel daggemiddelde. Het ademhalingsquotiënt onder 1 betekent dat het station netto minder mol CO_2 krijgt dan het mol O_2 verliest; het gasvolume krimpt heel licht.

UITGEWERKT VOORBEELD · 14.11

Habitat: de woonmodule zonder verluchting

11/21

Stel dat de ventilatie van de woonmodule uitvalt en alle kieren dicht zijn. Twee bewoners zijn binnen. Hoe snel stijgt de CO_2, hoe snel daalt de zuurstof, en wat gebeurt er met de luchtvochtigheid? Welke grens wordt het eerst bereikt?



Zonder verluchting: de CO_2 passeert 5000 ppm lang voor de zuurstof onder 19,5 % zakt.

GEGEVEN

- $n = 2594\,\text{mol}$ lucht (vorig voorbeeld)
- per bewoner per dag: 1,0 kg CO_2, 0,84 kg O_2, 2,0 kg waterdamp
- begin: 420 ppm CO_2, 20,95 % O_2, 20 °C en RV 50 %

GEVRAAGD

- stijging CO_2 en daling O_2 per uur
- de volgorde van de grenzen

OPLOSSING

1 CO_2: $2 \cdot 22{,}7/24 = 1{,}894\,\text{mol/h}$. Als molfractie: $1{,}894/2594 = 730\,\text{ppm}$ per uur (hoofdstuk 4 kwam met de dichtheid van CO_2 op hetzelfde uit).

2 O_2: $2 \cdot 26{,}3/24 = 2{,}19\,\text{mol/h}$, dus $843\,\text{ppm}$ of $0{,}084$ procentpunt per uur. Van 20,95 naar 19,5 %: $1{,}45/0{,}0843 = 17{,}2\,\text{h}$.

3 Waterdamp: $4000/24 = 167\,\text{g/h}$, verdeeld over 62,4 m³: $2{,}67\,\text{g/m}^3$ per uur. Bij 20 °C is verzadigde lucht $17{,}2\,\text{g/m}^3$, en RV 50 % is $8{,}62\,\text{g/m}^3$: na $3{,}2\,\text{h}$ is de lucht verzadigd (als er niets condenseert).

4 Volgorde:

GRENS (VERTREK: 420 PPM, 20,95 %, RV 50 % BIJ 20 °C)	BEREIKT NA
CO_2 1000 ppm (waarschuwing, lucht voelt bedompt)	48 min
RV 70 % (schimmelrisico op koude plekken)	1,3 h
dauwpunt 15 °C (condens op elk oppervlak onder 15 °C)	1,6 h
RV 100 % (condens overal)	3,2 h
CO_2 5000 ppm (alarm, grenswaarde werkplek over 8 uur)	6,3 h
O_2 19,5 % (alarm)	17,2 h

ANTWOORD

De CO_2 stijgt met 730 ppm per uur, de zuurstof daalt met 0,08 procentpunt per uur. Eerst wordt de lucht bedompt (1000 ppm na 48 min), dan nat, dan gaat na 6,3 h het CO_2-alarm af. Het zuurstofalarm komt pas na 17 h.

Klopt dit? De CO_2 stijgt sneller in ppm dan de O_2 daalt in ppm terwijl $RQ < 1$? Nee: in ppm daalt de O_2 sneller (843 tegenover 730), maar de CO_2 vertrekt van bijna nul en haar grens ligt maar 4580 ppm hoger, terwijl de zuurstof 14 500 ppm mag dalen. **In een gesloten ruimte met mensen is CO_2 het eerste gevaar, niet zuurstofgebrek.**

UITGEWERKT VOORBEELD · 14.12

Habitat: hoeveel ventilatie?

12/21

Hoeveel buitenlucht per uur is nodig om de CO_2 in de woonmodule onder 1000 ppm te houden? Kies een debiet met marge en controleer de zuurstof, de warmte die de ventilatie kost (met warmteterugwinning, WTW) en de luchtvochtigheid op een winterdag (buiten −8 °C en 90 % RV).

GEGEVEN

- CO_2-productie $G = 0{,}0455\,\text{m}^3/\text{h}$ (twee bewoners, 20 °C); buiten 420 ppm
- lucht: $\rho c = 0{,}336\,\text{Wh}/(\text{m}^3\,\text{K})$; WTW-rendement 85 % (rekenwaarde)

GEVRAAGD

- Q_{min} en een gekozen Q
- zuurstof, warmteverlies en RV bij het gekozen debiet

- waterdamp 167 g/h

OPLOSSING

1 Balans voor de CO_2 in evenwicht (hoofdstuk 4): wat erbij komt = wat de ventilatie afvoert: $G = Q\,(c - c_\mathrm{b})$. Dus $c = c_\mathrm{b} + G/Q$, en $c \le 1000\,\mathrm{ppm}$ vraagt $Q \ge \dfrac{G}{580 \cdot 10^{-6}} = 79\,\mathrm{m^3/h}$.

2 Marge: de productie schommelt met de activiteit, de sensor meet tot ±(50 ppm + 5 %) naast de echte waarde, en een evenwicht op precies 1000 ppm geeft voortdurend waarschuwingen. We kiezen $Q = 100\,\mathrm{m^3/h}$ (1,6 keer het volume per uur): evenwicht $420 + 455 = 875\,\mathrm{ppm}$, bereikt met een tijdconstante $V/Q = 37\,\mathrm{min}$.

3 Zuurstof: het tekort is $\dfrac{0{,}0526}{100} = 0{,}053$ procentpunt: binnen 20,90 %. Met genoeg ventilatie voor de CO_2 is er altijd genoeg zuurstof.

4 Warmte: zonder WTW kost $100\,\mathrm{m^3/h}$ lucht $33{,}6\,\mathrm{W/K}$, meer dan de hele gebouwschil van de woonmodule. Met 85 % terugwinning blijft $5{,}0\,\mathrm{W/K}$ over.

5 Vocht: de bewoners verhogen de waterdampdruk binnen met $\Delta p_\mathrm{w} = \dfrac{\dot{n}_\mathrm{w} R T}{Q} = 225\,\mathrm{Pa}$. Buitenlucht van −8 °C en 90 % heeft $302\,\mathrm{Pa}$. Binnen bij 20 °C: $\mathrm{RV} = (302 + 225)/2333 = 23\,\%$.

ANTWOORD

Minstens 79 m³/h; gekozen 100 m³/h met WTW (evenwicht ±875 ppm, 5 W/K warmteverlies). Op een koude dag wordt de lucht dan wel droog: RV ±23 % (bij 5 °C buiten ±41 %).

Klopt dit? De Belgische norm voor ventilatie van woningen (NBN D 50-001) rekent voor een leefruimte met 3,6 m³/h per m² vloer: voor 24 m² is dat 86 m³/h, dezelfde orde. Winterlucht is droog omdat koude lucht weinig waterdamp kan bevatten; opgewarmd tot 20 °C wordt haar RV klein. De oplossing is niet minder ventileren (de CO_2 stijgt dan), maar slimmer: minder als er weinig CO_2 is (vraagsturing), en een WTW die ook vocht terugwint (enthalpiewisselaar). Het codeblad simuleert dat.

UITLEG · 14.13

Waterdamp: luchtvochtigheid en dauwpunt

13/21

Waterdamp is een gas in het mengsel zoals de andere, met één verschil: bij gewone temperaturen kan het condenseren. Boven een vlak water verdampen en condenseren moleculen tot een evenwicht bereikt is: de **verzadigingsdruk** $p_\mathrm{s}(T)$, die snel stijgt met de temperatuur (de snelste moleculen uit de staart van Maxwell-Boltzmann ontsnappen). Een goede benadering tussen −45 en 60 °C is de formule van Magnus:

VERZADIGINGSDRUK, RELATIEVE EN ABSOLUTE VOCHTIGHEID

$$p_\mathrm{s}(t) = 611{,}2\,\mathrm{Pa} \cdot \exp\!\left(\frac{17{,}62\,t}{243{,}12 + t}\right) \qquad \mathrm{RV} = \frac{p_\mathrm{w}}{p_\mathrm{s}(t)} \qquad \rho_\mathrm{w} = \frac{p_\mathrm{w} M_\mathrm{w}}{R T}$$

t in °C. De absolute vochtigheid ρ_w (g/m³) volgt uit de ideale gaswet voor waterdamp alleen.

Het **dauwpunt** is de temperatuur waarbij de waterdamp die er is, precies verzadigend is: $p_\mathrm{s}(t_\mathrm{d}) = p_\mathrm{w}$. Magnus omkeren (neem de logaritme, los op naar t):

DAUWPUNT

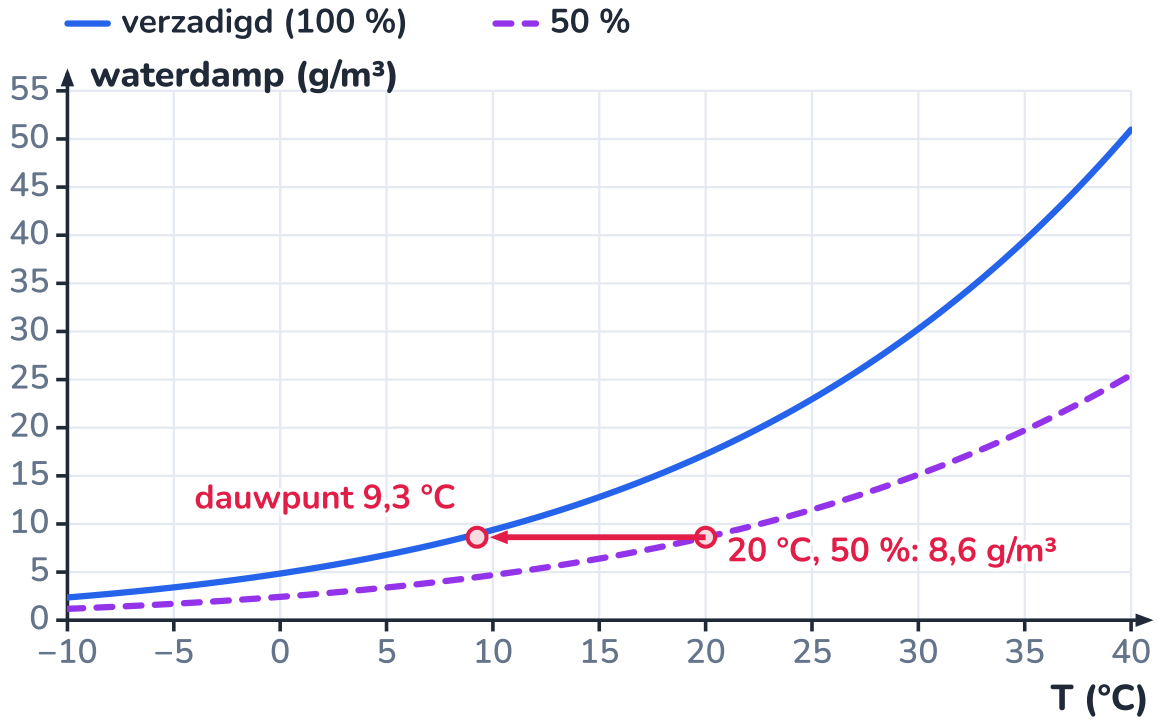
$$t_\mathrm{d} = \frac{243{,}12\,\gamma}{17{,}62 - \gamma} \qquad \gamma = \ln\frac{\mathrm{RV}}{100\,\%} + \frac{17{,}62\,t}{243{,}12 + t}$$

Voorbeeld: 20 °C en 50 % geeft $\gamma = 0{,}6462$ en $t_\mathrm{d} = 9{,}3$ °C. Elk oppervlak dat kouder is, wordt nat.

De relatieve vochtigheid zegt dus niets zonder temperatuur. Buitenlucht van 0 °C en 90 % bevat maar $4{,}4\,\mathrm{g/m^3}$. Opgewarmd tot 20 °C houdt ze dezelfde waterdampdruk ($0{,}9 \cdot 611 = 550\,\mathrm{Pa}$), maar de verzadigingsdruk is nu $2333\,\mathrm{Pa}$: de RV zakt tot 24 %. Omgekeerd krijgt lucht die afkoelt tegen een koud oppervlak een hogere RV, tot 100 %: condens.

Wat een SHT31 meet

De SHT31 van de module (hoofdstuk 30 van I) meet de RV met een condensator waarvan het diëlektricum water opneemt, en de temperatuur van diezelfde chip. Warmt de chip op (door de elektronica ernaast of de zon), dan meet hij een te lage RV: de waterdamp is dezelfde, maar p_s is groter. Het dauwpunt dat je uit beide berekent, is veel minder gevoelig voor die fout (opdracht 14.5).



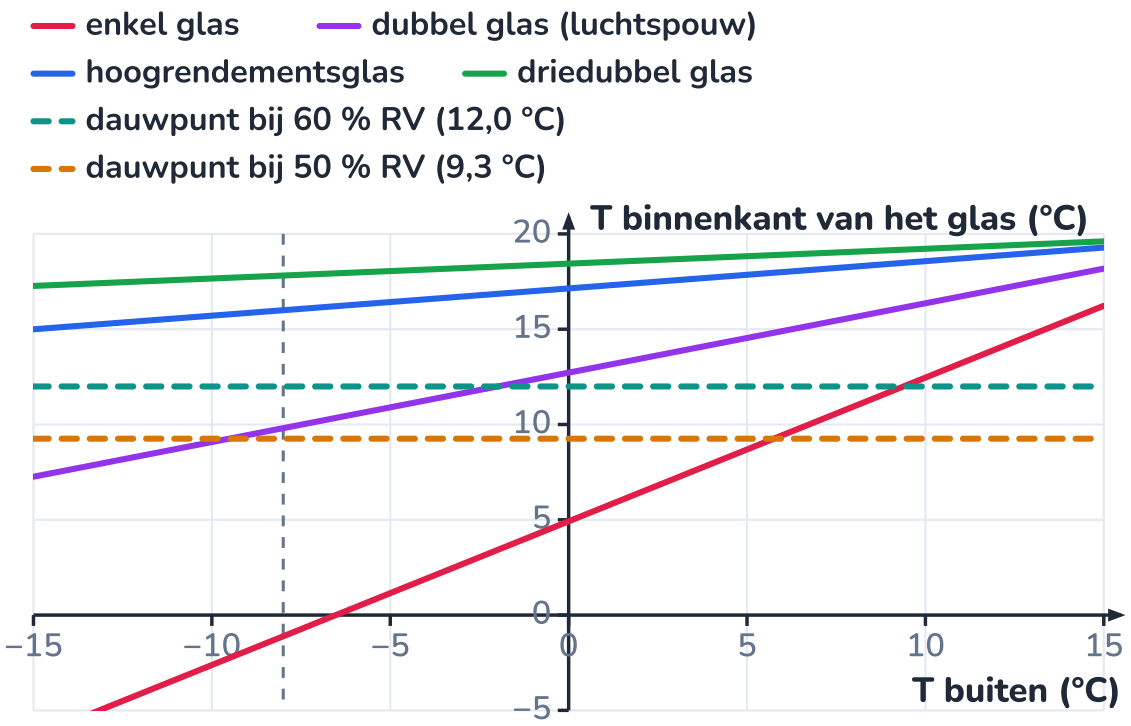
Lucht van 20 °C en 50 % bevat 8,6 g/m³ waterdamp. Koel je ze af bij dezelfde hoeveelheid, dan raakt ze verzadigd bij 9,3 °C: het dauwpunt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 14.14

Condens op een koude ruit

14/21

Binnen is het 20 °C, buiten −8 °C. Welke temperatuur heeft de binnenkant van een ruit met enkel, dubbel, hoogrendements- en driedubbel glas? Wanneer beslaat het glas als de lucht binnen 50 % RV heeft, en wanneer bij 60 % (koken)? Wat betekent de droge winterlucht van het vorige voorbeeld?



Waar een lijn onder het dauwpunt zakt, beslaat de ruit. Bij −8 °C (verticale lijn) ligt dubbel glas net op de grens van 60 %.

GEGEVEN

- U = 5,8 / 2,8 / 1,1 / 0,6 W/(m²·K) (hoofdstuk 19 van I)
- $R_{si} = 0{,}13\ \mathrm{m^2\,K/W}$

GEVRAAGD

- de binnentemperatuur van elk glas
- condens of niet

OPLOSSING

1 De warmtestroom door het glas is $q = U\,(T_i - T_e)$ per m². Dezelfde stroom gaat door de overgangsweerstand aan de binnenkant: $T_i - T_{si} = R_{si}\,q$. Dus $T_{si} = T_i - U R_{si}\,(T_i - T_e)$.

2 Bij −8 °C:

GLAS	U (W/(M²·K))	BINNENKANT BIJ −8 °C
enkel glas	5,8	−1,1 °C
dubbel glas (luchtspouw)	2,8	9,8 °C
hoogrendementsglas	1,1	16,0 °C
driedubbel glas	0,6	17,8 °C

3 Dauwpunt bij 20 °C: 50 % → $9{,}3$ °C, 60 % → $12{,}0$ °C, 70 % → $14{,}4$ °C. Enkel glas beslaat altijd (en bevriest). Dubbel glas zit bij 50 % net boven het dauwpunt, bij 60 % al eronder: het beslaat vanaf $T_e = -2{,}0$ °C buiten. Hoogrendements- en driedubbel glas blijven droog tot ver boven 70 %.

4 In de woonmodule is de winterlucht droog (RV ±23 %, dauwpunt $-2{,}0$ °C): daar beslaat zelfs dubbel glas niet. Het risico zit bij tijdelijk vochtige lucht (koken, douchen) en aan de rand van het glas, waar de afstandhouder een koudebrug is en het glas enkele graden kouder is dan in het midden.

ANTWOORD

Enkel −1,1 °C, dubbel 9,8 °C, hoogrendement 16,0 °C, driedubbel 17,8 °C. Met hoogrendements- of driedubbel glas beslaat het midden van de ruit niet; enkel glas altijd.

Klopt dit? Het verschil tussen binnenlucht en glas is $U R_{si} \cdot 28\,\mathrm{K}$: bij enkel glas 75 % van het hele temperatuurverschil, bij driedubbel glas maar 8 %. Dat is ook de reden dat je bij een koud raam 'tocht' voelt: de koude glaslaag laat lucht naar beneden vallen.

PROEF · 14.15

Het dauwpunt met een glas ijswater

15/21

ONDERZOEKSVRAAG

Klopt het dauwpunt dat je met de formule van Magnus uit de temperatuur en de RV van de lucht berekent?

MATERIAAL

- een blikken beker (of een dun glas), water op kamertemperatuur, ijsblokjes, een roerstaafje
- thermometer of temperatuursensor in het water (±0,5 °C)
- hygrometer of SHT31 voor de lucht in het lokaal



Waar het blik kouder is dan het dauwpunt van de lucht, wordt het dof: de waterdamp condenseert.

WERKWIJZE

1. Meet de temperatuur en de RV van de lucht, niet te dicht bij jezelf (je adem is vochtig). Bereken het dauwpunt.

2. Vul de beker half met water, voeg telkens één ijsblokje toe en roer goed. Houd de thermometer in het water.
3. Kijk van opzij met een lamp erachter naar de buitenkant: noteer de watertemperatuur als het blik net dof wordt.
4. Laat opwarmen en noteer de temperatuur waarbij de waas weer verdwijnt. Het gemiddelde is je dauwpunt.
5. Herhaal drie keer en vergelijk met de berekening.

WAARNEMING

Een voorbeeld: in het lokaal 21,5 °C en 48 % (berekend dauwpunt $10{,}0$ °C). De waas verschijnt bij 9,1 °C en verdwijnt bij 10,3 °C; gemiddeld 9,7 °C. Drie keer herhaald: 9,7; 9,5; 9,8 °C.

VERKLARING

De dunne luchtlaag tegen het blik neemt de temperatuur van het blik aan. Is die lager dan het dauwpunt, dan is de laag oververzadigd en condenseert water op het metaal. Het gemeten dauwpunt ligt hier een paar tienden graad onder de berekening. Oorzaken: de buitenkant van het blik is iets warmer dan het water (de warmte moet door de wand), je ziet de waas pas als er al een laagje ligt, en de hygrometer heeft zelf een onzekerheid van ±2 à 3 % RV, wat ±0,5 °C op het dauwpunt geeft. Het gemiddelde van verschijnen en verdwijnen verkleint de eerste fout.

Zo werkte de klassieke dauwpunthygrometer van John Frederic Daniell (1820): een gepolijst oppervlak afkoelen tot het beslaat. Moderne 'spiegelhygrometers' doen het met een Peltier-element en een lichtsensor, en zijn nog altijd de referentie om andere vochtsensoren te ijken.

UITLEG · 14.16

Echte gassen: wanneer pV = nRT niet meer klopt

16/21

De ideale gaswet vergeet twee dingen: moleculen hebben een eigen volume, en ze trekken elkaar een beetje aan. Hoe groot die afwijking is, meet de **compressibiliteitsfactor** $Z = pV/(nRT)$: 1 voor een ideaal gas.

- Bij gewone druk is Z voor lucht $0{,}999\ldots$: de ideale gaswet is uitstekend.
- Bij 100 à 200 bar trekt de aantrekking de druk wat omlaag: zuurstof heeft bij 200 bar en 20 °C $Z \approx 0{,}92$, er gaat dus zo'n 9 % meer in een fles dan de ideale gaswet zegt.
- Bij nog hogere druk wint het eigen volume: Z wordt groter dan 1 (stikstof vanaf ongeveer 150 bar, waterstof altijd; hoofdstuk 27).

Johannes Diderik van der Waals (Leiden, proefschrift 1873) voegde beide effecten toe met twee constanten per gas:

VERGELIJKING VAN VAN DER WAALS

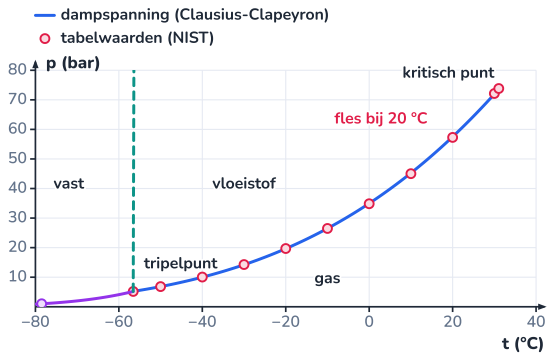
$$\left(p + \frac{a\,n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad T_c = \frac{8a}{27Rb} \qquad p_c = \frac{a}{27b^2}$$

b: het eigen volume per mol; $a\,n^2/V^2$: de 'binnendruk' door de aantrekking. De vergelijking voorspelt dat een gas vloeibaar kan worden, maar alleen onder een **kritische temperatuur** T_c (opdracht 14.14).

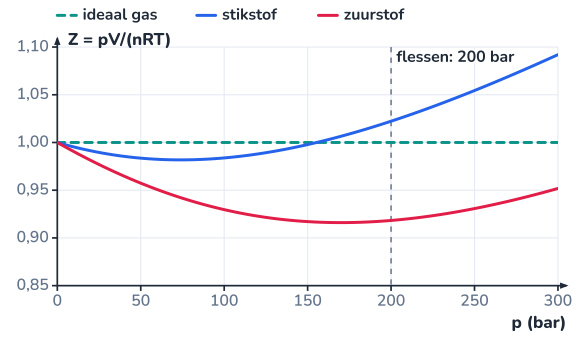
Het fasediagram van CO_2. Onder 31,0 °C wordt CO_2 vloeibaar als je de druk opdrijft tot de **dampspanning**: 57,3 bar bij 20 °C. Boven 31,0 °C (het **kritisch punt**, 73,8 bar) lukt dat niet meer: het is dan 'superkritisch', niet echt gas en niet echt vloeistof. Onder 5,2 bar bestaat vloeibaar CO_2 helemaal niet: droog ijs sublimeert bij 1 atm bij −78,5 °C. De dampspanningskromme volgt goed de vergelijking van Clausius-Clapeyron, $\ln p = A - B/T$ (ze volgt uit de hoofdwetten van de thermodynamica; hoofdstuk 16 berekent de dampspanning van een koudemiddel nauwkeuriger). De rechte door de tabelwaarden geeft $B = 1992\,\mathrm{K}$; ze wijkt pas dicht bij het kritisch punt zichtbaar af.

Waarom lucht bij −196 °C vloeibaar wordt, maar niet in een fles

Zuurstof ($T_c = -118$ °C) en stikstof (-147 °C) zijn bij kamertemperatuur ver boven hun kritische temperatuur: in een fles van 200 bar blijven ze gas. CO_2 (31 °C) en propaan (97 °C) hebben een kritische temperatuur boven de kamertemperatuur: in hun fles zijn ze vloeibaar. Dat verschil bepaalt hoe je de inhoud meet (volgend blad) en hoe een koelkast werkt (hoofdstuk 16).



De dampspanningskromme scheidt vloeistof en gas en eindigt in het kritisch punt (31 °C, 73,8 bar). Onder het tripelpunt gaat vast CO_2 rechtstreeks over in gas (het punt linksonder: droog ijs bij 1 atm, −78,5 °C); de smeltlijn (stippel) staat bijna verticaal.



Zuurstof wijkt bij 200 bar ongeveer 8 % af van de ideale gaswet; stikstof ligt er dan al boven.

UITGEWERKT VOORBEELD · 14.17

Habitat: een CO_2-fles voor de kweekruimte

17/21

De kweekruimte krijgt CO_2 uit een fles met 2,0 kg CO_2 (hoofdstuk 14 van I), met een waterinhoud van 3,0 L (rekenwaarde). Welke druk voorspelt de ideale gaswet bij 20 °C, en welke druk staat er echt op de fles? Hoe weet je hoeveel er nog in zit? Hoe lang gaat een fles mee, en wat gebeurt er als ze helemaal leegloopt in de kweekruimte (11,5 m³)? Waar zet je haar?

GEGEVEN

- 2,0 kg CO_2, 3,0 L; verbruik met lekverlies 29 g per dag (hoofdstuk 14 van I)

GEVRAAGD

- ideale en echte druk
- hoe je de inhoud meet
- gebruiksduur en risico van een lek

- CO_2 bij 20 °C: dampspanning 57,3 bar, vloeistof 773 kg/m³, damp 194 kg/m³ (NIST)

- plaats en regels

OPLOSSING

1 Ideaal: $n = 2000/44{,}01 = 45{,}4\,\text{mol}$, $p = nRT/V = 45{,}4 \cdot 8{,}314 \cdot 293{,}15/0{,}0030 = 36\,922\,519\,\text{Pa} \approx 369\,\text{bar}$.

2 Echt: 20 °C ligt onder de kritische temperatuur, en de ideale druk ligt ver boven de dampspanning, dus het meeste CO_2 is vloeibaar. Zolang er vloeistof is, staat er de dampspanning op: **57,3 bar**, ruim zes keer minder dan ideaal. De gemiddelde dichtheid is $2{,}0/3{,}0 = 667\,\text{kg/m}^3$, dus het volume is voor $\frac{667 - 194}{773 - 194} = 82\,\%$ gevuld met vloeistof.

3 Inhoud: de manometer blijft op 57 bar staan tot de vloeistof op is. Dan zit er nog damp van 194 kg/m³ in: $0{,}194 \cdot 3{,}0 = 0{,}58\,\text{kg}$, 29 % van de vulling. Pas dan daalt de druk. De manometer zegt dus bijna niets over de inhoud, alleen over de temperatuur. Weeg de fles: een **weegcel** onder de fles meldt aan het brein hoeveel gram er nog in zit.

4 Gebruiksduur: $2000/29 = 69$ dagen. Met bevoorrading om de 30 dagen volstaan twee flessen: één aangesloten, één vol als reserve.

5 Lek: 2,0 kg is $45{,}4 \cdot 24{,}06 = 1093\,\text{L}$ gas. In de kweekruimte wordt dat $9{,}5\,\%$ CO_2 (95 000 ppm): levensgevaarlijk, terwijl de zuurstof maar tot $19{,}0\,\%$ zakt. Het zuurstofalarm gaat dan net af, maar bij een half zo groot lek (4,8 % CO_2, al gevaarlijk) blijft de zuurstof op 20,0 % en zwijgt het. Tegen een CO_2-lek beschermt alleen een CO_2-sensor.

6 Plaats: buiten, rechtop vastgeketend in een verluchte kast aan de noordgevel van de klimaatmodule (niet in de zon), met een drukregelaar en de magneetklep (D10, hoofdstuk 23 van I) aan de binnenkant van de leiding. Bij −8 °C zakt de druk tot ongeveer 28 bar: ruim genoeg om te doseren.

ANTWOORD

Ideaal 369 bar, echt 57 bar (dampspanning, 82 % vloeistof). Meet de inhoud met een weegcel, niet met de manometer. Een fles gaat 69 dagen mee. Omdat een volledig lek de kweekruimte op 9,5 % CO_2 zou brengen, staat de fles buiten en is er een CO_2-alarm laag in de kweekruimte.

Klopt dit? Warmt de fles op, dan stijgt de dampspanning snel (30 °C: 72 bar) en zet de vloeistof uit: bij 25 °C is de fles al voor 91 % vloeistof, en boven ongeveer 27 °C is ze er helemaal mee gevuld. Dan stijgt de druk bij elke graad met tientallen bar. Daarom: nooit in de zon, nooit naast de verwarming, en altijd een veiligheidsplaatje (breekplaat) op de kraan.



De CO_2-fles staat buiten in de schaduw, op een weegcel: het gewicht vertelt hoeveel er nog in zit.

CODE · 14.18

Habitat: de lucht van de woonmodule simuleren

Het brein van het station moet vooraf weten hoe de ventilatie zich zal gedragen. Het programma simuleert twee winterdagen (buiten −3 °C, 90 %) met de methode van Euler (hoofdstuk 4) in stappen van een minuut. Drie balansen, elk van de vorm verandering = productie − ventilatie · (binnen − buiten):

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{CO_2}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{n}_{\mathrm{CO_2}}}{n} - \frac{Q}{V}\left(x_{\mathrm{CO_2}} - x_{\mathrm{b}}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{n}_{\mathrm{w}} R T}{V} - \frac{Q}{V}\left(p_{\mathrm{w}} - p_{\mathrm{w,b}}\right)$$

en zo ook voor de zuurstof. De bewoners zijn 's nachts rustiger (72 % van het gemiddelde) en overdag actiever (114 %). De ventilatie heeft drie standen: 100 m³/h gewoon, 150 m³/h boven 900 ppm, en 's nachts 70 m³/h zolang de CO_2 onder 850 ppm blijft (stiller, en minder droog). De eerste dag dient om in te schommelen; de tweede telt.

Python **lucht.py** 41 regels

```python
# lucht.py - CO2, O2 en waterdamp in de woonmodule op een winterdag, met vraaggestuurde ventilatie
import math

R, T = 8.314, 293.15                # J/(mol K), binnen 20 °C
V = 6.0 * 4.0 * 2.6                 # woonmodule (m³)
n_lucht = 101325 * V / (R * T)      # mol lucht in de module
ps = lambda t: 611.2 * math.exp(17.62 * t / (243.12 + t))   # verzadigingsdruk water (Pa)


def activiteit(uur):                # twee bewoners: slapen van 23 tot 7 uur, overdag actief
    return 0.72 if (uur >= 23 or uur < 7) else 1.14            # gemiddeld precies 1


co2, o2, pw = 420e-6, 0.2095, 0.40 * ps(20.0)               # molfracties en dampdruk (Pa)
co2_b, o2_b, pw_b = 420e-6, 0.2095, 0.90 * ps(-3.0)         # buitenlucht: -3 °C, 90 %
Q, dt = 100.0, 1 / 60                                       # m³/h en een stap van 1 minuut (h)
log = []
for stap in range(48 * 60):                                 # twee dagen
    uur = (stap * dt) % 24
    a = activiteit(uur)
    # ventilatie in drie trappen met hysterese, gestuurd door de CO2-sensor
    if co2 > 900e-6:
        Q = 150.0
    elif co2 < 750e-6 and Q == 150.0:
        Q = 100.0
    if (uur >= 23 or uur < 7) and co2 < 850e-6:
        Q = 70.0                                            # 's nachts stiller, zolang het kan
    elif Q == 70.0 and not (uur >= 23 or uur < 7):
        Q = 100.0
    ververs = Q / V                                         # per uur ververste fractie
    co2 += dt * (2 * a * 1.0 / 44.009e-3 / 24 / n_lucht - ververs * (co2 - co2_b))
    o2 += dt * (-2 * a * 0.84 / 31.998e-3 / 24 / n_lucht - ververs * (o2 - o2_b))
    pw += dt * (2 * a * 2000 / 18.015 / 24 * R * T / V - ververs * (pw - pw_b))
    log.append((stap * dt, co2 * 1e6, o2 * 100, 100 * pw / ps(20.0), Q))

dag2 = log[24 * 60:]
print(f"CO2 {min(r[1] for r in dag2):.0f} tot {max(r[1] for r in dag2):.0f} ppm, "
      f"O2 hoogstens {20.95 - min(r[2] for r in dag2):.3f} procentpunt onder buiten")
print(f"RV {min(r[3] for r in dag2):.0f} tot {max(r[3] for r in dag2):.0f} %, "
      f"gemiddeld debiet {sum(r[4] for r in dag2) / len(dag2):.0f} m³/h")
print(f"minuten boven 1000 ppm: {sum(1 for r in dag2 if r[1] > 1000)}")
```

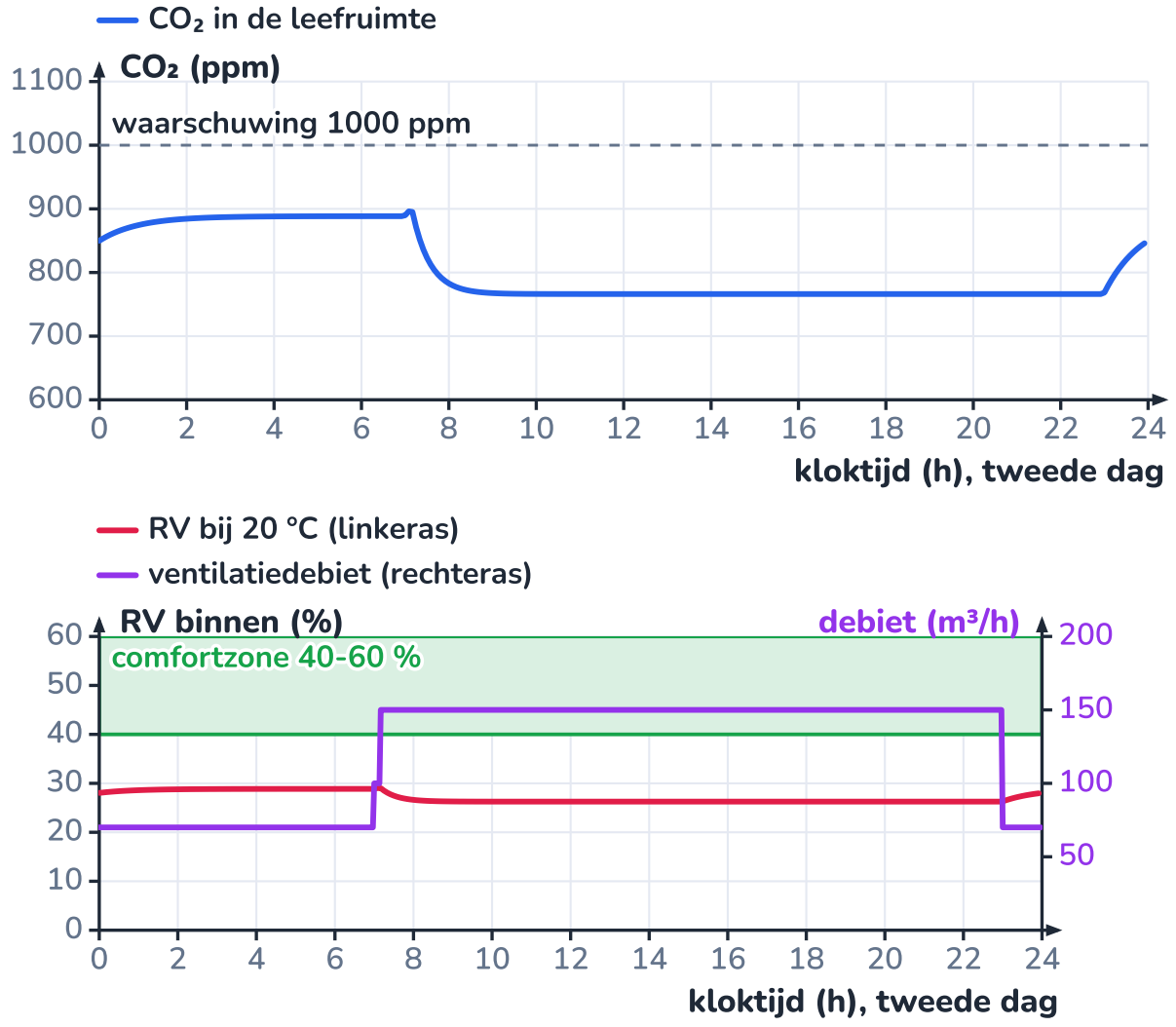
Uitvoer:

```
CO2 766 tot 901 ppm, O2 hoogstens 0.056 procentpunt onder buiten
RV 26 tot 29 %, gemiddeld debiet 123 m³/h
minuten boven 1000 ppm: 0
```

De CO_2 blijft tussen 766 en 901 ppm: nooit boven de waarschuwing. De zuurstof verandert nauwelijks. De luchtvochtigheid blijft tussen 26 en 29 %: droog, zoals voorspeld. Het gemiddelde debiet is 123 m³/h: overdag staat de ventilatie bijna voortdurend op 150 m³/h, omdat het evenwicht bij 100 m³/h en actieve bewoners net boven 900 ppm ligt; 100 m³/h is de stand voor gemiddelde activiteit. Een WTW met vochtterugwinning (die ongeveer de helft van het vocht in de afgevoerde lucht teruggeeft) brengt de RV bij −8 °C van ±23 naar ±32 % (opdracht 14.16).

Van simulatie naar regeling

Dezelfde drempels (900/750 ppm, nacht 850 ppm) gaan naar de regeling van de WTW-unit. In de simulatie kan je veilig uitproberen wat een andere drempel of een sensor met ruis doet (hoofdstuk 6: beslissen op een minuutgemiddelde), voor het in het echte station draait.

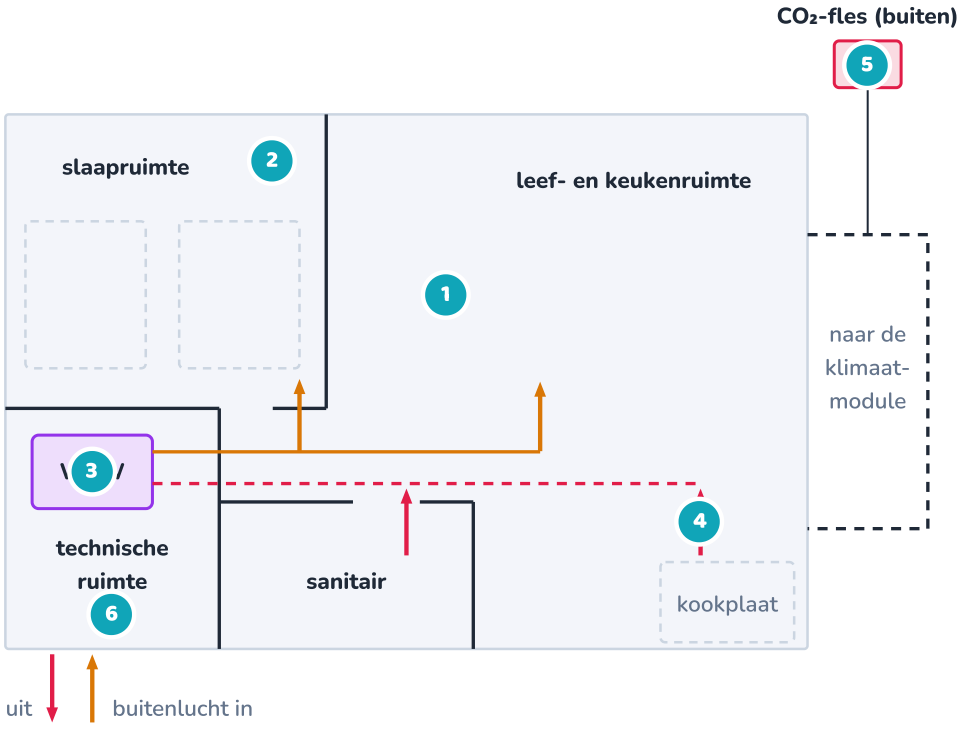


Boven: de CO_2 blijft onder 1000 ppm. Onder: de ventilatie staat overdag op 150 m³/h en 's nachts op 70 m³/h; de lucht blijft droog.

Habitat: de luchtbewaking van het station

Wat het station meet, waar, en wat het ermee doet. De plattegrond is schematisch (de indeling van de woonmodule ligt nog niet vast); de sensoren en grenzen zijn de afspraken van dit hoofdstuk.

grootheid	sensor	grens en actie
CO_2	NDIR (MH-Z19B, zoals in de module; bereik op 10 000 ppm), S1 leefruimte en S2 slaapruimte, op 1,2 m, niet naast bed, kookplaat of rooster	boven 900 ppm ventilatie 150 m³/h; waarschuwing 1000 ppm (minuutgemiddelde); alarm 5000 ppm (losse meting)
O_2	elektrochemische cel 0-25 % via ADS1115 (0x48), in S1	alarm onder 19,5 % (na drukcorrectie); jaarlijks ijken in buitenlucht; cel vervangen om de twee jaar
luchtdruk	BME280 (0x76), in S1	correctie van de O_2-cel; controle van de SHT31
temperatuur, RV	SHT31 (0x44), in S1	streefzone 40-60 %; melding onder 25 % of boven 70 %; dauwpunt minstens 3 °C onder de koudste binnenoppervlakte
CO_2 bij de fles	MH-Z19B laag in de kweekruimte (bestaat al, hoofdstuk 14 van I)	dosering stopt boven 1500 ppm; alarm 5000 ppm; inhoud van de fles via een weegcel



De woonmodule van boven: twee sensorpunten, de WTW-unit met toevoer (volle lijn) en afvoer (stippellijn), en de CO_2-fles buiten aan de klimaatmodule.

1 S1: leefruimte

CO_2 (NDIR), O_2 (elektrochemische cel), luchtdruk (BME280) en temperatuur en RV (SHT31) in één kastje op 1,2 m, aan een binnenwand, weg van de kookplaat en de roosters. Meet om de 2 s; het brein beslist op minuutgemiddelden, behalve bij de alarmgrenzen.

2 S2: slaapruimte

Een tweede CO_2-sensor: 's nachts met de deur dicht stijgt de CO_2 hier het snelst. Hij stuurt de nachtstand van de ventilatie.

3 WTW-unit
Ventilatie met warmteterugwinning (85 %): 70 m³/h 's nachts, 100 m³/h gewoon, 150 m³/h boven 900 ppm. Blaast verse lucht in de slaap- en leefruimte en zuigt af in de keuken, het sanitair en de technische ruimte.

4 Afzuiging keuken
Waar de meeste waterdamp (en geur) ontstaat, wordt afgezogen: zo verspreidt het vocht zich niet over de module.

5 CO_2-fles
Buiten, in een verluchte kast aan de noordgevel van de klimaatmodule, op een weegcel. Een lek komt dus buiten terecht; in de kweekruimte meet een CO_2-sensor laag bij de grond (alarm 5000 ppm).

6 Technische ruimte
Batterijen, omvormer en waterzuivering; hier wordt ook afgezogen. Hier staan geen gasflessen.

NASLAG · 14.20

Gassen: formules, constanten en grenswaarden

20/21

Werkwijze bij een gasprobleem: (1) alles in SI en de temperatuur in kelvin, de druk absoluut; (2) welke grootheden blijven constant? (3) ideaal of niet: druk hoog, temperatuur laag, dicht bij condensatie? (4) bij mengsels met molfracties rekenen; (5) bij een ruimte met bronnen en ventilatie een balans opstellen.

ideale gaswet

$$pV = nRT = NkT$$

symbool	betekenis	eenheid
p	absolute druk	Pa
V	volume	m³
n	hoeveelheid	mol
T	temperatuur	K
R	gasconstante 8,314	J/(mol·K)
k	constante van Boltzmann $1{,}381 \cdot 10^{-23}$	J/K

dichtheid en molair volume

$$\rho = \frac{pM}{RT} \qquad V_\mathrm{m} = \frac{RT}{p}$$

symbool	betekenis	eenheid
M	molaire massa	kg/mol

kinetische gastheorie

$$p = \tfrac{1}{3}\,\frac{N}{V}\,m\overline{v^2} \qquad \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}kT$$

snelheden (Maxwell-Boltzmann)

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad v_\mathrm{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

gemiddelde vrije weglengte

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^2 p}$$

symbool	betekenis	eenheid
d	doorsnede van een molecule	m

Dalton; ppm naar mg/m³

$$p_i = x_i\,p \qquad c = x\,\frac{pM}{RT}$$

symbool	betekenis	eenheid
x	molfractie (1 ppm = 10^{-6})	-

ventilatiebalans

$$V\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = G - Q\,(c - c_\mathrm{b}) \;\Rightarrow\; c_\infty = c_\mathrm{b} + \frac{G}{Q},\; \tau = \frac{V}{Q}$$

symbool	betekenis	eenheid
G	productie	m³/h
Q	ventilatiedebiet	m³/h

Magnus

$$p_\mathrm{s} = 611{,}2\,\mathrm{e}^{17{,}62\,t/(243{,}12+t)}\ \mathrm{Pa} \qquad \mathrm{RV} = \frac{p_\mathrm{w}}{p_\mathrm{s}}$$

symbool	betekenis	eenheid
t	temperatuur	°C

echte gassen

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad Z = \frac{pV}{nRT}$$

grootheid	normaal	grens	waarom
O_2	20,95 %	< 19,5 %: alarm	iets verdringt de lucht (lek, brand)
CO_2	420 ppm buiten, 600-900 binnen	1000 ppm waarschuwing, 5000 ppm alarm	bedompt, concentratie; 5000 ppm = grenswaarde werkplek (8 h)
RV bij 20 °C	40-60 %	< 25 % of > 70 %	droge slijmvliezen; schimmel en condens
dauwpunt	5-12 °C	hoger dan een oppervlak	condens

gas	M (g/mol)	kritisch punt	in een fles bij 20 °C
stikstof N_2	28,01	−147 °C, 34 bar	gas (200-300 bar)
zuurstof O_2	32,00	−118 °C, 50 bar	gas (200 bar)
CO_2	44,01	31,0 °C, 73,8 bar	vloeistof + damp (57 bar)
propaan C_3H_8	44,10	96,7 °C, 42,5 bar	vloeistof + damp (8,4 bar)
waterstof H_2	2,016	−240 °C, 13 bar	gas (200-700 bar)

HET GEHEEL · 14.21

Waar de gaswetten vandaan komen en waar ze heen gaan

21/21

De ideale gaswet verbindt het deeltjesmodel (M) met energie (E): temperatuur is bewegingsenergie van moleculen. Balansen voor CO_2, O_2 en waterdamp zijn differentiaalvergelijkingen (W), en ze gaan over mensen en planten (B). De luchtbewaking is een meetsysteem (O) dat een regeling (R) voedt.

F6 Het deeltjesmodel
Deeltjes die bewegen en botsen, condens en dauwpunt: hier kwantitatief.

I11 Druk en hydraulica
Druk, pascal en bar, absolute druk en overdruk.

I14 Reacties en stoichiometrie
Mol, molair volume, de CO_2 van planten en bewoners, de CO_2-fles van 2 kg.

I19 Warmtetransport en isolatie
U-waarden, oppervlaktetemperatuur en condens in een wand.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
De ventilatiebalans V dc/dt = G − Q(c − cb) en de simulatie met Euler.

E6 Statistiek en meetonzekerheid
Normaal verdeelde snelheidscomponenten; beslissen op een minuutgemiddelde; systematische fouten.

E15 De hoofdwetten van de thermodynamica

E16 Warmtepompen en koelen
Een koudemiddel dat verdampt en condenseert: dampspanning in actie.

E18 Stroming van vloeistoffen en gassen
Ventilatiekanalen en drukverlies: hoe de 100 m³/h door de module stroomt.

Inwendige energie van een gas, arbeid bij samendrukken, adiabatische processen.

E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Waterstof uit elektrolyse onder druk opslaan: Z > 1, en veiligheid.

E33 Het lichaam als regelsysteem

Ademhaling en zuurstofsaturatie: de partiële druk in het lichaam.

E37 Embedded systemen en IoT

De sensoren van de luchtbewaking in het netwerk van het station.

Habitat

Het station heeft nu een luchtbewaking: twee sensorpunten in de woonmodule (CO_2, O_2 met drukcorrectie, luchtdruk, temperatuur en RV), een ventilatie met warmteterugwinning van 100 m³/h (minimum 79 m³/h voor 1000 ppm; 70 m³/h 's nachts, 150 m³/h boven 900 ppm), en een CO_2-fles van 2 kg buiten in een verluchte kast op een weegcel (69 dagen per fles, twee flessen). De simulatie toont dat de CO_2 onder 1000 ppm blijft en dat de winterlucht droog wordt: een WTW met vochtterugwinning is de volgende stap.

SAMENVATTING

In het kort

- De toestand van een gas: absolute druk p, volume V, temperatuur T in kelvin en hoeveelheid n; samen $pV = nRT = NkT$.
- De wetten van Boyle-Mariotte, Charles en Gay-Lussac en Avogadro zijn speciale gevallen; een meting toont ook systematische fouten zoals een dode ruimte.
- Druk komt van botsingen: $p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m\overline{v^2}$, en temperatuur is gemiddelde kinetische energie: $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$.
- De snelheden volgen de verdeling van Maxwell en Boltzmann; stikstof bij 20 °C heeft $v_{\text{rms}} \approx 511\ \text{m/s}$; zwaardere moleculen zijn trager.
- In een mengsel is de partiële druk $p_i = x_i\,p$ (Dalton); ppm is een molfractie. Lichaam en zuurstofsensor reageren op de partiële druk.
- In een gesloten woonmodule komt het CO_2-alarm (6 h) lang voor het zuurstofalarm (17 h); 100 m³/h ventilatie met WTW houdt de CO_2 onder 1000 ppm.
- Relatieve vochtigheid, absolute vochtigheid en dauwpunt volgen uit Magnus; een oppervlak onder het dauwpunt wordt nat. Winterlucht die opgewarmd wordt, is droog.
- Bij hoge druk of dicht bij condensatie is een gas niet ideaal ($Z \neq 1$); een CO_2-fles staat op haar dampspanning (57 bar bij 20 °C) en je weegt haar om de inhoud te kennen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

ideale gaswet

absolute druk

$pV = nRT = NkT$: het verband tussen druk, volume, temperatuur (in kelvin) en hoeveelheid van een gas waarvan de moleculen klein zijn tegenover hun onderlinge afstand en elkaar niet aantrekken.

De echte druk, gemeten tegenover vacuüm. Een manometer toont meestal de overdruk: absolute druk min de luchtdruk.

molair volume

Het volume van één mol gas: $V_\mathrm{m} = RT/p$, voor elk ideaal gas 24,06 L bij 20 °C en 1013,25 hPa (22,41 L bij 0 °C).

kinetische gastheorie

Model dat druk en temperatuur verklaart uit bewegende en botsende moleculen: $p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m\overline{v^2}$ en $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$.

verdeling van Maxwell en Boltzmann

De kansverdeling van de snelheden van de moleculen van een gas in evenwicht; hangt alleen af van de temperatuur en de massa van de moleculen.

partiële druk

De druk die één gas uit een mengsel zou uitoefenen als het alleen het hele volume vulde: $p_i = x_i\,p$ (wet van Dalton).

ppm

Parts per million: een miljoenste. Voor gassen een volumefractie, gelijk aan de molfractie: 1000 ppm CO_2 = 0,1 % van de moleculen.

relatieve vochtigheid

De waterdampdruk gedeeld door de verzadigingsdruk bij dezelfde temperatuur: $\mathrm{RV} = p_\mathrm{w}/p_\mathrm{s}(T)$.

dauwpunt

De temperatuur waartot je lucht moet afkoelen (bij dezelfde hoeveelheid waterdamp) voor ze verzadigd is; een koeler oppervlak wordt nat.

compressibiliteitsfactor

$Z = pV/(nRT)$: 1 voor een ideaal gas; kleiner als de moleculen elkaar aantrekken, groter als hun eigen volume telt.

kritisch punt

Boven deze temperatuur (voor CO_2 31,0 °C) kan je een gas niet meer vloeibaar maken, hoe hoog je de druk ook maakt.

ademhalingsquotiënt

Het aantal mol CO_2 dat je uitademt per mol O_2 die je verbruikt; hangt af van wat je verbrandt, gemiddeld ±0,85.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 15

De hoofdwetten van de thermodynamica

Energie verdwijnt nooit, maar ze verliest wel aan waarde: wat dat betekent voor motoren, centrales en het station

Een motor zet warmte om in arbeid, maar nooit helemaal: een deel moet hij kwijt aan de omgeving. Waarom is dat zo, en hoeveel moet het minstens zijn? De **eerste hoofdwet** is energiebehoud met warmte en arbeid als twee manieren om energie door te geven; de **tweede hoofdwet** zegt welke kant het vanzelf uit gaat, met entropie als maat. Je rekent aan gassen in pV-diagrammen, aan de Carnot-cyclus en een benzinemotor, en je begrijpt waarom een centrale een koeltoren heeft. Tot slot volg je elke kilowattuur van het station over een heel jaar, van zon en wind tot de warmte die door de wanden verdwijnt.

8× uitleg · 5× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

Energie · Wiskundig modelleren



Wat uit een koeltoren opstijgt, is geen rook maar waterdamp: de warmte die een centrale moet lozen omdat de tweede hoofdwet het zo wil.

Na dit hoofdstuk

- Je kan inwendige energie, warmte en arbeid onderscheiden en de eerste hoofdwet ΔU = Q − W met de juiste tekens toepassen.
- Je kan de arbeid van een gas berekenen als W = ∫p dV en ze aflezen als oppervlakte in een pV-diagram, en uitleggen waarom Q en W van het pad afhangen.
- Je kan de vier processen (isochoor, isobaar, isotherm, adiabatisch) berekenen en de adiabaat pV^γ = constant afleiden.
- Je kan het rendement van een kringproces berekenen, het Carnot-rendement afleiden en een echte cyclus (Otto, Stirling) ermee vergelijken.
- Je kan de tweede hoofdwet in woorden en met entropie formuleren en entropieveranderingen berekenen voor eenvoudige gevallen.
- Je kan uitleggen waarom een centrale warmte moet lozen, en de ordes van grootte van rendement en koelwater schatten.

- Je kan een jaarlijkse energiebalans opstellen en als Sankey-diagram tonen, en er ontwerpbeslissingen uit afleiden.

VERHAAL · 15.1

Vuur, stoom en een vergeten boekje

1/20

In 1824 verscheen in Parijs een dun boekje van een jonge legeringenieur: *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, 'beschouwingen over de beweegkracht van het vuur'. Sadi Carnot was 28. Hij wilde weten waarom de Engelse stoommachines Frankrijk zo voorbij liepen, en hoeveel arbeid je uit een hoeveelheid warmte kon halen. Zijn antwoord was verrassend algemeen: het hangt niet af van de stof in de machine (stoom, lucht of alcohol), maar alleen van de temperatuur van de bron en van de koude kant. Een machine levert arbeid zoals een waterrad: niet door warmte te verbruiken, maar door ze van hoog naar laag te laten 'vallen'. Het boekje werd nauwelijks gelezen; Carnot stierf in 1832 aan cholera, 36 jaar oud.

Émile Clapeyron redde het idee in 1834. Hij gaf de kringloop van Carnot een tekening: het **pV-diagram**, dat James Watt en zijn assistent John Southern al rond 1796 met een 'indicator' uit hun stoommachines lieten schrijven. De oppervlakte van de lus is de arbeid per slag.

Carnot dacht nog dat warmte een stof was die bewaard bleef. In de jaren 1840 toonden de Duitse arts Julius Robert Mayer (1842), de Engelse brouwerszoon James Prescott Joule (metingen van 1843 tot 1850, met een schoepenrad dat water opwarmde door een vallend gewicht) en Hermann von Helmholtz (1847) dat warmte en arbeid in elkaar omzetbaar zijn: 1 calorie is ongeveer 4,2 joule. Rudolf Clausius (1850) en William Thomson, de latere Lord Kelvin (1851), verzoenden beide ideeën: energie blijft behouden (de eerste hoofdwet), maar warmte stroomt vanzelf alleen van warm naar koud en laat zich nooit volledig in arbeid omzetten (de tweede). In 1865 gaf Clausius de maat daarvoor een naam: **entropie**. Ludwig Boltzmann legde uit wat entropie met atomen te maken heeft; zijn formule $S = k \log W$ staat op zijn graf in Wenen.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Elke centrale, motor, koelkast en warmtepomp gehoorzaamt aan deze twee wetten. Voor het station betekenen ze: elke kilowattuur die binnenkomt, verlaat het station uiteindelijk als warmte, en warmte uit de buitenlucht kan je alleen naar binnen pompen als je er arbeid voor betaalt (hoofdstuk 16).



Een indicator tekent tijdens de werking het pV-diagram van een stoommachine: de oppervlakte van de lus is de arbeid per slag.

UITLEG · 15.2

Wat je al weet: energie, warmte en arbeid

2/20

wat je al kan	wat nu komt
energievormen, energiebehoud, rendement, Sankey-diagram (hoofdstuk 15 van F)	energiebehoud met warmte en arbeid als twee manieren om energie over te dragen: de eerste hoofdwet
warmte en temperatuur, warmte stroomt van warm naar koud (hoofdstuk 16 van F)	waarom dat altijd zo is: de tweede hoofdwet en entropie
arbeid $W = F \cdot s$, vermogen (hoofdstuk 9 van I); $Q = mc\Delta T$ en $C = mc$ (hoofdstuk 18 van I)	arbeid van een gas $W = \int p\,\mathrm{d}V$, c_v en c_p
integralen als oppervlakte (hoofdstuk 3); de ideale gaswet en de kinetische gastheorie (hoofdstuk 14)	arbeid als oppervlakte in het pV-diagram; inwendige energie als bewegingsenergie van moleculen

De thermodynamica werkt met een **systeem** (het gas in een cilinder, de lucht van de woonmodule, het koudemiddel in een warmtepomp) en zijn **omgeving**. De toestand van het systeem beschrijf je met **toestandsgrootheden** zoals p, V, T en de **inwendige energie** U: de totale energie van alle deeltjes samen. Ze hangen alleen af van de toestand, niet van hoe het systeem daar gekomen is.

Energie kan op twee manieren over de grens van het systeem gaan:

- **warmte** Q: door een temperatuurverschil (geleiding, stroming, straling);
- **arbeid** W: door een kracht die iets verplaatst, bv. een zuiger, een schoepenrad, een elektrische stroom.

Warmte en arbeid zijn **geen** toestandsgrootheden: ze bestaan alleen onderweg. Een systeem 'bevat' geen warmte, net zoals een rekening geen 'stortingen' bevat, maar een saldo.

Tekenafspraak in dit hoofdstuk (die van de ingenieurs): $Q > 0$ als er warmte *naar* het systeem gaat, $W > 0$ als het systeem arbeid *levert* (een gas dat uitzet en een zuiger duwt). Sommige boeken tellen de arbeid *op* het systeem positief; dan staat er $\Delta U = Q + W$. Controleer altijd welke afspraak een bron gebruikt.

Warmte en temperatuur zijn hetzelfde

Temperatuur is een toestand (hoe snel de deeltjes gemiddeld bewegen, hoofdstuk 14); warmte is energie die stroomt. Een vonk van 1000 °C op je hand verbrandt je niet: ze bevat te weinig inwendige energie om veel warmte af te geven. Water van 60 °C is veel minder heet, maar kan je wel verbranden.

UITLEG · 15.3

Arbeid van een gas: de oppervlakte onder de kromme

3/20

Een gas duwt met druk p op een zuiger met oppervlakte A. Schuift de zuiger een stukje $\mathrm{d}x$ op, dan levert het gas de arbeid $\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}x = pA\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}V$. Over een heel proces tel je al die stukjes op (hoofdstuk 3):

ARBEID DOOR EEN GAS

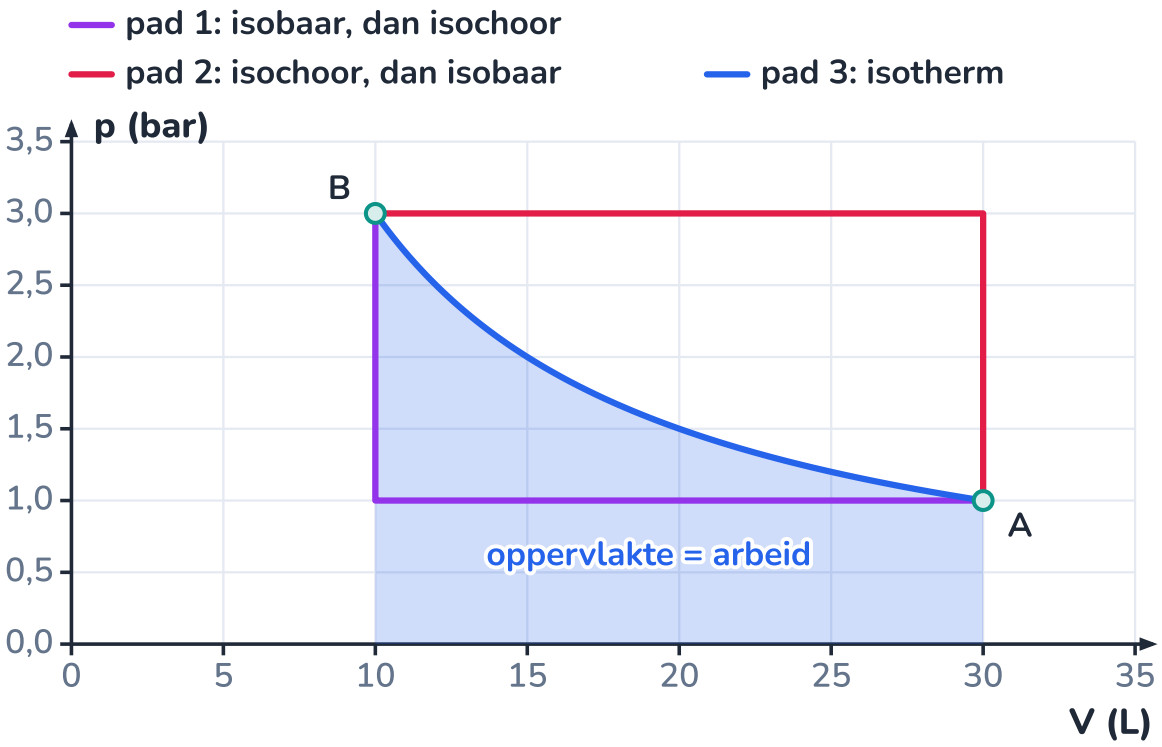
$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

Positief als het gas uitzet ($V_2 > V_1$), negatief als het wordt samengeperst (dan levert de omgeving arbeid aan het gas). In een pV-diagram is $|W|$ de oppervlakte onder de kromme.

De arbeid hangt van de weg af. Neem $1{,}23$ mol lucht in toestand A (1 bar, 30 L, 20 °C) en druk het samen tot B (3 bar, 10 L). A en B hebben dezelfde pV, dus dezelfde temperatuur. Drie wegen:

- pad 1: eerst bij 1 bar samenpersen tot 10 L, dan bij 10 L opwarmen tot 3 bar: arbeid op het gas $1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}020 = 2000\,\mathrm{J}$;
- pad 2: eerst bij 30 L opwarmen tot 3 bar, dan bij 3 bar samenpersen: $6000\,\mathrm{J}$;
- pad 3: langs de isotherm: $pV\ln 3 = 3000 \cdot 1{,}0986 = 3296\,\mathrm{J}$.

Omdat begin- en eindtoestand dezelfde temperatuur hebben, is ΔU langs elk pad nul. De warmte die het gas afgeeft, is dus even groot als de arbeid erop, en verschilt ook per pad. Daarom schrijft men soms δQ en δW voor kleine hoeveelheden: het zijn geen veranderingen van iets, alleen hoeveelheden onderweg.



Drie wegen van A naar B: de oppervlakte onder elk pad is de arbeid. Onder de isotherm is ze gearceerd; pad 2 vraagt drie keer zoveel arbeid als pad 1.

PROEF · 15.4

Loodhagel: arbeid wordt warmte

4/20

ONDERZOEKSVRAAG

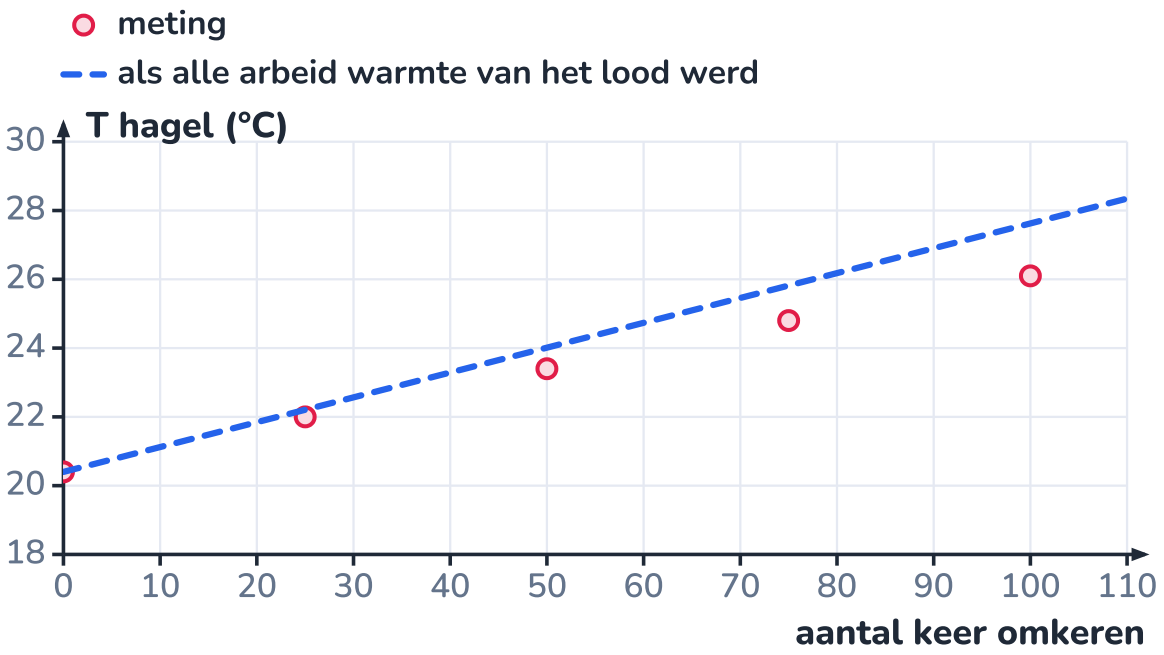
Hoeveel warmer wordt loodhagel als je het honderd keer een meter laat vallen? Wordt alle arbeid warmte van het lood?

MATERIAAL

- kartonnen of PVC-buis van 1,00 m met twee stoppen
- 1,0 kg loodhagel (of koperhagel), in een zakje van dun plastic
- thermometer of temperatuursensor (±0,1 °C)
- handschoenen, een stopwatch

Veiligheid

Lood is giftig: werk met handschoenen, gebruik de hagel in een gesloten zakje, eet en drink niet tijdens de proef en was je handen. Koperhagel is een veiliger alternatief (c = 385 J/(kg·K): kleinere stijging).



De hagel warmt op met elke val, maar minder snel dan wanneer alle zwaarte-energie in het lood zou blijven.

WERKWIJZE

1. Laat de hagel een uur op kamertemperatuur komen. Meet de temperatuur (sensor in het midden van de hagel).
2. Doe de hagel in de buis, sluit af en keer de buis snel om, rechtop, zodat de hagel telkens over bijna de hele lengte valt. Tel.
3. Meet na 25, 50, 75 en 100 keer omkeren snel de temperatuur (buis open, sensor erin, dicht).
4. Bereken de temperatuurstijging als alle zwaarte-energie warmte van het lood zou worden.

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting (valhoogte 0,95 m: de laag hagel is 5 cm dik): na 0 keer 20,4 °C, na 25 keer 22,0 °C, na 50 keer 23,4 °C, na 75 keer 24,8 °C, na 100 keer 26,1 °C. De temperatuur stijgt ongeveer lineair.

VERKLARING

Per val wordt de zwaarte-energie mgh omgezet in bewegingsenergie, en bij de landing in inwendige energie van het lood (en een beetje van de buis en de lucht). Als alles in het lood bleef: $mc\,\Delta T = N m g h$, dus $\Delta T = \dfrac{N g h}{c} = \dfrac{100 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}95}{129} = 7{,}2\,\mathrm{K}$, onafhankelijk van de massa. Gemeten: 5,7 K, 79 % daarvan. De rest ging naar de buis en de lucht, en tijdens het meten koelt de hagel al af.

Rekende je andersom de soortelijke warmte uit de meting, dan vond je $c = N g h / \Delta T = 163\,\mathrm{J/(kg\,K)}$: te veel, omdat je de verliezen vergeet. Joule ging veel zorgvuldiger te werk, met een schoepenrad in een goed geïsoleerd vat water en duizenden herhalingen, en vond in 1850 772 voetpond per Britse warmte-eenheid: 4,16 J per calorie, tegenover 4,19 vandaag.

UITLEG · 15.5

De eerste hoofdwet

5/20

EERSTE HOOFDWET VAN DE THERMODYNAMICA

$$\Delta U = Q - W \qquad \mathrm{d}U = \delta Q - p\,\mathrm{d}V$$

De inwendige energie stijgt met de warmte die erin gaat en daalt met de arbeid die het systeem levert. Voor een kringproces (terug naar het begin) is $\Delta U = 0$, dus $W = Q_{\text{netto}}$: een machine die arbeid levert zonder energietoevoer, een **perpetuum mobile van de eerste soort**, kan niet.

De inwendige energie van een ideaal gas. Uit hoofdstuk 14: elke molecule heeft gemiddeld $\frac{3}{2}kT$ bewegingsenergie. Een eenatomig gas (helium, argon) heeft niets anders: $U = \frac{3}{2}nRT$. Een tweeatomige molecule (N_2, O_2) kan ook draaien rond twee assen; per 'vrijheidsgraad' komt er gemiddeld $\frac{1}{2}kT$ bij (**equipartitie**): $U = \frac{5}{2}nRT$. Trillen van de binding komt pas bij veel hogere temperaturen op gang. Belangrijk: U hangt alleen van T af, niet van p of V.

Twee warmtecapaciteiten. Verwarm je n mol bij constant volume, dan gaat alle warmte naar U: $Q = nc_v\,\Delta T$. Bij constante druk zet het gas uit en levert het ook arbeid $p\,\Delta V = nR\,\Delta T$:

RELATIE VAN MAYER

$$nc_p\,\Delta T = nc_v\,\Delta T + nR\,\Delta T \;\Rightarrow\; c_p = c_v + R \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Per mol: $c_v = \frac{5}{2}R = 20{,}8\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ en $c_p = \frac{7}{2}R = 29{,}1\,\mathrm{J/(mol\,K)}$ voor lucht, $\gamma = 1{,}4$. Per kilogram lucht: $c_p = 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ (hoofdstuk 18 van I).

gas	c_v (per mol)	c_p (per mol)	$\gamma = c_p/c_v$
helium, argon	3/2 R	5/2 R	1,67
stikstof, zuurstof, lucht	5/2 R	7/2 R	1,40
koolstofdioxide	±3,4 R	±4,4 R	1,29

Mayer gebruikte precies dit verschil in 1842 om de arbeid te berekenen die met een calorie overeenkomt: het verschil tussen c_p en c_v van lucht is de arbeid van het uitzetten.

UITGEWERKT VOORBEELD · 15.6

Waarom stoken we eigenlijk? De lucht van de woonmodule opwarmen

6/20

Na een koude nacht is het in de woonmodule 15 °C; de verwarming brengt de lucht op 20 °C. De module is niet luchtdicht: de druk blijft 1013 hPa. Bereken de warmte, de verandering van de inwendige energie van de lucht in de module en de arbeid. Vergelijk met de warmtecapaciteit van het hele station (540 kJ/K). Wat is er vreemd aan de inwendige energie?

GEGEVEN

- $V = 62{,}4\,\mathrm{m^3}$, $p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$
- lucht: $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$

GEVRAAGD

- Q, ΔU en W voor de lucht
- vergelijking met het station
- wat er met U gebeurt

OPLOSSING

1. Bij 20 °C: $n = pV/(RT) = 2594\,\text{mol}$ (hoofdstuk 14). Rekenen we met deze lucht die opwarmt: $Q = nc_p\Delta T = 2594 \cdot 29{,}1 \cdot 5 = 377\,\text{kJ}$.

2. $\Delta U = nc_v\Delta T = 270\,\text{kJ}$ en $W = nR\,\Delta T = 108\,\text{kJ}$: $\frac{2}{7}$ van de warmte gaat naar het uitzetten, dat lucht door de kieren naar buiten duwt.

3. De lucht heeft een warmtecapaciteit van $nc_p = 75\,\text{kJ/K}$: maar 14 % van de 540 kJ/K van het station. De rest zit in wanden, vloer, meubels en water: daar gaat de meeste warmte naartoe.

4. Vreemd: de inwendige energie van de lucht *in* de module verandert niet. $U = nc_vT = c_v\,pV/R$, en p en V blijven gelijk. Warmere lucht heeft meer energie per molecule, maar er zitten 1,7 % minder moleculen in de module: die zijn met hun energie naar buiten gegaan.

ANTWOORD

$Q \approx 377\,\text{kJ}$, waarvan $270\,\text{kJ}$ inwendige energie van de opgewarmde lucht en $108\,\text{kJ}$ arbeid van het uitzetten; toch blijft de inwendige energie van de lucht in de module gelijk.

Klopt dit? De astrofysicus Robert Emden stelde in 1938 in *Nature* de vraag 'waarom stoken we in de winter?' en gaf dit antwoord: niet om de energie van de kamerlucht te verhogen, maar om de temperatuur te verhogen, zodat wij minder warmte verliezen. De energie die we betalen, stroomt door de kamer heen naar buiten. Controle van de getallen: $c_p \cdot m = 1005 \cdot 75{,}1 \cdot 5 = 378\,\text{kJ}$.

UITLEG · 15.7

Vier processen

7/20

Vier eenvoudige processen van een ideaal gas komen overal terug. Telkens blijft iets constant:

proces	constant	arbeid door het gas W	ΔU	warmte Q
isochoor	V	0	$nc_v\Delta T$	$nc_v\Delta T$
isobaar	p	$p\,\Delta V = nR\,\Delta T$	$nc_v\Delta T$	$nc_p\Delta T$
isotherm	T	$nRT\ln\dfrac{V_2}{V_1}$	0	$= W$
adiabatisch	$pV^\gamma,\ TV^{\gamma-1}$	$\dfrac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} = nc_v(T_1 - T_2)$	$-W$	0

Isotherm: de temperatuur blijft gelijk, dus $\Delta U = 0$ en $Q = W = \int \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$. Dat vraagt een langzaam proces met goed warmtecontact (de spuit van hoofdstuk 14, als je wacht).

Adiabatisch: er gaat geen warmte in of uit ($Q = 0$), omdat het snel gaat of goed geïsoleerd is. Dan is $\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V$:

$$nc_v\,\mathrm{d}T = -\frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{c_v}\,\frac{\mathrm{d}V}{V} = -(\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

Integreren (hoofdstuk 3): $\ln T = -(\gamma - 1)\ln V + c$, dus

ADIABAAT VAN EEN IDEAAL GAS

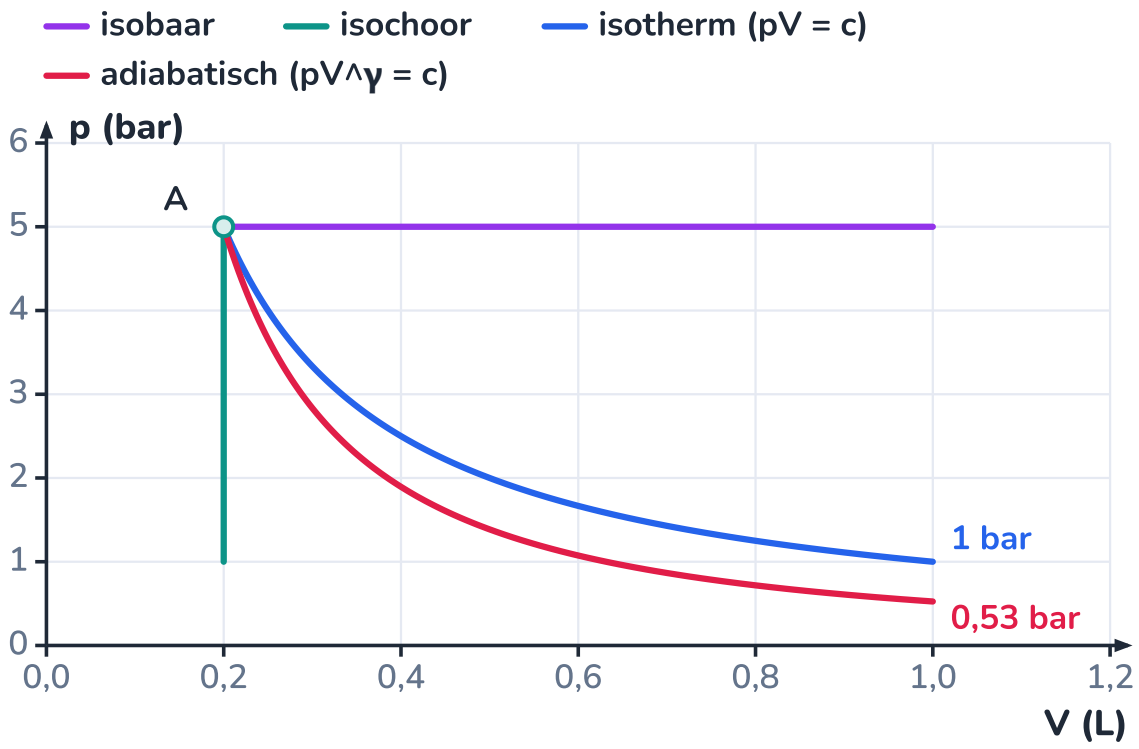
$$T\,V^{\gamma-1} = \text{constant} \qquad pV^{\gamma} = \text{constant}$$

De tweede vorm volgt met $T = pV/(nR)$. Omdat $\gamma > 1$ daalt een adiabaat in het pV-diagram steiler dan een isotherm: bij uitzetten koelt het gas af, bij samenpersen warmt het op.

In de figuur vertrekt het gas telkens in A (0,2 L, 5 bar) en zet het uit tot 1,0 L. Bij de isobaar levert het de meeste arbeid (het moet dan wel verwarmd worden), bij de adiabaat de minste: het betaalt die arbeid uit zijn eigen inwendige energie en koelt af tot $T_1 \cdot 5^{-0{,}4}$, van 20 °C naar −119 °C.

Adiabatisch in het dagelijks leven

Een fietspomp wordt warm aan de onderkant. Lucht die opstijgt tegen een berg, zet uit en koelt af (ongeveer 1 °C per 100 m, zolang er geen wolk vormt): daarom liggen er sneeuw en ijs op bergtoppen. Een spuitbus wordt koud als je hem leegspuit. En in een dieselmotor ontsteekt de brandstof zonder bougie, alleen door de hete samengeperste lucht (volgend blad).



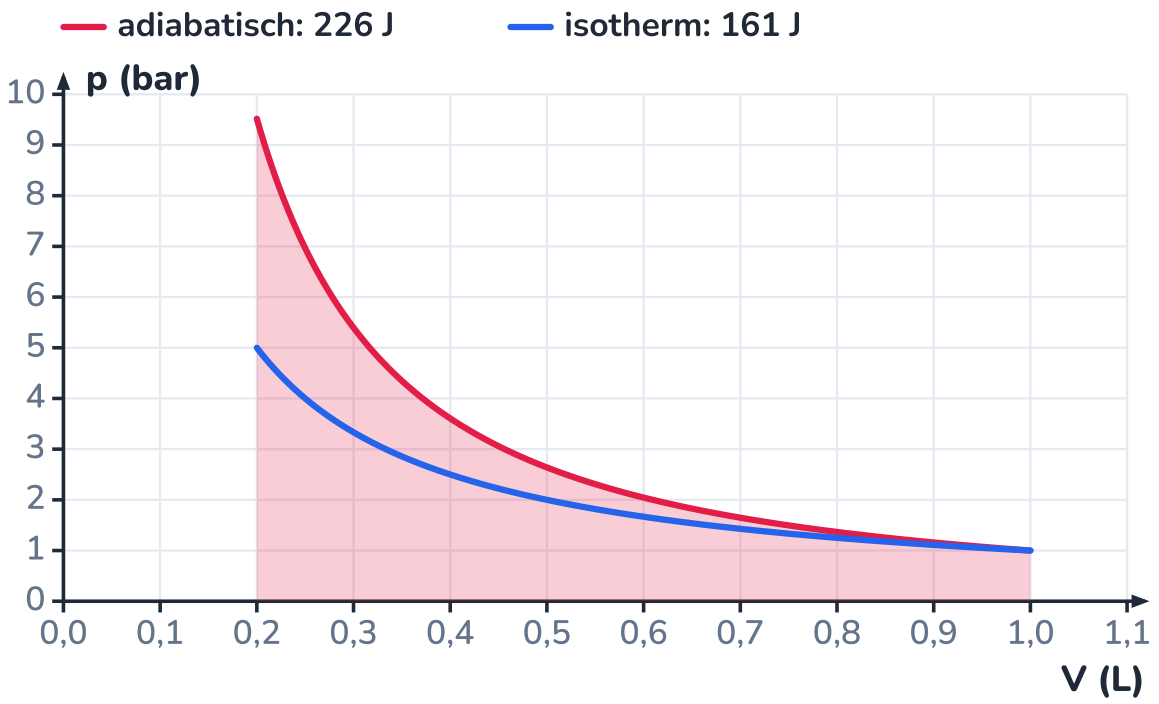
Vanuit dezelfde toestand: de adiabaat daalt steiler dan de isotherm, omdat het gas bij uitzetten ook afkoelt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 15.8

Samenpersen: fietspomp en dieselmotor

8/20

Eén liter lucht van 1 bar en 20 °C wordt samengeperst tot 0,2 L. Bereken druk, temperatuur en arbeid als dat (a) heel langzaam gebeurt (isotherm) en (b) heel snel (adiabatisch). In een dieselmotor is de compressieverhouding ongeveer 18. Hoe warm wordt de lucht daar, en waarom ontsteekt de diesel dan vanzelf?



Snel samenpersen kost meer arbeid dan langzaam: de adiabaat ligt boven de isotherm, want de lucht warmt op.

GEGEVEN

- $p_1 = 1{,}0\,\text{bar}$, $V_1 = 1{,}0\,\text{L}$, $T_1 = 293{,}15\,\text{K}$, $V_2 = 0{,}2\,\text{L}$, $\gamma = 1{,}4$
- diesel: $V_1/V_2 = 18$; zelfontbranding van diesel: ±250 °C (orde van grootte)

GEVRAAGD

- druk, temperatuur en arbeid in beide gevallen
- de temperatuur in de dieselmotor

OPLOSSING

1. Isotherm: $p_2 = p_1 \cdot 5 = 5{,}0\,\text{bar}$, $T_2 = T_1$. Arbeid op het gas: $p_1 V_1 \ln 5 = 100\,\text{J} \cdot 1{,}609 = 161\,\text{J}$; evenveel warmte gaat naar buiten.

2. Adiabatisch: $p_2 = p_1 \cdot 5^{1{,}4} = 9{,}52\,\text{bar}$, $T_2 = T_1 \cdot 5^{0{,}4} = 558\,\text{K} = 285\,^\circ\text{C}$. Arbeid op het gas: $\dfrac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \dfrac{190{,}4 - 100}{0{,}4} = 226\,\text{J}$, allemaal inwendige energie.

3. Adiabatisch kost meer arbeid: de opwarming duwt de druk onderweg hoger. In het pV-diagram ligt de adiabaat boven de isotherm.

4. Diesel: $T_2 = 293 \cdot 18^{0{,}4} = 932\,\text{K}$, ongeveer 658 °C, bij $18^{1{,}4} = 57$ bar. Ver boven de zelfontbrandingstemperatuur: de ingespoten diesel ontsteekt vanzelf.

ANTWOORD

Isotherm: 5,0 bar, 20 °C, 161 J. Adiabatisch: 9,5 bar, 285 °C, 226 J. In een dieselmotor wordt de lucht ongeveer 658 °C.

Klopt dit? In een echte motor verliest de lucht tijdens het samenpersen al wat warmte aan de wand, en is γ bij hoge temperatuur iets kleiner: dieselmotoren halen ongeveer 500 à 600 °C. Een 'vuurspuit' (een glazen cilinder met een snelle zuiger) doet hetzelfde in de klas: een plukje watten vat vlam.



Een vuurspuit: de zuiger snel indrukken is bijna adiabatisch, de lucht wordt heet genoeg om watten te laten ontbranden.

UITLEG · 15.9

Kringprocessen en warmtemotoren

9/20

Een motor moet steeds opnieuw arbeid leveren. Daarom doorloopt het werkgas een **kringproces**: het komt telkens terug in dezelfde toestand. Na één ronde is $\Delta U = 0$, dus volgens de eerste hoofdwet is de netto arbeid gelijk aan de netto warmte. In het pV-diagram is die netto arbeid de **ingesloten oppervlakte**: uitzetten bij hoge druk levert meer op dan samenpersen bij lage druk kost. Loopt de lus met de klok mee, dan levert het gas arbeid (een motor); tegen de klok in kost het arbeid (een koelmachine of warmtepomp).

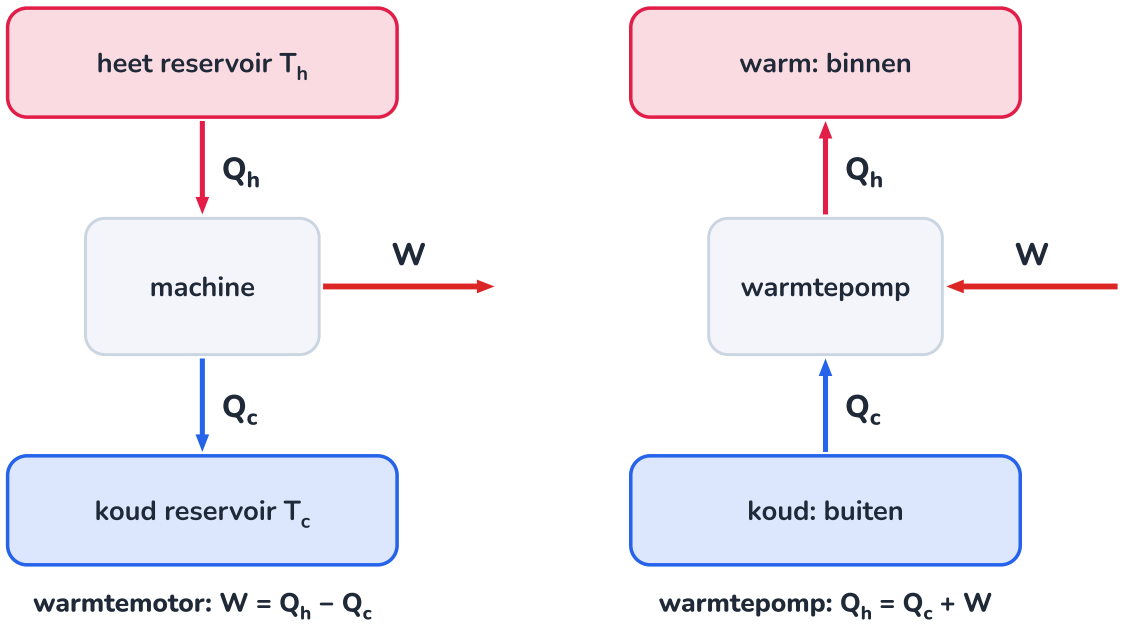
Elke warmtemotor neemt warmte Q_h op van een hete bron, levert arbeid W en geeft warmte Q_c af aan een koude omgeving:

RENDEMENT VAN EEN WARMTEMOTOR

$$W = Q_\mathrm{h} - Q_\mathrm{c} \qquad \eta = \frac{W}{Q_\mathrm{h}} = 1 - \frac{Q_\mathrm{c}}{Q_\mathrm{h}}$$

Dat de motor Q_c moet lozen, volgt niet uit de eerste hoofdwet. Het is de kern van de tweede: een machine die warmte uit één bron volledig in arbeid omzet (een schip dat varend de oceaan afkoelt), een **perpetuum mobile van de tweede soort**, bestaat niet (Kelvin en Planck).

Een **warmtepomp** of koelkast is dezelfde machine achterstevoren: ze krijgt arbeid en pompt warmte van koud naar warm. Dat kan wel, maar niet vanzelf (Clausius). Hoofdstuk 16 werkt dat uit.



Links haalt een motor arbeid uit een warmtestroom van heet naar koud; rechts duwt een warmtepomp met arbeid warmte van koud naar warm.

UITLEG · 15.10

De Carnot-cyclus en het hoogste rendement

10/20

Carnot bedacht de meest zuinige motor die er kan bestaan: een motor die nergens warmte laat stromen over een temperatuurverschil, want zo'n stroom levert niets op en kan niet terug. Hij neemt warmte op bij T_h en geeft af bij T_c, en daartussen verandert hij zijn temperatuur zonder warmte-uitwisseling. Met een ideaal gas als werkstof: twee isothermen en twee adiabaten.

1. 1 → 2: isotherm uitzetten bij T_h: $Q_\mathrm{h} = nRT_\mathrm{h}\ln(V_2/V_1)$.
2. 2 → 3: adiabatisch uitzetten tot T_c: $T_\mathrm{h}V_2^{\gamma-1} = T_\mathrm{c}V_3^{\gamma-1}$.
3. 3 → 4: isotherm samenpersen bij T_c: $Q_\mathrm{c} = nRT_\mathrm{c}\ln(V_3/V_4)$.
4. 4 → 1: adiabatisch samenpersen tot T_h: $T_\mathrm{h}V_1^{\gamma-1} = T_\mathrm{c}V_4^{\gamma-1}$.

Deel de twee adiabaten door elkaar: $(V_2/V_1)^{\gamma-1} = (V_3/V_4)^{\gamma-1}$, dus $V_2/V_1 = V_3/V_4$ en de logaritmen vallen weg:

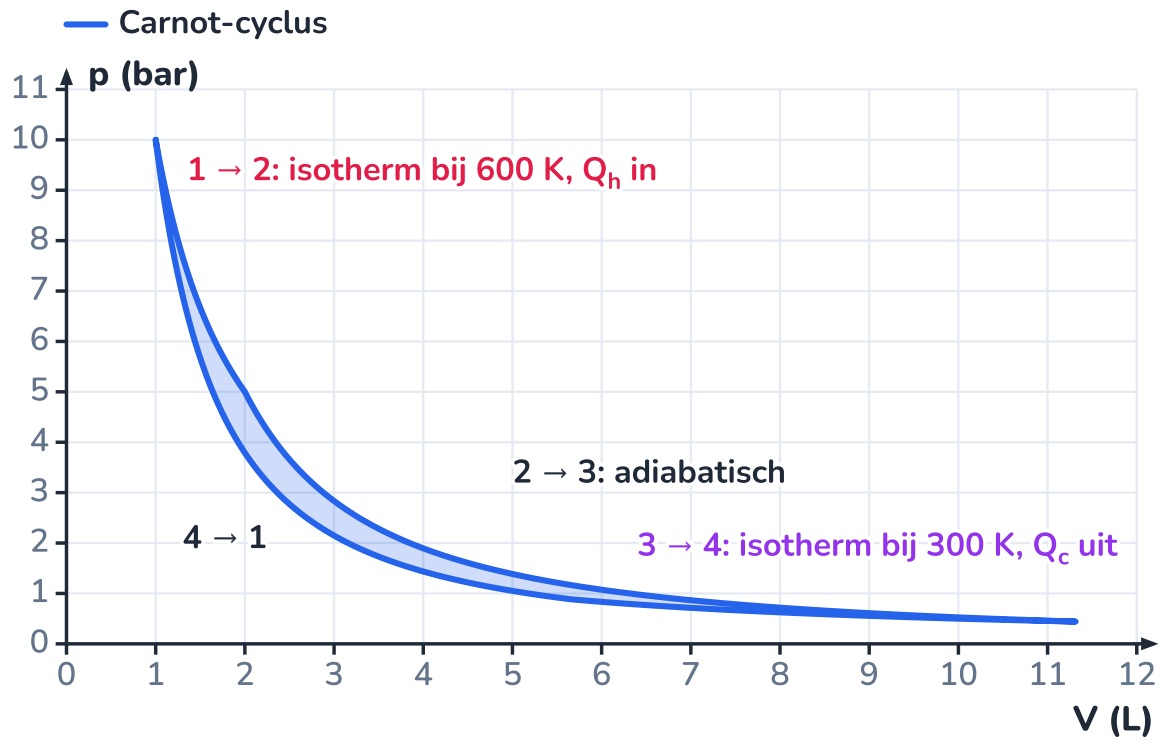
CARNOT-RENDEMENT

$$\frac{Q_\mathrm{c}}{Q_\mathrm{h}} = \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}} \quad\Rightarrow\quad \eta_\mathrm{C} = 1 - \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}}$$

Temperaturen in kelvin. Geen enkele motor tussen dezelfde twee temperaturen doet beter (dat volgt uit de tweede hoofdwet, ook voor andere werkstoffen). Wil je een hoger rendement: maak de bron heter of de koude kant kouder.

Het voorbeeld in de figuur: $0{,}2005$ mol lucht tussen 600 K en 300 K, V van 1 naar 2 L op de hete isotherm. $Q_\mathrm{h} = 693\,\mathrm{J}$, $Q_\mathrm{c} = 347\,\mathrm{J}$, $W = 4186\,\mathrm{J}$ per cyclus: precies 50 %. De lus is wel erg smal: de netto arbeid per liter is klein. Een echte Carnot-motor zou bovendien oneindig traag moeten draaien (isotherme warmteoverdracht zonder temperatuurverschil). Carnot geeft dus een grens, geen bouwplan.

Merk op: $Q_\mathrm{h}/T_\mathrm{h} = Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c}$. De grootheid Q/T die de motor bij T_h opneemt, geeft hij bij T_c weer af. Clausius noemde die grootheid entropie.



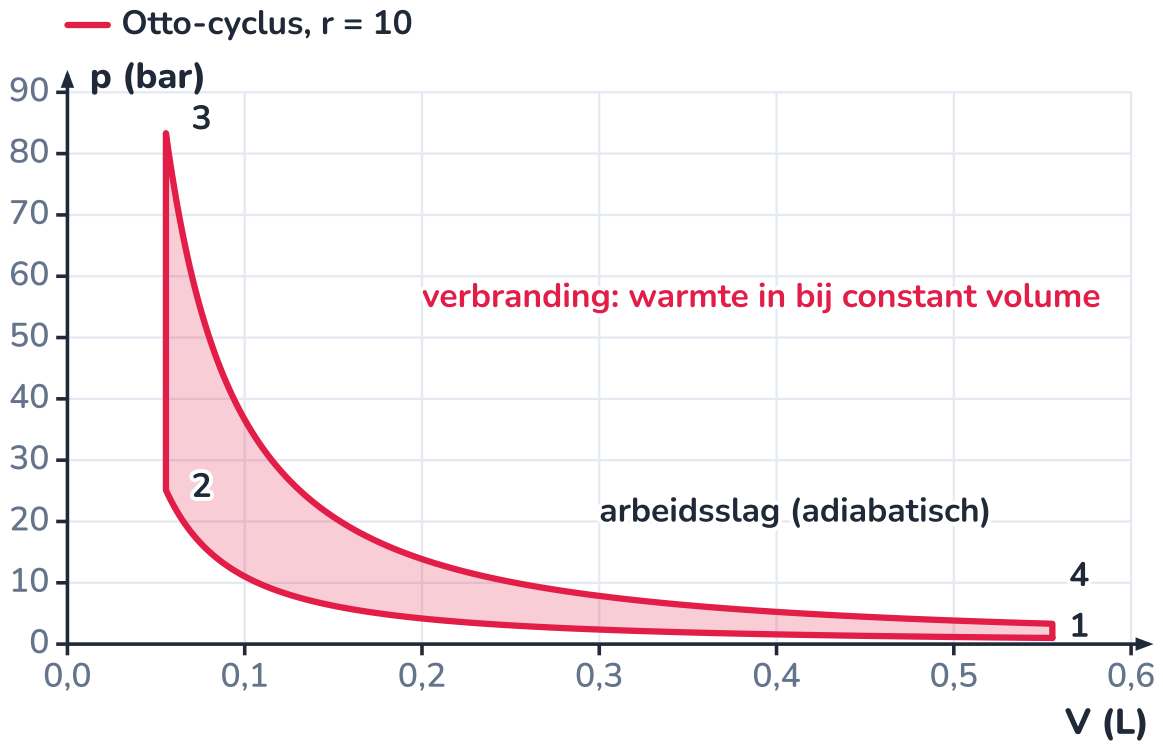
De Carnot-cyclus: twee isothermen, verbonden door twee steilere adiabaten. De gevulde oppervlakte is de netto arbeid per cyclus.

UITGEWERKT VOORBEELD · 15.11

De Otto-cyclus: hoe zuinig kan een benzinemotor zijn?

11/20

Een benzinemotor wordt benaderd door de ideale Otto-cyclus: adiabatisch samenpersen (1 → 2), verbranden bij constant volume (2 → 3), adiabatisch uitzetten (3 → 4) en afkoelen bij constant volume (4 → 1, in werkelijkheid de uitlaat en een nieuwe lading). Toon dat het rendement alleen van de compressieverhouding $r = V_1/V_2$ afhangt. Bereken het voor $r = 10$ en vergelijk met Carnot tussen de laagste (300 K) en hoogste temperatuur (2500 K).



De Otto-cyclus in het pV-diagram. De verbranding (2 → 3) duwt de druk in een oogwenk van 25 naar 83 bar; de gevulde lus is de arbeid per cyclus.

GEGEVEN

- $r = 10$, $\gamma = 1{,}4$, $T_1 = 300\,\mathrm{K}$, $p_1 = 1\,\mathrm{bar}$, $T_3 = 2500\,\mathrm{K}$
- cilinder van 0,556 L (500 cm³ slagvolume)

GEVRAAGD

- η als functie van r
- de temperaturen en drukken in de hoekpunten
- vergelijking met Carnot

OPLOSSING

1 Warmte in (bij constant volume): $Q_{\text{in}} = nc_v(T_3 - T_2)$; warmte uit: $Q_{\text{uit}} = nc_v(T_4 - T_1)$. Dus $\eta = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

2 Adiabaten: $T_2 = T_1 r^{\gamma-1}$ en $T_3 = T_4 r^{\gamma-1}$. Dus $T_3 - T_2 = (T_4 - T_1)\, r^{\gamma-1}$ en $\eta = 1 - r^{1-\gamma} = 1 - 10^{-0{,}4} = 0{,}602$.

3 Hoekpunten: $T_2 = 754\,\mathrm{K}$, $p_2 = 10^{1{,}4} = 25{,}1\,\mathrm{bar}$; $p_3 = p_2\, T_3/T_2 = 83\,\mathrm{bar}$; $p_4 = 3{,}32\,\mathrm{bar}$, $T_4 = 995\,\mathrm{K}$.

4 Per cyclus: $n = 22{,}3\,\mathrm{mmol}$, $Q_{\text{in}} = 809\,\mathrm{J}$, $W = 487\,\mathrm{J}$. Carnot tussen 300 en 2500 K: 0,88.

ANTWOORD

$\eta = 1 - r^{1-\gamma} = 60\,\%$ **voor $r = 10$, tegenover 88 % voor Carnot. Echte benzinemotoren halen 30 à 38 %.**

Klopt dit? De Otto-cyclus haalt Carnot niet, omdat de warmte binnenkomt bij temperaturen tussen T_2 en T_3, niet allemaal bij T_3, en buitengaat tussen T_4 en T_1. Een echte motor verliest nog meer: warmte naar de cilinderwand (koelwater), wrijving, pompen van de lucht, een γ die bij hoge temperatuur zakt. Een hogere r helpt, maar benzine ontsteekt dan te vroeg ('pingelen'): daarom blijft r rond 10 à 12. Een diesel mag tot 20 en is zuiniger.

CODE · 15.12

Een kringproces numeriek integreren

12/20

In een echte motor meet je p en V (een indicatordiagram) en integreer je numeriek: $W = \oint p\,\mathrm{d}V$, met de trapeziumregel over elke tak (hoofdstuk 3). Het programma doet dat voor drie ideale kringen en vergelijkt met de formules. De derde is de **Stirling-motor** (Robert Stirling, 1816): twee isothermen en twee isochoren. Zonder hulpmiddel moet het gas bij het isochore opwarmen extra warmte uit de bron krijgen; met een **regenerator** (een prop metaalgaas die warmte even bewaart) komt die warmte uit de vorige cyclus terug.

Python **kring.py** 49 regels

```python
# kring.py - arbeid en rendement van kringprocessen: numeriek W = ∮ p dV, en de formule
import numpy as np

R, g = 8.314, 1.4                       # J/(mol K); lucht: cp/cv


def arbeid(takken):
    """Som van de trapeziumregel over alle takken: elke tak is (V, p) in m³ en Pa, in volgorde doorlopen."""
    return sum(np.trapezoid(p, V) for V, p in takken)


def isotherm(n, T, Va, Vb):
    V = np.geomspace(Va, Vb, 2000)
    return V, n * R * T / V


def adiabaat(p0, V0, Vb):
    V = np.geomspace(V0, Vb, 2000)
    return V, p0 * (V0 / V) ** g


# Carnot: 0,2005 mol tussen 600 en 300 K, V van 1 naar 2 liter op de hete isotherm
n, Th, Tc, V1, V2 = 0.2005, 600.0, 300.0, 1e-3, 2e-3
V3, V4 = V2 * (Th / Tc) ** (1 / (g - 1)), V1 * (Th / Tc) ** (1 / (g - 1))
t1 = isotherm(n, Th, V1, V2)
t2 = adiabaat(n * R * Th / V2, V2, V3)
t3 = isotherm(n, Tc, V3, V4)
t4 = adiabaat(n * R * Tc / V4, V4, V1)
W = arbeid([t1, t2, t3, t4])
Qh = n * R * Th * np.log(V2 / V1)
print(f"Carnot:  W = {W:6.1f} J, Qh = {Qh:6.1f} J, rendement {W / Qh:.4f} (formule {1 - Tc / Th:.4f})")

# Otto: r = 10, 1 bar en 300 K in, 2500 K na de verbranding
r, Vmax, T1, T3 = 10.0, 0.5556e-3, 300.0, 2500.0
n = 1e5 * Vmax / (R * T1)
V2 = Vmax / r
T2 = T1 * r ** (g - 1)
p2, p3 = n * R * T2 / V2, n * R * T3 / V2
W = arbeid([adiabaat(1e5, Vmax, V2), adiabaat(p3, V2, Vmax)])      # de isochoren leveren geen arbeid
Qin = n * 2.5 * R * (T3 - T2)
print(f"Otto:    W = {W:6.1f} J, Qin = {Qin:6.1f} J, rendement {W / Qin:.4f} (formule {1 - r ** (1 - g):.4f})")

# Stirling: twee isothermen en twee isochoren, 0,2005 mol tussen 600 en 300 K, V van 1 naar 2 liter
n, V1, V2 = 0.2005, 1e-3, 2e-3
W = arbeid([isotherm(n, Th, V1, V2), isotherm(n, Tc, V2, V1)])
Qiso = n * R * Th * np.log(V2 / V1)
Qv = n * 2.5 * R * (Th - Tc)                  # opwarmen bij constant volume
print(f"Stirling zonder regenerator: rendement {W / (Qiso + Qv):.4f}")
```

```
49  print(f"Stirling met regenerator:    rendement {W / Qiso:.4f}")
```

OOK TE DOWNLOADEN

Uitvoer:

```
Carnot:  W =  346.6 J, Qh =  693.3 J, rendement 0.5000 (formule 0.5000)
Otto:    W =  486.7 J, Qin =  808.6 J, rendement 0.6019 (formule 0.6019)
Stirling zonder regenerator: rendement 0.1784
Stirling met regenerator:    rendement 0.5000
```

De numerieke integraal klopt met de formules tot op een fractie van een promille. De Stirling-motor met regenerator haalt het Carnot-rendement (hij neemt alle warmte van buiten op bij T_h en geeft ze af bij T_c); zonder regenerator zakt hij sterk. Daarom zit in elke echte Stirling-motor een regenerator. Echte Stirling-motoren halen door warmteoverdracht en wrijving veel minder; ze worden gebruikt waar een stille, externe warmtebron telt: een zonneschotel, een onderzeeboot, een cryokoeler (achterstevoren).

UITLEG · 15.13

De tweede hoofdwet en entropie

13/20

Een kop thee koelt af in een koude kamer, nooit omgekeerd, hoewel beide richtingen energie behouden. De tweede hoofdwet zegt welke richting vanzelf gaat. Clausius zei het zo: warmte stroomt niet vanzelf van een koud naar een warm lichaam. Kelvin en Planck: geen kringproces zet warmte uit één bron volledig in arbeid om. Beide uitspraken zijn gelijkwaardig (zou de ene fout zijn, dan kon je met een Carnot-motor ook de andere breken).

ENTROPIE EN DE TWEEDE HOOFDWET

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_\mathrm{rev}}{T} \qquad \Delta S_\mathrm{systeem} + \Delta S_\mathrm{omgeving} \geq 0$$

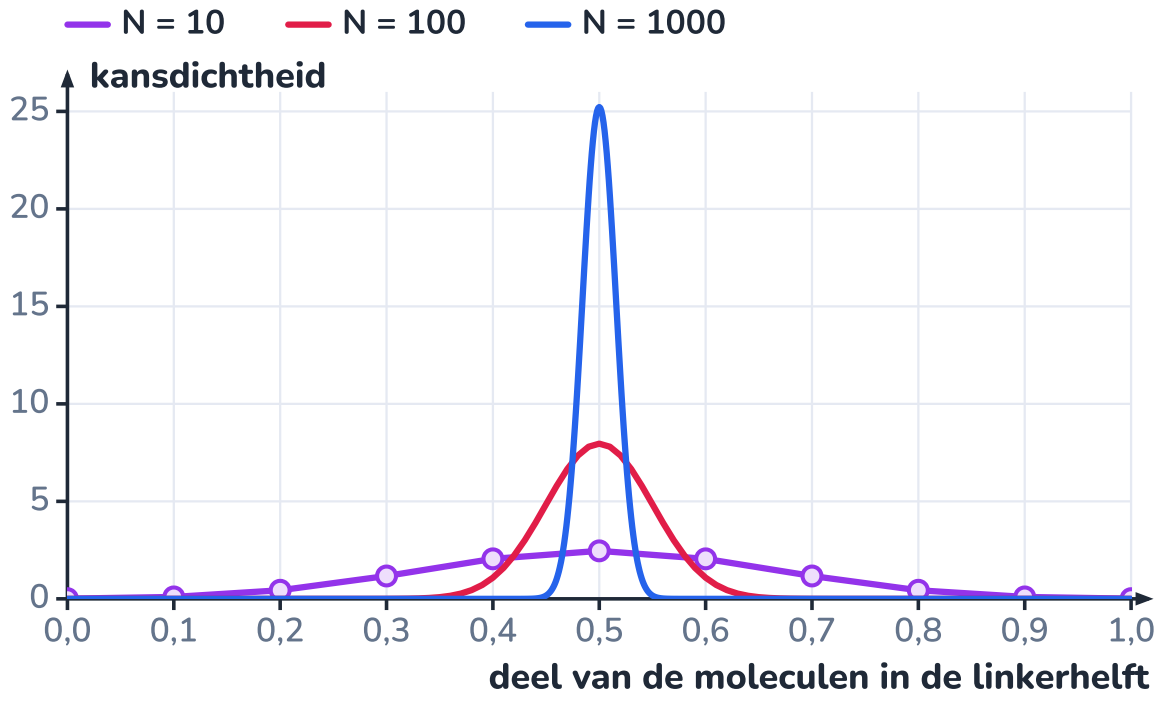
S is een toestandsgrootheid (J/K). Bereken ΔS langs een omkeerbare weg tussen dezelfde toestanden. De totale entropie blijft gelijk bij omkeerbare processen en stijgt bij alle echte.

Waarom kan een motor Carnot niet verslaan? Hij neemt Q_h op bij T_h (de bron verliest entropie $Q_\mathrm{h}/T_\mathrm{h}$) en geeft Q_c af bij T_c (de omgeving wint $Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c}$). De motor zelf komt terug in zijn begintoestand. De tweede hoofdwet eist $Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c} \geq Q_\mathrm{h}/T_\mathrm{h}$, dus $Q_\mathrm{c} \geq Q_\mathrm{h}\,T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}$: wat de motor moet lozen, is minstens het Carnot-deel. Dat is de entropie die hij met de warmte binnenkreeg en ergens kwijt moet.

Entropie als aantal mogelijkheden. Boltzmann: $S = k \ln W$, met W het aantal manieren (microtoestanden) om de moleculen te schikken bij dezelfde totale energie. Een doos met twee helften: één molecule kan links of rechts zitten. Bij N moleculen zijn er 2^N schikkingen, en bijna allemaal hebben ze ongeveer de helft links. De kans dat alle 100 moleculen links zitten, is $2^{-100} \approx 10^{-30}$; voor een mol ($6 \cdot 10^{23}$) is het onvoorstelbaar veel kleiner. Laat je een gas uitzetten van één helft naar de hele doos, dan wordt W 2^N keer groter: $\Delta S = Nk \ln 2 = nR \ln 2 = 5{,}76\,\mathrm{J/K}$ per mol. Dezelfde uitkomst geeft de thermodynamica: het gas isotherm en omkeerbaar laten uitzetten kost $Q = nRT \ln 2$, en $Q/T = nR \ln 2$. Twee totaal verschillende wegen, één getal.

Entropie is wanorde

Het is een handig beeld, maar het kan misleiden. Entropie telt mogelijkheden, ook voor de energie. Als water bevriest, ontstaan geordende kristallen en daalt de entropie van het water; maar de warmte die vrijkomt vergroot de entropie van de omgeving meer. Levende wezens bouwen orde op, en lozen daarvoor warmte.



Hoe meer moleculen, hoe scherper de verdeling rond de helft: bij een mol gas is 'ongeveer de helft links' een zekerheid.

UITGEWERKT VOORBEELD · 15.14

Entropie tellen: ijs, warm water en een warmtelek

14/20

Bereken de verandering van de totale entropie in drie gevallen en toon dat ze positief is: (a) 1,0 kg ijs van 0 °C smelt in een kamer van 20 °C; (b) 1,0 kg water van 80 °C wordt gemengd met 1,0 kg water van 20 °C (geïsoleerd); (c) het station (20 °C) verliest bij −8 °C een uur lang 50 W/K · 28 K aan de buitenlucht.

GEGEVEN

- smeltwarmte ijs 334 kJ/kg; $c_{\text{water}} = 4186\,\text{J/(kg K)}$
- station: $50 \cdot 28 = 1400\,\text{W}$ gedurende 3600 s

GEVRAAGD

- ΔS van elk deel en van het geheel

OPLOSSING

1. (a) Het ijs smelt bij constante temperatuur: $\Delta S_{\text{ijs}} = Q/T = 334\,000/273{,}15 = 1223\,\text{J/K}$. De kamer geeft die warmte af bij 293,15 K: $\Delta S_{\text{kamer}} = -334\,000/293{,}15 = -1139\,\text{J/K}$. Samen $+83\,\text{J/K}$.

2. (b) Eindtemperatuur 50 °C. Opwarmen gaat niet bij één temperatuur: $\mathrm{d}S = mc\,\mathrm{d}T/T$, dus $\Delta S = mc\ln(T_2/T_1)$. Het hete water: $4186\ln(323{,}15/353{,}15) = -371{,}6\,\text{J/K}$; het koude: $4186\ln(323{,}15/293{,}15) = +407{,}9\,\text{J/K}$. Samen $+36{,}2\,\text{J/K}$.

3. (c) $Q = 1400 \cdot 3600 = 5{,}04\,\text{MJ}$ gaat van 293,15 K naar 265,15 K: $\Delta S = Q\left(\frac{1}{265{,}15} - \frac{1}{293{,}15}\right) = +1816\,\text{J/K}$ per uur.

ANTWOORD

(a) $+83\,\text{J/K}$, (b) $+36{,}2\,\text{J/K}$, (c) $+1816\,\text{J/K}$ per uur: telkens positief, zoals de tweede hoofdwet eist.

Klopt dit? Wat betekent zo'n getal? Vermenigvuldig met de omgevingstemperatuur: $T_0\,\Delta S$ is de arbeid die je had kunnen winnen en die voorgoed verloren is. Bij het mengen (b): $293 \cdot 36{,}2 = 10{,}6\,\text{kJ}$, van de $4186 \cdot 30 = 126\,\text{kJ}$ die het hete water afgaf. Een motor tussen het hete en het koude water had dat kunnen leveren; mengen gooit het weg. Die 'kwaliteit' van energie heet exergie.

UITLEG · 15.15

Waarom een centrale warmte moet lozen

15/20

Een stoomcentrale is een warmtemotor: een brandstof of een kernreactor verhit water tot stoom, de stoom drijft een turbine aan en condenseert daarna in een **condensor**, gekoeld door rivierwater of een koeltoren. Zonder condensor geen kringloop: de stoom moet terug vloeibaar worden om opnieuw naar de ketel gepompt te worden, en daarvoor moet de warmte weg. De tweede hoofdwet bepaalt het minimum: bij een stoomtemperatuur van 285 °C en koeling op 25 °C is Carnot $1 - 298/558 = 47\,\%$. Meer dan de helft van de reactorwarmte moet dus sowieso weg, hoe goed de turbine ook is.

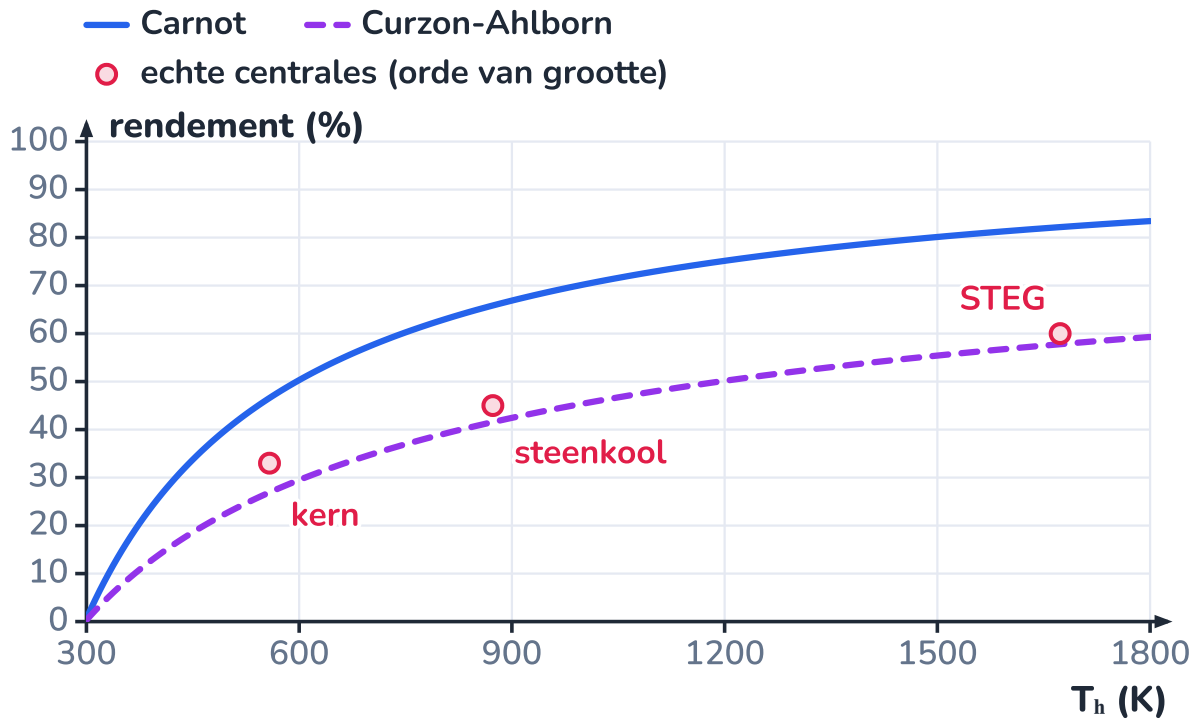
centrale	stoom- of gastemperatuur	Carnot	Curzon-Ahlborn	echt (orde)
kerncentrale	±285 °C	47 %	27 %	±33 %
steenkool	±600 °C	66 %	42 %	±45 %
STEG	±1400 °C	82 %	58 %	±60 %

Echte centrales halen minder dan Carnot, omdat warmte met een eindig temperatuurverschil moet stromen om een eindig vermogen te leveren. François Curzon en Boye Ahlborn toonden in 1975 dat een motor die zoveel mogelijk *vermogen* levert (in plaats van zoveel mogelijk rendement), uitkomt op $\eta = 1 - \sqrt{T_\text{c}/T_\text{h}}$ (opdracht 15.15). Dat getal ligt verrassend dicht bij wat echte centrales halen.

Wat kan je met die warmte doen? Ze is er, maar ze is 'laagwaardig': water van 25 à 35 °C. Een **warmtekrachtkoppeling** (WKK) laat de stoom condenseren bij een hogere temperatuur, bv. 90 °C, zodat het koelwater een warmtenet of een serre kan verwarmen. De elektriciteit daalt een beetje, maar van de brandstof wordt 80 à 90 % nuttig gebruikt. Glastuinbouwers doen dat met aardgas, en gebruiken ook de CO_2 uit de rookgassen (hoofdstuk 14 van I).

In het station

Ook het station 'loost' warmte, maar daar is dat geen verlies: de omvormer en de batterijen staan in de technische ruimte, binnen de gebouwschil. Hun omzetverlies verwarmt in de winter de woonmodule mee. In de zomer moet die warmte wel weggeventileerd worden.



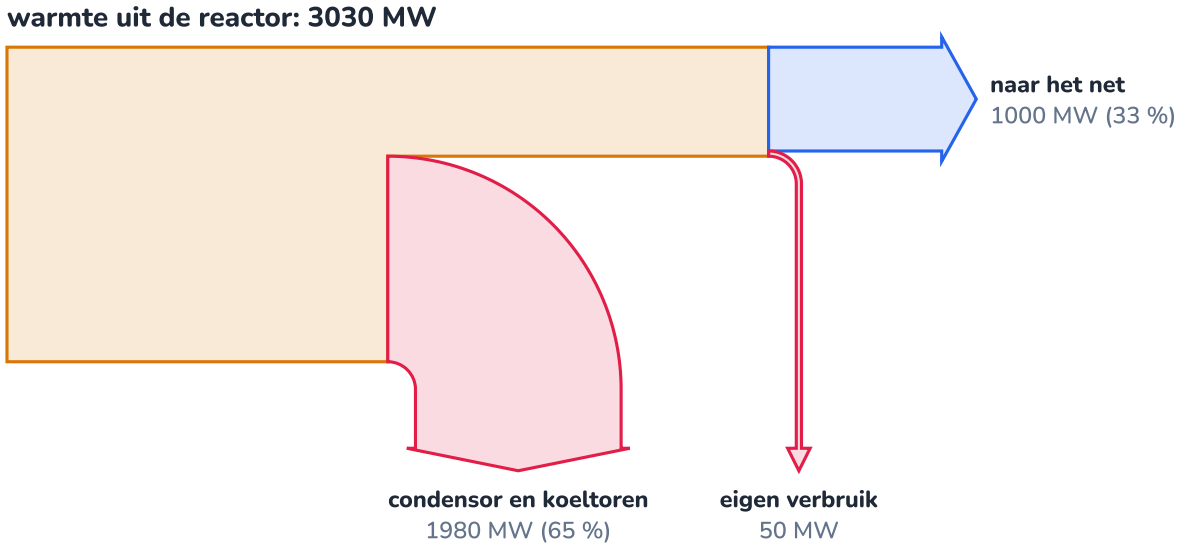
Het Carnot-rendement stijgt met de brontemperatuur; de grens van Curzon en Ahlborn voor maximaal vermogen volgt de echte centrales beter.

UITGEWERKT VOORBEELD · 15.16

Een kerncentrale en haar koeltoren

16/20

Een kerncentrale levert 1000 MW elektrisch aan het net met een rendement van 33 %; haar eigen verbruik is ongeveer 50 MW. Hoeveel warmte moet de condensor lozen? Hoeveel water verdampt er per seconde in een koeltoren als alle warmte via verdamping weggaat? En hoeveel rivierwater zou nodig zijn als het koelwater 8 °C mag opwarmen?



Twee derde van de reactorwarmte gaat naar de condensor: de dikste band in het diagram is geen fout van de ingenieurs, maar de tweede hoofdwet.

GEGEVEN

- $P_{\text{el}} = 1000\,\text{MW}$, $\eta = 0{,}33$, eigen verbruik 50 MW
- verdampingswarmte water ±2430 kJ/kg bij 30 °C; $c_{\text{water}} = 4186\,\text{J/(kg K)}$

GEVRAAGD

- warmte naar de condensor
- verdamping in de koeltoren
- debiet rivierwater

OPLOSSING

1. Warmte uit de reactor: $1000/0{,}33 = 3030\,\text{MW}$. Naar de condensor: $3030 - 1000 - 50 = 1980\,\text{MW}$.
2. Verdamping: $\dot{m} = P/L = 1980 \cdot 10^6 / 2{,}43 \cdot 10^6 = 815\,\text{kg/s}$, bijna een kubieke meter water per seconde. In werkelijkheid gaat een deel van de warmte weg als opgewarmde lucht; de verdamping is ruwweg driekwart.
3. Rivier: $\dot{m} = P/(c\,\Delta T) = 1980 \cdot 10^6/(4186 \cdot 8) = 59 \cdot 10^3\,\text{kg/s}$, ongeveer 59 m³ per seconde.

ANTWOORD

De condensor loost ongeveer 1980 MW, twee keer zoveel als de centrale aan elektriciteit levert. Een koeltoren verdampt daarvoor tot ±0,8 m³ water per seconde; een doorstroomkoeling vraagt ±59 m³/s rivierwater.

Klopt dit? Het Carnot-rendement bij 285 °C stoom is 47 %: zelfs een perfecte turbine zou meer dan de helft moeten lozen. Rivierwater mag in de zomer niet te warm worden voor vissen; daarom beperken vergunningen de opwarming, en daarom hebben veel centrales aan kleinere rivieren een koeltoren.

NASLAG · 15.17

Thermodynamica: formules en werkwijze

17/20

Werkwijze: (1) kies het systeem en de tekenafspraak; (2) welk proces (wat blijft constant)? (3) bereken W uit $\int p\,\mathrm{d}V$ of de tabel, ΔU uit $nc_v\Delta T$, en Q uit de eerste hoofdwet; (4) bij een kringproces: netto arbeid = ingesloten oppervlakte, $\eta = W/Q_{\text{h}}$; (5) toets aan Carnot en aan de entropiebalans.

eerste hoofdwet

$$\Delta U = Q - W$$

symbool	betekenis	eenheid
Q	warmte naar het systeem	J
W	arbeid door het systeem	J

arbeid van een gas

$$W = \int p\,\mathrm{d}V$$

ideaal gas

$$U = nc_vT \quad c_p - c_v = R \quad \gamma = c_p/c_v$$

symbool	betekenis	eenheid
c_v	molaire warmtecapaciteit bij constant volume	J/(mol·K)

adiabatisch

$$pV^\gamma = \text{c} \quad TV^{\gamma-1} = \text{c} \quad W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

isotherm

$$W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

warmtemotor en Carnot

$$\eta = \frac{W}{Q_\mathrm{h}} \leq 1 - \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}}$$

symbool	betekenis	eenheid
T	temperatuur	K

Otto

$$\eta_\mathrm{Otto} = 1 - r^{1-\gamma}$$

symbool	betekenis	eenheid
r	compressieverhouding	-

rendement bij maximaal vermogen

$$\eta_\mathrm{CA} = 1 - \sqrt{T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}}$$

entropie

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_\mathrm{rev}}{T} \quad \Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad S = k \ln W$$

proces	constant	arbeid door het gas W	ΔU	warmte Q
isochoor	V	0	$nc_v\Delta T$	$nc_v\Delta T$
isobaar	p	$p\,\Delta V = nR\,\Delta T$	$nc_v\Delta T$	$nc_p\Delta T$
isotherm	T	$nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$	0	$= W$
adiabatisch	$pV^\gamma,\ TV^{\gamma-1}$	$\frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} = nc_v(T_1 - T_2)$	$-W$	0

CODE · 15.18

Habitat: de jaarbalans van het station

18/20

Nu de hoofdwetten op het station. Een jaarbalans vraagt twee soorten gegevens: wat het klimaat vraagt en wat de bronnen leveren.

- **Het klimaat.** Een **rekenjaar** voor Ukkel: 8760 uurtemperaturen, gemaakt uit de maandgemiddelden van het KMI (1991-2020), een dag-nachtschommeling en toevallig weer (hoofdstuk 6), zo dat elke maand precies haar normale gemiddelde heeft. Het jaar telt 2193 graaddagen (basis 16,5 °C); Synergrid geeft voor een normaal jaar in Ukkel 2187 (1996-2025). Het koudste uur is −8,7 °C, dicht bij de ontwerptemperatuur van −8 °C.
- **De warmtevraag.** Het station verliest 50 W/K en wordt op 20 °C gehouden. Bewoners en toestellen leveren samen gemiddeld 533 W warmte binnen (rekenwaarde: 200 W van de bewoners, 80 % van de 10 kWh per dag van de toestellen). Verwarmen hoeft dus pas onder 9,3 °C buiten. Uur per uur: $Q = \max\bigl(0,\ 50\,(20 - T) - 533\bigr)$. Dat geeft 897 kWh per jaar. De eenvoudige graaddagenmethode ($50 \cdot 24 \cdot 2193$) zou 2632 kWh geven: die veronderstelt een gewone woning met weinig winst (basis 16,5 °C). Een goed geïsoleerd station met veel interne winst heeft een veel lagere basistemperatuur.
- **De bronnen** (rekenwaarden tot hoofdstuk 19 tot 24 het echte zonnepark en de turbine dimensioneren): 5,60 kWp zonnepanelen aan 60° zuid (de 1,40 kWp van de module en 4,20 kWp voor het 48 V-net), met het PVGIS-profiel van het dossier; de windturbine van hoofdstuk 11 bij gemiddeld 4,0 m/s op naafhoogte, 2304 kWh per jaar, in de winter sterker. Van wat de toestellen en de verwarming vragen, gaat 10 % extra verloren in laadregelaars, batterijen en

omvormer. Een tekort komt van het net van het proefterrein; een overschot gaat ernaar toe of wordt afgeknepen. De batterijen verschuiven energie tussen dag en nacht, niet tussen maanden.

In dit hoofdstuk verwarmt het station nog elektrisch (de noodverwarming); hoofdstuk 16 vervangt ze door een warmtepomp.

Python **jaar.py** 18 regels

```python
# jaar.py - de energiebalans van het station over een rekenjaar (maand per maand)
import numpy as np

DAGEN = [31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31]
warmte = np.array([224.9, 175.5, 106.3, 42.8, 14.5, 0.0, 0.0, 0.0, 8.2, 24.8, 104.0, 195.8])
# kWh warmtevraag per maand (uurmodel van het rekenjaar)
zon_per_Wp = [1.41, 2.11, 2.99, 3.69, 3.58, 3.54, 3.45, 3.31, 3.29, 2.50, 1.66, 1.25]   # Wh per Wp per dag
zon = np.array([z * d for z, d in zip(zon_per_Wp, DAGEN)]) * 5.60        # 5,60 kWp -> kWh per maand
wind = np.array([264.6, 230.7, 230.3, 189.7, 161.7, 132.2, 127.4, 136.6, 156.5, 196.0, 222.9, 255.4])
# kWh per maand (Rayleigh, 4,0 m/s, winter sterker)
verbruik = 10.0 * np.array(DAGEN)             # kWh: toestellen, lampen, pompen (zonder verwarming)

vraag = (verbruik + warmte) / 0.90            # 10 % omzetverlies in laadregelaars, batterij en omvormer
aanbod = zon + wind
net = np.clip(vraag - aanbod, 0, None)        # tekort: van het net
over = np.clip(aanbod - vraag, 0, None)       # overschot: afgeknepen of naar het net
for m, naam in enumerate("jan feb mrt apr mei jun jul aug sep okt nov dec".split()):
    print(f"{naam}: zon {zon[m]:5.0f}  wind {wind[m]:4.0f}  vraag {vraag[m]:4.0f}  net {net[m]:4.0f}  over {over[m]:4.0f} kWh")
print(f"jaar: zon {zon.sum():.0f}, wind {wind.sum():.0f}, verwarming {warmte.sum():.0f}, "
      f"net {net.sum():.0f}, overschot {over.sum():.0f}, omzetverlies {0.1 * vraag.sum():.0f} kWh")
```

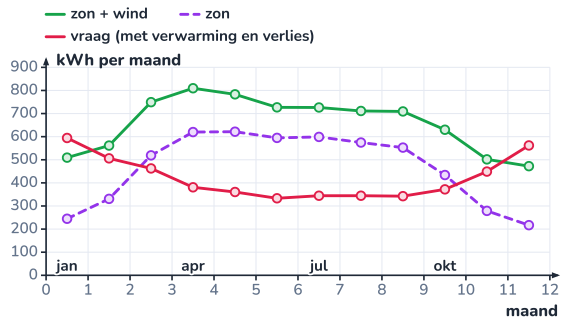
Uitvoer:

```
jan: zon   245  wind  265  vraag  594  net   85  over    0 kWh
feb: zon   331  wind  231  vraag  506  net    0  over   55 kWh
mrt: zon   519  wind  230  vraag  463  net    0  over  287 kWh
apr: zon   620  wind  190  vraag  381  net    0  over  429 kWh
mei: zon   621  wind  162  vraag  361  net    0  over  423 kWh
jun: zon   595  wind  132  vraag  333  net    0  over  394 kWh
jul: zon   599  wind  127  vraag  344  net    0  over  382 kWh
aug: zon   575  wind  137  vraag  344  net    0  over  367 kWh
sep: zon   553  wind  156  vraag  342  net    0  over  367 kWh
okt: zon   434  wind  196  vraag  372  net    0  over  258 kWh
nov: zon   279  wind  223  vraag  449  net    0  over   53 kWh
dec: zon   217  wind  255  vraag  562  net   90  over    0 kWh
jaar: zon 5587, wind 2304, verwarming 897, net 175, overschot 3014, omzetverlies 505 kWh
```

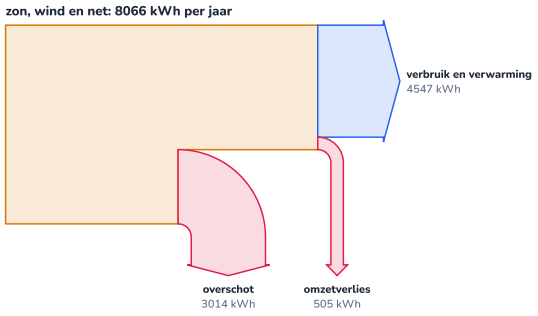
stroom	kWh per jaar	bron van het getal
zon (5,60 kWp aan 60°)	5587	PVGIS-profiel van het dossier, 998 kWh per kWp
wind (3 kW, Ø 4,0 m)	2304	vermogenscurve × Rayleigh, gemiddeld 4,0 m/s
net (tekort in de winter)	175	maandbalans
verbruik toestellen	3650	10 kWh per dag (rekenwaarde)
verwarming (elektrisch)	897	uurmodel: 50 W/K, 20 °C, 533 W winst
omzetverlies	505	10 % van wat de toestellen en de verwarming vragen

stroom	kWh per jaar	bron van het getal
overschot	3014	maandbalans (vooral april tot september)
bewoners (warmte)	1752	2 × 116 W, ±20 h per dag binnen

Over het jaar levert het station veel meer dan het vraagt, maar niet op het juiste moment: van april tot september is er een groot overschot, in december en januari een tekort, net wanneer de verwarming het meeste vraagt. Het Sankey-diagram hieronder (met het gereedschap van hoofdstuk 15 van F) toont de elektriciteitsketen; het volgende blad volgt de energie verder tot ze als warmte het station verlaat.



Zon en wind leveren in de zomer ruim twee keer wat het station vraagt; in december en januari schiet het aanbod tekort.



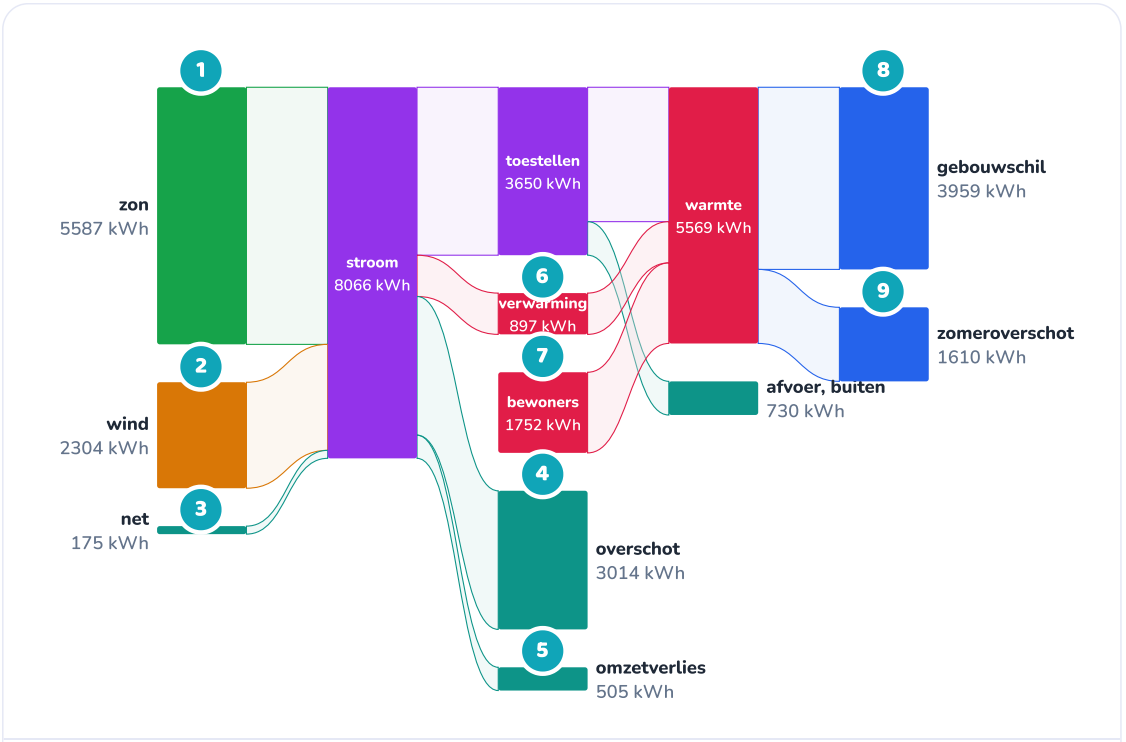
De elektriciteitsketen over een jaar: meer dan een derde van de productie is overschot, 10 % van het verbruik gaat op aan omzetten.

ONTLEED · 15.19

Habitat: de energiestromen van het station op een Sankey-diagram

19/20

Alle energie van het station over een rekenjaar, in kWh. Van links naar rechts: de bronnen, het elektrische net van het station, waar de elektriciteit terechtkomt, de warmte in het station, en hoe die warmte eruit gaat. De breedte van elke band is evenredig met de energie. Links komt er 9818 kWh binnen (met de bewoners); rechts gaat er evenveel buiten. Dat is de eerste hoofdwet: over een jaar verandert de inwendige energie van het station niet, dus wat erin gaat, moet eruit.



Elke kilowattuur die het station binnenkomt, verlaat het als warmte of als overschot; de verwarming is maar een smal bandje, het overschot van de zomer een brede.

1 Zon
5587 kWh uit 5,60 kWp: de grootste bron, maar in december bijna drie keer minder per dag dan in april.

2 Wind
2304 kWh: minder dan de zon, maar in de winter sterker. Wind en zon vullen elkaar aan.

3 Net
175 kWh, allemaal in december en januari. Op een afgelegen plek zonder net moet dat uit een grotere batterij, meer panelen of een zuiniger verwarming komen (hoofdstuk 16).

4 Overschot
3014 kWh die in de zomer niemand nodig heeft: afgeknepen of aan het net geleverd. Opslag van zomer naar winter (waterstof, hoofdstuk 27) zou het kunnen benutten.

5 Omzetverlies
505 kWh warmte in laadregelaars, batterijen en omvormer. Ze staan binnen: in de winter helpt die warmte mee verwarmen.

6 Verwarming
897 kWh elektrisch, vooral van november tot februari. Een warmtepomp haalt de meeste van die warmte uit de buitenlucht (hoofdstuk 16).

7 Bewoners
1752 kWh: twee mensen zijn samen een kachel van ongeveer 200 W. Meer dan de verwarming zelf!

8 Wanden en ventilatie
3959 kWh: 50 W/K maal het temperatuurverschil, opgeteld over het jaar. Uiteindelijk verlaat alle energie het station als warmte.

9 Zomer: weggeventileerd
1610 kWh interne winst die in de warme maanden te veel is: extra ventileren (of de zon weren) om niet boven 25 °C te komen.

HET GEHEEL · 15.20

Waar de hoofdwetten vandaan komen en waar ze heen gaan

20/20

De eerste hoofdwet is het energiebehoud uit Fundamental, uitgebreid met warmte; de tweede is nieuw en gaat over richting en kwaliteit. Samen vormen ze de ruggengraat van de hele energielijn (E): elke motor, centrale, warmtepomp en batterij valt eronder. De wiskunde (W) is die van de integraal ($\int p\,\mathrm{d}V$) en de logaritme (adiabaat, entropie).

F15 Energie: vormen en omzettingen

Energievormen, energiebehoud, rendement en het Sankey-diagram.

F16 Warmte en temperatuur

Warmte en temperatuur, warmte stroomt van warm naar koud.

I9 Arbeid, energie en vermogen

Arbeid als kracht maal verplaatsing, vermogen.

I18 Warmte berekenen

Q = m c ΔT, warmtecapaciteit, smelt- en verdampingswarmte.

E3 Integralen: ophopen

Arbeid als integraal en als oppervlakte; de trapeziumregel voor een gemeten kring.

E14 Gassen en de gaswetten

Ideale gaswet en kinetische gastheorie: U = n cv T komt daaruit.

E16 Warmtepompen en koelen

De warmtemotor achterstevoren: COP en het koelkringproces.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief

Hoe snel warmte door wanden stroomt: het tweeknoopsmodel van het station.

E25 Thermochemie en reactiesnelheid

Reactie-enthalpie: de eerste hoofdwet voor chemische reacties.

E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Opslag van zomer naar winter: waterstof en het rendement van de hele keten.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

Het echte zonnepark en de omvormer van het station.

E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

Energie en CO_2 over de hele levensduur van het station.

Habitat

Het station heeft een jaarbalans op een rekenjaar voor Ukkel (2193 graaddagen): elektrisch verwarmen kost 897 kWh per jaar (evenwichtstemperatuur 9,3 °C dankzij 533 W interne winst), zon (5,60 kWp, rekenwaarde) en wind leveren 7891 kWh, in de zomer 3014 kWh te veel en in december en januari 175 kWh te weinig. Het Sankey-diagram toont dat alle energie het station uiteindelijk als warmte verlaat. Hoofdstuk 16 vervangt de elektrische verwarming door een warmtepomp; hoofdstuk 17 maakt het warmtemodel fijner.

SAMENVATTING

In het kort

- Energie gaat over als warmte (door een temperatuurverschil) of als arbeid; U is een toestandsgrootheid, Q en W niet.
- Eerste hoofdwet: $\Delta U = Q - W$. De arbeid van een gas is $W = \int p\,\mathrm{d}V$, de oppervlakte in het pV-diagram, en hangt van de weg af.
- Een ideaal gas heeft $U = nc_vT$; $c_p = c_v + R$ (Mayer); lucht: $c_v = \frac{5}{2}R$, $\gamma = 1{,}4$.

- Isochoor, isobaar, isotherm ($W = nRT \ln V_2/V_1$) en adiabatisch (pV^γ = c, $TV^{\gamma-1}$ = c): snel samenpersen maakt lucht heet (diesel).
- Een warmtemotor levert $W = Q_\mathrm{h} - Q_\mathrm{c}$; het rendement is hoogstens $1 - T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}$ (Carnot). Otto: $1 - r^{1-\gamma}$.
- Tweede hoofdwet: warmte stroomt niet vanzelf van koud naar warm; de totale entropie ($\mathrm{d}S = \delta Q_\mathrm{rev}/T$, $S = k \ln W$) neemt nooit af.
- Een centrale moet minstens het Carnot-deel van haar warmte lozen; echte centrales halen 33 tot 60 %, dicht bij $1 - \sqrt{T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}}$.
- Over een jaar verlaat alle energie het station als warmte; zon en wind leveren genoeg, maar niet in december en januari.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

inwendige energie

De totale energie van de deeltjes van een systeem (beweging, draaien, trillen, binding); een toestandsgrootheid U. Voor een ideaal gas alleen afhankelijk van T: $U = nc_v T$.

warmte

Energie die van een systeem naar een ander gaat door een temperatuurverschil. Een systeem 'bevat' geen warmte, wel inwendige energie.

arbeid van een gas

Energie die een gas overdraagt door een wand te verplaatsen: $W = \int p\,\mathrm{d}V$, de oppervlakte onder de kromme in het pV-diagram.

eerste hoofdwet

$\Delta U = Q - W$: de inwendige energie verandert met de toegevoerde warmte min de arbeid die het systeem levert. Energie gaat niet verloren en ontstaat niet.

adiabatisch

Zonder warmte-uitwisseling ($Q = 0$), bv. omdat het snel gaat of goed geïsoleerd is. Voor een ideaal gas geldt dan pV^γ = constant.

kringproces

Een reeks processen die terugkeert naar de begintoestand. De netto arbeid is de ingesloten oppervlakte in het pV-diagram.

Carnot-rendement

Het hoogst mogelijke rendement van een warmtemotor tussen twee temperaturen: $\eta_\mathrm{C} = 1 - T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}$ (kelvin).

tweede hoofdwet

Warmte stroomt nooit vanzelf van koud naar warm (Clausius); geen machine zet warmte volledig om in arbeid zonder ook warmte af te geven (Kelvin-Planck). Samen: de totale entropie neemt nooit af.

entropie

Toestandsgrootheid S met $\mathrm{d}S = \delta Q_\mathrm{rev}/T$; statistisch $S = k \ln W$, met W het aantal microtoestanden. Een maat voor hoe 'verspreid' energie is.

warmtekrachtkoppeling

Een centrale die tegelijk elektriciteit en nuttige warmte levert: de warmte die ze toch moet lozen, verwarmt gebouwen of een proces.

graaddagen

Som over de dagen van het verschil tussen een basistemperatuur (in België vaak 16,5 °C) en de gemiddelde buitentemperatuur, als die lager is: een maat voor hoe koud een winter is.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 16

Warmtepompen en koelen

Warmte bergop pompen: hoe een koelkast en een warmtepomp werken, en wat ze het station besparen

Een koelkast haalt warmte uit een koude doos en loost ze in de keuken; een warmtepomp doet hetzelfde met de buitenlucht, en verwarmt er het station mee. Met één kilowattuur stroom levert ze drie à vijf kilowattuur warmte. Hoe? Met een vloeistof die bij −4 °C kookt, een compressor, twee warmtewisselaars en een smal ventiel. Je volgt het koudemiddel door de kring in een drukenthalpiediagram dat je zelf berekent, vergelijkt de COP met de grens van Carnot en kiest een warmtepomp voor het station: hoeveel stroom kost ze per jaar, en past ze op de omvormer als het vriest?

8× uitleg · 5× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

Energie · Materie en chemie · Ontwerpen en maken



Een buitenunit haalt warmte uit lucht van −5 °C en brengt ze op 35 °C in het verwarmingswater van het station.

Na dit hoofdstuk

- Je kan de energiebalans van een warmtepomp en een koelmachine opstellen en de COP berekenen, en toetsen aan de grens van Carnot.
- Je kan het koelkringproces uitleggen: wat er in de verdamper, de compressor, de condensor en het expansieventiel gebeurt met druk, temperatuur en fase.
- Je kan een kringproces in een drukenthalpiediagram lezen en tekenen, en er de warmte, de arbeid en de COP uit halen.
- Je kan koudemiddelen vergelijken op dampspanning, GWP en veiligheid.
- Je kan uitleggen hoe de COP afhangt van de bron- en de aanvoertemperatuur, en een seizoens-COP berekenen met de binmethode.
- Je kan lucht, bodem en water als warmtebron vergelijken, en het temperatuurverloop in de bodem gebruiken.
- Je kan een warmtepomp kiezen voor een gebouw en ze in kWh per jaar en in piekvermogen vergelijken met elektrische verwarming.

VERHAAL · 16.1

Kou maken en warmte pompen: van ether tot propaan

In 1834 kreeg de Amerikaanse uitvinder Jacob Perkins in Londen een octrooi op een machine die ijs maakte: een pomp perste etherdamp samen tot een vloeistof, en als die vloeistof weer verdampte, werd het koud. Dat is nog altijd het principe van elke koelkast. Twintig jaar later, in 1852, schreef William Thomson (de latere Lord Kelvin) dat dezelfde machine achterstevoren een gebouw kon verwarmen met meer warmte dan de brandstof van haar motor zou leveren: een 'warmtevermenigvuldiger'. In de zoutziederij van Ebensee in Oostenrijk bouwde Peter von Rittinger in 1856 en 1857 een eerste warmtepomp die de damp van kokende pekel opnieuw samenperste om er de volgende pan mee te verwarmen.

De koeltechniek kwam op met het bier. In de jaren 1870 bouwde Carl von Linde in München compressiemachines met ammoniak voor brouwerijen, die zo ook in de zomer konden brouwen. Koelschepen brachten diepgevroren vlees uit Zuid-Amerika naar Europa. Ammoniak is een uitstekend koudemiddel, maar giftig; ook zwaveldioxide en chloormethaan eisten slachtoffers bij lekken in huishoudelijke koelkasten.

In 1928 ontwikkelde een team rond Thomas Midgley bij General Motors een 'veilig' koudemiddel: dichloordifluormethaan (CFK-12, freon), niet brandbaar en niet giftig. In 1974 toonden Mario Molina en Sherwood Rowland aan dat zulke chloorfluorkoolwaterstoffen hoog in de atmosfeer de ozonlaag afbreken. Het Protocol van Montreal (1987) bande ze uit; hun opvolgers, de HFK's zoals R134a en R410A, sparen de ozon, maar zijn duizend tot tweeduizend keer sterkere broeikasgassen dan CO_2. Sinds het amendement van Kigali (2016) worden ook die wereldwijd afgebouwd. Zo is de cirkel rond: moderne warmtepompen gebruiken weer natuurlijke koudemiddelen zoals propaan en CO_2, met meer aandacht voor veiligheid.

Een van de eerste grote warmtepompen voor een gebouw verwarmde vanaf 1938 het stadhuis van Zürich, met warmte uit het water van de rivier de Limmat.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

In hoofdstuk 15 bleek dat het station in december en januari stroom tekortkomt, net wanneer het elektrisch verwarmt. Een warmtepomp levert dezelfde warmte met een derde van de stroom, en haalt de rest uit de buitenlucht. Ze maakt ook het piekvermogen bij strenge vorst veel kleiner.



De eerste koelmachines maakten ijs voor brouwerijen en slachthuizen; het principe is dat van elke warmtepomp vandaag.

UITLEG · 16.2

Wat je al weet: warmte bergop pompen

2/20

wat je al kan	wat nu komt
de tweede hoofdwet, Carnot, een warmtepomp als omgekeerde motor (hoofdstuk 15)	hoe een echte warmtepomp dat doet, en hoe dicht ze bij Carnot komt
verdampen en condenseren, verdampingswarmte (hoofdstuk 18 van I)	een vloeistof die bij −4 °C kookt: het koudemiddel
dampspanning en kritisch punt (hoofdstuk 14)	de druk bepaalt bij welke temperatuur het koudemiddel verdampt of condenseert
warmteverlies 50 W/K, het rekenjaar en de jaarbalans (hoofdstuk 15, 39)	de warmtepomp van het station: vermogen, jaarverbruik, piek

Warmte stroomt vanzelf alleen van warm naar koud (hoofdstuk 15). Een warmtepomp laat ze de andere kant op gaan, maar niet gratis: ze krijgt arbeid W, neemt warmte Q_{c} op aan de koude kant en geeft Q_{h} af aan de warme kant. Energiebehoud (eerste hoofdwet) over één ronde van de kring:

ENERGIEBALANS EN COP

$$Q_\mathrm{h} = Q_\mathrm{c} + W \qquad \mathrm{COP}_\mathrm{h} = \frac{Q_\mathrm{h}}{W} \qquad \mathrm{COP}_\mathrm{c} = \frac{Q_\mathrm{c}}{W} = \mathrm{COP}_\mathrm{h} - 1$$

Bij verwarmen telt Q_h (warmtepomp), bij koelen Q_c (koelkast, airco). De COP van verwarmen is altijd groter dan 1: ook de arbeid zelf wordt warmte.

De tweede hoofdwet legt een bovengrens op. De warmtepomp neemt entropie $Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c}$ op en moet minstens evenveel afgeven: $Q_\mathrm{h}/T_\mathrm{h} \geq Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c}$. Daaruit volgt (opdracht 16.14):

GRENS VAN CARNOT

$$\mathrm{COP}_\mathrm{h} \leq \frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}} \qquad \mathrm{COP}_\mathrm{c} \leq \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}}$$

Temperaturen in kelvin. Hoe kleiner het temperatuurverschil, hoe hoger de COP: van 2 °C naar 35 °C is de grens $308/33 = 9{,}3$; van −15 naar 55 °C nog maar $328/70 = 4{,}7$.

Echte warmtepompen halen ongeveer 40 à 55 % van die grens: de warmtewisselaars hebben een temperatuurverschil nodig om warmte door te geven, de compressor heeft verliezen, en het ventiel smoort zonder arbeid terug te winnen.

Een COP van 4 betekent een rendement van 400 %

Er ontstaat geen energie: 1 kWh stroom plus 3 kWh warmte uit de buitenlucht wordt 4 kWh warmte binnen. De COP vergelijkt niet wat erin gaat met wat eruit komt, maar wat je betaalt met wat je krijgt.

UITLEG · 16.3

Het koelkringproces

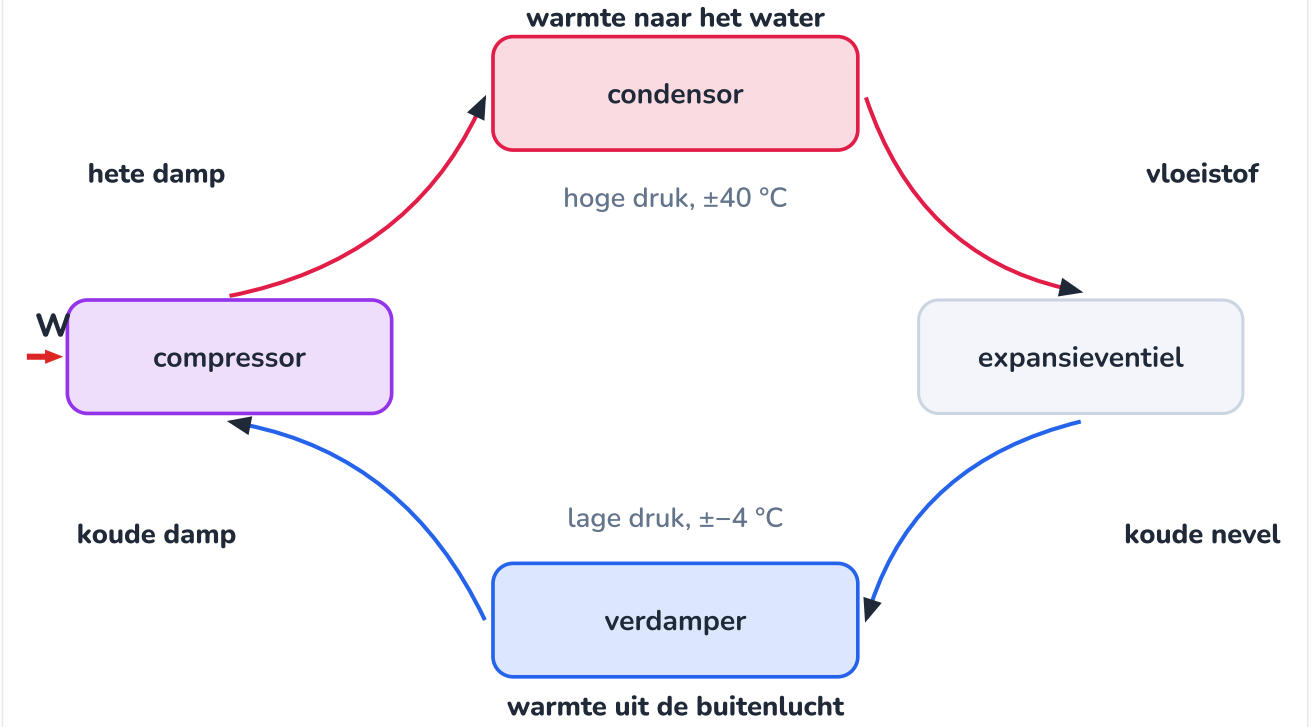
3/20

Hoe krijg je warmte uit lucht van 2 °C? Met een vloeistof die bij een nog lagere temperatuur kookt. Het **koudemiddel** doorloopt een gesloten kring met vier onderdelen:

1. **Verdamper.** Het koudemiddel komt binnen als een koude nevel van vloeistof en damp, bij lage druk. Bij 4,2 bar kookt propaan bij −4 °C: kouder dan de buitenlucht, dus stroomt er warmte naar het koudemiddel, dat verdampt. Verdampen vraagt veel warmte bij een constante temperatuur (hoofdstuk 18 van I).
2. **Compressor.** Een elektromotor perst de damp samen tot 13,7 bar. Daarbij warmt ze op (adiabatisch samenpersen, hoofdstuk 15) tot ongeveer 61 °C.
3. **Condensor.** Bij 13,7 bar condenseert propaan bij 40 °C: warmer dan het water van 35 °C. De damp geeft haar warmte af aan het water en wordt vloeistof.
4. **Expansieventiel.** Een smalle opening laat de druk van de vloeistof terugvallen naar de verdamperdruk. Een deel verdampt meteen, en dat koelt de rest af tot −4 °C. Daarna begint de kring opnieuw.

De sleutel is dat de druk bepaalt bij welke temperatuur het koudemiddel kookt (de dampspanning, hoofdstuk 14). Aan de lage kant kookt het kouder dan de bron, aan de hoge kant condenseert het warmer dan het water. De compressor is de enige die arbeid kost: hij 'tilt' de warmte van −4 naar 40 °C.

Een koelkast is hetzelfde: de verdamper zit binnen in de koelkast, de condensor is het zwarte rooster achteraan, en haar koudemiddel is meestal isobutaan (R600a). Een airco koelt een kamer met de verdamper binnen en de condensor buiten; draait ze om met een **4-wegklep**, dan verwarmt ze.



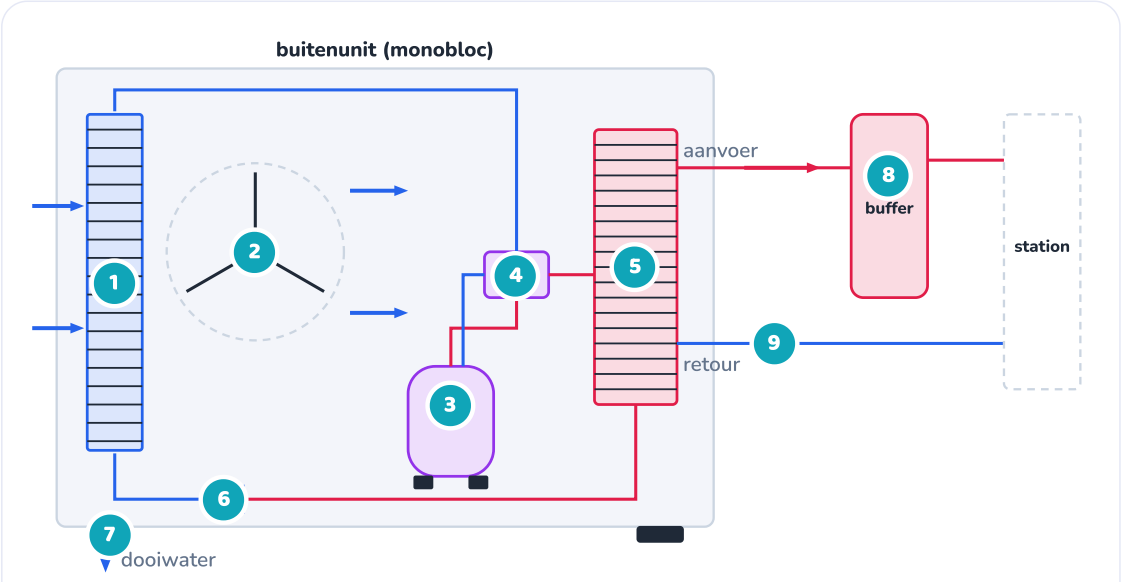
Het koudemiddel neemt warmte op door te verdampen bij lage druk en geeft ze af door te condenseren bij hoge druk; de compressor levert de arbeid.

ONTLEED · 16.4

Een lucht-waterwarmtepomp (monobloc) van binnen

4/20

Bij een **monobloc** zit de hele koelkring in de buitenunit; alleen water gaat naar binnen. Voor een brandbaar koudemiddel als propaan is dat een voordeel: bij een lek komt het gas buiten vrij. De figuur is schematisch: bovenaanzicht van de unit, met de waterkring naar het station.



Koude leidingen in de ene kleur, warme in de andere; de 4-wegklep (4W) kan de richting omkeren om te ontdooien.

1 Verdamper
Een blok dunne aluminium lamellen rond koperen buizen: veel oppervlakte om warmte uit de lucht te halen. De lucht koelt er enkele graden af; het koudemiddel verdampt erin bij ongeveer 6 °C onder de luchttemperatuur.

2 Ventilator
Blaast buitenlucht door de verdamper (tot ±30 W). Zijn toerental volgt het vermogen; 's nachts kan hij trager draaien voor minder geluid.

3 Compressor
Een rotatie- of scrollcompressor met een frequentieregelaar (30 tot 90 Hz): hij past zijn vermogen aan de vraag aan in plaats van aan en uit te slaan. Hij staat op eigen rubberdempers in de unit.

4 4-wegklep
Kan de stroomrichting van het koudemiddel omkeren: dan wordt de verdamper even condensor, en smelt het ijs op de lamellen (ontdooien).

5 Condensor
Een platenwarmtewisselaar in roestvast staal: aan de ene kant condenserend propaan, aan de andere kant het verwarmingswater. Compact, en zonder lucht ertussen.

6 Expansieventiel
Elektronisch: een stappenmotor verstelt de opening zodat de damp de verdamper net oververhit verlaat (±5 K). Zo komt er geen vloeistof in de compressor, en wordt de verdamper toch goed benut.

7 Rubberdempers en dooiwater
De unit van 60 kg staat op vier voeten type E (hoofdstuk 11): eigenfrequentie 8,7 Hz, zodat bij 30 Hz nog maar 10 % van de trillingen de sokkel bereikt. Het dooiwater loopt weg via een afvoer met een verwarmingslint (anders bevriest ze).

8 Buffervat
100 L water: de warmtepomp kan niet trager dan 30 Hz. Bij weinig vraag laadt ze het buffervat en valt stil; zo draait ze telkens een twintigtal minuten in plaats van enkele, en slijt de compressor minder.

9 Circulatiepomp
Pompt het water rond door de vloerverwarming en de ventiloconvector (±20 W). Klein, maar ze draait vele uren: bij een station met weinig warmtevraag telt haar verbruik mee.

UITLEG · 16.5

Koudemiddelen

5/20

Een goed koudemiddel verdampt bij de brontemperatuur en condenseert bij de aanvoertemperatuur, allebei bij een redelijke druk: boven 1 bar (anders lekt er lucht in) en ver onder de 40 à 50 bar die leidingen en compressoren verdragen. Het heeft een grote verdampingswarmte per volume damp (dan kan de compressor klein blijven) en een kritische temperatuur ruim boven de condensatietemperatuur. En het moet veilig zijn voor mens en klimaat.

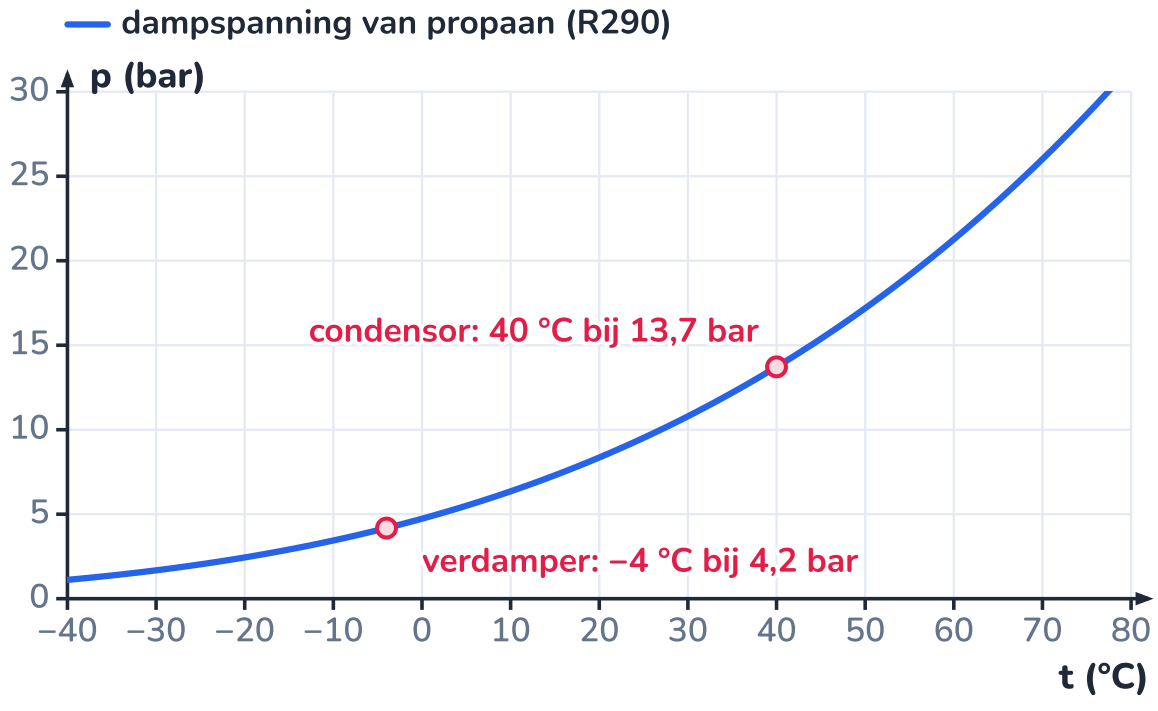
koudemiddel	formule	kookpunt bij 1 atm	kritische temperatuur	GWP	veiligheid
R290 (propaan)	C_3H_8	−42,1 °C	96,7 °C	3	A3 (zeer brandbaar)
R600a (isobutaan)	C_4H_{10}	−11,7 °C	134,7 °C	3	A3
R32	CH_2F_2	−51,7 °C	78,1 °C	675	A2L (licht brandbaar)

koudemiddel	formule	kookpunt bij 1 atm	kritische temperatuur	GWP	veiligheid
R410A	mengsel R32 + R125	−51,4 °C	71,3 °C	2088	A1
R134a	CH_2FCF_3	−26,1 °C	101,1 °C	1430	A1
R744 (CO_2)	CO_2	sublimeert −78,5 °C	31,0 °C	1	A1 (hoge druk)
R717 (ammoniak)	NH_3	−33,3 °C	132,3 °C	0	B2L (giftig)

Propaan (R290) scoort goed: bij −4 °C verdampt het bij 4,2 bar en bij 40 °C condenseert het bij 13,7 bar (figuur). Het klimaateffect is verwaarloosbaar (GWP 3), maar het is zeer brandbaar (klasse A3). Daarom: kleine vullingen (enkele honderden gram tot ongeveer een kilogram), de kring helemaal buiten (monobloc), en een veiligheidszone rond de buitenunit zonder ontstekingsbronnen, kelderopeningen of putten waarin het zware gas zich kan verzamelen. De Europese F-gassenverordening van 2024 bouwt koudemiddelen met een hoog GWP verder af, ook in kleine warmtepompen: propaan wint terrein.

Nooit zelf aan de koelkring

Een koelkring staat onder druk (tot 20 bar en meer), bevat een brandbaar of een sterk broeikasgas, en de olie en het koudemiddel mogen niet vervuild raken met lucht of vocht. Openen, vullen en herstellen is werk voor een erkende koeltechnicus. In de klas meet je van buitenaf: temperaturen op de leidingen, het elektrische vermogen.



Hoe hoger de druk, hoe hoger de kooktemperatuur: aan de lage kant kookt propaan bij −4 °C, aan de hoge kant condenseert het bij 40 °C.

Het drukenthalpiediagram

Ingenieurs tekenen een koelkringproces in een **drukenthalpiediagram**: horizontaal de **enthalpie** h per kilogram koudemiddel, verticaal de druk op een logaritmische as. De enthalpie $h = u + pv$ is de energie die een stromende stof meeneemt; bij een apparaat waar een stof door stroomt, is de warmte of de arbeid per kilogram gewoon het verschil in h tussen uitgang en ingang (de eerste hoofdwet voor een open systeem).

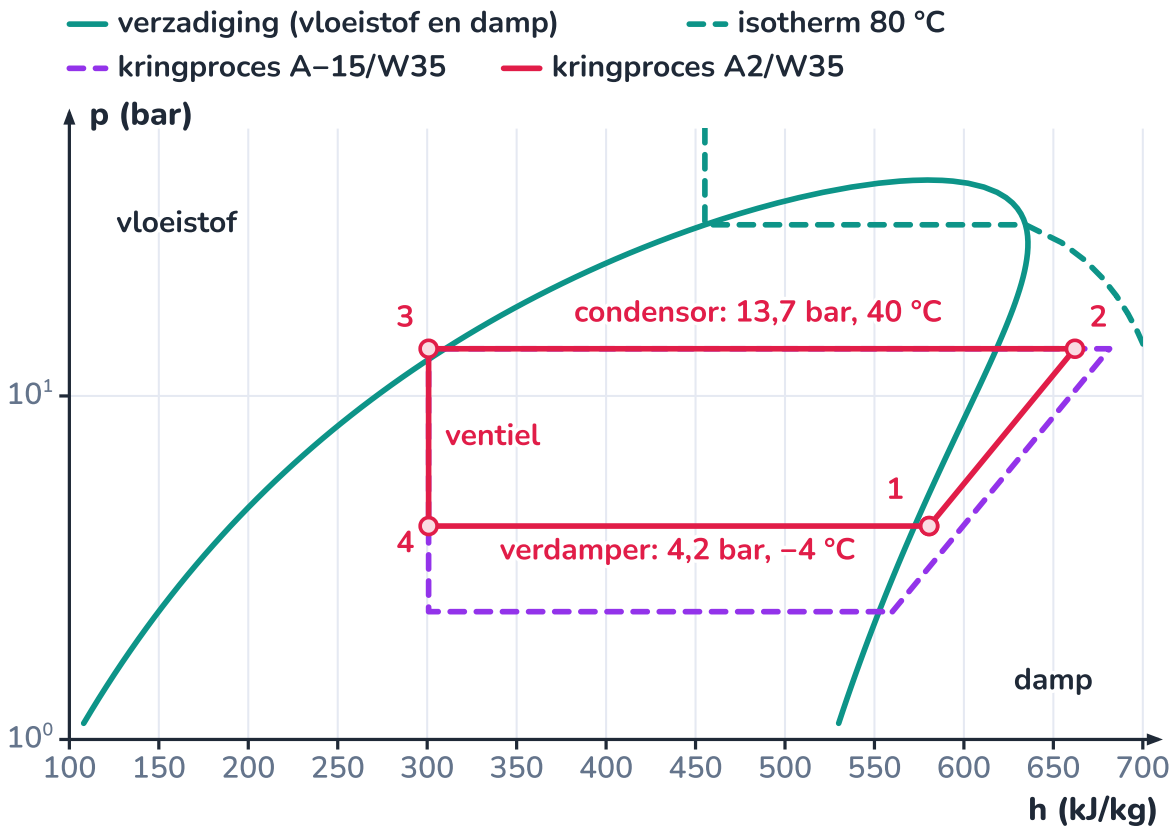
- Links van de 'koepel' is het koudemiddel vloeibaar, rechts damp, eronder een mengsel. Onder de koepel lopen de isothermen horizontaal: verdampen gebeurt bij constante druk én temperatuur.
- 1 → 2: de compressor. Arbeid per kg $w = h_2 - h_1$. De lijn loopt schuin naar rechts omhoog: druk en enthalpie stijgen.
- 2 → 3: de condensor, bij constante druk: $q_\mathrm{h} = h_2 - h_3$ gaat naar het water. Eerst koelt de hete damp af, dan condenseert ze, dan koelt de vloeistof nog iets af (onderkoeling).
- 3 → 4: het ventiel, verticaal naar beneden: $h_4 = h_3$. Er gaat geen warmte of arbeid in of uit, alleen de druk valt, en een deel van de vloeistof verdampt.
- 4 → 1: de verdamper, bij constante druk: $q_\mathrm{c} = h_1 - h_4$ komt uit de buitenlucht.

COP UIT HET DIAGRAM

$$\mathrm{COP}_\mathrm{h} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} \qquad \mathrm{COP}_\mathrm{c} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}$$

Dit is de COP van het kringproces; de elektrische COP is kleiner door de verliezen van motor en omvormer, de ventilator, de pomp en het ontdooien.

Het diagram hieronder is geen overgenomen tabel, maar zelf berekend met de toestandsvergelijking van Peng en Robinson (1976), een verfijning van Van der Waals (hoofdstuk 14) die de procesindustrie overal gebruikt. Getoetst aan de tabellen van NIST wijken de dampspanningen hoogstens een halve procent af en de verdampingswarmte ongeveer een procent: goed genoeg voor rekenwaarden. Bij strenge vorst (stippellijn) moet de compressor van een veel lagere druk vertrekken: de lijn 1 → 2 wordt langer, er is meer arbeid nodig per kilogram, en de COP daalt.



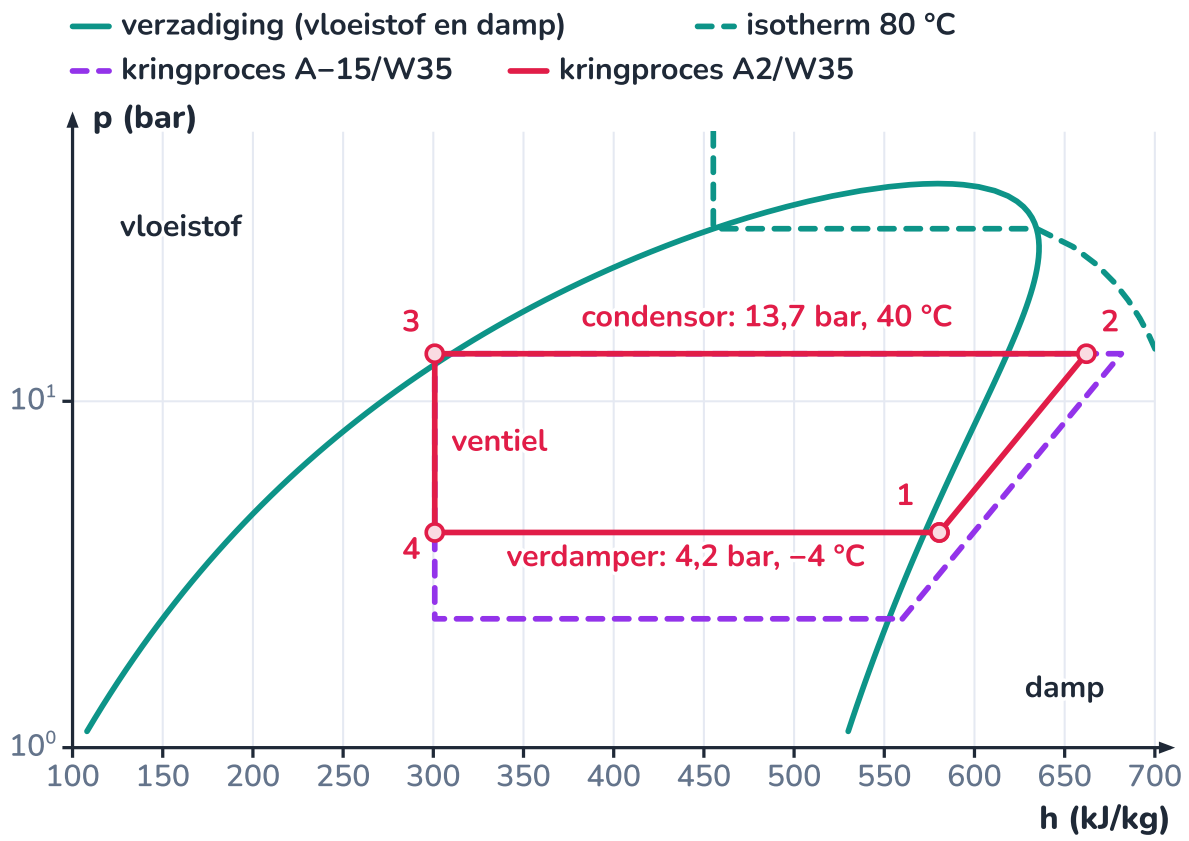
De koepel scheidt vloeistof (links), mengsel (eronder) en damp (rechts). Het kringproces is een vierhoek: de breedte van de bovenkant is de warmte naar het water, de schuine lijn de arbeid van de compressor.

UITGEWERKT VOORBEELD · 16.7

Een kringproces doorrekenen (A2/W35)

7/20

Een warmtepomp met propaan haalt warmte uit buitenlucht van 2 °C en levert water van 35 °C ('A2/W35'). Het koudemiddel verdampt bij −4 °C en condenseert bij 40 °C, met 5 K oververhitting en 3 K onderkoeling; de compressor heeft een isentropisch rendement van 0,70. Bereken de warmte en de arbeid per kilogram, de COP van het kringproces, en het debiet koudemiddel en het vermogen van de compressor voor 3,5 kW warmte. Vergelijk met Carnot.



Hetzelfde kringproces in het drukenthalpiediagram: de rekenstappen zijn afstanden in h.

GEGEVEN

- $t_e = -4\,^\circ\mathrm{C}$, $t_c = 40\,^\circ\mathrm{C}$, oververhitting 5 K, onderkoeling 3 K, $\eta_{is} = 0{,}70$
- de toestanden van het koudemiddel uit het model (tabel)

GEVRAAGD

- q_c, w, q_h en de COP
- $\dot{m}$ en P voor 3,5 kW
- vergelijking met Carnot

OPLOSSING

1 Toestanden (model van Peng-Robinson, volgende blad):

PUNT	TOESTAND	DRUK (BAR)	H (KJ/KG)
1	oververhitte damp, 1 °C, naar de compressor	4,18	580,6
2	hete damp, 61 °C, uit de compressor	13,72	662,1
3	onderkoelde vloeistof, 37 °C, uit de condensor	13,72	300,8
4	nevel van vloeistof en damp, −4 °C, na het ventiel	4,18	300,8

2 Per kg: verdamper $q_c = h_1 - h_4 = 279{,}8\,\mathrm{kJ}$; compressor $w = h_2 - h_1 = 81{,}5\,\mathrm{kJ}$; condensor $q_h = h_2 - h_3 = 361{,}3\,\mathrm{kJ}$. Controle: $q_h = q_c + w$.

3 $\mathrm{COP}_h = 361{,}3/81{,}5 = 4{,}43$ (kringproces). Met 92 % voor motor en omvormer: $4{,}08$; met ontdooien bij 2 °C (−10 %): $3{,}67$.

4 Voor 3,5 kW: $\dot{m} = 3500\,\mathrm{W}/(361{,}3\,\mathrm{kJ/kg}) = 9{,}7\,\mathrm{g/s}$. Compressor: $\dot{m}\,w = 789\,\mathrm{W}$ (aan het koudemiddel); uit de lucht $2711\,\mathrm{W}$. De compressor zuigt $1{,}09\,\mathrm{L}$ damp per seconde aan.

5 Carnot tussen de koudemiddeltemperaturen: $313{,}15/44 = 7{,}12$; tussen lucht en water: $308{,}15/33 = 9{,}34$. De elektrische COP is 39 % van die laatste grens.

ANTWOORD

$q_c \approx 280$, $w \approx 81$ en $q_h \approx 361\ \mathrm{kJ/kg}$; COP van het kringproces 4,43, elektrisch met ontdooien 3,67. Voor 3,5 kW: 9,7 g propaan per seconde en 789 W compressorarbeid.

Klopt dit? De grootste verliezen tegenover Carnot: de temperatuurverschillen in de warmtewisselaars (−4 °C in plaats van 2 °C, 40 in plaats van 35 °C; alleen al dat verlaagt de grens van 9,3 naar 7,1), de compressor (70 %), het smoren in het ventiel en het ontdooien. Grotere warmtewisselaars verkleinen het eerste verlies, maar kosten geld en ruimte.

CODE · 16.8

Het kringproces in Python

8/20

Het model achter het diagram en het voorbeeld. De vergelijking van Peng en Robinson,

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a(T)}{v^2 + 2bv - b^2},$$

is een derdegraadsvergelijking in $Z = pv/(RT)$: de kleinste wortel is de vloeistof, de grootste de damp (`np.roots`). De dampspanning is de druk waarbij beide fasen even 'vluchtig' zijn (gelijke fugaciteit); het programma zoekt ze met een eenvoudige iteratie. Enthalpie en entropie zijn die van het ideale gas (een integraal van c_p, hoofdstuk 3) plus een correctie die uit de toestandsvergelijking volgt. Voor de compressor zoekt het met bisectie de temperatuur waarbij de entropie gelijk blijft (isentropisch samenpersen), en deelt het de arbeid door het isentropisch rendement.

Python **kringproces.py** 91 regels

```python
# kringproces.py - het koelkringproces met propaan (R290), berekend met de toestandsvergelijking van Peng-Robinson
import numpy as np

R, M = 8.314462618, 44.097e-3                  # J/(mol K), kg/mol
Tk, pk, om = 369.89, 42.512e5, 0.1521          # kritisch punt (K, Pa) en acentrische factor van propaan
kap = 0.37464 + 1.54226 * om - 0.26992 * om**2
a0, b = 0.45724 * R**2 * Tk**2 / pk, 0.07780 * R * Tk / pk
C = (-4.224, 0.3063, -1.586e-4, 3.215e-8)      # cp van het ideale gas: C0 + C1 T + C2 T² + C3 T³ (J/(mol K))
w2 = np.sqrt(2)


def a(T):
    return a0 * (1 + kap * (1 - np.sqrt(T / Tk)))**2


def dadT(T):
    return -a0 * kap * (1 + kap * (1 - np.sqrt(T / Tk))) / np.sqrt(T * Tk)


def Z(T, p, fase):
    """Compressibiliteitsfactor: de kleinste wortel is de vloeistof, de grootste de damp."""
    A, B = a(T) * p / (R * T)**2, b * p / (R * T)
    w = np.roots([1, B - 1, A - 3 * B**2 - 2 * B, -(A * B - B**2 - B**3)])
    w = sorted(x.real for x in w if abs(x.imag) < 1e-9 and x.real > B)
    return (w[0] if fase == "vloeistof" else w[-1]), A, B


```

```python
def L(z, B):                                    # een logaritme die in alle formules terugkomt
    return np.log((z + (1 + w2) * B) / (z + (1 - w2) * B))


def psat(T):
    """Dampspanning: de druk waarbij vloeistof en damp even 'vluchtig' zijn (gelijke fugaciteit)."""
    p = pk * np.exp(5.373 * (1 + om) * (1 - Tk / T))          # beginschatting (Wilson)
    for _ in range(60):
        zl, A, B = Z(T, p, "vloeistof")
        zv, _, _ = Z(T, p, "damp")
        lnf = [z - 1 - np.log(z - B) - A / (2 * w2 * B) * L(z, B) for z in (zl, zv)]
        p = p * np.exp(lnf[0] - lnf[1])
    return p


def hs_ruw(T, p, fase):
    """Enthalpie (J/kg) en entropie (J/(kg K)): ideaal gas vanaf 273,15 K en 1 bar, plus de afwijking van Peng-Robinson."""
    z, A, B = Z(T, p, fase)
    f = lambda t: C[0] * t + C[1] * t**2 / 2 + C[2] * t**3 / 3 + C[3] * t**4 / 4
    g = lambda t: C[0] * np.log(t) + C[1] * t + C[2] * t**2 / 2 + C[3] * t**3 / 3
    h = f(T) - f(273.15) + R * T * (z - 1) + (T * dadT(T) - a(T)) / (2 * w2 * b) * L(z, B)
    s = g(T) - g(273.15) - R * np.log(p / 1e5) + R * np.log(z - B) + dadT(T) / (2 * w2 * b) * L(z, B)
    return h / M, s / M


# referentie: verzadigde vloeistof bij 0 °C heeft h = 200 kJ/kg en s = 1 kJ/(kg K)
_h0, _s0 = hs_ruw(273.15, psat(273.15), "vloeistof")


def hs(T, p, fase):
    h, s = hs_ruw(T, p, fase)
    return h - _h0 + 200e3, s - _s0 + 1000.0


def bisectie(f, lo, hi):
    for _ in range(60):
        mid = (lo + hi) / 2
        lo, hi = (mid, hi) if f(lo) * f(mid) > 0 else (lo, mid)
    return (lo + hi) / 2


def cyclus(te, tc, oververhit=5.0, onderkoel=3.0, eta_is=0.70):
    """Verdampen bij te en condenseren bij tc (°C). Geeft drukken (Pa), enthalpieën (J/kg) en de COP van het kringproces."""
    Te, Tc = te + 273.15, tc + 273.15
    pe, pc = psat(Te), psat(Tc)
    h1, s1 = hs(Te + oververhit, pe, "damp")                          # 1: oververhitte damp naar de compressor
    T2s = bisectie(lambda T: hs(T, pc, "damp")[1] - s1, Tc, Tc + 150)   # isentropisch samenpersen
    h2 = h1 + (hs(T2s, pc, "damp")[0] - h1) / eta_is                  # 2: echte compressor
    T2 = bisectie(lambda T: hs(T, pc, "damp")[0] - h2, Tc, Tc + 200)
    h3 = hs(Tc - onderkoel, pc, "vloeistof")[0]                       # 3: onderkoelde vloeistof na de condensor
    h4 = h3                                                           # 4: smoren in het expansieventiel
    rho1 = pe * M / (Z(Te + oververhit, pe, "damp")[0] * R * (Te + oververhit))
    return {"pe": pe, "pc": pc, "h1": h1, "h2": h2, "h3": h3, "h4": h4, "T2": T2 - 273.15, "rho1": rho1,
            "qe": h1 - h4, "w": h2 - h1, "qc": h2 - h3, "cop": (h2 - h3) / (h2 - h1)}


if __name__ == "__main__":
    for t in (-42.1, 0.0, 40.0):
        print(f"propaan bij {t:6.1f} °C: dampspanning {psat(t + 273.15) / 1e5:6.2f} bar")
```

```
    c = cyclus(-4.0, 40.0)                    # buitenlucht 2 °C, water 35 °C (A2/W35)
    print(f"verdampen {c['pe'] / 1e5:.2f} bar, condenseren {c['pc'] / 1e5:.2f} bar, uit de compressor {c['T2']:.1f} °C")
    print(f"h1 = {c['h1'] / 1e3:.1f}, h2 = {c['h2'] / 1e3:.1f}, h3 = h4 = {c['h3'] / 1e3:.1f} kJ/kg")
    print(f"per kg: verdamper {c['qe'] / 1e3:.1f} kJ, compressor {c['w'] / 1e3:.1f} kJ, condensor {c['qc'] / 1e3:.1f} kJ")
    print(f"COP van het kringproces: {c['cop']:.2f}")
```

Uitvoer:

```
propaan bij  -42.1 °C: dampspanning   1.02 bar
propaan bij    0.0 °C: dampspanning   4.73 bar
propaan bij   40.0 °C: dampspanning  13.72 bar
verdampen 4.18 bar, condenseren 13.72 bar, uit de compressor 61.2 °C
h1 = 580.6, h2 = 662.1, h3 = h4 = 300.8 kJ/kg
per kg: verdamper 279.8 kJ, compressor 81.5 kJ, condensor 361.3 kJ
COP van het kringproces: 4.43
```

De dampspanningen kloppen met de tabellen (1,01 bar bij −42,1 °C: het normale kookpunt van propaan; NIST: 4,74 en 13,69 bar). Met `cyclus()` kan je nu elke combinatie van bron en aanvoertemperatuur doorrekenen; de COP-lijnen verderop en de simulatie van het station gebruiken precies deze functie.

Echte tabellen

Voor een echt ontwerp gebruiken ingenieurs nauwkeuriger toestandsvergelijkingen met tientallen parameters per stof (zoals in de databank REFPROP van NIST of de vrije bibliotheek CoolProp). Het principe is hetzelfde: p, T en v in één vergelijking, en daaruit h en s.

PROEF · 16.9

De COP van een koelkast meten

9/20

ONDERZOEKSVRAAG

Hoeveel warmte haalt een koelkast uit haar binnenkant per kilowattuur stroom?

MATERIAAL

- een kleine koelkast (of koelbox met compressor) die al een dag aanstaat
- een energiemeter voor het stopcontact
- 6 flessen van 1,0 L water op kamertemperatuur
- een temperatuursensor in het water van één fles, een thermometer voor de keuken

Veiligheid

Open nooit de koelkring en maak geen gaten in de wanden van de koelkast (daar lopen soms leidingen). Het rooster kan heet zijn.



Water afkoelen in een koelkast en het stroomverbruik meten: zo meet je de COP van koelen.

WERKWIJZE

1. Meet eerst 4 uur lang het verbruik van de lege koelkast (de deur dicht): dat is wat ze nodig heeft om haar warmtelekken te compenseren.
2. Zet de 6 L water (21 °C) in de koelkast, sluit de deur en meet opnieuw 4 uur het verbruik en de watertemperatuur.
3. Bereken de warmte die uit het water gehaald werd, en deel door het extra verbruik.
4. Voel voorzichtig aan het rooster achteraan: hoe warm wordt het?

WAARNEMING

Een voorbeeldmeting: leeg 0,10 kWh in 4 uur; met water 0,16 kWh, en het water koelt af van 21 naar 7 °C. Het rooster achteraan wordt ongeveer 40 °C, in de koelkast meet een sensor op de verdamper −17 °C.

VERKLARING

Warmte uit het water: $Q_c = mc\,\Delta T = 6 \cdot 4186 \cdot 14 = 352\,\mathrm{kJ}$. Extra stroom: $0{,}06\,\mathrm{kWh} = 216\,\mathrm{kJ}$. COP van koelen: $1{,}6$. De grens van Carnot tussen verdamper (−17 °C) en rooster (40 °C) is $256/57 = 4{,}5$: de koelkast haalt ongeveer een derde daarvan. Dat is gewoon voor een kleine koelkast: haar compressor is klein en slaat vaak aan en af. Het model van dit hoofdstuk (verdampen bij −20 °C, condenseren bij 35 °C) geeft voor het kringproces 2,5, en met motorverliezen 2,3.

Een bron van fouten: ook de flessen en de lucht in de koelkast koelen af, en de lege meting was misschien niet representatief (een deur die even openging). Herhaal de meting en neem het gemiddelde.

UITLEG · 16.10

COP: Carnot tegenover echt, en de stooklijn

10/20

Met het model kan je de COP berekenen voor elke buitentemperatuur. Drie lessen uit de figuur:

- **Hoe kouder buiten, hoe lager de COP**: bij water van 35 °C daalt ze van 4,6 bij 7 °C tot 3,3 bij −7 °C en 2,9 bij −15 °C. Het verschil dat de compressor moet overbruggen, groeit, en de dampdichtheid aan de zuigkant daalt.
- **Een knik rond 0 à 5 °C**: bij vochtige lucht net boven het vriespunt bevriest waterdamp op de verdamper (verderop), en ontdooien kost energie.
- **De aanvoertemperatuur telt enorm**: water van 55 °C in plaats van 35 °C kost bij 0 °C buiten ongeveer 33 % van de COP. Daarom horen bij een warmtepomp grote, lauwe verwarmingsoppervlakken: vloerverwarming, ventiloconvectoren of grote radiatoren.

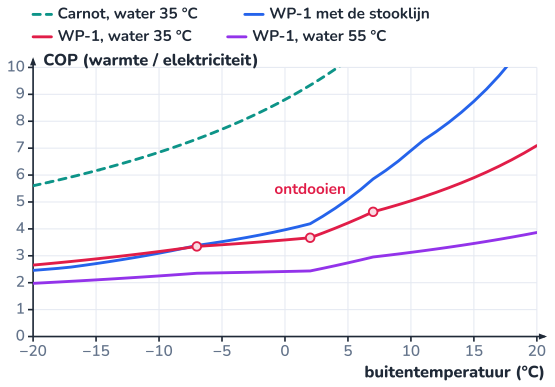
Een gebouw heeft bij zacht weer minder warmte nodig, dus kan het water dan ook kouder zijn. Dat verband heet de **stooklijn**. Voor het station: 35 °C bij −8 °C (de ontwerptemperatuur), en 25 °C vanaf 9 °C buiten:

STOOKLIJN VAN HET STATION (REKENWAARDE)

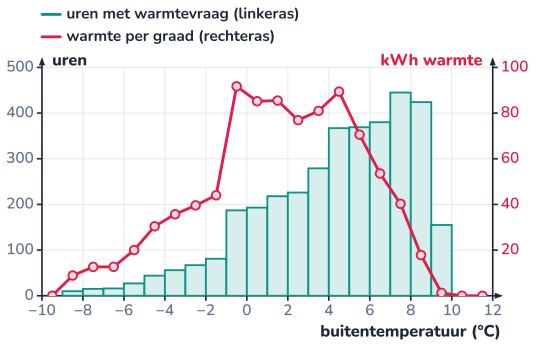
$$t_{\text{aanvoer}} = 20 + 15 \cdot \frac{20 - t_b}{28} \qquad (25 \le t_{\text{aanvoer}} \le 40\,^\circ\mathrm{C})$$

Zo werkt de warmtepomp altijd met het kleinste temperatuurverschil dat nog volstaat: bij 7 °C buiten haalt ze met de stooklijn een COP van 5,9 in plaats van 4,6.

De **SCOP** (seizoens-COP) weegt de COP bij elke buitentemperatuur met de warmte die dan nodig is. Dat doet de **binmethode**: tel hoeveel uren het jaar elke temperatuur heeft (de 'bins'), bereken de warmtevraag en de COP in elke bin, en tel op. De Europese norm EN 14825 doet het zo met een genormaliseerd klimaat; wij doen het met het rekenjaar van Ukkel uit hoofdstuk 15. De meeste stookuren vallen rond 8 °C, de meeste warmte tussen −1 en 5 °C: gewone winterdagen, niet de strengste vorst.



Echte COP's liggen op 40 à 50 % van Carnot. Met de stooklijn (en dus koeler water bij zacht weer) stijgt de COP sterk.



Het rekenjaar in klassen van 1 °C: de meeste stookuren vallen tussen 3 en 8 °C, de meeste warmte tussen −1 en 5 °C; strenge vorst is zeldzaam.

UITGEWERKT VOORBEELD · 16.11

Vloerverwarming of radiator? De aanvoertemperatuur telt

11/20

Een woning heeft bij 0 °C buiten 4,0 kW warmte nodig. Met vloerverwarming volstaat water van 35 °C, met gewone radiatoren is 55 °C nodig. Bereken met het model de COP, het elektrische vermogen en het verschil per 1000 uur stoken bij deze temperatuur. Hoe groot is de grens van Carnot in beide gevallen?

GEGEVEN

- $Q = 4{,}0\,\mathrm{kW}$ bij 0 °C buiten
- WP-1: COP bij 0 °C: $3{,}59$ (35 °C) en $2{,}42$ (55 °C)

GEVRAAGD

- elektrisch vermogen in beide gevallen
- verschil per 1000 uur
- Carnot

OPLOSSING

1. 35 °C: $P = 4000/3{,}59 = 1115\,\mathrm{W}$. 55 °C: $P = 4000/2{,}42 = 1656\,\mathrm{W}$.
2. Per 1000 uur: $541\,\mathrm{W} \cdot 1000\,\mathrm{h} = 541\,\mathrm{kWh}$ meer met radiatoren.
3. Carnot: $308{,}15/35 = 8{,}8$ en $328{,}15/55 = 6{,}0$. Beide echte COP's zijn ongeveer 40 % van de grens.

ANTWOORD

Met vloerverwarming 1115 W, met radiatoren 1656 W: 49 % meer stroom voor dezelfde warmte.

Klopt dit? Vuistregel uit de praktijk: elke graad die het water warmer moet, kost ongeveer 2 % COP; over 20 graden samengesteld ($0{,}98^{20} = 0{,}67$) is dat een derde. Het model: 33 % minder COP. Wie een warmtepomp in een bestaand huis plaatst, isoleert daarom eerst en vervangt kleine radiatoren door grotere.

UITLEG · 16.12

Bronnen: lucht, bodem, water

12/20

Een warmtepomp werkt beter naarmate haar bron warmer is. Buitenlucht is overal en gratis, maar het koudst wanneer je het meest warmte nodig hebt. De bodem en het grondwater zijn in de winter veel

warmer.

bron	temperatuur in de winter	voordelen	nadelen
buitenlucht	−8 tot 8 °C (en kouder)	overal, goedkoop, geen boring	koudst als je het meest nodig hebt; ontdooien; geluid
bodem, horizontale collector (1-1,5 m)	7 à 8 °C	stabieler dan lucht	veel grond nodig (twee à drie keer de vloeroppervlakte), graafwerk
bodem, verticale sonde (50-150 m)	±10 à 12 °C	stabiel, hoogste COP in de winter	duur (boring), vergunning
grondwater of oppervlaktewater	grondwater ±10-12 °C, rivier 2-8 °C	groot vermogen mogelijk	vergunning, vervuiling van de wisselaar, water moet terug

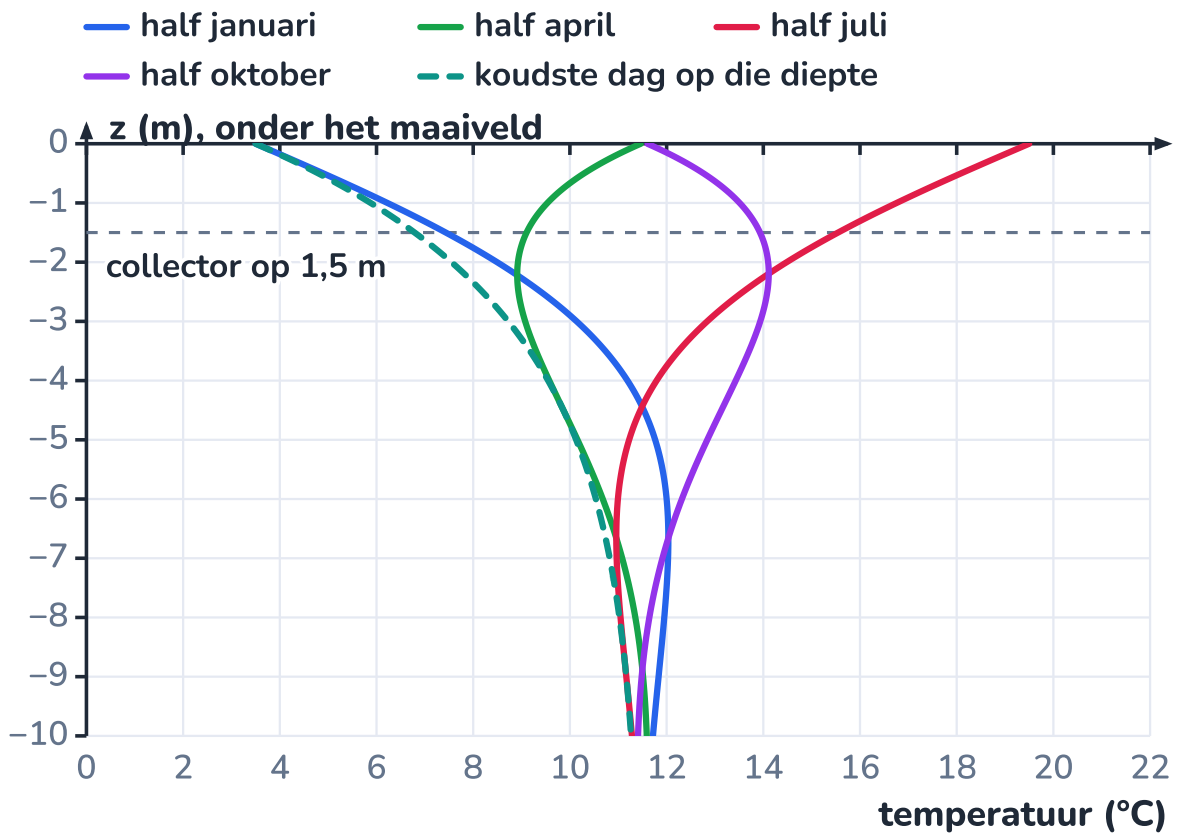
Waarom is de bodem zo stabiel? De temperatuur aan het oppervlak schommelt over het jaar rond het jaargemiddelde. Die golf dringt de grond in, maar wordt gedempt en vertraagd. De warmtevergelijking (hoofdstuk 17) geeft:

TEMPERATUURGOLF IN DE BODEM

$$T(z,t) = \bar{T} - A_0\, \mathrm{e}^{-z/d} \cos\!\left(\omega(t - t_0) - \frac{z}{d}\right) \qquad d = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$$

A_0: amplitude aan het oppervlak; α: warmtediffusie van de grond (m²/s); $\omega = 2\pi$ per jaar. Met $\alpha = 0{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ (vochtige leem) is $d = 2{,}83\,\mathrm{m}$: op elke d dieper wordt de schommeling e keer kleiner en schuift ze een radiaal (58 dagen) op.

Op 1,5 m is de schommeling nog 4,7 K en is het koudst ongeveer 31 dagen later dan aan het oppervlak, half februari. Op 10 m merk je de seizoenen nauwelijks meer: de temperatuur is er het hele jaar ongeveer 11,5 °C.



Vlak onder het oppervlak volgt de bodem de seizoenen; dieper wordt de golf kleiner en komt ze later. Op 10 m is het het hele jaar ongeveer even warm.

UITGEWERKT VOORBEELD · 16.13

Hoe diep moet een bodemcollector?

13/20

Het station overweegt een horizontale bodemcollector: kunststof buizen met pekel (water met glycol) in de grond. Hoe koud is de grond op 0,8 m en op 1,5 m op de koudste dag? Welke COP haalt de warmtepomp dan bij water van 35 °C, als de pekel 3 K kouder is dan de grond, tegenover lucht van −8 °C?

GEGEVEN

- $\bar{T} = 11{,}5\,^\circ\mathrm{C}$, $A_0 = 8{,}0\,\mathrm{K}$, $d = 2{,}83\,\mathrm{m}$
- model WP-1, verdampen 6 K onder de brontemperatuur

GEVRAAGD

- laagste grondtemperatuur op 0,8 en 1,5 m
- COP met bodem tegenover lucht

OPLOSSING

1. Laagste temperatuur op diepte z: $\bar{T} - A_0 \mathrm{e}^{-z/d}$. Op 0,8 m: $11{,}5 - 8{,}0\,\mathrm{e}^{-0{,}8/2{,}83} = 5{,}5\,^\circ\mathrm{C}$; op 1,5 m: $6{,}8\,^\circ\mathrm{C}$.
2. Pekel op 1,5 m: ongeveer $3{,}8\,^\circ\mathrm{C}$. COP bij 35 °C (zonder ontdooien, er vriest niets aan de lucht): $4{,}26$. Lucht van −8 °C: $3{,}28$.
3. Voor het station (1400 W bij −8 °C) is dat 426 W tegenover 328 W elektrisch.

ANTWOORD

Op 1,5 m zakt de grond niet onder ±7 °C (op 0,8 m ±5 °C). Bij −8 °C haalt de bodemwarmtepomp een COP van ±4,3 tegenover 3,3 voor lucht.

Klopt dit? Een collector onttrekt zelf warmte en koelt de grond rond de buizen af: in werkelijkheid ligt de pekel in een strenge winter nog een paar graden lager. Vuistregel: 20 à 30 W per m² grond, dus voor 1,4 kW zo'n 50 à 70 m² collector. Voor een klein, goed geïsoleerd station weegt het graafwerk zwaarder dan de winst.

UITLEG · 16.14

Ontdooien, geluid en trillingen

14/20

IJs op de verdamper. De lamellen van de verdamper zijn enkele graden kouder dan de lucht. Liggen ze onder het dauwpunt van de lucht (hoofdstuk 14), dan condenseert er waterdamp; liggen ze bovendien onder 0 °C, dan wordt het rijp. Dat gebeurt het meest bij 0 à 5 °C en vochtig weer: dan bevat de lucht veel waterdamp. Bij −10 °C is de lucht zo droog dat er weinig ijs aangroeit. Een laag rijp isoleert en verstopt de lamellen; de COP zakt.

Ontdooien. De warmtepomp keert met de 4-wegklep de kring even om: de hete damp gaat naar de verdamper, het ijs smelt en loopt weg (bij 0 °C en 90 % RV kan een kleine unit zo enkele liters per dag verliezen). De warmte daarvoor komt uit het buffervat. Een goede regeling ontdooit alleen als het nodig is: ze meet de temperatuur van de verdamper en de lucht (en eventueel de RV) en ziet het vermogen dalen.

Geluid. Een buitenunit maakt geluid met haar ventilator en compressor. Fabrikanten geven het **geluidsvermogenniveau** L_W; wat je hoort op afstand r is het **geluidsdrukniveau**. Voor een unit op de grond (geluid verspreidt zich over een halve bol) is ongeveer $L_p = L_W - 20\log_{10} r - 8\,\mathrm{dB}$. Een unit van 55 dB(A) geeft op 5 m nog $55 - 14 - 8 = 33\,\mathrm{dB(A)}$, zoals fluisteren; op 1 m 47 dB(A). Plaats de unit dus niet onder het slaapkamerraam, en niet in een hoek tussen muren (die kaatsen het geluid terug).

Trillingen. De compressor draait met 30 tot 90 Hz. Hoofdstuk 11 koos voor de buitenunit van 60 kg vier rubberdempers type E: eigenfrequentie 8,7 Hz, zodat bij 30 Hz nog 10 % en bij 90 Hz nog 1,4 % van de trillingskracht de sokkel bereikt. Dat werkt alleen als de leidingen en de kabel flexibel aangesloten zijn; anders lopen de trillingen om de dempers heen.

De frequentieregelaar en de resonantie

Een compressor met frequentieregelaar kan elke snelheid tussen 30 en 90 Hz kiezen. Valt er ergens een eigenfrequentie van de sokkel, de leidingen of de gevel in dat gebied, dan kan de regeling die snelheid overslaan ('verboden frequenties'), net zoals de windturbine door haar kritische toerentallen moet (hoofdstuk 11).



Rijp op de lamellen van de verdamper: bij 0 à 5 °C en vochtig weer groeit het snel aan, en moet de warmtepomp ontdooien.

UITLEG · 16.15

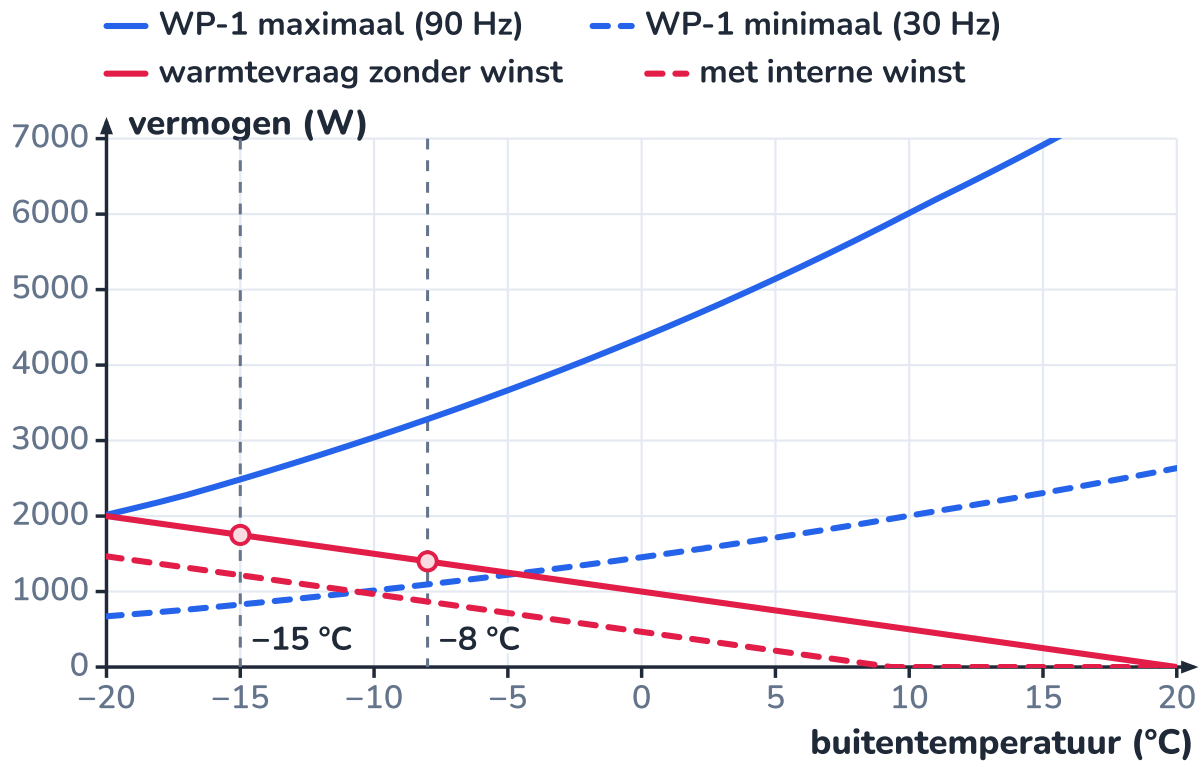
Vermogen tegenover warmtevraag: het bivalentiepunt

15/20

Een warmtepomp levert bij strenge vorst niet alleen met een lagere COP, maar ook minder vermogen: de damp aan de zuigkant is ijler (lagere druk), dus perst dezelfde compressor minder kilogram per seconde. WP-1 levert bij 90 Hz 5,3 kW bij 7 °C (water 35 °C), 3,3 kW bij −8 °C en 2,5 kW bij −15 °C (met de stooklijn).

De warmtevraag van het station stijgt lineair als het kouder wordt: 50 W per graad. Waar de twee lijnen elkaar snijden, ligt het **bivalentiepunt**: daaronder moet een tweede verwarming bijspringen. Voor WP-1 en het station ligt het ver onder −15 °C, zelfs zonder interne winst. De noodverwarming van 2 kW (hoofdstuk 39) blijft dus een reserve voor een defecte warmtepomp, niet voor gewone vorst.

Het omgekeerde probleem is groter: bij zacht weer is de warmtepomp veel te sterk. Haar kleinste stand (30 Hz) levert bij 5 °C nog ongeveer 1,7 kW, terwijl het station dan maar 217 W vraagt. Ze moet dan aan en uit schakelen ('pendelen'). Het buffervat van 100 L vangt dat op: bij 5 K temperatuurzwaai bevat het $100 \cdot 4{,}19 \cdot 5 = 2{,}1\,\mathrm{MJ} = 0{,}58\,\mathrm{kWh}$, genoeg om de warmtepomp telkens zo'n twintig minuten te laten draaien.



De warmtepomp (volle lijn: maximaal) levert overal meer dan het station vraagt; bij zacht weer is zelfs haar kleinste stand te groot.

CODE · 16.16

Habitat: een warmtepomp voor het station kiezen

16/20

Het station krijgt een lucht-waterwarmtepomp: een monobloc met propaan van de 4 kW-klasse (WP-1, rekenwaarden uit het model, geen merk), met de stooklijn van 35 °C bij −8 °C, een buffervat van 100 L, vloerverwarming in de woonmodule en de ventiloconvector van de klimaatmodule op dezelfde waterkring (hoofdstuk 31 van I). Het programma rekent uur per uur door het rekenjaar van hoofdstuk 15: warmtevraag, COP en vermogen bij de buitentemperatuur van dat uur, plus de hulpenergie van de circulatiepomp (20 W zolang er warmtevraag is) en de ventilator. Het bestand rekenjaar.csv bevat de 8760 uurtemperaturen.

Python **seizoen.py** 38 regels

```python
# seizoen.py - de warmtepomp van het station over een rekenjaar, uur per uur
import numpy as np
from kringproces import cyclus                  # het model van hierboven (Peng-Robinson, propaan)

UA, WINST = 50.0, 533.3                         # warmteverlies (W/K) en interne winst (W) van het station
VD = 0.00162                                    # slagvolume maal toerental van de compressor bij 90 Hz (m³/s)


def stooklijn(Tb):                              # aanvoertemperatuur van het water (°C)
    return min(40.0, max(25.0, 20 + 15 * (20 - Tb) / 28))


def ontdooien(Tb):                              # extra energie om ijs van de verdamper te smelten (fractie)
    if Tb <= -7 or Tb >= 7:
        return 0.0
    return 0.10 * (Tb + 7) / 9 if Tb <= 2 else 0.10 * (7 - Tb) / 5


```

```python
def warmtepomp(Tb):
    c = cyclus(Tb - 6.0, stooklijn(Tb) + 5.0)     # verdampen 6 K onder de lucht, condenseren 5 K boven het water
    lam = 0.95 - 0.025 * c["pc"] / c["pe"]        # volumetrisch rendement van de compressor
    return VD * c["rho1"] * lam * c["qc"], c["cop"] * 0.92 * (1 - ontdooien(Tb))   # Qmax (W), COP


T = np.loadtxt(open("rekenjaar.csv"))             # 8760 uurtemperaturen van het rekenjaar (°C)
rooster = np.arange(-20.0, 21.0)                  # tabel om de 1 °C, daarna interpoleren
tab = np.array([warmtepomp(t) for t in rooster])
Qmax, COP = np.interp(T, rooster, tab[:, 0]), np.interp(T, rooster, tab[:, 1])

Q = np.clip(UA * (20 - T) - WINST, 0, None)       # warmtevraag per uur (W)
P = Q / COP + np.where(Q > 0, 20 + 30 * np.minimum(Q / Qmax, 1), 0)   # compressor + pomp + ventilator (W)
tekort = np.clip(Q - Qmax, 0, None)               # wat de noodverwarming zou moeten bijleggen

print(f"warmte {Q.sum() / 1e3:.0f} kWh, elektriciteit {P.sum() / 1e3:.0f} kWh, SCOP {Q.sum() / P.sum():.2f}")
print(f"waarvan hulpenergie (pomp en ventilator): {(P - Q / COP).sum() / 1e3:.0f} kWh")
print(f"hoogste warmtevraag {Q.max():.0f} W, hoogste opgenomen vermogen {P.max():.0f} W")
print(f"uren met warmtevraag {int((Q > 0).sum())}, uren onder de kleinste stand (pendelen): {int(((Q > 0) & (Q < Qmax / 3)).sum())}")
print(f"tekort voor de noodverwarming: {tekort.sum() / 1e3:.1f} kWh")
```

OOK TE DOWNLOADEN

Uitvoer:

```
warmte 897 kWh, elektriciteit 285 kWh, SCOP 3.15
waarvan hulpenergie (pomp en ventilator): 77 kWh
hoogste warmtevraag 901 W, hoogste opgenomen vermogen 308 W
uren met warmtevraag 3559, uren onder de kleinste stand (pendelen): 3559
tekort voor de noodverwarming: 0.0 kWh
```

De warmtepomp levert de 897 kWh warmte met 285 kWh stroom: een SCOP van 3,1. Dat is lager dan de COP bij 7 °C, en dat heeft twee oorzaken. De hulpenergie weegt zwaar: 77 kWh, ruim een kwart, omdat de circulatiepomp 3559 uur draait voor een kleine warmtevraag. En de warmtepomp moet in alle 3559 stookuren pendelen: zelfs haar kleinste stand (30 Hz) levert meer dan het station ooit vraagt. Het model rekent met de COP van een draaiende machine; elke start kost in werkelijkheid een beetje extra, dus de echte SCOP ligt nog wat lager. Een slimme regeling laat de pomp alleen draaien als de warmtepomp of het buffervat warmte levert. Nooit is er een tekort: de noodverwarming hoeft in het rekenjaar niet bij te springen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 16.17

Habitat: warmtepomp tegenover elektrische verwarming in cijfers

17/20

Vergelijk de warmtepomp met de elektrische noodverwarming als gewone verwarming van het station: stroom per jaar, kost, en vermogen bij −8 °C en bij een koudegolf van −15 °C (reken dan zonder interne winst: het is nacht, de lampen zijn uit). Wat betekent het voor de maanden december en januari, die in hoofdstuk 15 een tekort hadden?

GEGEVEN

- rekenjaar: 897 kWh warmte; WP-1: 285 kWh stroom (seizoen.py)
- COP met de stooklijn: 3,28 bij −8 °C, 2,71 bij −15 °C; hulpenergie 50 W
- € 0,30 per kWh (rekenwaarde)

GEVRAAGD

- jaarverbruik en kost
- vermogen bij −8 en −15 °C
- gevolg voor de wintermaanden

OPLOSSING

1. Per jaar: elektrisch $897\,\mathrm{kWh}$ (€ 269), warmtepomp $285\,\mathrm{kWh}$ (€ 85). Besparing $612\,\mathrm{kWh}$, 68 %.

2. −8 °C: $50 \cdot 28 = 1400\,\mathrm{W}$ warmte; elektrisch 1400 W, warmtepomp $1400/3{,}28 + 50 = 476\,\mathrm{W}$.

3. −15 °C: $50 \cdot 35 = 1750\,\mathrm{W}$; elektrisch 1750 W, warmtepomp $1750/2{,}71 + 50 = 696\,\mathrm{W}$. De warmtepomp kan dan nog 2486 W leveren: genoeg.

4. December en januari: de verwarming vroeg daar samen 421 kWh elektrisch; met de warmtepomp ongeveer een derde. Het tekort van hoofdstuk 15 verdwijnt (opdracht 15.12).

5. Overzicht:

	ELEKTRISCHE VERWARMING	WARMTEPOMP WP-1
warmte per jaar (rekenjaar)	897 kWh	897 kWh
elektriciteit per jaar	897 kWh	285 kWh (SCOP 3,15)
kost aan € 0,30/kWh	€ 269	€ 85
vermogen bij −8 °C (zonder winst: 1400 W warmte)	1400 W	476 W
vermogen bij −15 °C (1750 W warmte)	1750 W	696 W
grootste opgenomen vermogen	2000 W (vol vermogen)	±1163 W (90 Hz bij zacht weer)

ANTWOORD

De warmtepomp bespaart ongeveer 612 kWh (€ 184) per jaar en vraagt bij −15 °C 696 W in plaats van 1750 W: 40 % van het piekvermogen.

Klopt dit? De jaarwinst is bescheiden, omdat het station goed geïsoleerd is en veel interne winst heeft (hoofdstuk 15). Het echte voordeel zit in de winter: minder stroom precies in de donkere maanden, en een kleinere piek als de batterij het moeilijk heeft. Op een afgelegen plek zonder net weegt dat het zwaarst.

UITGEWERKT VOORBEELD · 16.18

Habitat: past het op de 48 V-kant?

18/20

De netomvormer van het station levert 4,0 kVA continu (hoofdstuk 7). Controleer met fasoren drie situaties op een koude avond: (A) de warmtepomp op vol vermogen met de drukpomp, de koelkast en de rest; (B) de warmtepomp defect, de noodverwarming aan; (C) warmtepomp én noodverwarming samen. Hoeveel stroom trekt de omvormer uit het 48 V-net?

GEGEVEN

- warmtepomp hoogstens 1,16 kW, cos φ ≈ 0,98 (omvormercompressor met PFC)
- drukpomp 0,75 kW (cos φ 0,81), koelkast 0,15 kW (0,70), rest 0,30 kW (0,95); noodverwarming 2,0 kW (1,0)
- omvormer: 93 %, batterij 44 tot 56 V

GEVRAAGD

- P, Q en S per situatie
- stroom aan de 48 V-kant
- een regel voor het brein

OPLOSSING

1 Per last: $Q = P\tan\varphi$ (hoofdstuk 7). Tel P en Q apart op, dan $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$:

SITUATIE	P (KW)	Q (KVAR)	S (KVA)	BINNEN 4,0 KVA?
A: warmtepomp vol, drukpomp, koelkast, rest	2,36	1,03	2,58	ja
B: noodverwarming in plaats van de warmtepomp	3,20	0,79	3,30	ja
C: warmtepomp én noodverwarming, met drukpomp	4,36	1,03	4,48	**nee**

2 Stroom aan de gelijkstroomkant: $I = P/(\eta U)$. Situatie A bij 48 V: $2363/(0{,}93 \cdot 48) = 53\ \mathrm{A}$. Situatie C bij een bijna lege batterij (44 V): $107\ \mathrm{A}$.

3 A en B passen ruim; C overschrijdt de omvormer. Regel voor het brein: de noodverwarming mag alleen aan als de warmtepomp in storing is (of stilstaat) en nooit samen met de drukpomp als die al met de warmtepomp draait. De omvormercompressor start zacht en heeft geen aanloopstroom; alleen de drukpomp vraagt kort ±6,3 kVA.

ANTWOORD

Normaal (A) 2,6 kVA en ±53 A bij 48 V; met de noodverwarming in plaats van de warmtepomp (B) 3,3 kVA; beide samen (C) 4,5 kVA: te veel. Het brein sluit C uit.

Klopt dit? Met elektrische verwarming als gewone verwarming zou situatie B elke koude avond gelden: 3,3 kVA, dicht bij de grens. De warmtepomp geeft meer dan een kilowatt marge op de omvormer.

NASLAG · 16.19

Warmtepompen: formules en kerngetallen

19/20

Werkwijze: (1) bepaal bron- en aanvoertemperatuur; (2) schat de temperaturen van het koudemiddel (±5 à 6 K voorbij de bron en het water); (3) lees of bereken h_1 tot h_4; (4) COP en debiet; (5) toets aan Carnot; (6) voor een seizoen: binmethode met de stooklijn, inclusief ontdooien en hulpenergie.

energiebalans

$$Q_\mathrm{h} = Q_\mathrm{c} + W$$

COP en Carnot

$$\mathrm{COP}_\mathrm{h} = \frac{Q_\mathrm{h}}{W} \le \frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}} \qquad \mathrm{COP}_\mathrm{c} = \frac{Q_\mathrm{c}}{W} \le \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}}$$

symbool	betekenis	eenheid
T	temperatuur	K

kringproces per kg

$$q_\mathrm{c} = h_1 - h_4 \quad w = h_2 - h_1 \quad q_\mathrm{h} = h_2 - h_3 \quad h_4 = h_3$$

symbool	betekenis	eenheid
h	enthalpie	J/kg

debiet

$$\dot{m} = \frac{P_\mathrm{warmte}}{q_\mathrm{h}} \qquad \dot{V}_\mathrm{zuig} = \frac{\dot{m}}{\rho_1}$$

seizoens-COP (binmethode)

$$\mathrm{SCOP} = \frac{\sum Q_i}{\sum Q_i/\mathrm{COP}_i + E_\mathrm{hulp}}$$

bodemtemperatuur

$$T(z) = \bar{T} - A_0 \mathrm{e}^{-z/d}\cos(\omega t - z/d),\ d = \sqrt{2\alpha/\omega}$$

geluid van een unit op de grond

$$L_p \approx L_W - 20\log_{10} r - 8\,\text{dB}$$

symbool	betekenis	eenheid
r	afstand	m

WP-1 (model), water 35 °C	A7	A2	A–7	A–15
COP (met ontdooien)	4,63	3,67	3,35	2,89
vermogen bij 90 Hz (kW)	5,3	4,5	3,4	2,6
Carnot (lucht → water)	11,0	9,3	7,3	6,2

koudemiddel	formule	kookpunt bij 1 atm	kritische temperatuur	GWP	veiligheid
R290 (propaan)	C_3H_8	−42,1 °C	96,7 °C	3	A3 (zeer brandbaar)
R600a (isobutaan)	C_4H_{10}	−11,7 °C	134,7 °C	3	A3
R32	CH_2F_2	−51,7 °C	78,1 °C	675	A2L (licht brandbaar)
R410A	mengsel R32 + R125	−51,4 °C	71,3 °C	2088	A1
R134a	CH_2FCF_3	−26,1 °C	101,1 °C	1430	A1
R744 (CO_2)	CO_2	sublimeert −78,5 °C	31,0 °C	1	A1 (hoge druk)
R717 (ammoniak)	NH_3	−33,3 °C	132,3 °C	0	B2L (giftig)

HET GEHEEL · 16.20

Waar warmtepompen vandaan komen en waar ze heen gaan

20/20

Een warmtepomp brengt samen wat de vorige twee hoofdstukken bouwden: gassen en dampspanning (hoofdstuk 14), de hoofdwetten en Carnot (hoofdstuk 15). Ze raakt de materialen (M: koudemiddelen, hun veiligheid en klimaateffect) en het ontwerpen (D: kiezen, dimensioneren, plaatsen, trillingen en geluid).

I18 Warmte berekenen
Verdampingswarmte, warmtecapaciteit, een buffer van water.

I19 Warmtetransport en isolatie
Het warmteverlies van de module (20,2 W/K), waarvoor de warmtepomp werkt.

I31 Regelsystemen
De ventiloconvector op de warmwaterkring van het station.

E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren
Fasoren: de belasting van de netomvormer met de warmtepomp.

E11 Trillingen en resonantie
Rubberdempers type E onder de buitenunit, verboden frequenties.

E14 Gassen en de gaswetten
Dampspanning, kritisch punt, dauwpunt (ijs op de verdamper), echte gassen.

E15 De hoofdwetten van de thermodynamica
Carnot, entropie, de jaarbalans en het rekenjaar.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief
Warmtewisselaars, de temperatuurgolf in de bodem, het tweeknoopsmodel met buffervat.

E18 Stroming van vloeistoffen en gassen
De waterkring: pompcurve, drukverlies in de vloerverwarming.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

De frequentieregelaar van de compressor en de netomvormer.

E39 PID-regeling

De regeling van de aanvoertemperatuur; de noodverwarming van 2 kW als reserve.

E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

Koudemiddel, lekken en stroom over de hele levensduur.

Habitat

Het station krijgt een lucht-waterwarmtepomp: monobloc met propaan (R290) van de 4 kW-klasse (WP-1: 5,3 kW bij A7/W35 en 90 Hz, 2,5 kW bij −15 °C; COP 4,6 / 3,7 / 3,3 / 2,9 bij A7/A2/A−7/A−15 en W35), stooklijn 35 °C bij −8 °C en 25 °C vanaf 9 °C, buffervat 100 L, vloerverwarming in de woonmodule en de ventiloconvector van de module op dezelfde kring. Over het rekenjaar: 285 kWh stroom voor 897 kWh warmte (SCOP 3,1, ruim een kwart hulpenergie), 476 W bij −8 °C en 696 W bij −15 °C. De buitenunit (60 kg) staat op vier dempers type E, uit de buurt van de slaapruimte. De noodverwarming (2 kW) blijft reserve en mag nooit samen met de warmtepomp op vol vermogen en de drukpomp (4,5 kVA > 4,0 kVA).

SAMENVATTING

In het kort

- Een warmtepomp pompt warmte van koud naar warm met arbeid: $Q_\mathrm{h} = Q_\mathrm{c} + W$; $\mathrm{COP}_\mathrm{h} = Q_\mathrm{h}/W \le T_\mathrm{h}/(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c})$.
- Het koelkringproces: verdampen bij lage druk (warmte in), samenpersen (arbeid), condenseren bij hoge druk (warmte uit), smoren in het expansieventiel.
- De druk bepaalt de kooktemperatuur van het koudemiddel; propaan kookt bij −4 °C bij 4,2 bar en condenseert bij 40 °C bij 13,7 bar.
- In het drukenthalpiediagram is het kringproces een vierhoek; warmte en arbeid per kg zijn verschillen in h.
- Echte warmtepompen halen ongeveer de helft van Carnot; de COP daalt met een koudere bron en een warmere aanvoer (stooklijn, vloerverwarming).
- Lucht is eenvoudig maar koud in de winter; de bodem op 1,5 m zakt niet onder ±6 °C en diep is ze het hele jaar ±11 °C.
- Ontdooien, hulpenergie en pendelen verlagen de seizoens-COP; een buffervat en een goede regeling helpen.
- Voor het station: ±285 kWh stroom per jaar in plaats van 897 kWh, en een piek van ±696 W in plaats van 1750 W bij −15 °C.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

warmtepomp

Een machine die met arbeid (meestal elektriciteit) warmte van een koude bron naar een warmere plaats pompt; een koelkast is een warmtepomp die je gebruikt voor de koude kant.

COP

Coefficient of performance: nuttige warmte gedeeld door de toegevoerde arbeid. Verwarmen: Q_h/W; koelen: Q_c/W. Hoogstens $T_\mathrm{h}/(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c})$ bij verwarmen.

SCOP

koudemiddel

Seizoens-COP: alle warmte van een stookseizoen gedeeld door alle elektriciteit, inclusief ontdooien en hulpenergie; hangt af van het klimaat en de aanvoertemperatuur.

De werkstof van een koelkringproces: een stof die bij de gewenste temperaturen en een redelijke druk verdampt en condenseert, bv. propaan (R290).

verdamper

Warmtewisselaar waarin het koudemiddel bij lage druk en lage temperatuur verdampt en daarvoor warmte opneemt van de bron.

condensor

Warmtewisselaar waarin het koudemiddel bij hoge druk condenseert en zijn warmte afgeeft aan het water of de lucht die je verwarmt.

expansieventiel

Een vernauwing die de druk van de vloeistof laat zakken; een deel verdampt en het koudemiddel koelt af tot onder de brontemperatuur. De enthalpie blijft gelijk.

drukenthalpiediagram

Diagram met de enthalpie per kilogram op de horizontale as en de druk (logaritmisch) op de verticale: een koelkringproces wordt er een eenvoudige vierhoek.

GWP

Global warming potential: hoeveel een kilogram van een gas over 100 jaar bijdraagt aan de opwarming, tegenover een kilogram CO_2.

stooklijn

Het verband tussen buitentemperatuur en aanvoertemperatuur van het verwarmingswater: hoe kouder buiten, hoe warmer het water.

bivalentiepunt

De buitentemperatuur waaronder de warmtepomp alleen niet meer genoeg warmte levert en een tweede verwarming moet bijspringen.

E EXPERT · DEEL E3 · THERMODYNAMICA EN STROMING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 17

Warmteoverdracht kwantitatief

Van wandlagen tot een digitale tweeling met twee tijdschalen

Een goed geïsoleerde ruimte kan toch snel afkoelen. Warmteverlies bepaalt hoeveel je moet blijven verwarmen; warmtecapaciteit bepaalt hoe lang de temperatuur onderweg is. Je bouwt beide stap voor stap op en houdt het warmtemodel van de klimaatmodule apart van dat van het hele station.

12× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 12 lestijden

E Energie · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Dezelfde installatie heeft een snel reagerende luchttemperatuur en veel trager water en bouwmateriaal.

Na dit hoofdstuk

- Je leidt geleidingsweerstanden af uit de wet van Fourier.
- Je combineert geleiding, convectie en straling met een geldige systeemgrens.
- Je bouwt en simuleert een warmtemodel met één en twee knopen.
- Je schat parameters uit een proef en toetst het model op andere data.
- Je gebruikt het model om vermogen, buffer en regeling van Habitat te beoordelen.

UITLEG · 17.1

Warmteverlies en opslag zijn verschillende eigenschappen

1/23

Je kende $Q = mc\Delta T$ en het stationverlies van 50 W/K. De eerste relatie gaat over **energie opslaan**; de tweede over **energie per seconde verliezen**. Schrijf daarom $C = mc$ in J/K en H in W/K. Een groot C houdt een ruimte tijdelijk warm, maar verandert het stationaire verlies niet.

Een temperatuurverschil van 1 °C is 1 K. In stralingsformules is de absolute temperatuur verplicht: $20\,^{\circ}\mathrm{C} = 293{,}15\,\mathrm{K}$. Warmte is energie die door temperatuurverschil wordt overgedragen; een lichaam bevat inwendige energie, geen voorraad 'warmte'.

EERSTE HOOFDWET VOOR ÉÉN THERMISCHE KNOOP

$$C\dot{T} = P_{\text{in}} - P_{\text{uit}}$$

UITLEG · 17.2

Fourier: van lokale gradiënt naar wandverlies

2/23

Voor een vlakke wand met constante geleidbaarheid λ geldt $q_x = -\lambda\,\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$. Het minteken stuurt warmte van hoog naar laag. q_x is warmtestroomdichtheid in W/m²; $\dot{Q} = Aq_x$ is vermogen in W.

In een stationaire, homogene laag zonder interne warmtebron is $\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2 = 0$: het temperatuurprofiel is recht. Integreren over dikte d geeft $\dot{Q} = \lambda A(T_1 - T_2)/d$. Die formule geldt niet zomaar voor een cylinder of een isolatielaag met een sterk temperatuurafhankelijke geleidbaarheid.

VAN FOURIER NAAR THERMISCHE WEERSTAND

$$R_{\text{geleiding}} = \frac{d}{\lambda A}, \qquad \dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}$$



De geometrie bepaalt welke weerstand hoort bij een materiaal; dun metaal en dik isolatiemateriaal zijn geen uitwisselbare lagen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 17.3

Een isolatieplaat volledig doorrekenen

3/23

Een volledig doorgerekend ontwerpvoorbeeld.

GEGEVEN

- $A = 12\,\mathrm{m}^2$, $d = 0{,}16\,\mathrm{m}$, $\lambda = 0{,}038\,\mathrm{W/(m\,K)}$; twee plaatvlakken op 19 en −6 °C.

GEVRAAGD

- De weerstand en de geleidingswarmtestroom.

OPLOSSING

1. Het verschil is 25 K. $R = d/(\lambda A) = 0{,}16/(0{,}038 \cdot 12) = 0{,}3509\,\mathrm{K/W}$.
2. $\dot{Q} = 25/0{,}3509 = 71{,}25\,\mathrm{W}$. De flux is $5{,}94\,\mathrm{W/m^2}$ en de gradiënt $-156{,}25\,\mathrm{K/m}$.
3. In acht uur stroomt $71{,}25 \cdot 8 = 570\,\mathrm{Wh} = 2{,}052\,\mathrm{MJ}$ door de plaat.

ANTWOORD

De plaat verliest 71,3 W onder deze opgelegde oppervlaktetemperaturen.

Klopt dit? De luchtlagen aan weerszijden zijn hier niet meegerekend: oppervlaktemperaturen zijn geen luchttemperaturen.

UITLEG · 17.4

Convectie koppelt lucht aan een oppervlak

4/23

Een stilstaande luchtlaag geleidt; beweging transporteert energie verder. Newtons warmteovergangsmodel bundelt beide: $\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty)$ en $R_{\mathrm{conv}} = 1/(hA)$. h is geen universele materiaalconstante. Het hangt af van snelheid, vorm, oriëntatie, ruwheid en stromingsregime.

Natuurlijke convectie ontstaat door dichtheidsverschillen; gedwongen convectie door ventilator of pomp. Een ontwerp gebruikt een correlatie met haar toepassingsgebied of een gemeten h, geen willekeurig tabelgetal. Bijvoorbeeld: bij $h = 8\,\mathrm{W/(m^2K)}$, $A = 2\,\mathrm{m^2}$ en 15 K verschil volgt 240 W.

Een ventilator maakt geen kou

Een ventilator verhoogt vooral de warmteoverdracht. Hij kan een voorwerp sneller richting luchttemperatuur brengen, maar levert zelf elektrische energie die uiteindelijk warmte wordt.

UITLEG · 17.5

Weerstanden in serie: temperatuurvallen verdelen

5/23

In serie stroomt hetzelfde vermogen door elke laag. $T_i - T_{i+1} = \dot{Q} R_i$. Alle temperatuurvallen optellen geeft $\Delta T = \dot{Q} \sum R_i$. Bij een vlakke wand werk je vaak per vierkante meter: $R' = 1/h_i + \sum d_i/\lambda_i + 1/h_o$ in m²K/W en $U = 1/R'$.

De binnen- en buitenfilms zijn hier rekenwaarden $R'_i = 0{,}13$ en $R'_o = 0{,}04\,\mathrm{m^2K/W}$. De opgegeven filmweerstanden kunnen effectieve straling bevatten. Daar nog een volledige stralingsstroom bovenop tellen zou hetzelfde verlies tweemaal tellen.

VAN U-WAARDE NAAR GEBOUWVERLIES

$$H = UA, \qquad R_{\mathrm{wand}} = \frac{1}{UA}$$



Een grotere weerstand krijgt een grotere temperatuurval, ook als de laag fysiek dun is.

UITGEWERKT VOORBEELD · 17.6

Houtskelet: isolatie met een parallelle koudebrug

6/23

Een volledig doorgerekend ontwerpvoorbeeld.

GEGEVEN

- 12,5 mm gips (0,25 W/(m·K)), 160 mm houtvezel (0,038 W/(m·K)), 15 mm OSB (0,13 W/(m·K)); films 0,13 en 0,04 m²K/W.
- In 10 % van de wand vervangt hout met λ = 0,13 W/(m·K) de houtvezel. Dit is een rekenwand, geen nieuwe specificatie van de woonmodule.

GEVRAAGD

- U zonder en met stijlbrug.

OPLOSSING

1. Isolatiepad: R' = 0,13 + 0,0125/0,25 + 0,16/0,038 + 0,015/0,13 + 0,04 = 4,546 m²K/W. U = 0,220 W/(m²K).
2. Houtpad: R' = 1,566 m²K/W. Beide paden zien hetzelfde temperatuurverschil: hun vermogens tellen op.
3. Ueff = 0,90·Uisolatie + 0,10·Uhout = 0,262 W/(m²K). Een gemiddelde van de weerstanden zou hier fout zijn.

ANTWOORD

De stijlen verhogen U met 19,0 %.

Klopt dit? Aandelen tellen op tot 1. Dit eenvoudige model mist de tweedimensionale spreiding rond een stijl; aansluitingen vergen een uitgebreider model.

UITLEG · 17.7

Ventilatie is een parallel verliespad

Bij volumestroom $\dot{V}$ verlaat lucht de ruimte met enthalpieverschil ongeveer $\rho c_p \Delta T$ per m³. Dus $H_{\text{vent}} = \rho c_p \dot{V}$. Met warmteterugwinning is dat $(1-\eta)\rho c_p \dot{V}$. Een debiet in m³/h moet eerst door 3600.

De 100 m³/h van e14, met 85 % warmteterugwinning, $\rho = 1{,}2\,\text{kg/m}^3$ en $c_p = 1005\,\text{J/(kgK)}$, geeft $H_{\text{vent}} = 5{,}03\,\text{W/K}$. Zonder terugwinning is dat 33,5 W/K. Dit verlies zit al in de woonmodulewaarde; voeg het niet nogmaals toe aan de 50 W/K van het station.

PARALLELLE VERLIESPADEN

$$H_{\text{totaal}} = \sum_j U_j A_j + H_{\text{vent}} + H_{\text{kieren}}$$

UITLEG · 17.8

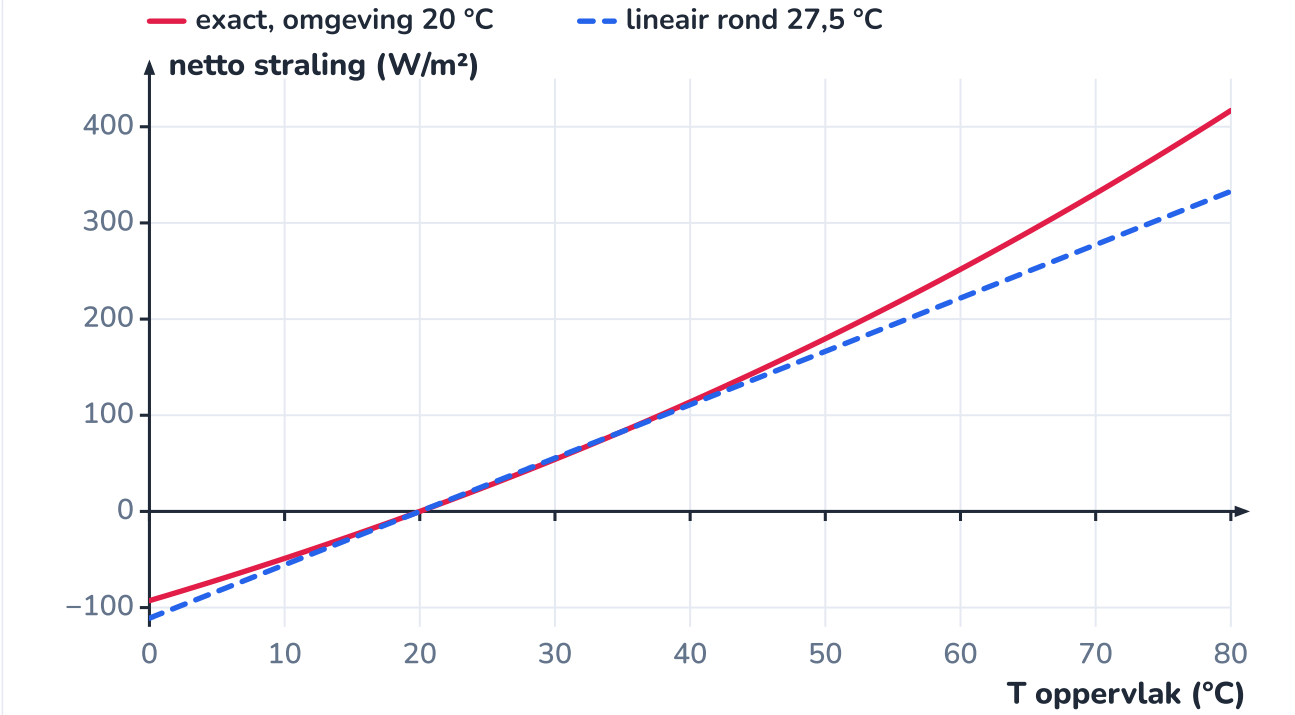
Stefan-Boltzmann: uitwisselen met een omgeving

Een zwart lichaam straalt σT^4 per m² uit. Voor een grijs oppervlak in een grote isotherme omgeving, met zichtfactor ongeveer 1, is netto $\dot{Q} = \epsilon\sigma A(T_s^4 - T_{\text{omg}}^4)$. De omgeving straalt terug. Voor twee eindige platen spelen zichtfactor en beide emissiviteiten mee.

$\sigma = 5{,}670374419 \cdot 10^{-8}\,\text{W/(m}^2\text{K}^4\text{)}$ (afgeronde waarde uit NIST CODATA). Het product van een reflecterend metaaloppervlak en een luchtspleet kan straling beperken; een reflecterende folie zonder spleet is geen dikke isolatielaag.

EXACT FACTORISEREN VAN HET VIERDE-MACHTENVERSCHIL

$$h_{\text{rad}} = \epsilon\sigma(T_s + T_o)(T_s^2 + T_o^2)$$



De rechte benadert de kromme rond haar gekozen temperatuurgebied; extrapoleren naar hete oppervlakken onderschat het verlies.

UITGEWERKT VOORBEELD · 17.9

Radiator: straling en convectie samen

9/23

Een volledig doorgerekend ontwerpvoorbeeld.

GEGEVEN

- Oppervlak 2,0 m² op 35 °C, grote omgeving en lucht beide 20 °C, ε = 0,90, hconv = 8,0 W/(m²K).

GEVRAAGD

- Afzonderlijke vermogens en totaal.

OPLOSSING

1. Gebruik 308,15 en 293,15 K. $\dot{Q}_{\text{rad}} = 0{,}90\sigma \cdot 2(308{,}15^4 - 293{,}15^4)$ = 166,5 W.
2. Convectie: 8,0·2,0·15 = 240 W. De twee mechanismen zijn parallel: totaal 406,5 W.
3. Het gemiddelde temperatuurniveau is 300,65 K. De lokale stralingscoëfficiënt 4εσTm³ is 5,55 W/(m²K), dus in dezelfde orde als de convectie.

ANTWOORD

Samen 407 W; straling draagt 41 % bij.

Klopt dit? Dit hconv bevat uitdrukkelijk geen straling. Anders mocht je de bijdragen niet optellen.

UITLEG · 17.10

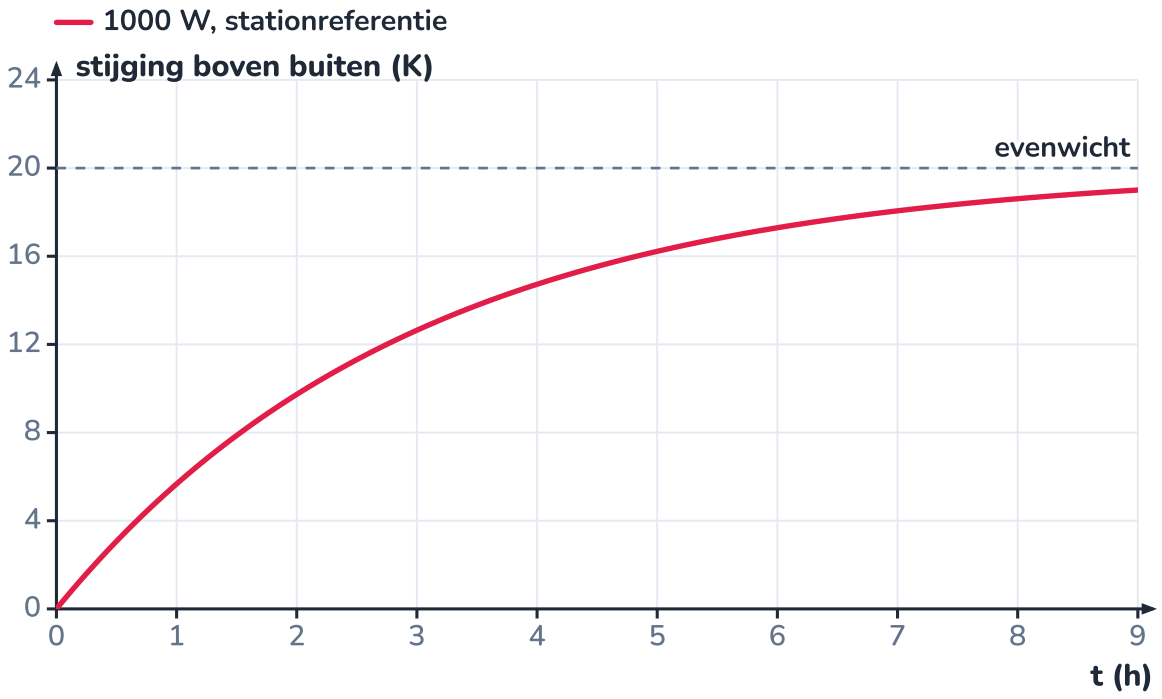
Een knoop: de differentiaalvergelijking afleiden

Neem vaste C, H, buitenwaarde T_b en ingaand vermogen P. Tijdens $\mathrm{d}t$ verandert de energie met $C\,\mathrm{d}T$; binnen komt $P\,\mathrm{d}t$, buiten gaat $H(T-T_b)\,\mathrm{d}t$. Delen door $\mathrm{d}t$ geeft $C\dot{T} = P - H(T-T_b)$.

Het evenwicht is $T_\infty = T_b + P/H$. Zet $z = T - T_\infty$. Dan $\dot{z} = -Hz/C$, zodat $\mathrm{d}z/z = -H\mathrm{d}t/C$ en $z = z_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$ met $\tau = C/H$. De tijdconstante verandert de eindsituatie niet.

ANALYTISCHE STAPRESPONS

$$T(t) = T_b + \frac{P}{H} + \left(T_0 - T_b - \frac{P}{H}\right)\mathrm{e}^{-tH/C}$$



Na drie uur is 63,2 % van de uiteindelijke stijging bereikt; de overige stijging verloopt steeds trager.

UITGEWERKT VOORBEELD · 17.11

Het stationreferentiemodel van e39

Een volledig doorgerekend ontwerpvoorbeeld.

GEGEVEN

- H = 50 W/K, C = 540 kJ/K, Tb = 0 °C, T0 = 0 °C, P = 1000 W.

GEVRAAGD

- Evenwicht, tijdconstante, temperatuur na één uur en tijd tot 18 °C.

OPLOSSING

1. T∞ = 1000/50 = 20 °C. τ = 540000/50 = 10800 s = 3 h.

2 Na één uur: T = 20(1 – exp(–1/3)) = 5,67 °C.

3 18/20 = 1 – exp(–t/3), dus t = –3 ln(0,10) = 6,91 h. Tot dicht bij evenwicht komen duurt veel langer dan één tijdconstante.

ANTWOORD

De stijging is na één uur 5,67 K; 18 °C vraagt 6,91 uur.

Klopt dit? Aan het begin is dT/dt = 1000/540000 = 6,67 K/h; die helling daalt zodra warmteverlies ontstaat.

UITLEG · 17.12

Wanneer één temperatuur te grof wordt

12/23

Een homogeen voorwerp is een redelijke knoop als interne temperatuurverschillen klein blijven. De verhouding $Bi = hL_c/\lambda$ vergelijkt interne geleidingsweerstand met oppervlakweerstand, met $L_c = V/A$. $Bi \ll 1$ is gunstig. Een gebouw is echter een samengesteld systeem; daar toets je een knoop vooral aan de tijdschalen en meetresiduen.

Lucht, meubels en een grote waterbuffer krijgen niet onmiddellijk dezelfde temperatuur. Bij verwarmen reageert de lucht eerst; bij uitschakelen kan warm water nog energie teruggeven. Het totaal $C_a + C_b$ zomaar in één knoop stoppen mist deze uitwisseling.

Een effectieve capaciteit is geen volledige massatelling

De 540 kJ/K van e39 geldt voor de snelle stationrespons, zonder de modulebuffer. De 80 kJ/K van de module is lucht plus snel reagerende massa, niet alleen de warmtecapaciteit van het gas.

UITLEG · 17.13

Twee knopen uit twee energiebalansen

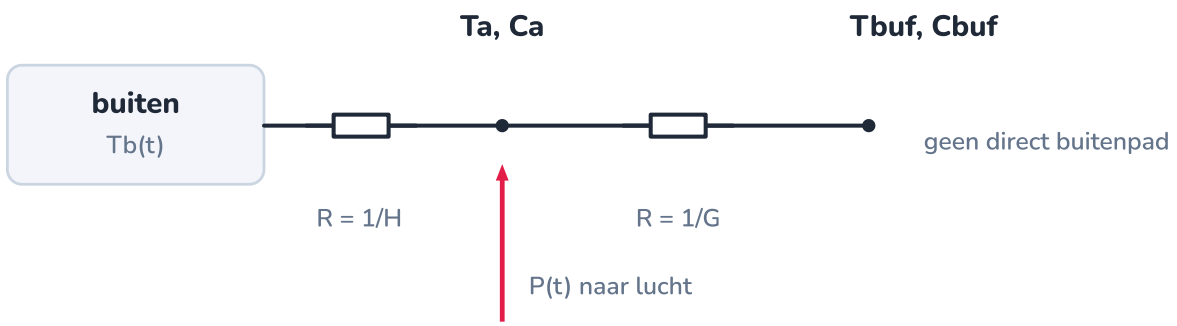
13/23

Voor de klimaatmodule nemen we $C_a = 80\,\mathrm{kJ/K}$, $C_b = 1{,}10\,\mathrm{MJ/K}$, $H = 20{,}2\,\mathrm{W/K}$ en $G = 30\,\mathrm{W/K}$ uit i31. De buffer verliest in dit model alleen warmte via de lucht. Het convectorvermogen wordt als netto warmte aan de lucht toegevoerd.

$$C_a\dot{T}_a = P - H(T_a - T_b) - G(T_a - T_{\mathrm{buf}})$$

$$C_b\dot{T}_{\mathrm{buf}} = G(T_a - T_{\mathrm{buf}})$$

Optellen laat de interne overdracht wegvallen: $(C_a\dot{T}_a + C_b\dot{T}_{\mathrm{buf}}) = P - H(T_a - T_b)$. Dat is een sterke controle op de tekens. Dezelfde koppelstroom is verlies voor de ene knoop en winst voor de andere.



De weerstand naar buiten verschilt van de weerstand tussen buffer en lucht; ze mogen niet tot één tijdconstante worden samengevouwen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 17.14

Twee eigenwaarden: snelle lucht, trage opslag

14/23

Een volledig doorgerekend ontwerpvoorbeeld.

GEGEVEN

- Modulewaarden uit de twee balansen, constante bron en buitenwaarde.

GEVRAAGD

- De twee natuurlijke tijdschalen en de Eulerstabiliteitsgrens.

OPLOSSING

1 Rond evenwicht schrijf je $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ met $A = \begin{pmatrix} -(H+G)/C_a & G/C_a \\ G/C_b & -G/C_b \end{pmatrix}$. Een oplossing $\mathbf{z} = \mathbf{v}e^{st}$ bestaat als $\det(A - sI) = 0$.

2

KARAKTERISTIEKE VERGELIJKING

$$s^2 + \left(\frac{H+G}{C_a} + \frac{G}{C_b}\right)s + \frac{HG}{C_aC_b} = 0$$

3 De wortels zijn negatief. Hun −1/s levert 0,431 h en 25,98 h. Elke temperatuur bevat een mengsel van beide exponentiële bijdragen.

4 Voor Euler geldt per mode $|1 + s\Delta t| < 1$. De snelste mode vraagt $\Delta t < 3105\,\text{s}$. Kies veel kleiner voor nauwkeurigheid; hier 10 s.

ANTWOORD

Twee tijdschalen horen bij het gekoppelde systeem, niet simpelweg bij Ca/H en Cb/G.

Klopt dit? Beide negatieve wortels bevestigen dat een constante verstoring uitdempt naar een nieuw evenwicht.

CODE · 17.15

Een reproduceerbare thermische tweeling

15/23

Een modelreeks begint om 00:00 UTC+1 met beide knopen op 12 °C, buiten constant 4 °C, 600 W netto warmte. Beide nieuwe temperaturen gebruiken de **oude** toestand; achtereenvolgens de nieuwe luchtwaarde voor de buffer gebruiken verandert de methode. De code vergelijkt bovendien 10 s met 5 s.

Python **module_thermisch.py** 25 regels

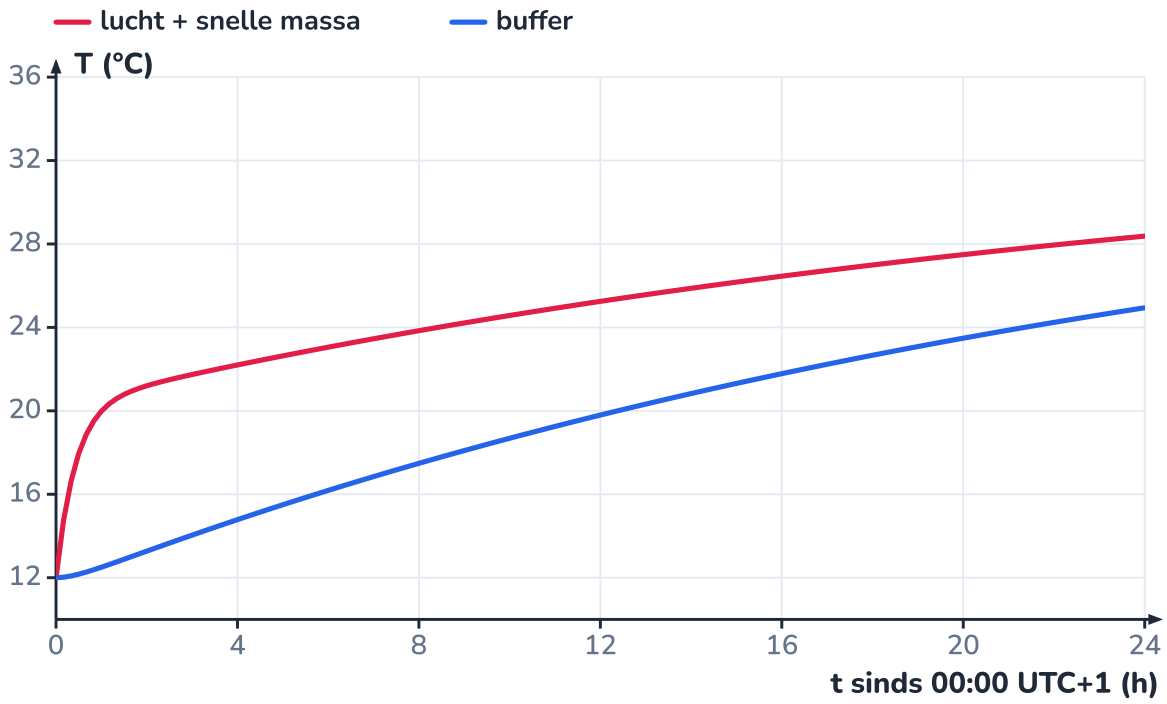
```python
# module_thermisch.py — twee knopen, SI, modeltijd sinds 00:00 UTC+1
import numpy as np
CA, CB = 80000.0, 1100000.0             # J/K: snelle massa en trage buffer
H, G = 20.2, 30.0                       # W/K: buitenverlies en interne koppeling

def simuleer(dt=10.0, uren=24, vermogen=600.0, buiten=4.0, start=12.0):
    a = b = start
    rij = []
    for k in range(round(uren * 3600 / dt) + 1):
        rij.append((k * dt / 3600, a, b))
        qa = vermogen - H * (a - buiten) - G * (a - b)
        qb = G * (a - b)
        a, b = a + dt * qa / CA, b + dt * qb / CB
    return np.asarray(rij)

A = np.array([[-(H + G)/CA, G/CA], [G/CB, -G/CB]])
polen = np.linalg.eigvals(A)
tau = sorted(-1 / polen / 3600)
rij = simuleer()
for uur in (0, 1, 4, 8, 24):
    k = round(uur * 3600 / 10)
    print(f"{uur:2d} h: lucht {rij[k,1]:.2f} °C, buffer {rij[k,2]:.2f} °C")
print("tijdconstanten (h):", ", ".join(f"{x:.3f}" for x in tau))
fijn = simuleer(dt=5)
print(f"verschil laatste luchtwaarde 10/5 s: {abs(rij[-1,1]-fijn[-1,1]):.5f} K")
```

```
 0 h: lucht 12.00 °C, buffer 12.00 °C
 1 h: lucht 19.98 °C, buffer 12.50 °C
 4 h: lucht 22.20 °C, buffer 14.78 °C
 8 h: lucht 23.84 °C, buffer 17.48 °C
24 h: lucht 28.38 °C, buffer 24.94 °C
tijdconstanten (h): 0.431, 25.981
verschil laatste luchtwaarde 10/5 s: 0.00013 K
```

Een afgeronde uitvoer is geen meting. De tabel en grafiek komen uit exact deze code, zodat je aannames en resultaten samen kan wijzigen.



Zelfs na vele uren hebben lucht en buffer nog niet dezelfde temperatuur; het gezamenlijke evenwicht is 33,70 °C.

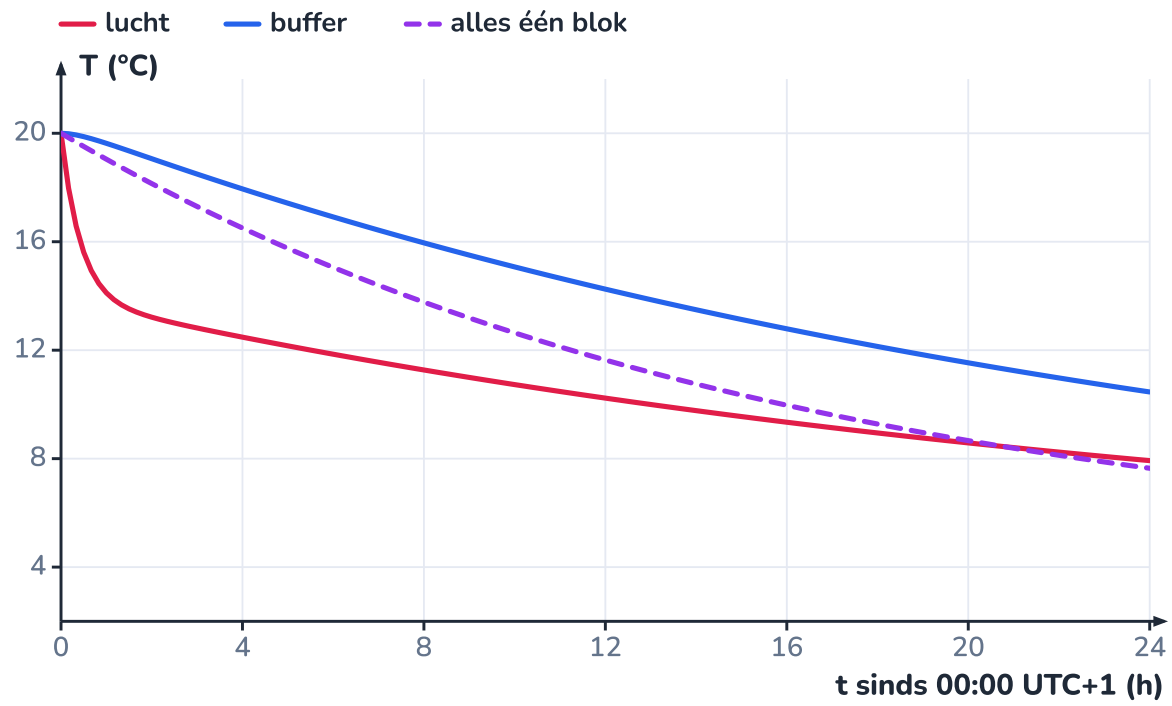
UITLEG · 17.16

Afkoelen toont wat het gemiddelde verbergt

16/23

Na uitschakelen uit 20 °C in 4 °C buitenlucht valt de lucht snel terug, terwijl de buffer relatief warm blijft. Daardoor blijft er $G(T_{\mathrm{buf}} - T_a)$ naar de lucht stromen. De éénknoopbenadering met 1,18 MJ/K heeft dezelfde totale energie bij een uniforme temperatuur, maar voorspelt het comfort in het eerste uur verkeerd.

Een regeling gebruikt dus T_a als comfortvariabele en T_{buf} als energietoestand. Een digitale tweeling is pas nuttig wanneer de toestand betekenis heeft: alleen een gladde voorspelde lijn is onvoldoende.



De volle reeksen en de gestippelde éénknoopbenadering starten met dezelfde energie; hun luchttemperaturen verschillen toch sterk.

UITLEG · 17.17

Parameters schatten met een energiebalans

17/23

In rust volgt $H = P/(T - T_b)$, mits zon en interne winsten bekend zijn. Tijdens afkoelen zonder bron volgt voor één knoop $\ln[(T - T_b)/(T_0 - T_b)] = -t/\tau$. De helling van die rechte is $-1/\tau$; vervolgens $C = H\tau$.

Bij twee knopen kan je de luchtbalans herschrijven als $P = C_a\dot{T}_a + H(T_a - T_b) + G(T_a - T_{\text{buf}})$. Meet beide temperaturen en vermogen. De bufferbalans voegt $C_b\dot{T}_{\text{buf}} = G(T_a - T_{\text{buf}})$ toe. Afgeleiden versterken ruis, zodat e36 rechtstreeks tijdreeksen zal fitten.

Een alleenstaande koelcurve bepaalt vooral verhoudingen; om C en H afzonderlijk te vinden heb je een gekend energie- of vermogenssignaal nodig. Bij vrijwel gelijke lucht- en buffertemperatuur is G slecht identificeerbaar.

MODEL FITTEN, GEEN ONBEPERKT BEWIJS

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{k} [T_{a,k} - T_a(t_k;\boldsymbol{\theta})]^2$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 17.18

Een afkoelproef met onafhankelijk verliespunt

18/23

Een volledig doorgerekend ontwerpvoorbeeld.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- Voorbeeldproef: Tb = 5 °C, T0 = 25 °C, na 2 h T = 17,13 °C. In een aparte evenwichtsproef houdt 800 W de knoop 16,0 K boven buiten.

- H, τ en C van het eenvoudige model.

OPLOSSING

1. Het rustpunt geeft H = 800/16 = 50 W/K.

2. De genormaliseerde afkoeling is (17,13−5)/(25−5) = 0,6065. τ = −2/ln(0,6065) = 4,000 h.

3. C = Hτ = 50·14 399 = 719,9 kJ/K. Het kleine verschil met 720 kJ/K komt door het afgeronde meetpunt.

ANTWOORD

H = 50 W/K en C ≈ 720 kJ/K; deze voorbeeldknoop is bewust niet de 540 kJ/K-stationreferentie.

Klopt dit? Fitdata en toetsdata scheiden. Een nieuw rustpunt en een nieuwe koelproef moeten volgen voordat je dit als stationsparameter overneemt.

PROEF · 17.19

Een thermische parameterproef zonder verborgen vermogen

19/23

ONDERZOEKSVRAAG

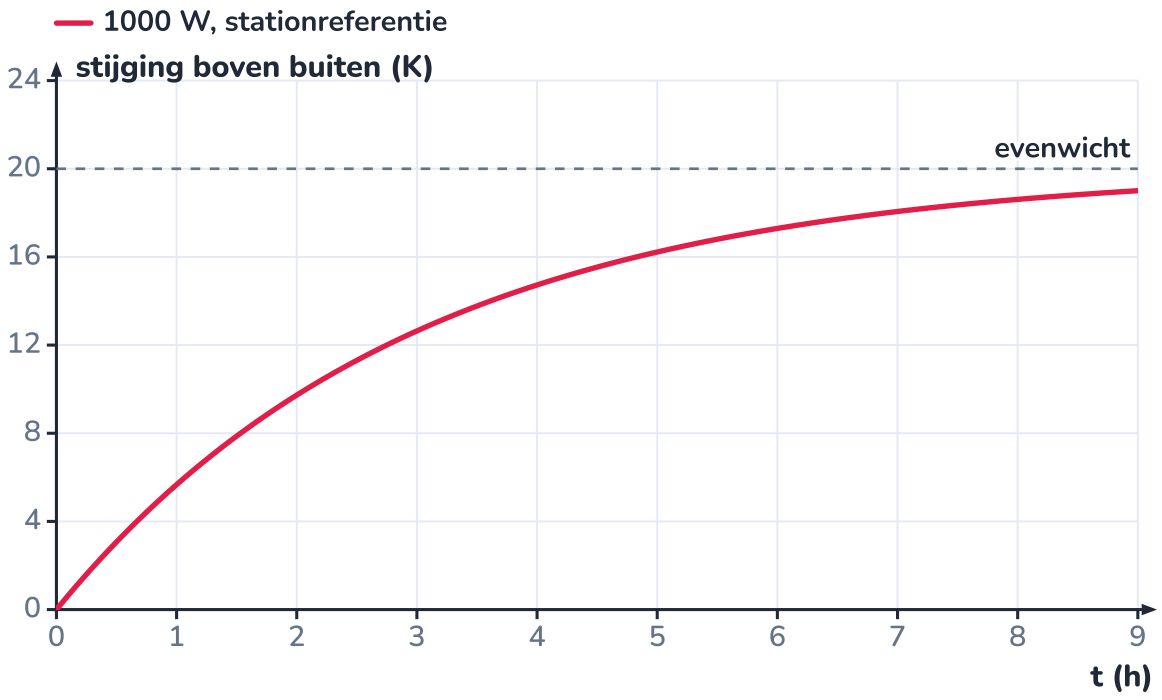
Een demonstratie maakt verlies en capaciteit apart zichtbaar.

MATERIAAL

geïsoleerd vat met 2,0 kg water | roerder | twee thermometers | gezekerde 12 V-verwarming | vermogensmeter | logger

Veiligheid

Gebruik uitsluitend een daarvoor geschikte laagspanningsverwarming en beschermd circuit. Geen onderdompeling van netspanning of zelfgebouwde drukvaten; beperk watertemperatuur en voorkom droogkoken.



De vorm is algemeen; het vat heeft eigen waarden en een veel kortere tijdschaal dan het station.

WERKWIJZE

1. Meet water- en luchttemperatuur en netto verwarmingsvermogen; noteer de systeemgrens inclusief vat en sensor.
2. Roer langzaam en vergelijk twee waterposities om de éénknoopaanname te toetsen.
3. Verwarm met constant gemeten vermogen; registreer een bijna-stationair deel en schakel daarna uit.
4. Schat H uit het rustpunt en C uit de koelcurve. Houd een tweede vermogen of proefdag buiten de fit.
5. Plot residuen tegen tijd en temperatuur. Bekijk of verdamping, sensorvertraging of het vat een extra knoop vraagt.

WAARNEMING

De respons vlakt af; na uitschakelen daalt de temperatuur ongeveer exponentieel. Bij onvoldoende roeren lopen beide sensoren uiteen.

VERKLARING

Water alleen heeft $C \approx 2{,}0 \cdot 4186 = 8372\,\mathrm{J/K}$. Een groter gefit C kan komen van vat en sensor; een verkeerde H ook van ongemeten verdamping. Een goede fit maskeert geen slechte systeemgrens.

UITLEG · 17.20

Van warmte naar elektriciteit en comfort

20/23

Het warmtemodel vraagt **thermisch** vermogen. De elektrische vraag van de R290-warmtepomp volgt pas na delen door haar COP en toevoegen van hulpenergie (e16). Een constante COP is alleen geldig binnen een beperkt bron- en aanvoergebied; een hoger waterniveau vergroot vaak het temperatuurverschil en verlaagt COP.

Voor het hele station zonder interne winst is bij −8 °C buiten 50·28 = 1400 W nodig; bij −15 °C 1750 W. Dat zijn dezelfde waarden als e39. Voor de module apart is bij −8 °C 20,2·28 = 565,6 W; de woonmodule levert afgerond de resterende 29,8 W/K. Buffers leveren tijdelijk energie, geen permanent extra vermogen.

i40 rekent de werkende module met scherm en interne winst op 525 W en 1,09 MJ/K; dat is een andere bedrijfstoestand dan de onbeschermde 20,2 W/K-ontwerpbalans hier. De stationreferentie blijft op 50 W/K. Een 100 L-warmtepompbuffer en de 200 L-modulebuffer zijn bovendien afzonderlijke onderdelen.

KOPPELING MET DE ENERGIETWEELING

$$P_{\text{el}} = \frac{P_{\text{warmte}}}{COP} + P_{\text{hulp}}$$

VERHAAL · 17.21

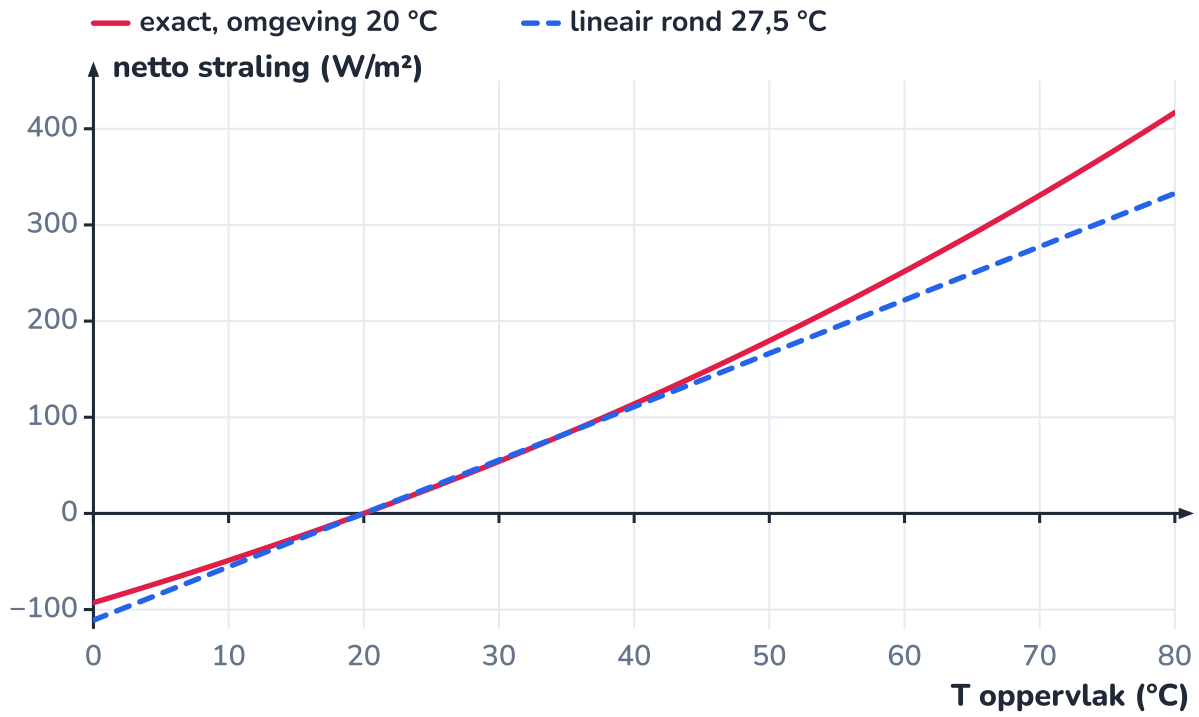
Een ruimtevaartuig regelt warmte zonder buitenlucht

21/23

Een radiator op een ruimtevaartuig kan geen warmte door convectie aan vacuüm afgeven. Geleiding brengt energie naar het radiatoroppervlak; straling voert ze af. Tegelijk kan zonnestraling een andere wand opwarmen. Oppervlakte-eigenschappen, kijkrichting en warmtebuizen zijn daarom ontwerpvariabelen.

NASA beschrijft deze balans in haar overzicht van thermische beheersing voor kleine ruimtevaartuigen. Voor Habitat blijft convectie aan de buitenlucht wel belangrijk. De overdraagbare les is de systeemgrens: zet voor ieder pad neer welke omgeving energie ontvangt, voordat je een coëfficiënt kiest.

Een infraroodcamera meet bovendien straling, waarna een toestel met een ingestelde emissiviteit een oppervlaktetemperatuur schat. Glanzend metaal kan de omgeving reflecteren. Een donker meetvlak en een contactsensor helpen een koudebrug beoordelen; een kleurrijk beeld alleen levert nog geen U-waarde.



De stralingswet geldt zowel op aarde als in vacuüm; de aanwezige overige verliespaden verschillen.

NASLAG · 17.22

Warmtepaden, opslag en geldigheid

22/23

Fourier

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

symbool	betekenis	eenheid
λ	geleidingscoëfficiënt	W/(m·K)
A	oppervlakte	m²

convectie

$$\dot{Q} = hA\Delta T$$

symbool	betekenis	eenheid
h	overgangscoëfficiënt	W/(m²·K)

netto straling naar grote omgeving

$$\dot{Q} = \epsilon\sigma A(T_s^4 - T_o^4)$$

symbool	betekenis	eenheid
ε	emissiviteit	1
T	absolute temperatuur	K

netwerkregels

$$R_{\text{serie}} = \sum R_j, \quad H_{\text{parallel}} = \sum H_j$$

symbool	betekenis	eenheid
R	weerstand	K/W
H	geleiding van een pad	W/K

opslag en eerste-ordetijd

$$C = mc, \quad \tau = C/H$$

symbool	betekenis	eenheid
C	capaciteit	J/K
τ	tijdconstante	s

Model	H	Capaciteit	Doel

Meetkas e04	16,7 W/K	≈30 kJ/K snel	dagcurve
Module i31/e17	20,2 W/K	80 kJ/K + 1,10 MJ/K, G = 30 W/K	lucht en buffer
Station e39	50 W/K	540 kJ/K snel	PID-referentie, τ = 3 h

HET GEHEEL · 17.23

Het geheel: een model dat je kan toetsen

23/23

e04 gaf de numerieke evolutie, e14 de ventilatie, e15 de energiebalans en e16 de warmtebron. Hier krijgen hun verlies- en opslagtermen een fysische betekenis. e36 zal parameters fitten; e38 onderzoekt modes en stabiliteit; e39 regelt op een eenvoudiger referentie. Gebruik hetzelfde model niet blind voor elk doel.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Euler en betekenis van een toestand.

E16 Warmtepompen en koelen

Thermisch vermogen omzetten naar elektrische vraag.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Parameters zoeken en fouten van de discretisatie beoordelen.

E39 PID-regeling

Referentielus blijft op de snelle stationknoop.

Habitat

Vastgelegd voor de digitale tweeling: modulemodel Ca = 80 kJ/K, Cbuffer = 1,10 MJ/K, H = 20,2 W/K, G = 30 W/K; alle voorbeeldreeksen op UTC+1. De berekende modes zijn 0,431 en 25,98 h. Dit verfijnt i31 zonder de stationreferentie te vervangen. Alleen gevalideerde nieuwe proefparameters mogen later dossierwaarden worden.

SAMENVATTING

In het kort

- Fourier bepaalt lokale geleiding; convectie en straling koppelen oppervlakken aan hun omgeving.
- Weerstanden tellen in serie; geleidingen en vermogens tellen in parallel.
- Warmtecapaciteit bepaalt traagheid, warmteverlies bepaalt het benodigde rustvermogen.
- Twee knopen leveren twee modes en vermijden dat een buffer de snelle luchtrespons verbergt.
- Een fit vereist gekend vermogen, voldoende prikkeling en een onafhankelijke toetsreeks.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

warmteovergangscoëfficiënt

De lokale verhouding tussen warmtestroomdichtheid en temperatuurverschil aan een oppervlak.

thermische weerstand

Temperatuurverschil gedeeld door de warmtestroom, in K/W.

tijdconstante

De tijdschaal van een exponentiële respons; na één tijdconstante resteert 1/e van een beginafwijking.

thermische knoop

Een modeldeel met één temperatuur en een eigen warmtecapaciteit.

identificeerbaarheid

De mate waarin verschillende parameterwaarden door de beschikbare data van elkaar te onderscheiden zijn.

E EXPERT · DEEL E3 · THERMODYNAMICA EN STROMING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 18

Stroming van vloeistoffen en gassen

Van continuïteit tot een leidingnet met een werkelijk werkpunt

Een pomp levert geen vast debiet onafhankelijk van de slang. Hoogte, viscositeit, bochten en vervuiling bepalen samen waar ze werkt. Je rekent het netwerk door en controleert of elke NFT-goot voldoende water krijgt.

9× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

E Energie · K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Een goed totaaldebiet moet ook in vier bruikbare gootstromen terechtkomen.

Na dit hoofdstuk

- Je gebruikt massa- en volumebehoud met een correcte systeemgrens.
- Je leidt Bernoulli af en voegt pomp en verliezen toe.
- Je bepaalt Reynoldsgetal en kiest een geldig drukverliesmodel.
- Je berekent en toetst het snijpunt van pomp- en systeemcurve.
- Je dimensioneert het waternet van Habitat met metingen en onderhoud.

UITLEG · 18.1

Van een bak vullen naar een behoudswet

1/22

Debiet is $Q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ in m³/s. De doorsnedegemiddelde snelheid voldoet aan $Q = A\bar{v}$; lokaal is $Q = \int_A \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A$. Gebruik bij een niet-uniform profiel het gemiddelde, niet de pieksnelheid.

Voor een controlevolume geldt $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \sum \dot{m}_{\text{in}} - \sum \dot{m}_{\text{uit}}$. Bij constante dichtheid is de volumebalans dezelfde vorm. Stationair betekent geen massaopstapeling; incompressibel betekent vrijwel constante

dichtheid. Dit zijn verschillende aannames.

CONTINUÏTEIT VOOR STATIONAIR INCOMPRESSIBEL WATER

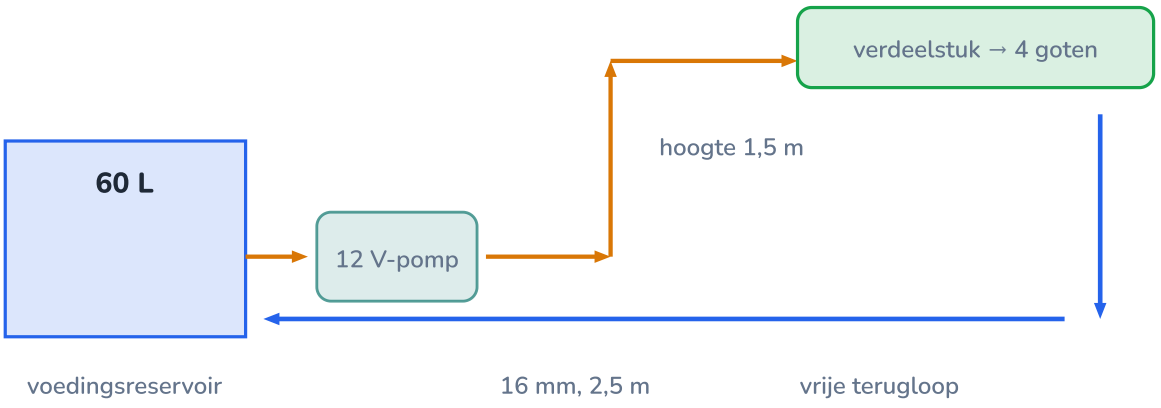
$$\dot{m} = \rho Q, \qquad A_1 \bar{v}_1 = A_2 \bar{v}_2$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.2

De vier goten krijgen elk 1,2 L/min

2/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.



De pomp brengt de oplossing naar het hogere open verdeelstuk; de terugloop is vrij.

GEGEVEN

- NFT totaal 4,8 L/min, vier gelijke takken; hoofdaanvoer binnendiameter 16 mm.

GEVRAAGD

- Debiet per goot, hoofdsnelheid en doorlooptijd in 2,5 m slang.

OPLOSSING

1. 4,8 L/min = $8{,}0 \cdot 10^{-5}$ m³/s. Per goot 1,2 L/min = 20 mL/s.
2. $A = \pi \cdot 0{,}016^2/4 = 2{,}011 \cdot 10^{-4}$ m². $v = Q/A = 0{,}398$ m/s.
3. Doorlooptijd voor een vloeistofdeeltje in de volledig gevulde slang: $2{,}5/v = 6{,}28$ s; slangvolume 0,503 L.

ANTWOORD

De hoofdleiding vervoert 4,8 L/min met ongeveer 0,40 m/s; elke gelijke goot krijgt een kwart.

Klopt dit? Gelijke takdebieten volgen alleen bij gelijke weerstand en aansluitdruk. Een ongelijk verdeelstuk vraagt inregeling.

UITLEG · 18.3

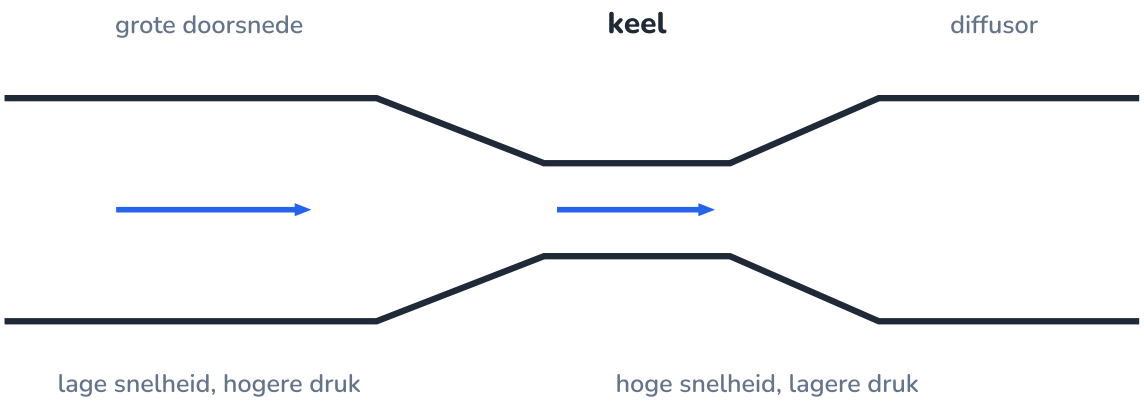
Bernoulli afleiden uit arbeid en kinetische energie

Volg een klein vloeistofvolume $\mathrm{d}V$ langs een stroomlijn. Druk verricht netto arbeid $(p_1 - p_2)\mathrm{d}V$. Zwaarte-energie verandert met $\rho g(z_2 - z_1)\mathrm{d}V$; kinetische energie met $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)\mathrm{d}V$. Zonder dissipatie is arbeid gelijk aan energieverandering.

Delen door $\mathrm{d}V$ geeft $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{constant}$. Elk onderdeel heeft dimensie Pa = J/m³. Delen door ρg geeft meter vloeistofkolom. Dit geldt stationair, incompressibel en zonder merkbare wrijving langs dezelfde stroomlijn; bij rotatie kunnen verschillende stroomlijnen andere constanten hebben.

DRUK-, SNELHEIDS- EN HOOGTEHOOFD

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constant}$$



De lagere keeldruk is geen extra energiebron: de snelheid is daar groter.

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.4

Een venturi zonder magische aanzuiging

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.

GEGEVEN

- Water ρ = 1000 kg/m³; horizontaal, D1 = 20 mm, D2 = 10 mm, Q = 6,0 L/min; verliezen voorlopig nul.

GEVRAAGD

- Snelheden en drukverschil.

OPLOSSING

1. Q = 1,0·10⁻⁴ m³/s. v1 = Q/(π·0,020²/4) = 0,3183 m/s; v2 = viermaal v1 = 1,2732 m/s.
2. Bernoulli: p1−p2 = ρ(v2²−v1²)/2 = 759,9 Pa.
3. Een echte venturi verliest energie. Na de diffusor herstelt de druk slechts deels; bij te lage absolute druk kan cavitatie ontstaan.

ANTWOORD

De drukdaling is circa 0,760 kPa.

Klopt dit? De doorsnede wordt een kwart. Dit betreft een gevulde buis, geen open goot met veranderende diepte.

UITLEG · 18.5

Pomp en verliezen in de energiebalans

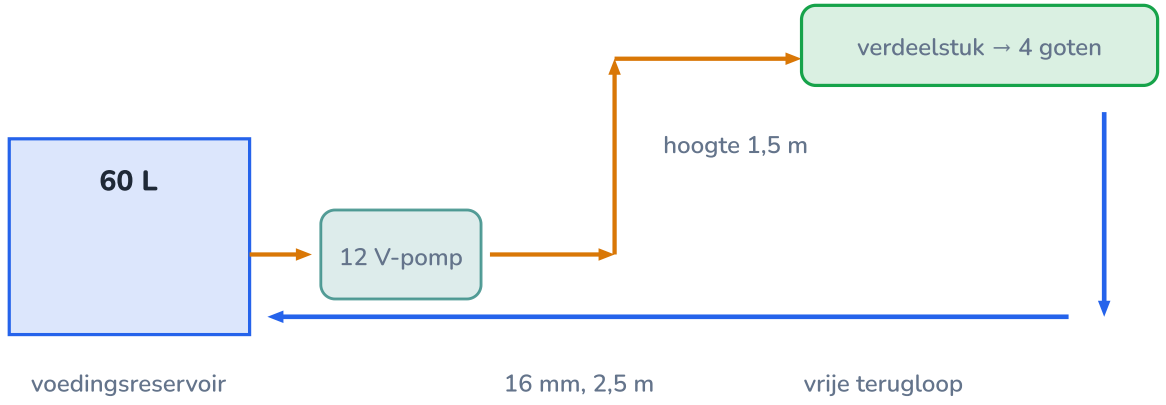
5/22

Wrijving zet mechanische energie om in inwendige energie. Die verdwijnt uit de hydraulische hoogtebalans, maar niet uit de eerste hoofdwet. Een pomp voegt H_p toe; een turbine onttrekt H_t; verlies heet h_L.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + H_t + h_L$$

Een correctiefactor α vóór $v^2/(2g)$ kan nodig zijn voor een niet-uniform profiel: α = 2 bij ontwikkeld laminair rond profiel. In onze turbulente voorbeelden gebruiken we α ≈ 1.

Tussen open reservoirs zijn oppervlaktedrukken atmosferisch en oppervlaksnelheden klein. De pomp levert dan hoogteverschil plus verlies. In een gesloten recirculatielus valt de netto geometrische hoogte weg. NFT heeft een open retour en behoudt zijn 1,5 m statische hoogte.



Een systeemgrens op de vrije oppervlakken voorkomt dubbel tellen van atmosferische druk of leidinghoogte.

UITLEG · 18.6

Viscositeit: schuifspanning door snelheidsverschil

6/22

Voor een Newtonse vloeistof geldt $\tau_{\text{schuif}} = \mu\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}y$. Dynamische viscositeit μ heeft eenheid Pa·s; kinematische viscositeit is $\nu = \mu/\rho$ in m²/s. Aan een gewone wand geldt no-slip: de vloeistof volgt de wandsnelheid.

Water rond 20 °C krijgt hier afgerond $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ en $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. Dit zijn rekenwaarden. NIST WebBook geeft toestandafhankelijke eigenschappen; temperatuur en opgeloste stoffen veranderen ze.

Viscositeit is geen dichtheid

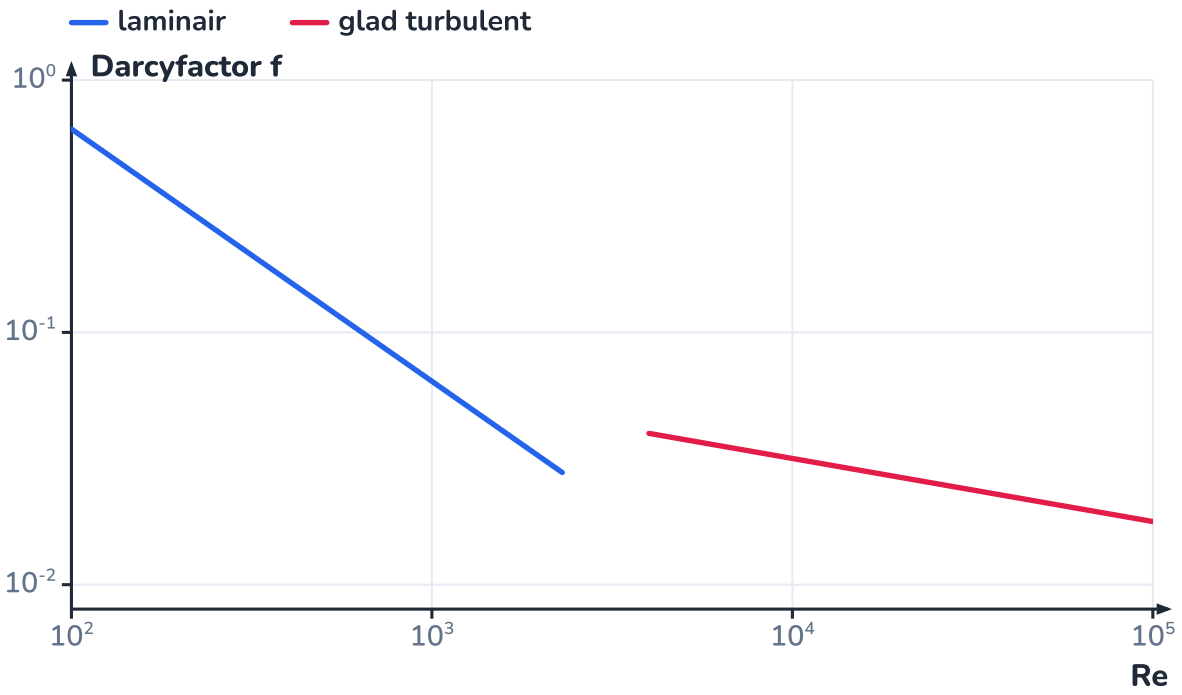
Dichtheid bepaalt onder meer drukhoogte; viscositeit bepaalt schuifweerstand en het stromingsregime. Een dichte vloeistof is niet noodzakelijk stroperig.

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.7

Reynoldsgetal van de hoofdaanvoer

7/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.



Het overgangsgebied krijgt bewust geen exacte curve.

GEGEVEN

- Water $\nu = 10^{-6}$ m²/s; D = 16 mm, Q = 4,8 L/min.

GEVRAAGD

- Regime en bruikbare Darcyfactor.

OPLOSSING

1. $v = 0{,}398$ m/s. $Re = vD/\nu = 6366$.
2. In een ronde buis is Re onder circa 2300 doorgaans laminair; boven circa 4000 doorgaans turbulent. De overgang hangt van verstoringen af. Deze grenzen gelden niet zomaar voor elke geometrie.
3. Voor gladde turbulent stromende buis gebruiken we Blasius: $f = 0{,}3164 \cdot Re^{-1/4} = 0{,}0354$.

ANTWOORD

De hoofdaanvoer is bij deze rekenwaarde turbulent; f ≈ 0,0354.

Klopt dit? Re is dimensieloos. De laminaire 64/Re zou hier het verlies onderschatten.

UITLEG · 18.8

Poiseuille: de vierde macht van de straal

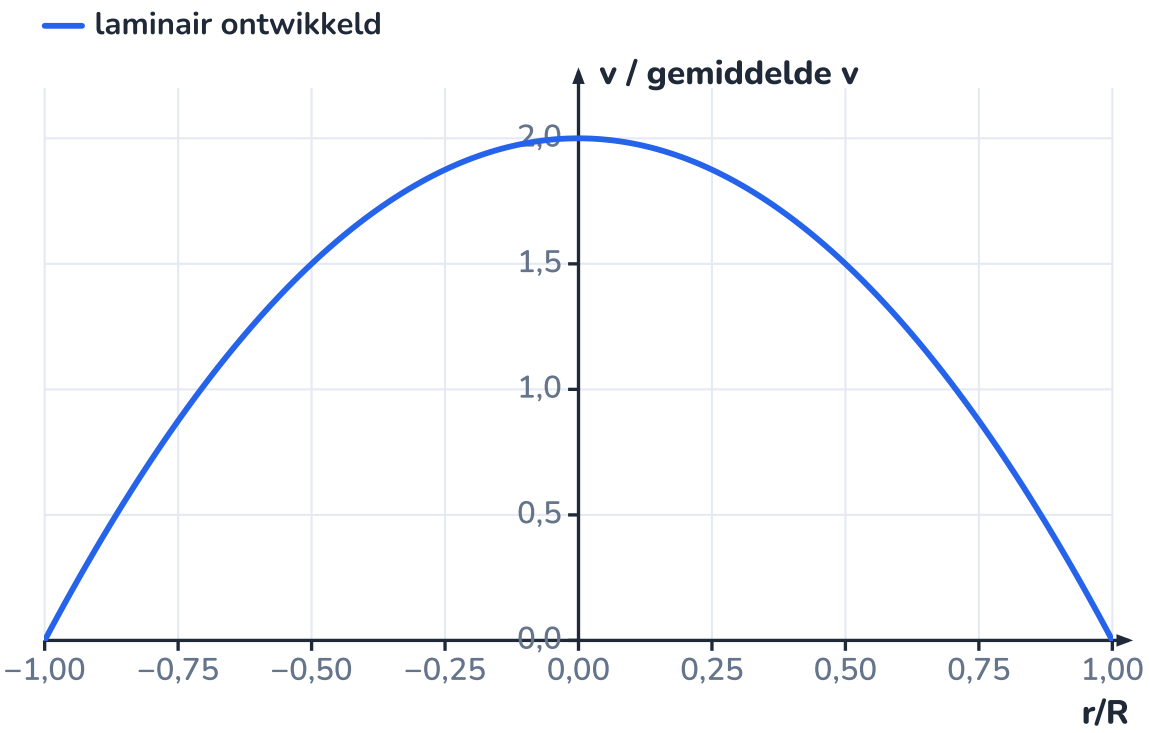
8/22

Neem een stationaire, volledig ontwikkelde laminaire stroming in een ronde buis. Drukarbeid en viscositeit balanceren. Met $v(R) = 0$ en symmetrie op de as volgt $v(r) = \Delta p(R^2 - r^2)/(4\mu L)$. Integreren over cirkelringen geeft $Q = \int_0^R 2\pi r v(r)\,\mathrm{d}r$.

HAGEN-POISEUILLE

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu L}, \qquad v_{\max} = 2\bar{v}$$

Een halvering van diameter geeft bij dezelfde druk en lengte 1/16 van het debiet. Dat geldt niet voor turbulent water of een ingang waar het profiel nog ontwikkelt. Poiseuille en Darcy zijn consistent: bij $f = 64/Re$ vallen ze samen.



De wand is stil; op de as is de snelheid tweemaal het gemiddelde.

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.9

Een capillair: regimecontrole hoort bij de berekening

9/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.

GEGEVEN

- R = 0,50 mm, L = 1,0 m, Δp = 1000 Pa, μ = 0,001 Pa·s, ρ = 1000 kg/m³.

GEVRAAGD

- Debiet, gemiddelde snelheid en geldigheid.

OPLOSSING

1. Q = π·(0,00050)⁴·1000/(8·0,001·1) = 0,0245 mL/s = 1,473 mL/min.
2. v = Q/(πR²) = 0,03125 m/s. Re = ρv·2R/μ = 31,25: ruim laminair.
3. L/D = 1000. Er is voldoende lengte voor ontwikkeling van het profiel bij een normale ingang.

ANTWOORD

Q ≈ 1,47 mL/min.

Klopt dit? Halvering van straal maakt Q = 0,0920 mL/min. Dit is een ander regime dan de NFT-aanvoer.

UITLEG · 18.10

Darcy-Weisbach en plaatselijke verliezen

10/22

Voor een rechte buis geldt $\Delta p = f(L/D)\rho v^2/2$. De **Darcyfactor** f is viermaal de Fanningfactor; verwisselen geeft factor vier fout. Laminair is f = 64/Re; turbulent hangt f ook van relatieve ruwheid ε/D af.

Bochten, ventielen, inlaat en uitstroming krijgen termen $K_i \rho v_i^2/2$. Elke K hoort bij haar referentiesnelheid. Een smalle tak heeft niet de hoofdsnelheid. Een filter kan een gemeten Δp(Q) krijgen in plaats van één vaste K.

VERLIES IN METER VLOEISTOFKOLOM

$$h_L = \left(f\frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{v^2}{2g}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.11

De 16 mm-slang: klein verlies, groot nut

11/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.

GEGEVEN

- Q = 4,8 L/min, D = 16 mm, L = 2,5 m, K = 2,0; z = 1,5 m.

GEVRAAGD

- Pomphoogte en hydraulisch vermogen.

OPLOSSING

1. v = 0,398 m/s, Re = 6366, f = 0,0354.
2. hL = (f·2,5/0,016+2)·v²/(2·9,81) = 0,0608 m. De 1,5 m statische hoogte domineert.
3. H = 1,5608 m; PH = ρgQH = 1,225 W. Bij 12 W elektrisch is het ketenrendement ongeveer 10 %.

ANTWOORD

Dit reproduceert de afgeronde 1,56 m uit i11.

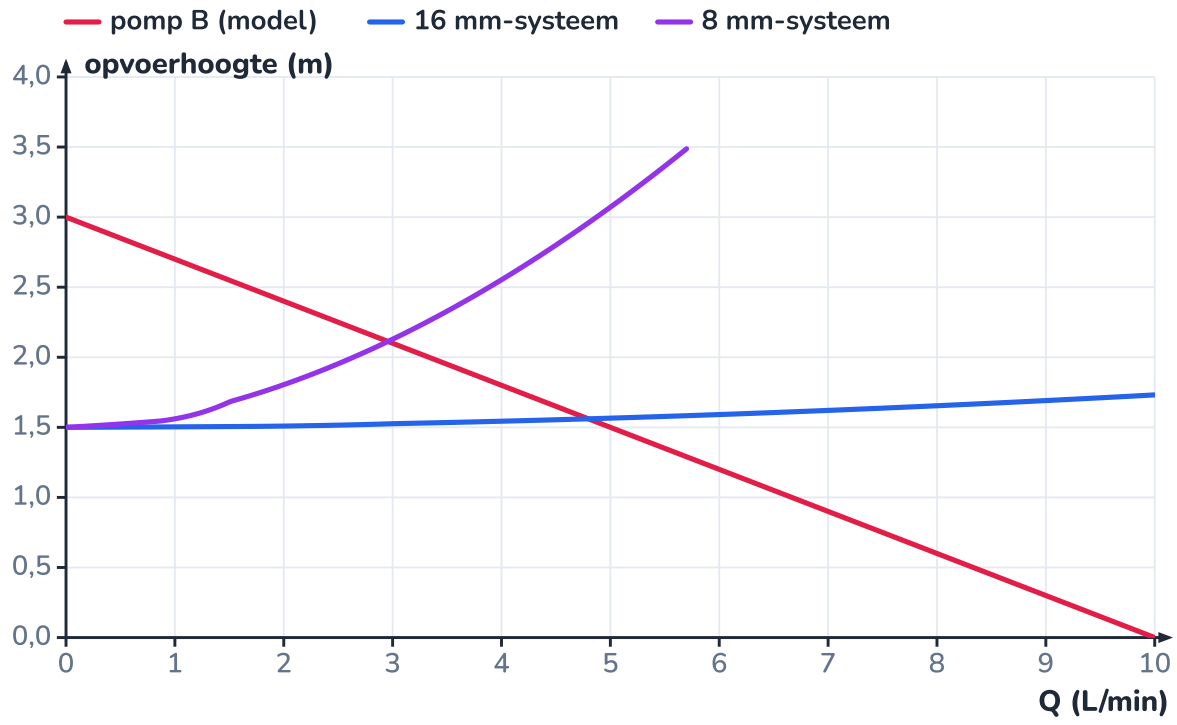
Klopt dit? Het debiet moet nog uit het snijpunt volgen; hier is 4,8 L/min een opgelegde ontwerpvraag.

UITLEG · 18.12

Pompcurve en systeemcurve geven één werkpunt

Bij een centrifugaalpomp daalt de leverbare hoogte gewoonlijk met het debiet. De systeemcurve stijgt door verlies, boven een vaste geometrische en drukhoogte. Hun snijpunt is het werkpunt. Maximumdebiet geldt vaak bij vrijwel nul hoogte, maximumhoogte bij nul debiet; die kan je niet samen gebruiken.

Pomp B uit i11 heeft $H_p = 3(1 - Q/10)$ met Q in L/min en H in m. Dit is een **rekencurve**, geen fabrikantgarantie. Voor de bestaande slang geldt $H_s = 1{,}5 + h_L(Q)$. Bissectie zoekt het nulpunt van $H_p - H_s$.



Dunner slangmateriaal verlaagt het werkpuntdebiet.

CODE · 18.13

Werkpunt en vervuiling uit dezelfde functie

De code bewaart de i11-pompcurve. Het overgangsgebied bevat alleen een numerieke schatting; een kritisch ontwerp in dat gebied vraagt metingen. De berekende werkpunten liggen ruim boven Re = 4000.

Python **leidingnet.py** 42 regels

```python
# leidingnet.py — rekenpomp uit i11, water bij ongeveer 20 °C
import math
RHO, NU, G = 1000.0, 1.0e-6, 9.81

def factor(re):
    if re <= 0:
        return 0.0
    if re <= 2300:
        return 64 / re
    turbulent = 0.3164 * re**(-0.25)  # gladde leiding, Blasius
```

```
    if re >= 4000:
        return turbulent
    w = (re - 2300) / 1700          # alleen schatting in overgangsgebied
    return (1-w)*64/re + w*turbulent

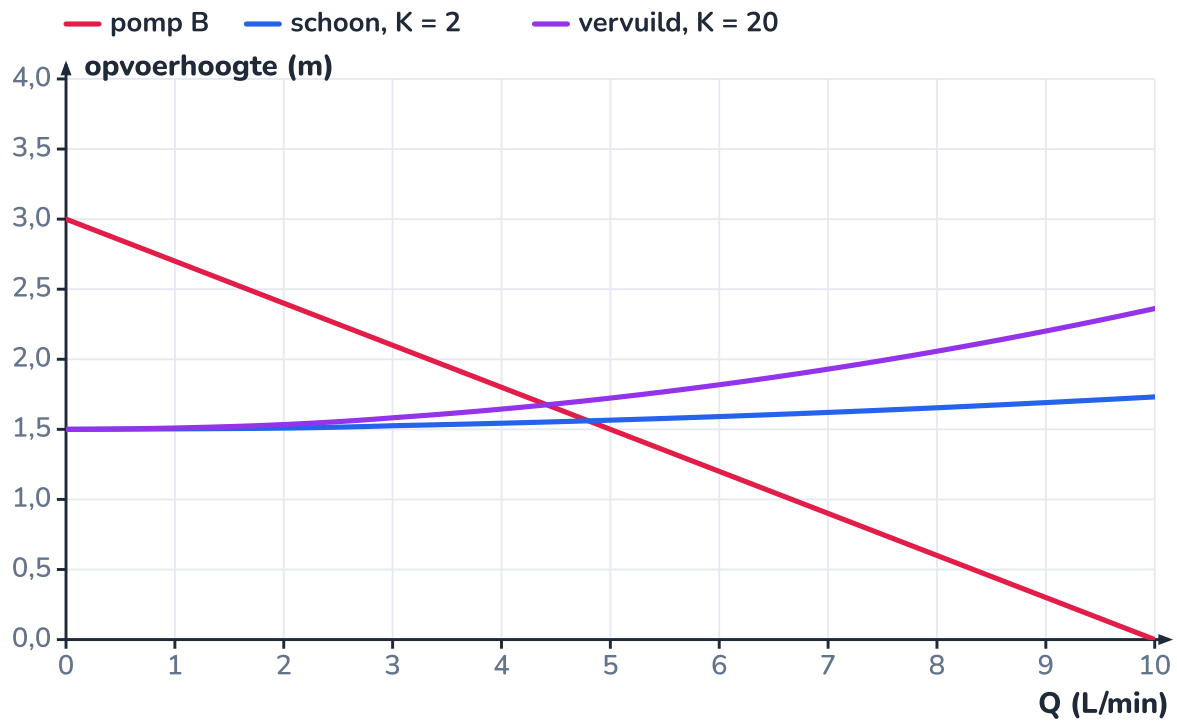
def verlies(q, D=0.016, L=2.5, K=2.0):
    v = (q / 60000) / (math.pi*D*D/4)
    re = v*D/NU
    return (factor(re)*L/D + K)*v*v/(2*G)

def pomp(q):
    return 3.0 * (1-q/10.0)

def werkpunt(D=0.016, L=2.5, K=2.0, z=1.5):
    lo, hi = 0.0, 10.0
    for _ in range(70):
        q = (lo+hi)/2
        if pomp(q) > z + verlies(q,D,L,K):
            lo = q
        else:
            hi = q
    q = (lo+hi)/2
    return q, pomp(q)

for d in (0.008, 0.010, 0.013, 0.016):
    q,h = werkpunt(D=d)
    v = q/60000/(math.pi*d*d/4)
    print(f"D={d*1000:2.0f} mm: Q={q:.3f} L/min, H={h:.3f} m, Re={v*d/NU:.0f}")
q,h = werkpunt()
ph = RHO*G*q/60000*h
print(f"hydraulisch {ph:.3f} W, elektrisch 12 W: rendement {100*ph/12:.2f} %")
print(f"met extra filter K=20: {werkpunt(K=20)[0]:.3f} L/min")
```

```
D= 8 mm: Q=2.957 L/min, H=2.113 m, Re=7844
D=10 mm: Q=3.837 L/min, H=1.849 m, Re=8142
D=13 mm: Q=4.529 L/min, H=1.641 m, Re=7394
D=16 mm: Q=4.798 L/min, H=1.561 m, Re=6363
hydraulisch 1.224 W, elektrisch 12 W: rendement 10.20 %
met extra filter K=20: 4.416 L/min
```



Vervuiling verlaagt Q zonder dat de pompcurve verandert.

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.14

Het werkpunt en de takverdeling

14/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.

GEGEVEN

- Pomp B, slang 16 mm, 2,5 m, K = 2,0, hoogte 1,5 m; 12 W elektrisch.

GEVRAAGD

- Werkpunt en rendement.

OPLOSSING

1. Bissectie geeft Q = 4,7975 L/min bij H = 1,5607 m.
2. Elke gelijke goot krijgt 1,199 L/min: afgerond de bestaande 1,2.
3. PH = 1,224 W; η = PH/12 = 10,20 %. Ook snelheid en verliezen tellen mee in het totale hydraulische vermogen.

ANTWOORD

4,8 L/min bij 1,56 m blijft bevestigd; 8 mm geeft maar 2,96 L/min.

Klopt dit? De laatste decimalen dienen de reproduceerbaarheid. De modelcurve is onzekerder dan die decimalen; meet het werkpunt.

UITLEG · 18.15

Parallelle takken en ongelijke goten

15/22

Een verdeelstuk voldoet aan $Q_{\text{totaal}} = \sum Q_i$. Takken tussen dezelfde drukknopen hebben dezelfde drukval; hun debiet volgt uit hun weerstand. Bij kwadratisch verlies $\Delta p = k_i Q_i^2$ geldt $Q_i \propto 1/\sqrt{k_i}$.

Vier gelijke goten met gelijke toevoerslangen kunnen 1,2 L/min delen. Een langer slangetje of gedeeltelijke verstopping kan de verdeling scheeftrekken zonder groot effect op totaal Q. Meet daarom elke uitloop. Een retour met te weinig open capaciteit stuwt water op.

PARALLELLE HYDRAULISCHE PADEN

$$Q_i = \sqrt{\frac{\Delta p}{k_i}}, \qquad \sum_i Q_i = Q_{\text{totaal}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.16

Eén tak heeft viermaal de weerstand

16/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.

GEGEVEN

- Vier takken tussen dezelfde drukknopen, coëfficiënten k, k, k en 4k; gemeten totaal 4,8 L/min.

GEVRAAGD

- Takverdeling.

OPLOSSING

1. Verhouding 1 : 1 : 1 : 1/2, samen 3,5 delen.
2. Elke vrije tak: 4,8/3,5 = 1,371 L/min; slechte tak 0,686 L/min.
3. De som blijft 4,8 L/min. De laatste tak krijgt ongeveer 43 % minder dan de doelwaarde.

ANTWOORD

Een goed totaal verbergt een slechte tak.

Klopt dit? Het totaal is hier opgelegd als meting. In een echt pompnet kan het zelf mee veranderen.

UITLEG · 18.17

Cavitatie: absolute druk en temperatuur tellen

17/22

Onder de lokale dampdruk ontstaan dampbellen; bij terugkeer naar hogere druk klappen ze in. Dat kan erosie, geluid en prestatieverlies geven. De beschikbare netto aanzuighoogte NPSHa moet daarom boven de pompspecifieke NPSHr plus marge blijven.

$$NPSH_a = \frac{p_{\text{atm}} - p_v}{\rho g} + z_{\text{oppervlak}} - z_{\text{pomp}} - h_{\text{aanzuig}}$$

Een warmer vloeistof verhoogt dampdruk; een smalle aanzuiging vergroot verlies. Gebruik absolute druk. Grundfos beschrijft de NPSH-curve. De vereiste waarde is geen algemene constante.

Een ondergedompelde pomp kan nog drooglopen bij laag niveau. De vlotter is een afzonderlijke hardwaregrens. De 0,75 kW-sanitaire drukpomp is een ander circuit dan de NFT-pomp; houd drink- en regenwater gescheiden.

> ⚠ **Een maximale druk is geen bedrijfspunt**
>
> De sproeiers van e08 vragen 2,0 bar aan de spuitmond én debiet. Een pomp die 2 bar bij gesloten uitlaat haalt, is daarvoor nog niet geschikt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 18.18

Vier sproeiers vragen druk én water

18/22

Een hydraulisch ontwerp stap voor stap.

GEGEVEN

- Vier sproeiers van 3,58 L/min bij 2,0 bar; extra leiding- en hoogteverlies 0,30 bar; ηketen = 0,45 als rekenwaarde.

GEVRAAGD

- Elektrische rekenondergrens.

OPLOSSING

1. Q = 14,32 L/min = $2{,}387 \cdot 10^{-4}$ m³/s. Pompdruk $2{,}30 \cdot 10^{5}$ Pa.
2. PH = ΔpQ = 54,89 W. P elektrisch = 54,89/0,45 = 121,99 W.
3. Een pompcurve moet 14,32 L/min bij 2,30 bar ondersteunen. Een 0,75 kW-naamplaat is op zichzelf geen garantie van dit werkpunt.

ANTWOORD

Circa 122 W elektrisch als rekenondergrens.

✓ **Klopt dit?** De 500 L-drinkwatertank wordt niet aan het regenwatersproeinet gekoppeld. Waterkwaliteit en terugstroombeveiliging horen bij de systeemkeuze.

PROEF · 18.19

Een pompcurve meten op 12 V

19/22

ONDERZOEKSVRAAG

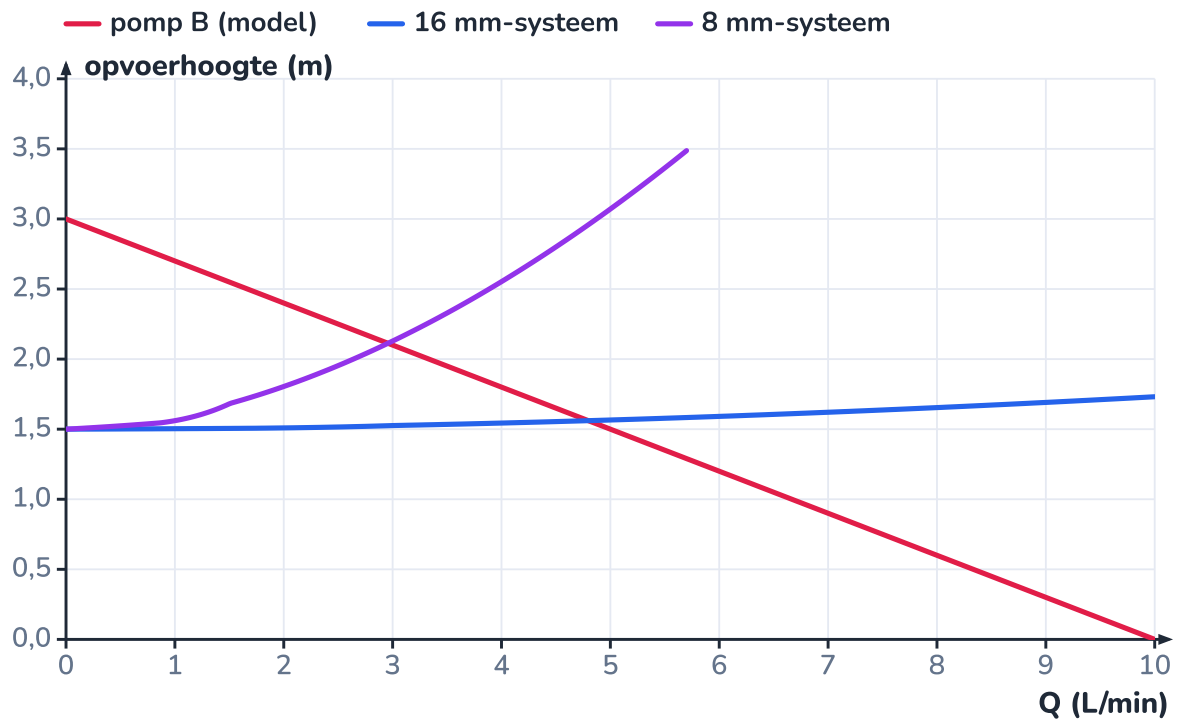
Een volumemeting en drukmeting leggen samen de bedrijfstoestand vast.

MATERIAAL

gezekerde 12 V-pomp · reservoir en opvangbak · regelventiel na de pomp · manometer · maatbak · stopwatch · stroommeter

Veiligheid

Volg de pomphandleiding: niet langdurig blokkeren of droog laten lopen, geen druk boven slanglimiet. Alleen laagspanning en gezekerde voeding.



De modelrechte wordt in de proef vervangen door eigen meetpunten.

WERKWIJZE

1. Vul en ontlucht; leg droge elektrische aansluitingen hoger dan het water.
2. Meet bij vijf ventielstanden volume en tijd en gelijktijdig hoogte of druk.
3. Registreer U en I; bereken PH en η. Herhaal het middenpunt.
4. Teken een QH-grafiek met foutbalken. Vergelijk met de berekende systeemcurve.
5. Verander slangdiameter en meet het nieuwe werkpunt bij hetzelfde niveau.

WAARNEMING

Knijpen verlaagt Q en verhoogt doorgaans de geleverde pomphoogte. De dunnere slang geeft minder debiet.

VERKLARING

Je verandert systeemweerstand, zodat de pomp een ander snijpunt zoekt.

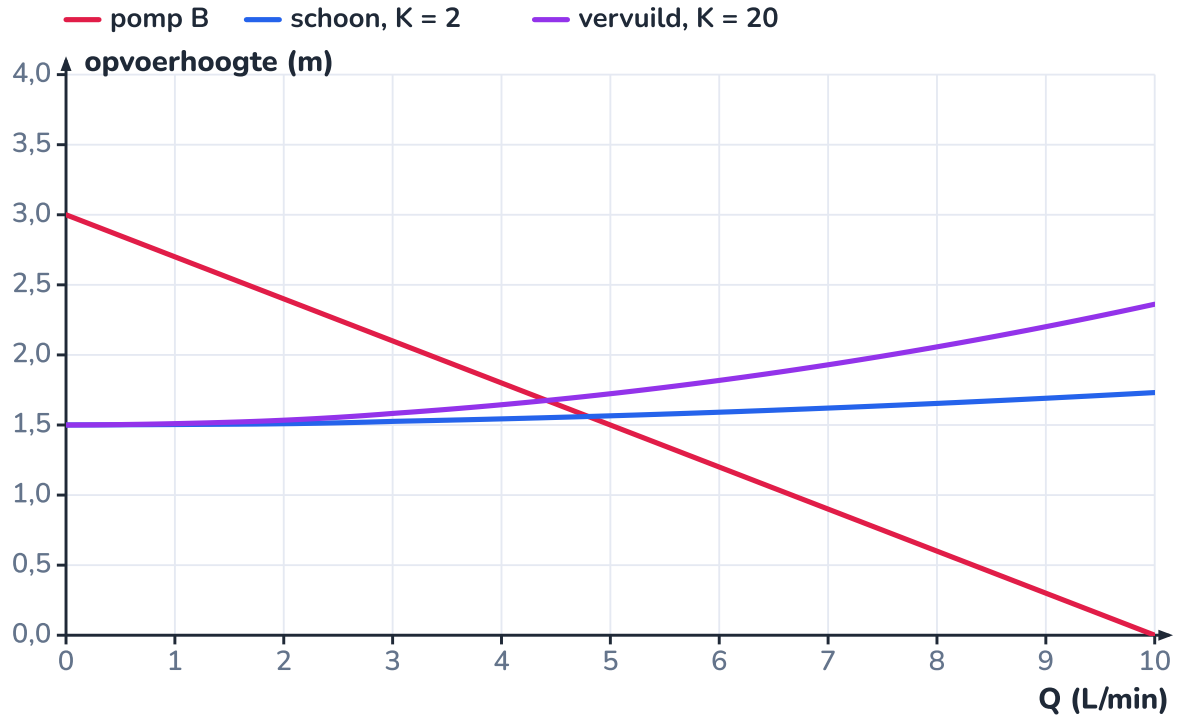
VERHAAL · 18.20

Een pompingenieur leest ook de aanzuigzijde

20/22

Een pomp kan het berekende QH-werkpunt halen en toch door warm water of een te lage aanzuigdruk caviteren. Fabrikanten geven daarom ook rendement, opgenomen vermogen en NPSHr. De fabrikantcursus over pompcurven toont welke informatie bij een bedrijfspunt hoort.

Voor Habitat wordt dat een onderhoudslog met tankniveau, uitloopdebieten, filterdrukval, water- en motortemperatuur. Een dalend debiet kan een verstopping zijn; harder sturen maskeert die soms tijdelijk. Een bereikbaar filter en reservepomp kunnen bij een afgelegen station belangrijker zijn dan enkele procentpunten toprendement.



Vergelijk steeds dezelfde bedrijfstoestand voordat je een dalend debiet als defect aanwijst.

NASLAG · 18.21

Hydraulische formules en afspraken

21/22

continuïteit

$$Q = A\bar{v}, \quad \dot{m} = \rho Q$$

symbool	betekenis	eenheid
Q	volumestroom	m³/s
ρ	dichtheid	kg/m³

Reynolds

$$Re = \rho \bar{v} D/\mu = \bar{v} D/\nu$$

symbool	betekenis	eenheid
μ	dynamische viscositeit	Pa·s
ν	kinematische viscositeit	m²/s

Darcy en plaatselijk verlies

$$h_L = (fL/D + \sum K) v^2/(2g)$$

symbool	betekenis	eenheid
f	Darcyfactor	1
K	verliescoëfficiënt	1

pompvermogen

$$P_{\text{hyd}} = \rho g Q H, \quad \eta = P_{\text{hyd}}/(UI)$$

symbool	betekenis	eenheid
H	opvoerhoogte	m
P	vermogen	W

Omrekening of model	Waarde
1 L/min	1/60000 m³/s
1 bar	100000 Pa; ≈10,19 m water
laminair ontwikkeld rond	f = 64/Re; vmax = 2vgem
pomp B	H = 3(1−Q/10), Q in L/min

HET GEHEEL · 18.22

Het geheel: water, warmte en voeding

22/22

i11 leverde de leidingkeuze; hier is de stromingsrekening uitgewerkt. e14 verbindt continuïteit met ventilatie, e17 met convectie, e24 met elektrisch pompvermogen. De Pi kan druk en debiet samen gebruiken om een filterverstopping te herkennen.

I11 Druk en hydraulica

Bestaand reservoir, pomp en 16 mm-aanvoer.

E8 Beweging in twee dimensies

Druk en debiet aan sproeiers.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief

Stroming bepaalt convectie.

E37 Embedded systemen en IoT

Meetwaarden combineren tot diagnose.

Habitat

NFT blijft 4,8 L/min bij 1,56 m, met 16 mm binnendiameter, 2,5 m aanvoer en K = 2 als schone rekenwaarde; vier goten elk 1,2 L/min. Het K = 20-scenario geeft 4,42 L/min en is een diagnosevoorbeeld, geen nieuwe biologische grens. De 500 L-drinkwatertank en 0,75 kW-drukpomp blijven gescheiden van de 12 V-NFT-pomp.

SAMENVATTING

In het kort

- Continuïteit bewaart massa; incompressibel water voldoet aan Q = Av.
- Bernoulli bewaart mechanische energie onder expliciete aannames; pompen voegen energie toe en wrijving zet ze om in warmte.
- Reynolds bepaalt mede het regime; Poiseuille vraagt laminaire ontwikkelde buisstroming.
- Darcyverlies gebruikt de Darcyfactor en correcte lokale referentiesnelheden.
- Het werkpunt komt uit pomp én systeem; toets ook vervuiling en laag niveau.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

volumedebiet

Volume dat per tijdseenheid een doorsnede passeert.

opvoerhoogte

Mechanische energie per gewichtseenheid die een pomp toevoegt.

Reynoldsgetal

Dimensieloze verhouding van traagheids- tot viscositeitsinvloed.

werkpunt

Debiet en opvoerhoogte waarbij pomp en leiding dezelfde hoogte leveren en vragen.

cavitatie

Vormen en instorten van dampbellen bij te lage lokale vloeistofdruk.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 19

Elektrische en magnetische velden, inductie

Van Coulomb tot Faraday: velden die kracht zetten, energie opslaan en stroom opwekken

Een lading vult de ruimte rond zich met een elektrisch veld, een stroom met een magnetisch veld. Met die twee velden verklaar je waarom een condensator lading opslaat en een supercondensator zelfs farads, waarom een stroommeter zonder contact kan meten, en vooral: waarom een veranderend magnetisch veld een spanning opwekt. Dat laatste, de inductie van Faraday, zit in elke transformator en elke generator. Je rekent de velden uit met integralen en vectorproducten, berekent veldlijnen in Python en eindigt bij de windturbine van het station: hoe haar generator van draaien stroom maakt, met welke spanning en frequentie, en hoe die in de 48 V-batterij terechtkomt.

11× uitleg · 9× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 3× code · ± 12 lestijden

L Elektriciteit en elektronica · K Krachten, beweging en constructies · W Wiskundig modelleren



Magneten die langs koperen spoelen draaien: zo maakt de windturbine van het station stroom.

Na dit hoofdstuk

- Je kan het elektrisch veld van puntladingen als vectorsom berekenen (Coulomb, superpositie) en veldlijnen en equipotentiaallijnen lezen, tekenen en numeriek berekenen.
- Je kan de potentiaal uit het veld afleiden (integraal) en omgekeerd (E = −dV/dx), en rekenen met een homogeen veld, de elektronvolt en doorslag.
- Je kan C = εA/d afleiden met de wet van Gauss, er een condensator mee ontwerpen en verklaren waarom een supercondensator zoveel capaciteit heeft maar weinig spanning verdraagt.
- Je kan het magnetisch veld van een rechte draad (Biot-Savart en Ampère) en van een spoel berekenen, ook voor een kabel met heen- en terugleiding.
- Je kan de Lorentzkracht als vectorproduct berekenen voor een lading en een stroomdraad, een cirkelbaan beschrijven en het Hall-effect verklaren en berekenen.
- Je kan de wet van Faraday toepassen op een veranderend veld, een bewegende geleider en een draaiende spoel (e = NBAω sin ωt), en met de wet van Lenz de richting en de energiebalans verklaren.

- Je kan zelfinductie en de energie in een spoel berekenen, en het uitschakelen van een inductieve last met een vrijloopdiode en een zener doorrekenen.
- Je kan een ideale transformator berekenen (spanning, stroom, impedantie, U = 4,44 f N A $\hat{B}$) en de verliezen verklaren.
- Je kan uitleggen hoe een driefasige generator met permanente magneten werkt en voor de windturbine van het station frequentie, spanning en gelijkgerichte spanning bepalen.

VERHAAL · 19.1

Faraday en de ijzeren ring

1/28

Michael Faraday was de zoon van een smid en leerde het vak van boekbinder. Hij las de boeken die hij inbond, volgde lezingen van de scheikundige Humphry Davy en werd in 1813 diens assistent aan de Royal Institution in Londen. In 1820 ontdekte de Deen Hans Christian Ørsted dat een stroom een kompasnaald laat uitwijken: elektriciteit maakt magnetisme. Faraday vroeg zich af of het omgekeerde ook kon, en zocht jarenlang.

Op 29 augustus 1831 wikkelde hij twee spoelen op een dikke ijzeren ring, de ene aan een batterij, de andere aan een galvanometer. Zolang er een constante stroom liep, gebeurde er niets. Maar bij het **aansluiten** en het **losmaken** van de batterij schoot de naald even uit, telkens in een andere richting. Niet het magnetisme maakt stroom, maar zijn **verandering**. In de weken daarna duwde hij een magneet in een spoel en liet in oktober 1831 een koperen schijf tussen de polen van een magneet draaien: de eerste generator. In Amerika vond Joseph Henry hetzelfde verschijnsel, onafhankelijk; de eenheid van inductie, de henry, draagt zijn naam. In 1834 formuleerde Heinrich Lenz in Sint-Petersburg de regel voor de richting van de inductiestroom.

Faraday kende weinig wiskunde. Hij dacht in **krachtlijnen** die de ruimte vullen, een idee dat de meeste natuurkundigen toen vaag vonden. James Clerk Maxwell goot die lijnen in 1865 in vergelijkingen, en vond iets verbluffends: een veranderend magnetisch veld maakt een elektrisch veld (Faraday), een veranderend elektrisch veld maakt een magnetisch veld, en samen planten ze zich voort als een golf met snelheid $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2{,}998 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$: de lichtsnelheid. Licht is een elektromagnetische golf. Twee constanten die je in dit hoofdstuk voor condensatoren en spoelen gebruikt, bepalen samen hoe snel het licht gaat.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

Elke centrale, elke transformator, elke inductiekookplaat en de draadloze lader van je gsm werken met Faradays ontdekking. Het station krijgt een windturbine (hoofdstuk 11 en 12) waarvan de generator uit draaiende magneten en vaste spoelen bestaat. Welke spanning ze maakt, bij welke frequentie, en hoe die stroom in de 48 V-batterij komt, reken je hier uit. Hoofdstuk 20 bouwt verder met wisselstroom, hoofdstuk 24 met de omzetters die de spanning aanpassen.



Een ijzeren ring met twee spoelen: alleen bij het in- en uitschakelen gaf de tweede spoel stroom.

UITLEG · 19.2

Wat je al weet, en de vraag van dit hoofdstuk

wat je al kan	wat nu komt
lading, stroom en spanning; de wet van Ohm (hoofdstuk 19 van F)	lading als bron van een veld; spanning als verschil in potentiaal
$Q = CU$, platen en isolator, de supercondensator (hoofdstuk 24 van I)	$C = \varepsilon A/d$ afgeleid; waarom een supercondensator farads haalt
veld rond een draad en in een spoel, $F = BIl$, de motor en zijn tegen-emk (hoofdstuk 26 van I)	B berekend met Biot-Savart en Ampère; $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$; inductie
vectorproduct en rechterhandregel (hoofdstuk 5); integralen (hoofdstuk 3)	de Lorentzkracht in 3D; potentiaal en flux als integralen
RC-kring als differentiaalvergelijking; Euler (hoofdstuk 4); sinus, fasor, $Z_L = j\omega L$ (hoofdstuk 7)	zelfinductie $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$; de sinus uit een draaiende spoel; de transformator

In Intermediate zag je velden kwalitatief: veldlijnen rond een draad, de kracht $F = BIl$, een condensator die lading opslaat. Hier worden het rekengereedschappen. Je berekent velden als vectorsommen en integralen, leidt de capaciteit van een condensator af in plaats van ze te geven, en maakt kennis met het belangrijkste verschijnsel van de elektrotechniek: **inductie**.

De Habitat-vraag: de windturbine van het station (3,0 kW bij 11 m/s, rotor Ø 4,0 m, 80 tot 300 toeren per minuut, hoofdstuk 11) moet haar energie in het 48 V-net van het station leveren. Een rotor die met wisselende snelheid draait, maakt een spanning waarvan zowel de grootte als de frequentie met de wind meegaan. Hoeveel magneetpolen kies je, welke spanning en frequentie komen eruit, en hoe maak je er gelijkspanning voor de batterij van?

Magneten, spoelen en hoge spanning

Neodymiummagneten klappen met grote kracht tegen elkaar of tegen staal: vingers geklemd, splinters. Houd ze weg van pacemakers, bankkaarten en harde schijven. Een spoel met ijzerkern die je uitschakelt, kan een spanning van honderden volt geven (verderop). En de generator van de windturbine komt boven 120 V gelijkspanning: dat is geen zeer lage spanning meer (hoofdstuk 5 van F) en hoort bij het werk van een elektricien, net als 230 V.

UITLEG · 19.3

Lading, kracht en het elektrisch veld

Twee puntladingen q_1 en q_2 op afstand r duwen of trekken elkaar met de kracht van Coulomb:

WET VAN COULOMB

$$F = k\,\frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$$

Gelijke tekens stoten af, tegengestelde trekken aan. $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ is de permittiviteit van vacuüm. De elektrische kracht tussen een proton en een elektron is $2{,}3 \cdot 10^{39}$ keer hun zwaartekracht.

Faradays idee: de lading q_1 verandert de ruimte rond zich, ook als er niets anders is. Die toestand heet het **elektrisch veld**: de kracht die een kleine proeflading q in een punt zou voelen, gedeeld door q:

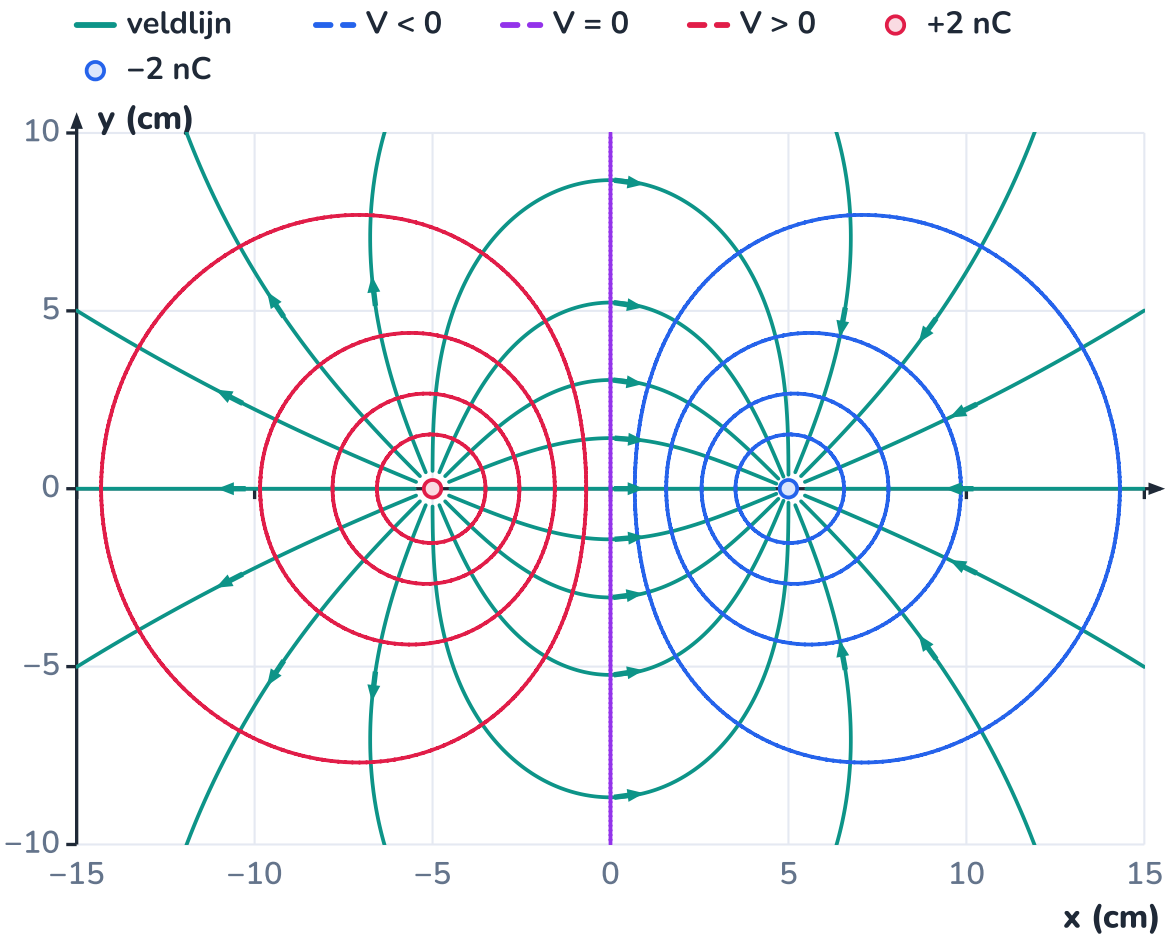
ELEKTRISCH VELD, PUNTLADING EN SUPERPOSITIE

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \vec{E}_{\text{punt}} = k\,\frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \qquad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Eenheid N/C = V/m. $\hat{r}$ wijst van de lading naar het punt: weg van een positieve, naar een negatieve lading. Bij meer ladingen tel je de velden op als vectoren (hoofdstuk 5).

Een veld is een **vectorveld**: in elk punt een pijl. Je tekent het met **veldlijnen**: lijnen die in elk punt de richting van $\vec{E}$ volgen. Ze beginnen op positieve en eindigen op negatieve ladingen (of in het oneindige), ze snijden elkaar nooit (het veld heeft in elk punt één richting) en waar ze dicht opeen liggen, is het veld sterk. Het aantal lijnen dat uit een lading vertrekt, is evenredig met die lading.

De figuur is geen schets: elke veldlijn is berekend door vanuit de positieve lading telkens een klein stapje in de richting van $\vec{E}$ te zetten (volgend blad). De stippellijnen zijn de **equipotentiaallijnen**, de lijnen met gelijke potentiaal (twee bladen verder); ze snijden de veldlijnen overal loodrecht.



+2 nC en −2 nC op 10 cm van elkaar. Stippellijnen: equipotentiaallijnen van ±100, ±250, ±500 en ±1000 V (van buiten naar binnen) en 0 V; lijnen die het beeld verlaten, komen er elders terug in.

CODE · 19.4

Veldlijnen berekenen

4/28

Een veldlijn is een kromme waarvan de raaklijn overal de richting van $\vec{E}$ heeft: $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}s = \vec{E}/|\vec{E}|$, met s de booglengte. Dat is een differentiaalvergelijking zoals in hoofdstuk 4, alleen met een vector. Het programma lost ze op met de methode van **Runge-Kutta** van de vierde orde: in plaats van één helling per stap (Euler) neemt het een gewogen gemiddelde van vier hellingen, en blijft zo met stapjes van een halve millimeter nauwkeurig tot op de lading (hoofdstuk 36 legt de methode uit).

Python **veldlijnen.py** 55 regels

```python
# veldlijnen.py - veld, potentiaal en veldlijnen van twee puntladingen
import numpy as np

K = 8.99e9                                  # 1/(4 pi eps0) in N m²/C²
ladingen = [(+2e-9, np.array([-0.05, 0.0])),     # (lading in C, plaats in m)
            (-2e-9, np.array([+0.05, 0.0]))]


def veld(p):
    """Elektrisch veld (V/m) in punt p: de vectorsom van de bijdragen (superpositie)."""
    E = np.zeros(2)
    for q, a in ladingen:
        r = p - a
```

```
        E += K * q * r / np.linalg.norm(r) ** 3
    return E


def potentiaal(p):
    """Potentiaal (V) in punt p, nul ver weg."""
    return sum(K * q / np.linalg.norm(p - a) for q, a in ladingen)


def veldlijn(start, h=0.0005, n_max=3000):
    """Volg de richting van E met Runge-Kutta (vierde orde) in stapjes van h meter."""
    def richting(p):
        E = veld(p)
        return E / np.linalg.norm(E)
    p = np.array(start, float)
    lijn = [p]
    for _ in range(n_max):
        k1 = richting(p)
        k2 = richting(p + h / 2 * k1)
        k3 = richting(p + h / 2 * k2)
        k4 = richting(p + h * k3)
        p = p + h / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
        lijn.append(p)
        if np.linalg.norm(p - ladingen[1][1]) < 0.004:    # aangekomen op de negatieve lading
            return np.array(lijn), True
        if abs(p[0]) > 0.15 or abs(p[1]) > 0.10:          # buiten het beeld
            return np.array(lijn), False
    return np.array(lijn), False


P = np.array([0.0, 0.05])
R = np.array([-0.02, 0.0])
Ex, Ey = veld(P)
print(f"in P: Ex = {Ex:.0f} V/m, Ey = {Ey:.0f} V/m, V = {potentiaal(P):.1f} V")
print(f"in O: Ex = {veld(np.zeros(2))[0]:.0f} V/m")
print(f"in R: Ex = {veld(R)[0]:.0f} V/m, V = {potentiaal(R):.1f} V")
lijnen = []
for hoek in np.radians(np.arange(0, 360, 22.5)):
    start = ladingen[0][1] + 0.005 * np.array([np.cos(hoek), np.sin(hoek)])
    lijnen.append(veldlijn(start))
aan = sum(1 for lijn, op_min in lijnen if op_min)
print(f"{len(lijnen)} veldlijnen: {aan} eindigen in het beeld op -2 nC, {len(lijnen) - aan} verlaten het
beeld")
```

Uitvoer:

```
in P: Ex = 5086 V/m, Ey = 0 V/m, V = 0.0 V
in O: Ex = 14384 V/m
in R: Ex = 23647 V/m, V = 342.5 V
16 veldlijnen: 9 eindigen in het beeld op -2 nC, 7 verlaten het beeld
```

Het programma start zestien lijnen op 5 mm van de positieve lading, om de 22,5°. 9 ervan bereiken de negatieve lading binnen het beeld; de rest verlaat het en komt er (door de symmetrie) gespiegeld weer in, zodat in de figuur alle zestien op de negatieve lading eindigen. De functies `veld` en `potentiaal` zijn dezelfde die de figuren van dit hoofdstuk tekenen en de getallen van het volgende voorbeeld controleren. Twee valkuilen: dicht bij een lading wordt $|\vec{E}|$ enorm, maar de richting blijft goed bepaald, daarom normeert het programma; en in een punt waar $\vec{E} = \vec{0}$ bestaat geen richting: daar kan een veldlijn niet door (opdracht 19.8).

Potentiaal en spanning

Verplaats je een lading q in een elektrisch veld, dan verricht het veld arbeid $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ (hoofdstuk 3 en 5). Net als de zwaartekracht is het elektrostatische veld **conservatief**: de arbeid hangt alleen af van begin- en eindpunt. Dus heeft een lading in elk punt een potentiële energie E_p, en die is evenredig met q. De **potentiaal** is de potentiële energie per lading:

POTENTIAAL EN SPANNING

$$V = \frac{E_p}{q} \qquad U_{AB} = V_A - V_B \qquad V_{\text{punt}}(r) = \int_r^\infty E \,\mathrm{d}r' = \int_r^\infty \frac{kQ}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = \frac{kQ}{r}$$

Eenheid volt (J/C). Spanning is een potentiaalverschil. De nul leg je vrij: bij een puntlading ver weg, in een schakeling de massa. Bij meer ladingen tel je de potentialen op, als gewone getallen.

Omgekeerd volgt het veld uit de potentiaal: $W = qE\,\mathrm{d}x = -q\,\mathrm{d}V$ over een klein stapje, dus

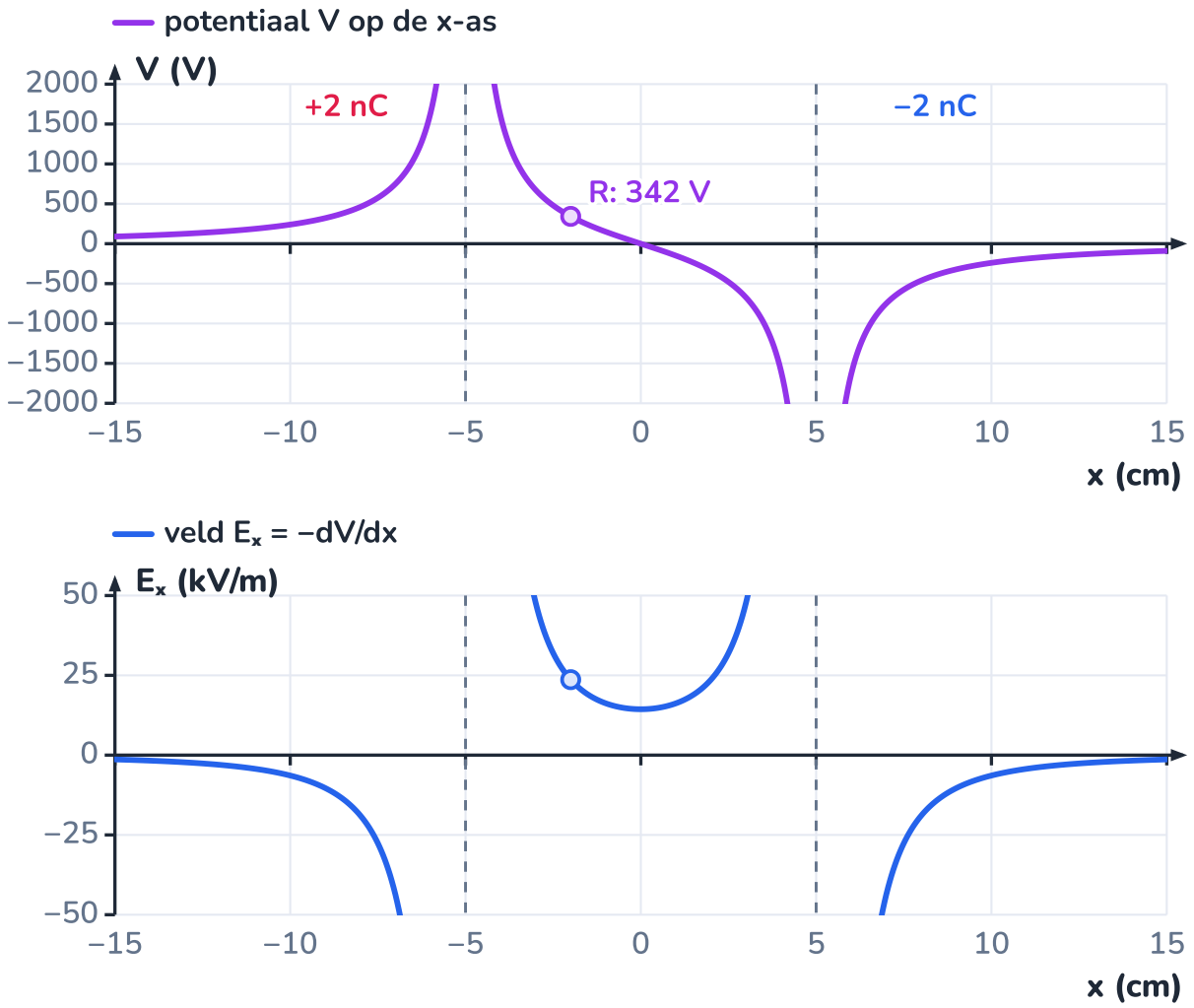
VELD UIT POTENTIAAL

$$E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \qquad \text{homogeen veld: } E = \frac{U}{d}$$

Het veld wijst 'bergaf', van hoge naar lage potentiaal. In drie dimensies: $\vec{E} = -\nabla V$, de steilste daling. Op een **equipotentiaalvlak** is $\mathrm{d}V = 0$, dus staat het veld er loodrecht op.

In de onderste grafiek zie je het terug: waar V steil daalt (tussen de ladingen), is E_x groot en positief. Links van de positieve lading stijgt V naar rechts toe, en daar wijst het veld naar links.

Twee handige gevolgen. Een elektron dat over 1 V versnelt, wint $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J: dat heet één **elektronvolt** (eV), de natuurlijke energie-eenheid in halfgeleiders en in de chemie (de 0,7 V over een siliciumdiode, hoofdstuk 23 van I, is 0,7 eV per elektron). En een isolator houdt maar een bepaald veld uit. Droge lucht slaat bij ongeveer **3 kV/mm** door (homogeen veld, 1 bar): er springt een vonk. Aan punten en scherpe randen is het veld veel sterker dan U/d; daar begint de doorslag, en daarom werkt een bliksemafleider.



Boven de potentiaal langs de as (nul in het midden), onder het veld, dat de negatieve helling van V is. Bij de ladingen lopen beide naar oneindig.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.6

Veld en potentiaal van twee ladingen

6/28

Een lading van +2,0 nC staat in A (−5,0 cm; 0), een lading van −2,0 nC in B (5,0 cm; 0), zoals in de figuur. (a) Bereken het veld in P (0; 5,0 cm) en in de oorsprong O. (b) Welke kracht voelt een elektron in P, en welke versnelling? (c) Bereken de potentiaal in P en in R (−2,0 cm; 0). Hoeveel kinetische energie wint of verliest een elektron dat van R naar O beweegt?

GEGEVEN

- $q_A = +2{,}0\,\text{nC}$, $q_B = -2{,}0\,\text{nC}$, $k = 8{,}99 \cdot 10^9\,\text{N m}^2/\text{C}^2$
- $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$

GEVRAAGD

- $\vec{E}_P$, $\vec{E}_O$
- F en a van een elektron in P
- V_P, V_R en de energie van R naar O

OPLOSSING

1. $kq = 8{,}99 \cdot 10^9 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-9} = 17{,}98\,\text{V m}$. Afstand van P tot A en B: $\sqrt{0{,}05^2 + 0{,}05^2} = 0{,}0707\,\text{m}$, dus elk veld is $17{,}98/0{,}005 = 3596\,\text{V/m}$.

2. Richtingen: $\vec{E}_A$ wijst weg van A, langs $(1;1)/\sqrt{2}$; $\vec{E}_B$ wijst naar B, langs $(1;-1)/\sqrt{2}$. De y-componenten heffen elkaar op: $\vec{E}_P = (2 \cdot 3596/\sqrt{2};\ 0) = (5086;\ 0)\,\text{V/m}$, evenwijdig met AB, van + naar −.

3 In O: beide velden wijzen naar rechts en elk is $17{,}98/0{,}05^2 = 7192\,\mathrm{V/m}$: $\vec{E}_O = (14\,384;\ 0)\,\mathrm{V/m}$.

4 (b) $F = eE = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 5086 = 8{,}15 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{N}$, naar links (tegen het veld in: het elektron is negatief). $a = F/m_e = 8{,}9 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}$: zwaartekracht speelt geen enkele rol.

5 (c) $V_P = kq/r_A - kq/r_B = 0$ ($r_A = r_B$): de hele middelloodlijn is een equipotentiaallijn, ook al is het veld er niet nul. $V_R = 17{,}98\,(1/0{,}03 - 1/0{,}07) = 342{,}5\,\mathrm{V}$.

6 Van R naar O: $\Delta E_p = q\,(V_O - V_R) = (-e)(0 - 342{,}5\,\mathrm{V}) = +342{,}5\,\mathrm{eV}$. De potentiële energie van het elektron stijgt terwijl V daalt: het beweegt tegen de kracht in, want het veld trekt het naar hoge potentiaal (naar A). Het verliest dus 342 eV kinetische energie.

ANTWOORD

$\vec{E}_P = (5086;\ 0)\,\mathrm{V/m}$, $\vec{E}_O = (14\,384;\ 0)\,\mathrm{V/m}$; op het elektron in P $8{,}15 \cdot 10^{-16}$ N naar links; $V_P = 0$, $V_R = 342\,\mathrm{V}$. Van R naar O verliest een elektron 342 eV aan kinetische energie (een proton zou er 342 eV winnen).

Klopt dit? Het programma van het vorige blad geeft dezelfde getallen (in R ook $E_x = 23\,647\,\mathrm{V/m}$). Een snelle controle van (c): een positieve lading 'valt' van hoge naar lage potentiaal en wint energie, een negatieve lading omgekeerd. Veld nul in P? Nee: $V = 0$ zegt niets over E, alleen over de helling van V.

UITLEG · 19.7

De vlakke condensator: C = εA/d

7/28

Om het veld van een grote geladen plaat te vinden, gebruik je de **wet van Gauss**. Tel de veldlijnen die uit een gesloten oppervlak komen: de **elektrische flux** $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (bij een homogeen veld loodrecht op een vlak gewoon $E\,A$). Gauss: die flux hangt alleen af van de lading binnenin.

WET VAN GAUSS

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{binnen}}}{\varepsilon_0}$$

Controle met een puntlading: een bol met straal r eromheen geeft $E \cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$, dus $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = kQ/r^2$: de wet van Coulomb.

Een plaat met oppervlakte A en lading Q heeft een oppervlakteladingsdichtheid $\sigma = Q/A$. Een doosje dat één kant van de geladen oppervlakte omsluit (de stippellijn in de figuur): alleen door het ondervlak gaat veld, want in de metalen plaat zelf is $E = 0$. Dus $E\,A_{\text{doos}} = \sigma A_{\text{doos}}/\varepsilon_0$ en

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \qquad U = E\,d = \frac{Q\,d}{\varepsilon_0 A} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

VLAKKE CONDENSATOR EN ENERGIE IN HET VELD

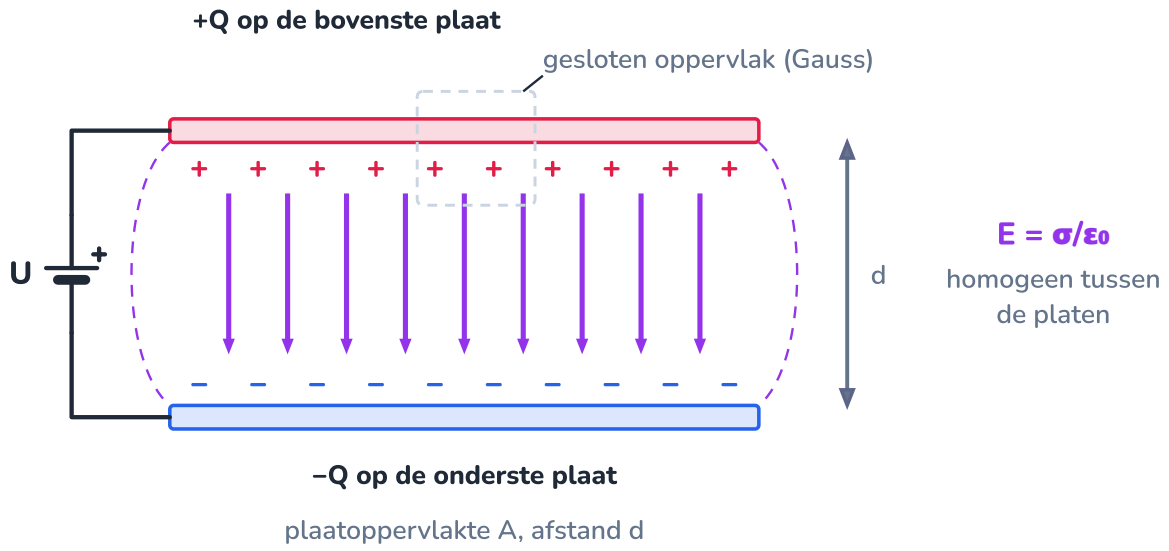
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \qquad W = \tfrac{1}{2} C U^2 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \cdot Ad$$

Geldt als d klein is tegenover de plaat (het randveld verwaarloosd). Een isolator met relatieve permittiviteit ε_r polariseert: zijn eigen ladingen verschuiven een beetje en verzwakken het veld ε_r keer, zodat dezelfde lading minder spanning geeft. De energie zit in het veld zelf: $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ joule per kubieke meter.

Wat de formule vertelt: capaciteit vraag je van een **groot oppervlak**, een **kleine afstand** en een **isolator met grote** ε_r. Maar een kleine afstand verdraagt weinig spanning (het veld U/d moet onder de

doorslagsterkte blijven), en materialen met een enorme ε_r hebben er nadelen bij: bij keramiek hangt de capaciteit af van de spanning en de temperatuur. Elk condensatortype is een ander compromis:

isolator (diëlektricum)	ε_r
vacuüm	1
lucht (1 bar)	1,0006
PTFE (teflon)	2,1
polypropyleen (PP)	2,2
polyester (PET)	3,3
aluminiumoxide (elco)	±9
tantaaloxide	±27
water (20 °C)	±80
bariumtitanaatkeramiek	10^3 tot 10^4



Tussen de platen is het veld homogeen; alleen aan de randen buigt het uit. Het doosje van Gauss vangt de lading van één plaatoppervlak.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.8

Een foliecondensator voor 230 V

8/28

Een motorcondensator van 10 µF voor 230 V (hoofdstuk 20 zet er een bij de drukpomp) is een opgerolde polypropyleenfolie van 5 µm dik, aan beide kanten met een laagje metaal opgedampt. (a) Hoe groot moet de folie zijn, en hoe lang is een rol van 5 cm breed? (b) Welk veld staat er in de folie bij de piek van de netspanning, en welke energie zit er dan in? (c) Hoe groot zouden twee platen in lucht op 1 mm afstand moeten zijn voor dezelfde 10 µF?

GEGEVEN

- $C = 10\,\mu\text{F}$, $d = 5\,\mu\text{m}$, $\varepsilon_r = 2{,}2$ (PP)
- $\hat{U} = 325\,\text{V}$

GEVRAAGD

- A en de lengte van de rol
- E en W bij 325 V

- oppervlakte in lucht

OPLOSSING

1. $A = \dfrac{C\,d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \dfrac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}2} = 2{,}57\,\mathrm{m}^2$.

2. Bij 5 cm breedte: $2{,}57 / 0{,}05 = 51\,\mathrm{m}$ folie. Opgerold met een tweede folie (anders raken de metaallagen elkaar bij het wikkelen) wordt het een cilinder van enkele centimeter dik. Bij het oprollen werken beide kanten van elke folie mee: in werkelijkheid volstaat ongeveer de helft.

3. (b) $E = \hat{U}/d = 325/(5 \cdot 10^{-6}) = 65\,\mathrm{V}/\mu\mathrm{m}$, twintig keer meer dan lucht verdraagt (3 V/µm); polypropyleen houdt enkele honderden V/µm uit. $W = \frac{1}{2} C \hat{U}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \cdot 325^2 = 0{,}53\,\mathrm{J}$.

4. (c) $A = C\,d/\varepsilon_0 = 10^{-5} \cdot 10^{-3} / (8{,}854 \cdot 10^{-12}) = 1129\,\mathrm{m}^2$: een vierkant van 34 m zijde.

ANTWOORD

Een folie van 2,6 m² (een rol van 51 m bij 5 cm breedte); in de folie staat 65 V/µm bij de piek van het net, en de condensator bevat dan 0,53 J. In lucht zou het een plaat van 1129 m² vragen: de dunne folie wint een factor 200, de isolator nog eens 2,2.

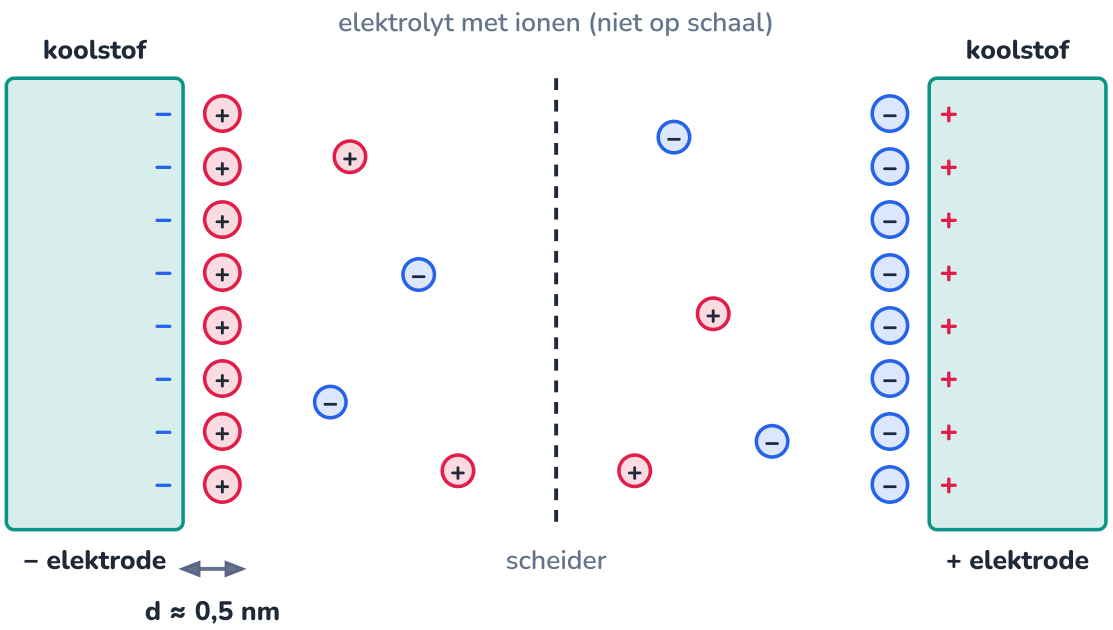
Klopt dit? Orde van grootte: een echte motorcondensator van 10 µF / 450 V is een cilinder van ongeveer 4 cm diameter en 7 cm lang, ongeveer 90 cm³. De folie alleen neemt $2{,}57\,\mathrm{m}^2 \cdot 5\,\mu\mathrm{m} = 13\,\mathrm{cm}^3$ in (met metaallaag, marges en behuizing meer): het klopt. Een opgedampte metaallaag heeft nog een voordeel: bij een doorslagje verdampt ze plaatselijk en isoleert zichzelf ('zelfherstellend').

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.9

Waarom een supercondensator één farad haalt

9/28

In hoofdstuk 24 van I hield een supercondensator van 1 F de 5 V-rail 3 s overeind, en een vlakke condensator van 1 F in lucht met 1 mm afstand vroeg ruim 100 km² plaat. Hoe kan een doosje van enkele cm³ dan 1 F halen? Gebruik $C = \varepsilon A/d$ met de afmetingen van een elektrische **dubbellaag**: ionen die op ongeveer 0,5 nm van een koolstofoppervlak liggen, in een laagje met $\varepsilon_r \approx 8$. Actieve kool heeft ongeveer 1500 m² oppervlak per gram.



Aan elke elektrode ligt een laag ionen op een halve nanometer: twee condensatoren in serie, gescheiden door een poreuze scheider.

GEGEVEN

- $d \approx 0{,}5\,\text{nm}$, $\varepsilon_r \approx 8$ (orde van grootte)
- actieve kool: $\approx 1500\,\text{m}^2/\text{g}$
- organisch elektrolyt: hoogstens $\approx 2{,}7\,\text{V}$ per cel

GEVRAAGD

- C per cm² en per gram
- waarom de spanning zo laag blijft
- hoe een cel van 1 F / 5,5 V is opgebouwd

OPLOSSING

1 Per vierkante meter: $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{d} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 8}{0{,}5 \cdot 10^{-9}} = 0{,}142\,\text{F/m}^2$, of $14\,\mu\text{F/cm}^2$ (gemeten waarden liggen rond 10 tot 20 µF/cm²).

2 Per gram koolstof: $0{,}142 \cdot 1500 \approx 213\,\text{F/g}$. Voor 1 F volstaat $7{,}1\,\text{m}^2$ oppervlak: $4{,}7\,\text{mg}$ koolstof. Tegenover de plaat in lucht (d is 2 miljoen keer kleiner) is dat het hele geheim.

3 De prijs: over 0,5 nm staat bij 1,35 V (de helft van een cel van 2,7 V) een veld van $1{,}35/(0{,}5 \cdot 10^{-9}) = 2{,}7 \cdot 10^9\,\text{V/m}$, bijna duizend keer de doorslagsterkte van lucht. Boven ongeveer 2,7 V ontleedt het elektrolyt zelf. Meer spanning kan alleen door cellen in serie te zetten.

4 Elke cel heeft twee elektroden, elk met een eigen dubbellaag: twee condensatoren in serie, dus de helft van de capaciteit van één elektrode. Een 'supercondensator van 1 F / 5,5 V' bestaat uit twee cellen van 2 F / 2,75 V in serie; elke elektrode moet dan 4 F halen. In de praktijk haalt actieve kool per elektrode ongeveer 100 F/g (niet alle poriën zijn bereikbaar voor de ionen): 0,04 g per elektrode, 0,16 g voor het geheel.

ANTWOORD

Een dubbellaag geeft ongeveer 14 µF/cm², en actieve kool heeft zoveel binnenoppervlak dat een gram in theorie ongeveer 210 F haalt. De afstand van een halve nanometer geeft de capaciteit, maar laat maar ongeveer 2,7 V per cel toe: daarom zijn supercondensatoren voor 5,5 V twee cellen in serie.

Klopt dit? Energie: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5{,}5^2 = 15\,\text{J}$ ($4\,\text{mWh}$) in een onderdeel van enkele gram, ordegrootte 5 Wh/kg voor grote cellen, tegenover ongeveer 110 Wh/kg voor een LiFePO4-batterij (hoofdstuk 24 van I). Een supercondensator slaat weinig energie op, maar kan ze zeer snel en eindeloos vaak opnemen en afgeven: geen chemische reactie, alleen ionen die verschuiven.

UITLEG · 19.10

Het magnetisch veld van een stroomdraad en een spoel

Een stroom maakt een magnetisch veld $\vec{B}$ (eenheid tesla, T). Het aardmagnetisch veld in België is ongeveer 50 µT, een koelkastmagneet enkele mT, een neodymiummagneet ruim 1 T aan zijn oppervlak. Zoals Coulomb het veld van een lading geeft, geeft de wet van **Biot-Savart** het veld van een stukje stroom:

WET VAN BIOT-SAVART

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}, \qquad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/A}$$

$\mathrm{d}\vec{l}$ langs de stroom, $\hat{r}$ van het stukje naar het punt. Het vectorproduct (hoofdstuk 5) zegt: $\mathrm{d}\vec{B}$ staat loodrecht op de draad en op $\hat{r}$, de velden draaien rond de draad (rechterhandregel).

Een lange rechte draad. Leg de draad langs de z-as en kijk op afstand a. Voor een stukje op hoogte z is $r^2 = a^2 + z^2$ en de sinus van de hoek tussen $\mathrm{d}\vec{l}$ en $\hat{r}$ is a/r. Alle bijdragen wijzen dezelfde kant op, dus mag je de grootten optellen (hoofdstuk 3):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\,\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{z}{a\sqrt{a^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{2}{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

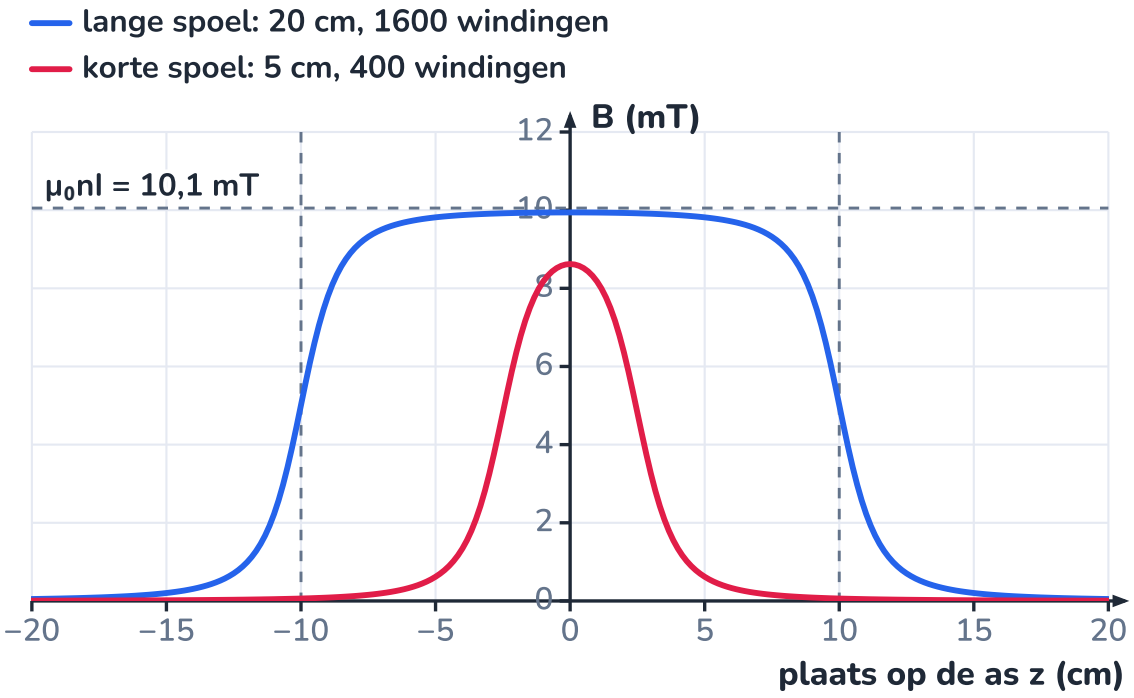
Voor symmetrische gevallen gaat het sneller met de **wet van Ampère**: loop je langs een gesloten lus en tel je B maal de weg op (de component langs de lus), dan vind je μ_0 maal de stroom die door de lus gaat. Een cirkel rond de draad: $B\cdot 2\pi a = \mu_0 I$, dezelfde uitkomst in één regel.

WET VAN AMPÈRE, RECHTE DRAAD, LANGE SPOEL

$$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}} \qquad B_{\text{draad}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad B_{\text{spoel}} = \mu_0\frac{NI}{l} = \mu_0 nI$$

Spoel: een rechthoekige lus met één zijde binnen (lengte l) en de andere ver buiten omsluit NI; alleen de zijde binnenin draagt bij. $n = N/l$ is het aantal windingen per meter. Met een ijzerkern wordt het veld μ_r keer groter, tot het ijzer verzadigt (ongeveer 1,5 tot 2 T).

De formule van de lange spoel geldt in het midden van een spoel die veel langer is dan breed. Met Biot-Savart op elke winding (opdracht 19.17 geeft het veld van één winding) vind je het veld op de as van een echte spoel: in het midden bijna $\mu_0 nI$, aan de uiteinden de helft, en buiten valt het snel weg.



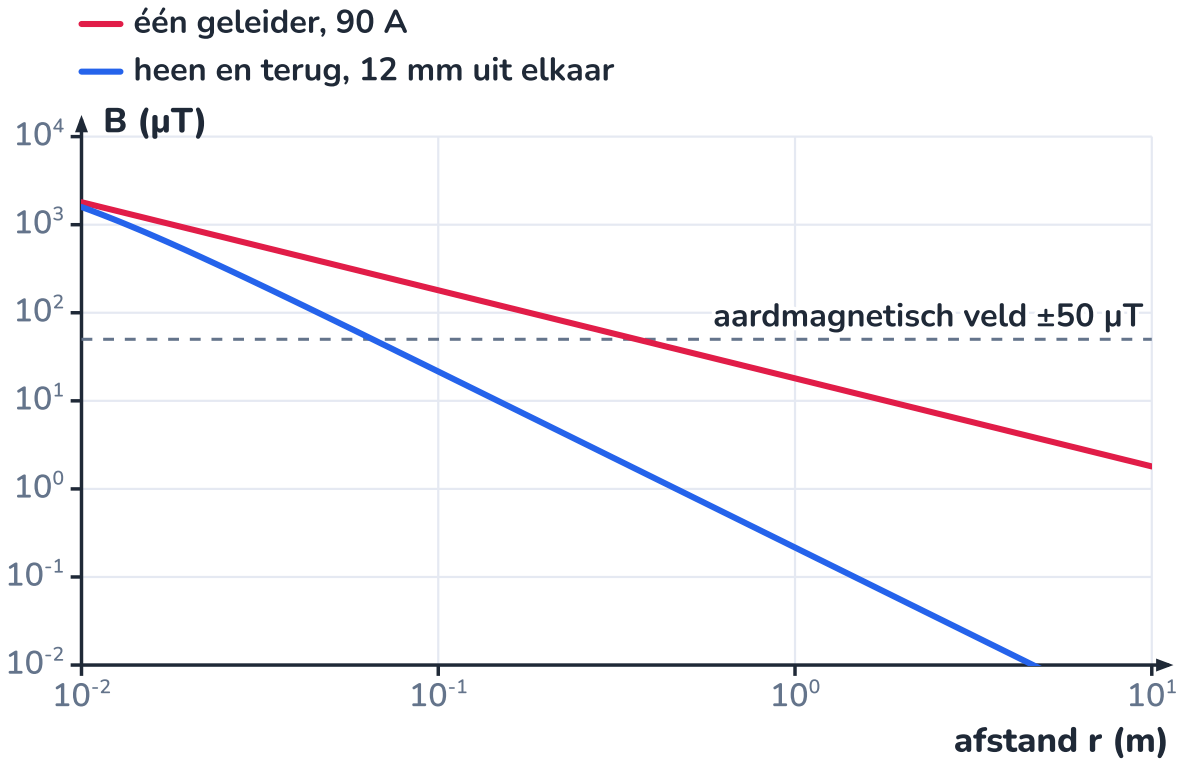
Dezelfde windingsdichtheid, andere lengte: de lange spoel haalt in het midden 9,94 mT, bijna $\mu_0 nI$; de korte spoel maar 8,62 mT. Aan de uiteinden van de lange spoel (stippellijnen) is het veld de helft.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.11

Waarom de plus- en minkabel samen lopen

11/28

Tussen de batterij en de netomvormer van het station loopt bij vol vermogen ongeveer 90 A (hoofdstuk 7). (a) Hoe groot is het magnetisch veld op 2 cm en op 0,50 m van één geleider? (b) En als de heen- en terugleiding naast elkaar liggen, met een hartafstand van 12 mm? (c) Waarom telt dat voor een kompas, een gevoelige sensor en de omvormer zelf?



Logaritmische assen: één geleider (helling −1) tegenover heen en terug naast elkaar (helling −2). Al op 10 cm zakt het paar onder het aardveld.

GEGEVEN

- $I = 90\ \text{A}$; hartafstand $d = 12\ \text{mm}$
- aardmagnetisch veld $\approx 50\ \mu\text{T}$

GEVRAAGD

- B van één geleider op 2 cm en 0,50 m
- B van het paar op 0,50 m

OPLOSSING

1 (a) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 90}{2\pi \cdot 0{,}02} = 900\ \mu\text{T}$ op 2 cm, en $36\ \mu\text{T}$ op 0,50 m: van dezelfde orde als het aardveld.

2 (b) Twee tegengestelde stromen: hun velden heffen elkaar bijna op. Op afstand $r \gg d$ scheelt de afstand tot de twee draden ongeveer d, en blijft over $B \approx \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r - d/2} - \dfrac{1}{r + d/2}\right) \approx \dfrac{\mu_0 I\, d}{2\pi r^2}$.

3 Op 0,50 m: $\dfrac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 90 \cdot 0{,}012}{2\pi \cdot 0{,}25} = 0{,}86\ \mu\text{T}$ (de exacte vectorsom geeft hetzelfde). Het veld van een paar daalt met $1/r^2$ in plaats van $1/r$: op 0,50 m 42 keer minder.

4 (c) Een kompas of een magnetometer meet het aardveld van 50 µT; een losse kabel ernaast zou het met tientallen µT verstoren, en bij elke verandering van de stroom anders. Het omsloten oppervlak tussen heen- en terugleiding bepaalt ook hoeveel spanning een veranderende stroom in naburige lussen opwekt (Faraday, verderop) en hoeveel zelfinductie de kabel heeft: bij een omvormer die in microseconden schakelt, telt elke nanohenry.

ANTWOORD

Eén geleider: 900 µT op 2 cm en 36 µT op 0,50 m. Het paar: 0,86 µT op 0,50 m. Regel voor het station: plus en min van elke gelijkstroomkabel naast elkaar (of getwist), nooit langs verschillende wegen.

Klopt dit? Dimensies: T·m/A · A / m = T. De benadering $\mu_0 I d/(2\pi r^2)$ is in alle richtingen dezelfde (een 'lijndipool'), en de figuur toont dat ze vanaf enkele centimeter samenvalt met de exacte som. Dezelfde reden zit achter getwiste paren in

netwerkkabels en sensordraden: de velden van heen en terug heffen elkaar op.

UITLEG · 19.12

De Lorentzkracht

Een lading die beweegt in een magnetisch veld voelt een kracht loodrecht op haar snelheid en op het veld. Samen met de elektrische kracht:

LORENTZKRACHT

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad |\vec{F}_B| = |q|\,vB\sin\theta$$

θ is de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{B}$. Evenwijdig aan het veld bewegen kost niets. Voor een negatieve lading keert de kracht om. De richting volgt uit het vectorproduct (hoofdstuk 5): krul de vingers van je rechterhand van $\vec{v}$ naar $\vec{B}$, je duim wijst langs $\vec{v} \times \vec{B}$.

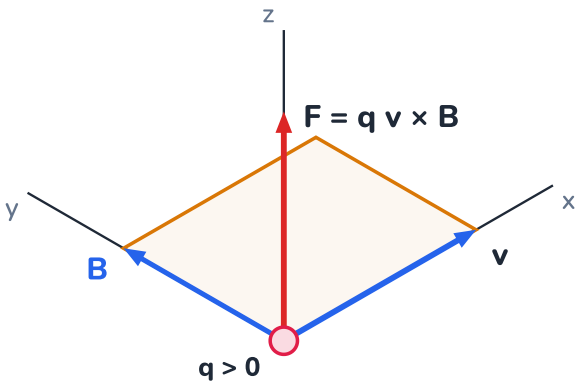
Op een stroomdraad. In een draad met doorsnede A bewegen n ladingen q per m³ met een driftsnelheid v_d: de stroom is $I = nqv_dA$. Op een stuk L zitten nAL ladingen, elk met kracht $q\vec{v}_d \times \vec{B}$. Samen $nALq\,\vec{v}_d \times \vec{B} = I\vec{L} \times \vec{B}$, met $\vec{L}$ in de richting van de stroom. Dat is de $F = BIl$ van hoofdstuk 26 van I, nu met een richting. De driftsnelheid zelf is klein: in koper ($n = 8{,}5 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$) loopt 10 A door 5 mm² aan $0{,}15\,\mathrm{mm/s}$.

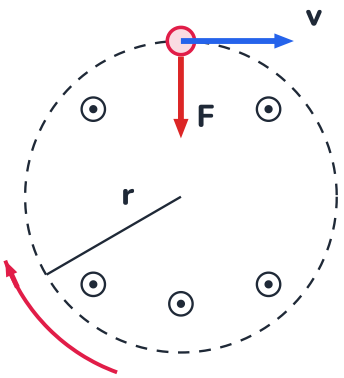
KRACHT OP EEN DRAAD EN STRAAL VAN DE CIRKELBAAN

$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B} \qquad r = \frac{mv}{|q|B}$$

Omdat de magnetische kracht loodrecht op $\vec{v}$ staat, verricht ze geen arbeid: ze buigt de baan af zonder de snelheid te veranderen. Loodrecht op een homogeen veld wordt dat een cirkel, met $qvB = mv^2/r$ als middelpuntzoekende kracht (hoofdstuk 8).

Toepassingen: elke elektromotor en luidspreker ($I\vec{L} \times \vec{B}$), de massaspectrometer en het cyclotron (de straal hangt af van de massa), het noorderlicht (geladen deeltjes van de zon die rond de aardmagnetische veldlijnen spiraliseren), en de Hall-sensor van het volgende blad. Een elektron van $2 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$ in 10 mT beschrijft een cirkel van $1{,}14\,\mathrm{mm}$.





B uit het blad (⊙): een positieve lading draait met de klok mee

r = mv / (qB)

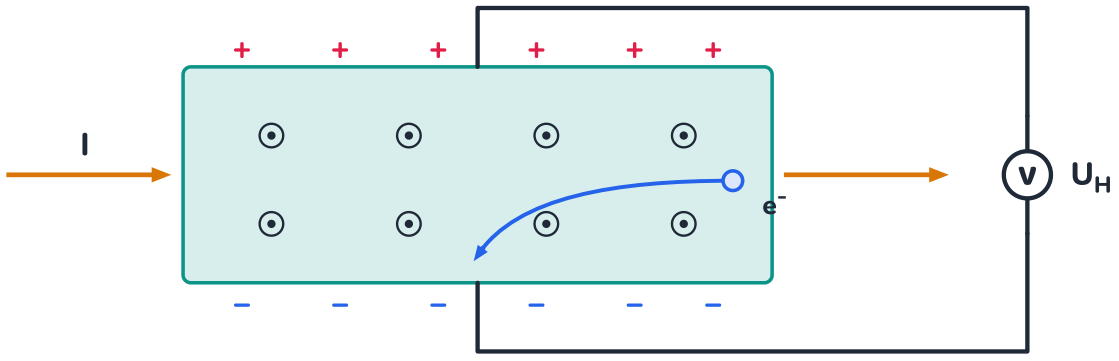
Links in isometrie: v langs x, B langs y, dan wijst v × B langs z. Rechts: loodrecht op een homogeen veld maakt een geladen deeltje een cirkel.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.13

De Hall-sensor in de stroommeter van de module

13/28

Op A4 van de Mega meet een ACS712 de stroom van de klimaatmodule (hoofdstuk 16 van I). Het is een **Hall-sensor**: de stroom loopt door een koperbaantje in het ic, en een halfgeleiderplaatje erboven meet het veld ervan. (a) Leid de Hall-spanning af voor een plaatje met dikte t en ladingsdichtheid n. (b) Bereken ze voor een koperen strip (10 A, 0,10 T, 1 mm dik) en voor een halfgeleiderplaatje ($n = 10^{22}\,\mathrm{m}^{-3}$, 5 mA, 50 mT, 0,1 mm dik). (c) De ACS712-20A geeft 2,5 V bij 0 A en 100 mV per ampère. Wat meet A4 bij 12 A, en wat is de kleinste stap in stroom?



B uit het blad (⊙); de elektronen buigen af naar de onderrand

De stroom loopt naar rechts, de elektronen dus naar links; het veld uit het blad buigt ze naar de onderrand. Tussen boven- en onderrand ontstaat de Hall-spanning.

GEGEVEN

- $n_{\text{Cu}} = 8{,}5 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$, $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$
- ACS712-20A: 100 mV/A, 2,5 V bij 0 A; ADC 10 bit op 5 V (4,88 mV per stap)

GEVRAAGD

- U_H algemeen, voor koper en voor de halfgeleider
- spanning op A4 bij 12 A; stroom per ADC-stap

OPLOSSING

1 (a) De ladingsdragers drijven met v_d door een plaatje met breedte b en dikte t. De Lorentzkracht duwt ze naar één rand; daar hopen ze op tot het dwarsveld E_H even hard terugduwt: $qE_H = qv_dB$. Met $U_H = E_H b$ en $v_d = I/(nqbt)$ valt b weg:

2 $U_H = v_d B b = \dfrac{I\,B}{n\,q\,t}$. Hoe **minder** ladingsdragers, hoe groter de spanning: bij evenveel stroom moeten ze sneller bewegen.

3 (b) Koper: $U_H = \dfrac{10 \cdot 0{,}10}{8{,}5 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 73\ \text{nV}$: onmeetbaar klein naast ruis en thermospanningen.
Halfgeleider: $U_H = \dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}05}{10^{22} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4}} = 1{,}56\ \text{mV}$: goed te versterken.

4 (c) Bij 12 A: $2{,}5 + 12 \cdot 0{,}100 = 3{,}7\ \text{V}$ op A4, ruw ongeveer $3{,}7/5 \cdot 1024 = 758$. Eén ADC-stap is $4{,}88\ \text{mV}$, dus $4{,}88/100 = 0{,}049\ \text{A}$ per stap.

ANTWOORD

$U_H = IB/(nqt)$: 73 nV in koper, 1,6 mV in de halfgeleider. Daarom zijn Hall-sensoren halfgeleiders. De ACS712 geeft 3,7 V bij 12 A en meet in stappen van 49 mA; de koperbaan en de elektronica zijn galvanisch gescheiden (tot 2,1 kV volgens de datasheet).

Klopt dit? Het teken van U_H verraadt het teken van de ladingsdragers: in koper en in een n-halfgeleider zijn het elektronen, in een p-halfgeleider gaten, en dan keert U_H om. Edwin Hall mat het effect in 1879 in goud, bijna twintig jaar voor de ontdekking van het elektron. Een Hall-sensor meet ook gelijkstroom, wat een stroomtransformator niet kan (verderop).

UITLEG · 19.14

Magnetische flux en de wet van Faraday

14/28

Hoeveel veld gaat er door een lus? Dat is de **magnetische flux**, zoals de elektrische flux van Gauss:

MAGNETISCHE FLUX

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\theta \qquad 1\,\text{Wb} = 1\,\text{T}\,\text{m}^2 = 1\,\text{V}\,\text{s}$$

$\vec{A}$ staat loodrecht op het vlak van de lus, θ is de hoek tussen $\vec{B}$ en die normaal. Bij een niet-homogeen veld: $\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.

Faradays ontdekking in één formule: een lus waarvan de flux verandert, krijgt een emk (elektromotorische kracht: een spanning die stroom kan drijven), evenredig met de snelheid van de verandering.

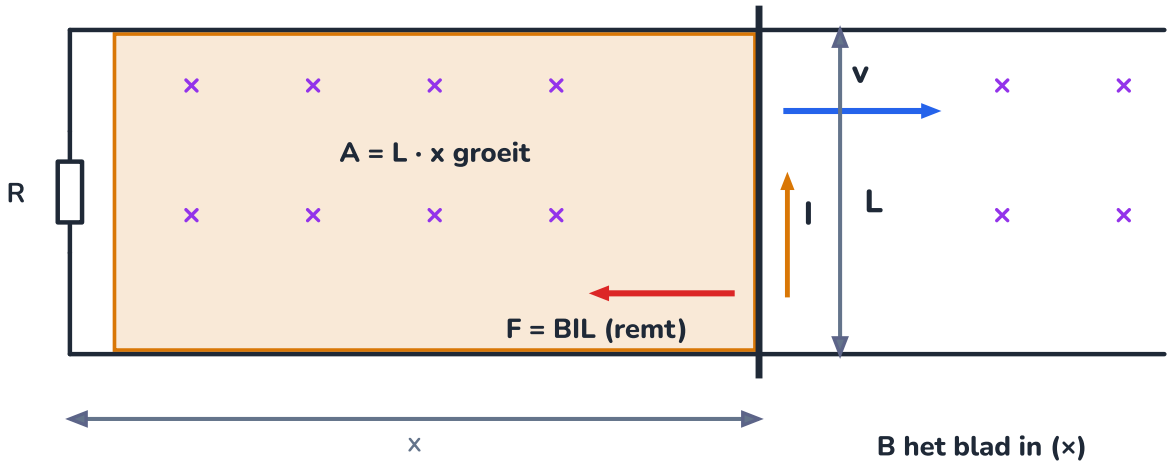
WET VAN FARADAY

$$e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

N windingen in serie tellen op. Het minteken is de wet van Lenz (verderop). De flux kan op drie manieren veranderen: B verandert (transformator), A verandert (een bewegende geleider), of θ verandert (een draaiende spoel: de generator).

Een bewegende geleider. Een staaf met lengte L schuift met snelheid v over twee rails, loodrecht op een veld B (figuur). Op elke lading in de staaf werkt $q\vec{v} \times \vec{B}$, langs de staaf: de ladingen worden naar één uiteinde geduwd. De arbeid per lading over de staaf is de emk: $e = vBL$. Faraday zegt hetzelfde: de omsloten oppervlakte $A = Lx$ groeit met $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t = Lv$, dus $|e| = B\,Lv$. Twee verklaringen, één verschijnsel.

De energiebalans. Sluit je de rails met een weerstand R, dan loopt $I = BLv/R$, en de staaf voelt $F = BIL$ tegen de beweging in. Wie de staaf aan constante snelheid wil houden, moet duwen met vermogen $Fv = BILv = eI = I^2R$: elke joule warmte in de weerstand komt uit het duwen. Dat is een generator in zijn eenvoudigste vorm, en ook de reden waarom een generator zwaarder draait zodra je er stroom uit neemt.



De staaf schuift naar rechts in een veld het blad in: de stroom loopt omhoog door de staaf, en de kracht BIL remt de beweging af.

PROEF · 19.15

Een magneet valt door een spoel

15/28

ONDERZOEKSVRAAG

Hoe ziet de spanning eruit die een vallende magneet in een spoel opwekt, en welke grootheid blijft gelijk als je de magneet van hoger laat vallen?

MATERIAAL

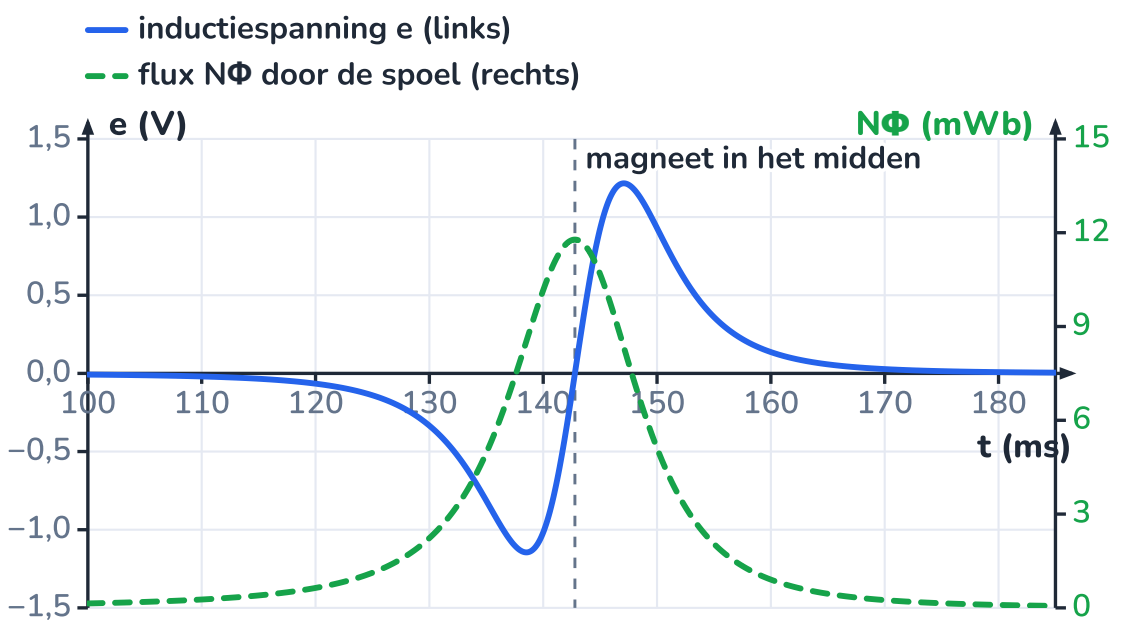
- spoel met ±300 windingen (straal ±12 mm), eventueel zelf gewikkeld op een pvc-buis
- neodymiummagneet Ø 10 × 10 mm, een pvc- of kartonnen buis die rechtop door de spoel past

oscilloscoop of meetinterface (minstens 5000 metingen per seconde; bij een Arduino: de spoel tussen A0 en een deler die 2,5 V geeft)

Python of een rekenblad om de oppervlakte onder de pulsen te berekenen, meetlint, zachte opvang (schuim)

Veiligheid

Neodymiummagneten niet tegen elkaar laten klappen; de opvang onder de buis zacht maken, want de magneet is bros.



Model van de proef: de flux (stippellijn, rechts) stijgt en daalt; de emk is haar negatieve afgeleide. Beide pulsen hebben dezelfde oppervlakte.

WERKWIJZE

1. Zet de buis rechtop door de spoel, sluit de spoel aan op de scoop (enkelvoudige trigger op ±0,1 V, 20 ms per hokje).
2. Laat de magneet van 10 cm boven het midden van de spoel door de buis vallen. Bewaar het beeld of de meetreeks.
3. Herhaal van 5 cm en van 20 cm. Noteer telkens beide pieken en de tijd ertussen.
4. Bereken met de meetreeks de oppervlakte onder elke puls (trapeziumregel, hoofdstuk 3).
5. Draai de magneet om en laat hem nog eens vallen. Sluit de spoel daarna kort met een weerstand van 10 Ω en herhaal.

WAARNEMING

Twee pulsen van tegengesteld teken: één terwijl de magneet de spoel nadert, één terwijl hij haar verlaat. Het model (figuur) voorspelt voor 10 cm pieken van −1,15 V en +1,22 V op 8,6 ms van elkaar; de tweede is iets hoger en smaller, omdat de magneet sneller gaat. Van hoger vallen geeft hogere en smallere pulsen, maar de **oppervlakte** van elke puls blijft gelijk (11,8 mV·s in het model). Omgedraaid: beide pulsen keren om. Met de weerstand van 10 Ω loopt er stroom, en de magneet valt merkbaar trager door de spoel.

VERKLARING

Integreer de wet van Faraday over één puls: $\int e\,\mathrm{d}t = -N\,\Delta\Phi$. De flux gaat van (bijna) nul tot haar maximum $N\Phi_{\max}$ als de magneet in het midden zit, en terug naar nul. De oppervlakte hangt dus alleen af van de magneet en de spoel, niet van de snelheid: sneller vallen geeft een hogere maar kortere puls. Het model beschrijft de magneet als een kleine dipool met magnetisch moment $m = B_r V/\mu_0 = 0{,}75\ \mathrm{A\,m^2}$; de flux door één winding op afstand z is dan $\Phi = \mu_0 m R^2/\left(2(R^2+z^2)^{3/2}\right)$, met als maximum $N\Phi_{\max} = 11{,}8\ \mathrm{mWb}$. De piek volgt uit $e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$: evenredig met de snelheid ($1{,}40\ \mathrm{m/s}$ na 10 cm vallen). Een echte magneet is geen punt: vlak bij de spoel wijkt de meting enkele tientallen procenten af, de oppervlakte veel minder. De tragere val met de weerstand is de wet van Lenz (volgend blad).

UITLEG · 19.16

De wet van Lenz

16/28

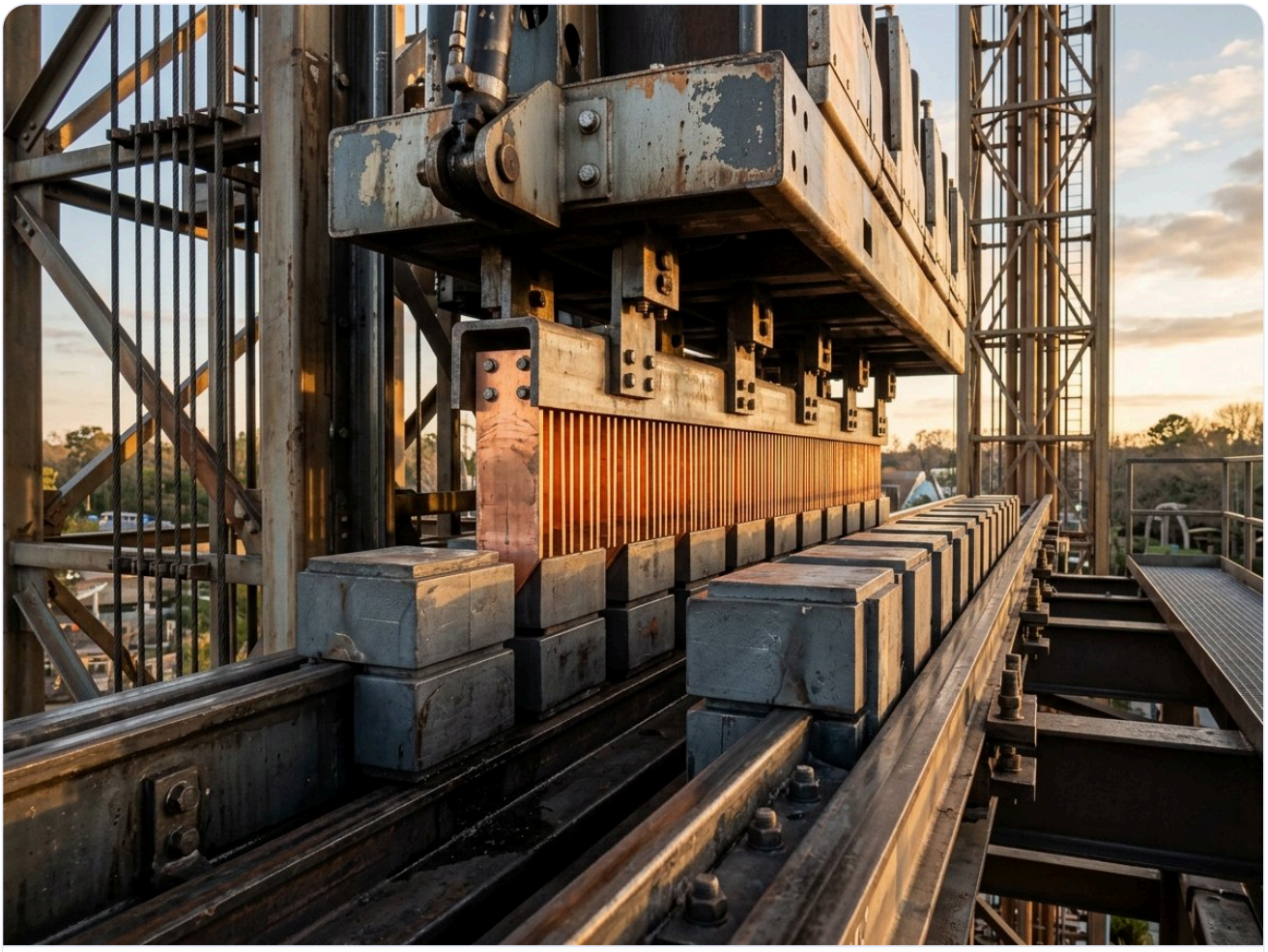
Het minteken in $e = -N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ bepaalt de richting: **de inductiestroom werkt de verandering tegen die hem veroorzaakt**. Nadert een noordpool een ring, dan maakt de ringstroom zelf een noordpool naar de magneet toe: ze stoten af. Verwijdert hij zich, dan trekt de ring hem terug. Dat is geen extra natuurwet maar behoud van energie: stel dat het teken andersom was, dan zou de ring de magneet aantrekken, sneller laten bewegen, meer stroom geven, nog harder trekken, en zou je energie uit het niets halen.

In massieve metalen lopen de inductiestromen in lussen rond: **wervelstromen**. Ze remmen en verwarmen, en worden zo nuttig als hinderlijk:

- **Wervelstroomrem**: een vrije-valtoren of achtbaan remt af met koperen of aluminium vinnen die tussen sterke magneten schuiven. De remkracht is evenredig met de snelheid: ze stopt nooit abrupt, en werkt zonder stroom en zonder slijtage. Een magneet in een koperen buis valt om dezelfde reden traag (opdracht 19.14).
- **Inductiekookplaat**: een spoel met wisselstroom van tientallen kHz wekt wervelstromen op in de bodem van de pan, die zo zelf de warmtebron wordt.
- **Gelamineerde kernen**: in de ijzerkern van een transformator of motor zouden wervelstromen energie verspillen. Dunne, geïsoleerde plaatjes onderbreken hun weg.
- **De kortsluitrem van een windturbine**: verbind je de drie fasen van de generator met elkaar, dan lopen er grote stromen en remt de generator de rotor. Hoe goed dat werkt bij hoge snelheid, bereken je in opdracht 19.18.

De inductiestroom werkt het veld tegen

Hij werkt de **verandering** van de flux tegen, niet het veld zelf. Trek je een magneet weg uit een ring, dan versterkt de ringstroom het veld van de magneet binnen de ring: hij probeert de verdwijnende flux op peil te houden.



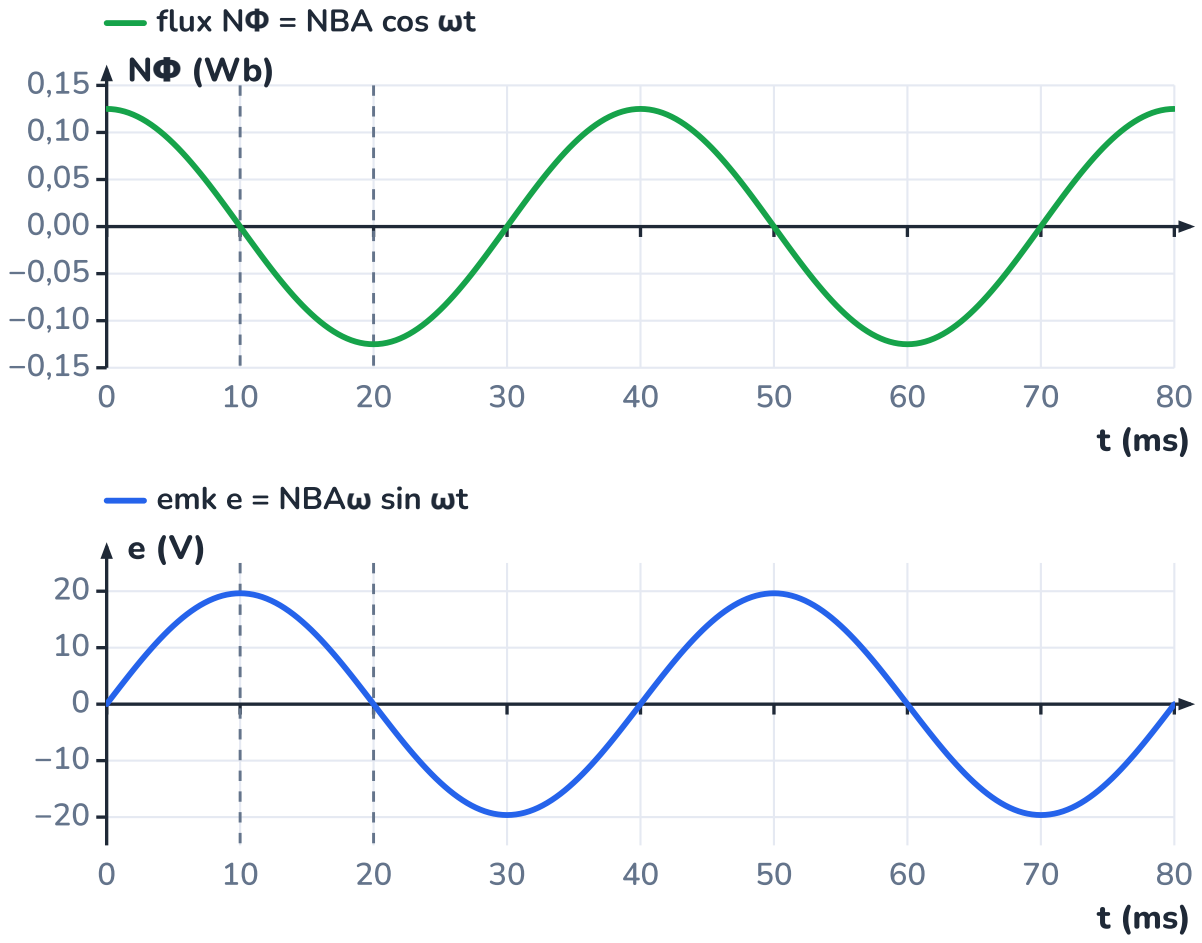
Koperen vinnen die tussen magneten schuiven: wervelstromen remmen de gondel zacht en zonder slijtage af.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.17

De emk van een draaiende spoel

17/28

Een rechthoekige spoel met N windingen en oppervlakte A draait met hoeksnelheid ω in een homogeen veld B, om een as loodrecht op het veld. Leid de emk af. Reken daarna uit wat een spoel van 250 windingen van 4 cm × 5 cm in 0,25 T geeft bij 25 omwentelingen per seconde.



Waar de flux maximaal is (t = 0, 20 ms, …), is de emk nul; waar de flux door nul gaat (t = 10 ms), is de emk het grootst.

GEGEVEN

- $N = 250$, $A = 0{,}04 \cdot 0{,}05 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$, $B = 0{,}25\,\mathrm{T}$, $f = 25\,\mathrm{Hz}$

GEVRAAGD

- $e(t)$ algemeen
- $\hat{E}$ en E_{eff}

OPLOSSING

1. De normaal op de spoel maakt op tijdstip t een hoek $\theta = \omega t$ met het veld (op $t = 0$ staat de spoel loodrecht op B): $\Phi(t) = BA\cos\omega t$.

2. Faraday: $e = -N\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BA\cos\omega t) = NBA\omega\sin\omega t$. De emk is maximaal als de spoel evenwijdig met het veld staat (de flux is dan nul, maar verandert het snelst) en nul als ze er loodrecht op staat.

3. $\omega = 2\pi \cdot 25 = 157{,}1\,\mathrm{rad/s}$; $\hat{E} = NBA\omega = 250 \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 157{,}1 = 19{,}6\,\mathrm{V}$.

4. Effectief (hoofdstuk 3): $E_{\text{eff}} = \hat{E}/\sqrt{2} = 13{,}9\,\mathrm{V}$.

ANTWOORD

$e(t) = NBA\omega\sin\omega t$: een sinus met amplitude evenredig met het toerental. Hier 19,6 V piek bij 25 Hz. In fasortaal (hoofdstuk 7): de emk ijlt 90° voor op de flux, zoals elke afgeleide.

Klopt dit? Dimensies: T·m²/s = Wb/s = V. Twee keer zo snel draaien verdubbelt de amplitude én de frequentie. Daarom kan een generator die met wisselend toerental draait (een windturbine) nooit rechtstreeks aan een net met vaste spanning en

frequentie: je richt eerst gelijk (verderop), of je laat de rotor met een vast toerental draaien (zoals grote centrales).

UITLEG · 19.18

Zelfinductie en de energie in een spoel

Een spoel voelt haar eigen flux. Verandert de stroom, dan verandert de flux, en wekt de spoel in zichzelf een emk op die de verandering tegenwerkt (Lenz). De verhouding tussen de gekoppelde flux en de stroom is de **zelfinductie** L:

ZELFINDUCTIE

$$L = \frac{N\Phi}{I} \qquad u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad L_{\text{spoel}} = \mu_0\mu_r\,\frac{N^2 A}{l}$$

Eenheid henry: $1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{V\,s/A}$. Voor een lange spoel volgt L uit $\Phi = BA$ met $B = \mu_0 N I/l$. N staat in het kwadraat: dubbel zoveel windingen geeft dubbel zoveel flux, die dubbel zoveel windingen doorsnijdt. $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ is de spanning over de spoel (hoofdstuk 1, en $Z_L = j\omega L$ in hoofdstuk 7).

Om de stroom op te bouwen, moet de bron werk leveren tegen die emk in: $\mathrm{d}W = u\,i\,\mathrm{d}t = L\,i\,\mathrm{d}i$. Integreren van 0 tot I (hoofdstuk 3):

ENERGIE IN EEN SPOEL

$$W = \tfrac{1}{2}LI^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\cdot Al$$

De tweede vorm (met L en B van de lange spoel) toont: de energie zit in het magnetisch veld, $B^2/(2\mu_0)$ per m³, net zoals die van een condensator in het elektrisch veld zit.

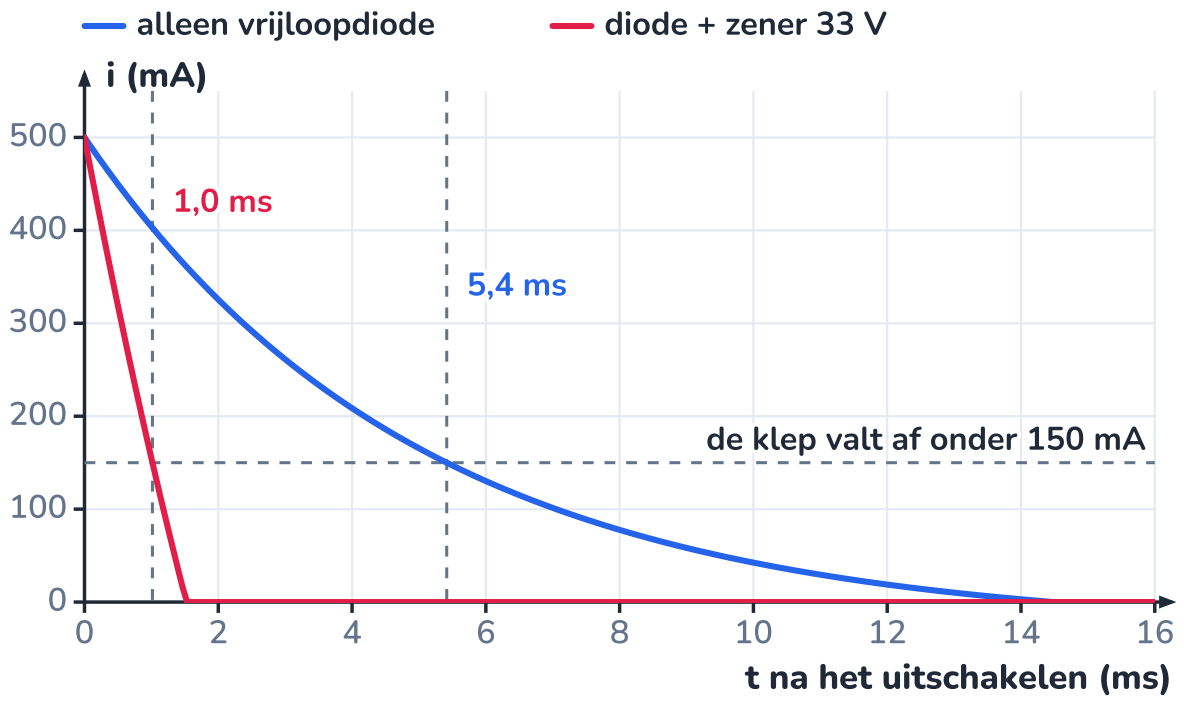
Die energie moet ergens heen als je de stroom onderbreekt. Een schakelaar of transistor die in een microseconde opent, geeft $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ van honderden of duizenden volt: de spanning stijgt tot er iets doorslaat, een vonk over het contact of de transistor zelf. Daarom kreeg elke pomp, klep en elk relais in de klimaatmodule een **vrijloopdiode** (hoofdstuk 23 van I): de stroom loopt door de diode verder en sterft uit met $\tau = L/R$ (hoofdstuk 4). Het volgende voorbeeld toont de keerzijde: een klep valt zo trager af.

Twee spoelen die elkaars flux delen, beïnvloeden elkaar: een veranderende stroom in de ene wekt een spanning in de andere, met een **wederzijdse inductie** M. Op dat principe draait de transformator.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.19

De magneetklep uitschakelen: diode of zener?

De CO_2-klep van de klimaatmodule (D10, hoofdstuk 23 van I) is een magneetklep van 12 V met, als rekenwaarden, $R = 24\,\Omega$ en $L = 0{,}12\,\mathrm{H}$; ze valt dicht als de stroom onder 150 mA zakt. De MOSFET schakelt ze uit. (a) Hoeveel energie zit er in de spoel? (b) Hoe lang duurt het tot de klep dicht is met alleen een vrijloopdiode (0,7 V)? (c) En als er een zenerdiode van 33 V in serie met de vrijloopdiode staat? Welke spanning ziet de MOSFET dan (die verdraagt 55 V)?



Na het uitschakelen: met alleen een diode sterft de stroom traag uit (τ = 5 ms); met een zener erbij daalt ze bijna recht naar nul in 1,5 ms.

GEGEVEN

- $U = 12\,\text{V}$, $R = 24\,\Omega$, $L = 0{,}12\,\text{H}$; afvallen onder $150\,\text{mA}$
- diode $0{,}7\,\text{V}$; zener $33\,\text{V}$; MOSFET tot $55\,\text{V}$

GEVRAAGD

- W
- afvaltijd met diode en met diode + zener
- spanning op de MOSFET

OPLOSSING

1 (a) $I_0 = 12/24 = 0{,}50\,\text{A}$; $W = \tfrac{1}{2}LI_0^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}12\cdot 0{,}25 = 15\,\text{mJ}$; $\tau = L/R = 5\,\text{ms}$.

2 Na het uitschakelen loopt de stroom door de spoel, haar weerstand en de klemspanning U_k (diode, of diode + zener): $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -(U_k + Ri)$. Oplossing (hoofdstuk 4): $i(t) = \left(I_0 + \dfrac{U_k}{R}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} - \dfrac{U_k}{R}$, tot $i = 0$.

3 Afvaltijd: $t = \tau \ln \dfrac{I_0 + U_k/R}{I_{\text{af}} + U_k/R}$. (b) $U_k = 0{,}7\,\text{V}$: $t = 5\,\text{ms}\cdot \ln \dfrac{0{,}5 + 0{,}029}{0{,}15 + 0{,}029} = 5{,}41\,\text{ms}$.

4 (c) $U_k = 33{,}7\,\text{V}$: $t = 5\,\text{ms}\cdot \ln \dfrac{0{,}5 + 1{,}404}{0{,}15 + 1{,}404} = 1{,}02\,\text{ms}$; de stroom is na $1{,}52\,\text{ms}$ helemaal nul. De MOSFET ziet $12 + 33{,}7 = 45{,}7\,\text{V}$: onder 55 V.

ANTWOORD

De spoel bevat 15 mJ. Met alleen een diode valt de klep na 5,4 ms af, met diode en zener na 1,0 ms, vijf keer sneller. De zener neemt de energie sneller op omdat hij er een hogere spanning tegenover zet; de prijs is een drainspanning van 46 V, dus kies de zener onder de grens van de transistor.

Klopt dit? Energie in de zener: hij voert $\int U_z\, i\,\mathrm{d}t$ af, samen met de diode en de spoelweerstand precies de 15 mJ. Zonder enige klem zou $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ bij 1 µs schakeltijd $5\cdot 10^5\,\text{A/s}$ zijn, en $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 60\,\text{kV}$: in werkelijkheid slaat de MOSFET door lang voor dat. Voor de CO_2-klep is 5 ms trager dicht geen probleem; voor een snelle kraan of een injector wel.

De transformator

Twee spoelen rond één gesloten ijzerkern: de **primaire** met N_1 windingen aan een wisselspanning, de **secundaire** met N_2 windingen aan de last. Het ijzer houdt (bijna) alle flux samen: door elke winding van beide spoelen gaat dezelfde Φ. Faraday voor elke spoel: $u_1 = N_1\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ en $u_2 = N_2\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Deel ze door elkaar, en $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ valt weg:

IDEALE TRANSFORMATOR

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \qquad Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2$$

De stroomverhouding volgt uit behoud van energie ($u_1 i_1 = u_2 i_2$ zonder verliezen). Een last Z_2 aan de secundaire ziet de bron als $(N_1/N_2)^2 Z_2$: een transformator verandert ook impedanties.

Voor een sinus met amplitude $\hat{\Phi} = \hat{B}A$ in de kern geeft Faraday een effectieve spanning per spoel

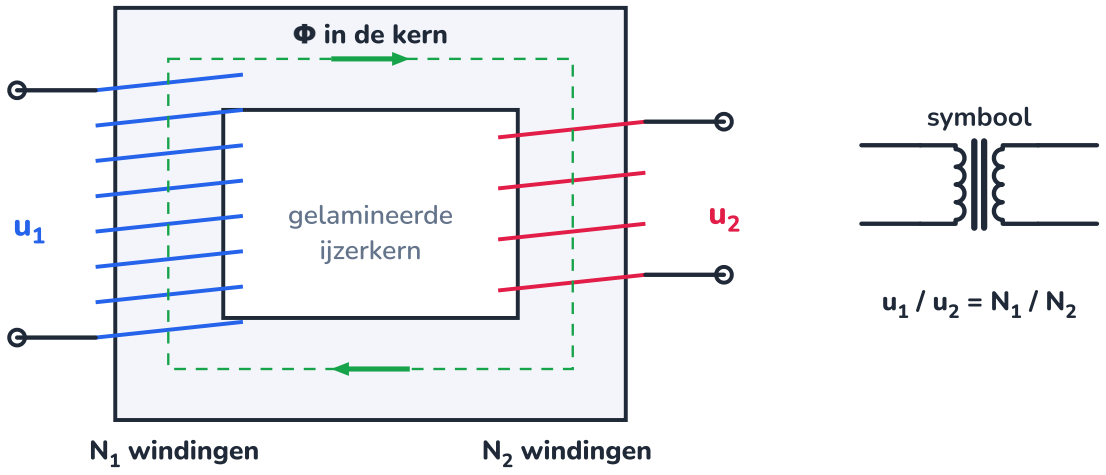
TRANSFORMATORFORMULE

$$U_{\text{eff}} = \frac{2\pi f N \hat{B} A}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, f\, N\, A\, \hat{B}$$

$\hat{B}$ mag in gewoon transformatorijzer tot ongeveer 1,2 à 1,5 T; daarboven verzadigt de kern en schiet de stroom omhoog. Bij een hogere frequentie volstaat een kleinere NA: daarom zijn schakelende voedingen, die met tientallen kHz werken, zo klein en licht.

Waarom werkt het niet met gelijkstroom? Een constante stroom geeft een constante flux, en dan is $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = 0$: de secundaire levert niets, en de primaire is voor gelijkstroom alleen een koperdraad, een kortsluiting. Dat was precies Faradays waarneming aan de ijzeren ring.

Verliezen. Een echte transformator verliest energie in het koper (I^2R in beide spoelen), in het ijzer (hysterese, het telkens omdraaien van de magnetisatie, en wervelstromen, beperkt door de lamellen), en door strooiflux die maar één spoel omsluit. Een kleine nettransformator haalt ongeveer 85 tot 90 %, een grote vermogenstransformator ruim 99 %. Zonder last neemt de primaire een kleine **magnetiseringsstroom**, bijna 90° achter op de spanning (hoofdstuk 20). En een **stroomtransformator** (een stroomtang) is een transformator met de te meten draad als primaire van één winding: de secundaire geeft I/N_2, alleen voor wisselstroom.



Links de bouw: primaire en secundaire op de twee benen van één kern, die de flux samenhoudt. Rechts het schemasymbool.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.21

Transformatoren rekenen: van het labo tot de omvormer

21/28

(a) Een veiligheidstransformator voor het labo maakt 12 V uit 230 V, 50 VA, op een kern met een doorsnede van 8 cm² en $\hat{B} = 1{,}2\ \mathrm{T}$. Hoeveel windingen krijgt elke spoel, en welke draad (3 A/mm²)? (b) Een omvormer kan 230 V maken met een brug van schakelaars aan de 48 V-batterij en een 50 Hz-transformator erachter (hoofdstuk 7: minstens 7,4 keer opwaarts). Welke windingen horen bij 4,0 kVA op een kern van 30 cm²? (c) Hoeveel kleiner mag NA bij een ferrietkern op 40 kHz met $\hat{B} = 0{,}15\ \mathrm{T}$?

GEGEVEN

- $U_1 = 230\ \mathrm{V}$, $U_2 = 12\ \mathrm{V}$, $S = 50\ \mathrm{VA}$, $A = 8\ \mathrm{cm}^2$, $\hat{B} = 1{,}2\ \mathrm{T}$
- omvormer: batterij minstens 44 V, 4,0 kVA, $A = 30\ \mathrm{cm}^2$

GEVRAAGD

- N_1, N_2 en de draaddiameters
- N_1, N_2 en I_1 van de omvormertransformator
- de verhouding 50 Hz tegenover 40 kHz

OPLOSSING

1. (a) $N_1 = \dfrac{U_1}{4{,}44\, f A \hat{B}} = \dfrac{230}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2} = 1079$ windingen; $N_2 = 1079 \cdot 12/230 = 56{,}3$. Onder last zakt de secundaire spanning enkele procenten: men neemt er ongeveer 8 % meer, 61 windingen.

2. Stromen: $I_1 = 50/230 = 0{,}217\ \mathrm{A}$, $I_2 = 50/12 = 4{,}17\ \mathrm{A}$. Bij 3 A/mm²: $0{,}072\ \mathrm{mm}^2$ (Ø 0,30 mm) en $1{,}39\ \mathrm{mm}^2$ (Ø 1,33 mm): veel dunne windingen primair, weinig dikke secundair.

3. (b) Een brug aan 44 V maakt hoogstens een sinus van 44 V piek, $44/\sqrt{2} = 31{,}1\ \mathrm{V}$ effectief. Verhouding $230/31{,}1 = 7{,}39$. $N_2 = 230/(4{,}44 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2) = 288$ en $N_1 = 288/7{,}39 = 39$. Primaire stroom bij 4,0 kVA: $4000/31{,}1 = 129\ \mathrm{A}$.

4. (c) NA is evenredig met $1/(f\hat{B})$: $\dfrac{40\,000 \cdot 0{,}15}{50 \cdot 1{,}2} = 100$. Honderd keer minder windingen maal doorsnede.

ANTWOORD

(a) 1079 en 56 (onbelast; 61 onder last) windingen, draad Ø 0,30 en 1,33 mm. (b) 288 en 39 windingen, primair 129 A: een kern van tientallen kilo. (c) Bij 40 kHz is NA 100 keer kleiner: moderne omvormers verhogen de spanning met een kleine hoogfrequente transformator of zonder transformator (hoofdstuk 24).

Klopt dit? Omgekeerd gerekend: $4{,}44 \cdot 50 \cdot 1079 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2 = 230\ \text{V}$. Voor een veiligheidstransformator eist de norm bovendien een dubbele isolatie tussen primair en secundair: dat is waarom 12 V uit zo'n toestel veilig is, terwijl een spanningsdeler van 230 V naar 12 V dat nooit is.

UITLEG · 19.22

De generator: van draaiende spoel tot driefasige machine

22/28

Een echte generator keert het beeld van de draaiende spoel om: de **magneten draaien** (de rotor), de **spoelen staan stil** (de stator). Zo hoeft de stroom niet via sleepringen van een draaiend deel af te komen. Het veld van de rotor draait door de stator, de flux door elke statorspoel verandert sinusvormig, en elke spoel krijgt een emk. De generator is in feite een transformator waarvan de flux niet heen en weer gaat maar rondloopt: dezelfde formule geldt, per fase

GENERATOR

$$f = \frac{p\,n}{60} \qquad E_{\text{eff}} = 4{,}44\, f\, N\, \hat{\Phi} \propto n$$

p = aantal **poolparen** op de rotor, n = toerental in tpm. Bij elk poolpaar dat voorbijdraait, doorloopt de emk één periode. $\hat{\Phi}$ is de flux van één pool door een spoel; met permanente magneten ligt die vast, dus groeit de emk evenredig met het toerental. (In de praktijk komt er nog een wikkelfactor iets onder 1 bij.)

Een grote centrale draait met een stoomturbine op 3000 tpm met één poolpaar: 50 Hz. Een waterkrachtcentrale draait trager en heeft meer polen. Een kleine windturbine draait nog trager, en heeft daarom veel polen nodig, zonder tandwielkast ertussen (**directe aandrijving**):

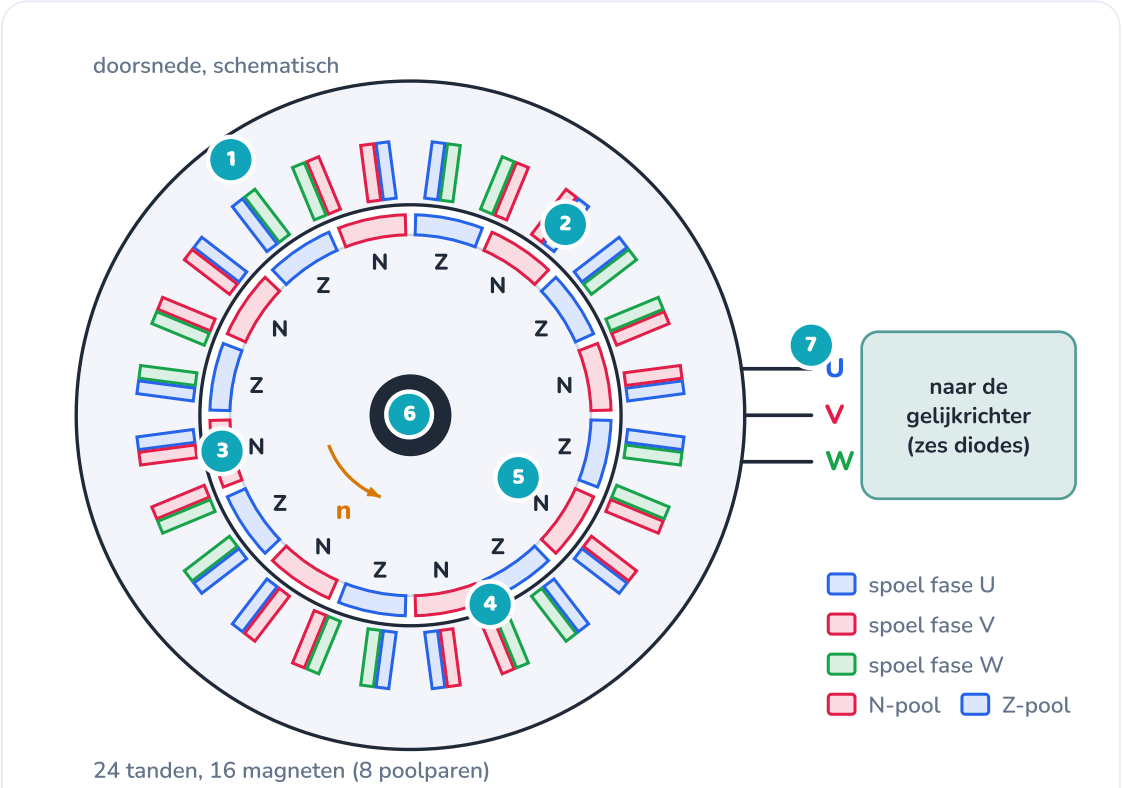
poolparen p	1	2	4	8	12
f bij 80 tpm (Hz)	1,3	2,7	5,3	10,7	16,0
f bij 300 tpm (Hz)	5,0	10,0	20,0	40,0	60,0
toerental voor 50 Hz (tpm)	3000	1500	750	375	250

Drie fasen. Leg drie spoelgroepen 120 elektrische graden uit elkaar, en je krijgt drie emk's die 120° in fase verschillen (hoofdstuk 7: drie wijzers die samen nul geven). Driefasig haal je uit dezelfde machine meer vermogen, en het koppel op de as is constant in plaats van te kloppen met de dubbele frequentie (hoofdstuk 20 toont waarom). Belast je de generator, dan loopt er stroom in de spoelen, en de Lorentzkracht op die stroom (Lenz) geeft een tegenkoppel: $M = P/\omega$. Zo wordt mechanisch vermogen elektrisch vermogen.

Een motor is dezelfde machine in de andere richting: de gelijkstroommotor van hoofdstuk 26 van I had een tegen-emk $k\omega$, precies de emk van een generator. De **permanente-magneetgenerator** van een windturbine is in bouw gelijk aan de borstelloze motor van hoofdstuk 24.

De generator van de windturbine

Een doorsnede, schematisch, van de permanente-magneetgenerator die we voor de windturbine van het station kiezen: een binnenrotor met 16 magneten (8 poolparen) en een stator met 24 tanden, elk met een eigen spoel. Opeenvolgende tanden liggen 15° mechanisch uit elkaar, en dat is $15^\circ \cdot 8 = 120^\circ$ elektrisch: de spoelen horen om beurt bij fase U, V en W.



Magneten (N en Z om beurten) draaien langs 24 spoelen in drie fasen. Elke spoel ziet 8 noordpolen voorbijkomen per omwenteling.

1 Statorjuk
Gelamineerd plaatijzer (plaatjes van ±0,5 mm, onderling geïsoleerd) dat de flux van de ene tand naar de volgende sluit. Massief ijzer zou vol wervelstromen zitten.

2 Tand met spoel
Elke tand draagt een eigen spoel (geconcentreerde wikkeling). Alle spoelen van één kleur staan in serie: acht spoelen per fase, samen de N van de formule.

3 Magneet
NdFeB, radiaal gemagnetiseerd, N en Z om beurten. Ze leveren de flux zonder stroom: geen bekrachtiging nodig, en de generator werkt al bij lage toerentallen.

4 Luchtspleet
Enkele millimeter tussen magneet en tand. Lucht heeft μr = 1: hoe smaller de spleet, hoe meer flux door de spoelen. Hij moet wel breed genoeg zijn voor lagerspeling en uitzetting.

5 Rotorjuk
Stalen ring waarop de magneten zitten; hij sluit de flux tussen naburige magneten aan de binnenkant.

6 As
Rechtstreeks gekoppeld aan de naaf van de rotor (80 tot 300 tpm): geen tandwielkast, minder onderhoud, minder lawaai.

7 **Drie fasen**

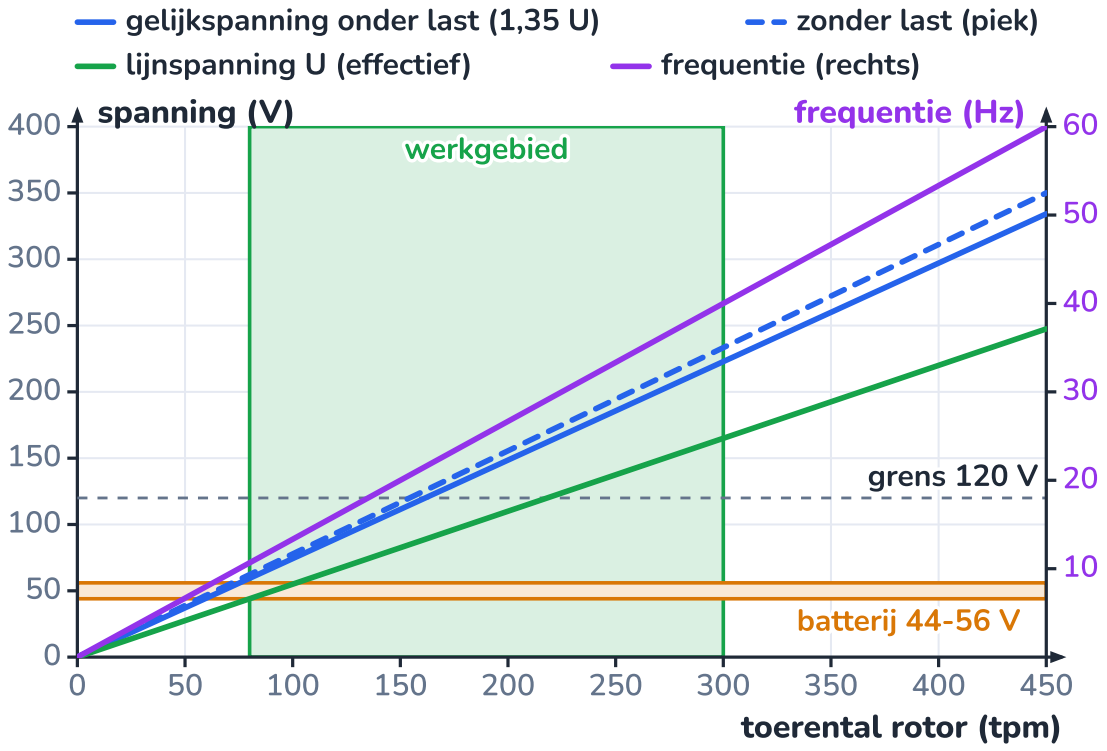
Drie aansluitingen U, V en W (in ster geschakeld) met een wisselspanning van 10,7 tot 40 Hz, die met de wind in grootte en frequentie verandert. Een zespulsbrug maakt er gelijkspanning van.

UITGEWERKT VOORBEELD · 19.24

Habitat: spanning en frequentie van de windturbine

24/28

De windturbine van het station draait van 80 tpm (aanloop bij 3 m/s) tot 300 tpm (3,0 kW bij 11 m/s), hoofdstuk 11. We kiezen een direct aangedreven permanente-magneetgenerator met 16 polen. Als rekenwaarde nemen we een emk van 0,55 V lijnspanning (effectief) per tpm. (a) Welke frequentie en spanning maakt de generator? (b) Welke gelijkspanning geeft een brug van zes diodes? (c) Hoe komt de energie in de 48 V-batterij (44 tot 56 V)? (d) Welke stromen horen bij 3,0 kW, en wat zegt de spanning over de veiligheid?



Alle spanningen groeien evenredig met het toerental. In het werkgebied (groen) ligt de gelijkspanning altijd boven de batterij (oranje strook), en vanaf ±155 tpm boven 120 V, de grens van de zeer lage spanning.

GEGEVEN

- $n = 80$ tot $300\,\text{tpm}$; $p = 8$; $U_{\text{lijn}} = 0{,}55\,\text{V} \cdot n$ (rekenwaarde)
- $P = 3{,}0\,\text{kW}$ bij 300 tpm; batterij 44 tot 56 V

GEVRAAGD

- f en U_{lijn} bij 80 en 300 tpm
- U_{dc}
- de weg naar de batterij
- stromen en veiligheid

OPLOSSING

1 (a) $f = pn/60 = 8n/60$: $10{,}7\,\text{Hz}$ bij 80 tpm en $40\,\text{Hz}$ bij 300 tpm. Lijnspanning 44 tot $165\,\text{V}$; per fase (ster) $\sqrt{3}$ keer minder: $25{,}4$ tot $95{,}3\,\text{V}$.

2 (b) De brug geeft op elk ogenblik de grootste lijnspanning door (volgend blad). Gemiddeld is dat $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} U_{\text{lijn}} = 1{,}35\, U_{\text{lijn}}$: 59 tot $223\ \text{V}$. Zonder last laadt een condensator tot de piek $\sqrt{2}\, U_{\text{lijn}}$: 62 tot $233\ \text{V}$. De rimpel heeft zes keer de generatorfrequentie: 64 tot 240 Hz.

3 (c) Een **neerwaartse omzetter** (buck) met MPPT maakt er de laadspanning van (hoofdstuk 24). Hij werkt zolang zijn ingang boven de batterij ligt: vanaf de aanloop is $59\ \text{V} > 56\ \text{V}$. Tegelijk kiest hij, door meer of minder stroom te vragen, het toerental waarbij de rotor het meeste vermogen uit de wind haalt (snellopendheid 5,7, hoofdstuk 11).

4 (d) Bij 3,0 kW: $I_{\text{dc}} = 3000/223 = 13{,}5\ \text{A}$, per fase $\sqrt{2/3}\, I_{\text{dc}} = 11{,}0\ \text{A}$ effectief; aan de batterij (omzetter ±96 %) ongeveer $60\ \text{A}$. Koppel op de as bij 90 % rendement van de generator: $3333/31{,}42 = 106\ \text{N m}$.

5 Veiligheid: boven 120 V gelijkspanning is het geen zeer lage spanning meer. Bij overtoeren zonder last stijgt de spanning evenredig mee: 400 tpm geeft al $311\ \text{V}$ piek. De kabel van de turbine, de brug en de omzetter worden behandeld als 230 V-installatie, met onderdelen voor minstens 400 V, en de turbine mag nooit zonder last vrij draaien: een **dumpbelasting** neemt het vermogen over als de batterij vol is (opdracht 19.18).

ANTWOORD

Dossier: generator met permanente magneten, 16 polen, driefasig, direct aangedreven; 10,7 tot 40 Hz; 44 tot 165 V lijnspanning; na de zespulsbrug 59 tot 223 V gelijk; MPPT-omzetter naar 48 V (hoofdstuk 24). Bij 3,0 kW 13,5 A gelijkstroom en 11,0 A per fase. Boven 330 tpm (overtoeren) neemt een dumpbelasting het vermogen op.

Klopt dit? Waarom geen generator die rechtstreeks 48 V geeft? Dan zou de gelijkspanning bij 300 tpm rond 56 V moeten liggen en bij de aanloop maar 15 V: de omzetter zou moeten opwaarts én neerwaarts omzetten, en de stroom in de lange kabel van de mast zou vier keer groter zijn (hoofdstuk 20 rekent het verlies uit; opdracht 19.19 weegt af). Het toerental volgt meteen uit de frequentie: $n = 60f/p = 7{,}5f$. Het kritische toerental 62 tpm (hoofdstuk 11) ligt onder de aanloop; 163 tpm geeft 21,7 Hz.

CODE · 19.25

Habitat: de gelijkrichter doorgerekend

25/28

Een brug van zes diodes (hoofdstuk 23 van I) verbindt op elk ogenblik de hoogste fase met de plus en de laagste met de min. De uitgang is dus het verschil tussen de bovenste en de onderste van de drie sinussen: zes toppen per periode. Het programma berekent de gemiddelde gelijkspanning en de rimpel over het hele werkgebied, en controleert de factor $3\sqrt{2}/\pi$. De functies `fasen` en `brug` tekenen ook de figuur.

Python **gelijkrichter.py** 27 regels

```python
# gelijkrichter.py - generator van de windturbine met zes diodes: welke gelijkspanning, welke rimpel?
import numpy as np

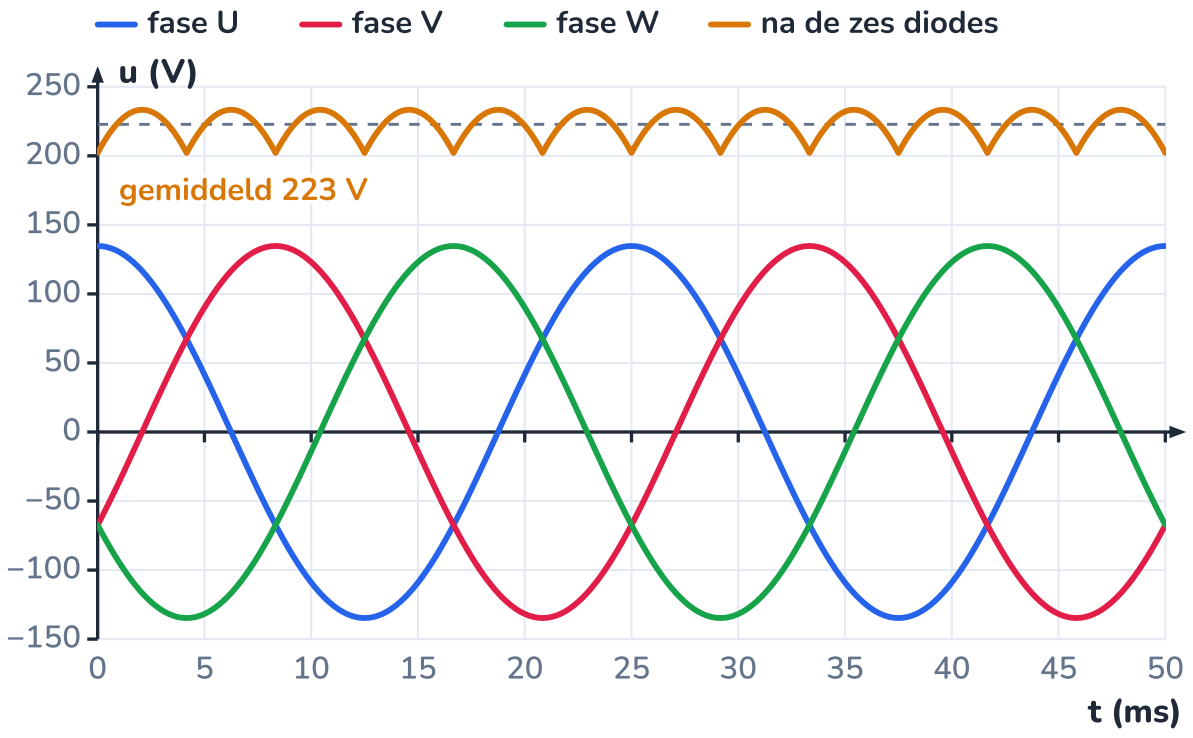
P_POOL = 8          # poolparen (16 magneetpolen)
K_E = 0.55          # emk: lijnspanning (effectief, V) per tpm, rekenwaarde


def fasen(t, n):
    """De drie fasespanningen (V) van de generator op tijdstip t (s) bij n tpm."""
    f = P_POOL * n / 60
    amp = K_E * n / np.sqrt(3) * np.sqrt(2)              # amplitude van één fase
    return np.array([amp * np.cos(2 * np.pi * f * t - k * 2 * np.pi / 3) for k in range(3)])


```

```python
def brug(t, n):
    """Ideale zespulsbrug: de hoogste fase min de laagste (diodes zonder spanningsval)."""
    u = fasen(t, n)
    return u.max(axis=0) - u.min(axis=0)


print(" tpm   f (Hz)  U_lijn  U_dc gem  rimpel  f_rimpel (Hz)")
for n in (80, 120, 163, 200, 250, 300):
    f = P_POOL * n / 60
    t = np.linspace(0, 1 / f, 6000, endpoint=False)    # één periode
    u = brug(t, n)
    print(f"{n:4d} {f:7.1f} {K_E * n:8.1f} {u.mean():8.1f} {u.max() - u.min():7.1f} {6 * f:9.0f}")
print(f"U_dc gem / U_lijn = {u.mean() / (K_E * 300):.4f}   (theorie 3·√2/π = {3 * np.sqrt(2) / np.pi:.4f})")
```



De drie fasen van de generator bij 300 tpm (40 Hz) en wat de zes diodes ervan maken: een gelijkspanning tussen 202 en 233 V.

Uitvoer:

```
 tpm   f (Hz)  U_lijn  U_dc gem  rimpel  f_rimpel (Hz)
  80    10.7     44.0     59.4     8.3        64
 120    16.0     66.0     89.1    12.5        96
 163    21.7     89.7    121.1    17.0       130
 200    26.7    110.0    148.6    20.8       160
 250    33.3    137.5    185.7    26.1       200
 300    40.0    165.0    222.8    31.3       240
U_dc gem / U_lijn = 1.3505   (theorie 3·√2/π = 1.3505)
```

De rimpel is 14,0 % van het gemiddelde ($\sqrt{2}\,U(1-\cos 30^\circ)$), altijd met zes keer de generatorfrequentie. Een condensator achter de brug vlakt hem verder af. De figuur toont 50 ms bij 300 tpm: twee periodes van de generator, twaalf toppen na de brug. In het echt komen er nog twee diodespanningen af (ongeveer 1,6 V) en een spanningsval over de spoelen van de generator onder last (hoofdstuk 20).

CODE · 19.26

Habitat: het toerental meten zonder sensor

Hoofdstuk 11 vroeg dat de regelaar van de turbine weet hoe snel de rotor draait: rond 62 tpm mag hij niet blijven hangen, tussen 155 en 171 tpm moet hij snel door, en overtoeren moet hij zien. Een aparte toerentalsensor is niet nodig: de generator vertelt het zelf, want $n = 60f/p$. Een optocoupler (met een voorschakelweerstand, galvanisch gescheiden: het is geen zeer lage spanning) zet één lijnspanning om in een blokgolf op pin 2 van een microcontroller. `pulseIn` meet de hoge en de lage helft in microseconden.

C++ (Arduino) **toerental.ino** 27 regels

```cpp
// toerental.ino - toerental van de windturbine uit de frequentie van haar generator
// Een optocoupler zet de lijnspanning U-V om in een blokgolf op pin 2 (hoog tijdens de positieve halve periode).
const int PIN_GEN = 2;
const int POOLPAREN = 8;                // 16 magneetpolen: f = POOLPAREN * n / 60
const unsigned long TIMEOUT = 250000UL;  // 0,25 s per halve periode: onder 2 Hz (15 tpm) geen meting

void setup() {
  Serial.begin(115200);
  pinMode(PIN_GEN, INPUT);
}

void loop() {
  unsigned long hoog = pulseIn(PIN_GEN, HIGH, TIMEOUT);   // duur van de hoge helft (µs)
  unsigned long laag = pulseIn(PIN_GEN, LOW, TIMEOUT);    // duur van de lage helft (µs)
  float tpm = 0;
  if (hoog > 0 && laag > 0) {
    float f = 1e6 / (float)(hoog + laag);                 // frequentie in Hz
    tpm = 60.0 * f / POOLPAREN;
  }
  Serial.print("tpm ");
  Serial.print(tpm, 1);
  if (tpm > 55 && tpm < 70) Serial.print("  let op: 1P op de eerste mode van de mast");
  if (tpm > 155 && tpm < 171) Serial.print("  let op: 3P op de tweede mode, snel doorlopen");
  if (tpm > 330) Serial.print("  OVERTOEREN: dumpbelasting aan");
  Serial.println();
  delay(1000);
}
```

Getest met een gesimuleerde generator bij 0, 62, 120, 163, 300 en 345 tpm (de schets gecompileerd met g++ tegen een nabootsing van de Arduino-functies). De seriële monitor toont:

```
tpm 0.0
tpm 62.0  let op: 1P op de eerste mode van de mast
tpm 120.0
tpm 163.0  let op: 3P op de tweede mode, snel doorlopen
tpm 300.0
tpm 345.0  OVERTOEREN: dumpbelasting aan
```

Bij 300 tpm duurt een periode 25 ms; `pulseIn` meet tot op enkele microseconden, dus tot op 0,02 %. Bij 80 tpm (10,7 Hz) blokkeert één meting bijna 0,2 s: voor een regelaar die ook nog andere dingen doet, meet je beter met een interrupt en een timer (hoofdstuk 37). De grenzen 155 en 171 tpm zijn de band van hoofdstuk 11; de grens voor overtoeren (330 tpm, 10 % boven nominaal) is een rekenwaarde.

Velden en inductie: formules

Werkwijze: kies een assenstelsel, bereken velden als vectorsommen (superpositie) of met een symmetrie (Gauss, Ampère), bepaal richtingen met het vectorproduct, en controleer dimensies en grensgevallen. Bij inductie: schrijf eerst de flux als functie van de tijd, leid dan af.

Coulomb en elektrisch veld

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad E = \frac{kQ}{r^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^{9}$$

symbool	betekenis	eenheid
E	elektrisch veld	V/m
ε_0	permittiviteit van vacuüm, 8,854 · 10⁻¹²	F/m

potentiaal

$$V = \frac{kQ}{r} \qquad U_{AB} = V_A - V_B \qquad E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \qquad E = \frac{U}{d}$$

symbool	betekenis	eenheid
V	potentiaal	V

Gauss en condensator

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d} \qquad W = \tfrac{1}{2}CU^2$$

symbool	betekenis	eenheid
C	capaciteit	F

Biot-Savart, Ampère, draad, spoel

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad B = \mu$$

symbool	betekenis	eenheid
B	magnetisch veld	T
μ_0	4π · 10⁻⁷	T·m/A

Lorentzkracht en Hall

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad \vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} \qquad r = \frac{mv}{|q|B} \qquad U_H = \frac{IB}{nqt}$$

Faraday

$$\Phi = BA\cos\theta \qquad e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad e = BLv \qquad e = NBA\omega\sin$$

symbool	betekenis	eenheid
Φ	flux	Wb

zelfinductie

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad L = \mu_0\mu_r\frac{N^2 A}{l} \qquad W = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

symbool	betekenis	eenheid
L	zelfinductie	H

transformator

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1} \qquad Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2 \qquad U = 4{,}44\,f N A\hat{B}$$

generator en zespulsbrug

$$f = \frac{pn}{60} \qquad E = 4{,}44\,f N\hat{\Phi} \qquad U_{\mathrm{dc}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}U_{\mathrm{lijn}} \approx 1{,}35\,U_{\mathrm{lijn}}$$

symbool	betekenis	eenheid
p	poolparen	–
n	toerental	tpm

grootheid	orde van grootte
doorslag lucht	3 kV/mm
aardmagnetisch veld (België)	±50 µT
verzadiging transformatorijzer	1,5 tot 2 T
remanentie NdFeB-magneet	±1,2 T

grootheid	orde van grootte
dubbellaag supercondensator	10 tot 20 μF/cm²
ladingsdragers in koper	$8{,}5 \cdot 10^{28}$ per m³

HET GEHEEL · 19.28

Waar velden en inductie vandaan komen en waar ze heen gaan

28/28

Dit hoofdstuk maakt van elektriciteit (L) een veldentheorie, met de wiskunde (W) van integralen, vectorproducten en differentiaalvergelijkingen, en met krachten (K) als brug naar de mechanica. Faradays inductie verbindt beweging en elektriciteit: in de generator wordt koppel stroom, in de motor stroom koppel.

F19 Spanning, stroom en weerstand

Lading, stroom en spanning als duw: hier spanning als verschil in potentiaal.

I24 Condensatoren en de RC-tijd

Q = CU, de supercondensator en de RC-tijd: hier C = εA/d en de dubbellaag.

I26 Motoren en actuatoren

Veld rond een draad, F = BIl en de tegen-emk: hier exact, met vectorproduct en Faraday.

I23 Halfgeleiders: diode, led en transistor

De vrijloopdiode en de gelijkrichter, hier verklaard met zelfinductie en een zespulsbrug.

E3 Integralen: ophopen

Potentiaal, Biot-Savart en de energie in een spoel als integralen; de oppervlakte onder een inductiepuls.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

De uitschakelstroom van een spoel; veldlijnen als differentiaalvergelijking.

E5 Vectoren en matrices

Het vectorproduct in de Lorentzkracht en in Biot-Savart.

E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren

De sinus uit een draaiende spoel; drie fasen als drie wijzers; $Z_L = j\omega L$.

E11 Trillingen en resonantie

De windturbine en haar kritische toerentallen, die de generator nu zelf meet.

E20 Wisselstroom

Impedantie, vermogen en arbeidsfactor; het driefasige net en de kabel van de generator.

E21 Filters en signaalverwerking

De rimpel na de gelijkrichter en storing die via lussen binnenkomt, weggefilterd.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

De MPPT-omzetter achter de generator, de omvormer, en de borstelloze motor als omgekeerde generator.

E37 Embedded systemen en IoT

Het toerental met een interrupt en een timer meten in plaats van met pulseln.

Habitat

Dossier: de windturbine krijgt een direct aangedreven permanente-magneetgenerator met 16 polen (8 poolparen), driefasig: 10,7 tot 40 Hz en 44 tot 165 V lijnspanning (rekenwaarde 0,55 V per tpm); na een zespulsbrug 59 tot 223 V gelijk, via een MPPT-omzetter naar het 48 V-net (hoofdstuk 24). Bij 3,0 kW 13,5 A gelijk, 11,0 A per fase; de installatie is geen zeer lage spanning meer; dumpbelasting bij overtoeren; het toerental volgt uit de frequentie ($n = 7{,}5f$). Kabels in het station: plus en min altijd samen. Hoofdstuk 20 rekent de driefasige kabel van de turbine en de omvormer door.

SAMENVATTING

In het kort

- Een lading maakt een elektrisch veld $\vec{E} = \vec{F}/q$, van een puntlading kQ/r^2; velden van meer ladingen tel je op als vectoren. Veldlijnen volgen $\vec{E}$, equipotentiaallijnen staan er loodrecht op.
- De potentiaal is energie per lading, $V = kQ/r$ bij een puntlading; spanning is een potentiaalverschil en $E_x = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$. Lucht slaat door bij ±3 kV/mm.
- Met de wet van Gauss vind je tussen twee platen $E = \sigma/\varepsilon_0$ en $C = \varepsilon_0\varepsilon_r A/d$. Een supercondensator haalt farads met een dubbellaag van 0,5 nm op een enorm koolstofoppervlak, maar verdraagt maar ±2,7 V per cel.
- Een stroom maakt een magnetisch veld: $B = \mu_0 I/(2\pi a)$ rond een draad (Biot-Savart of Ampère), $B = \mu_0 n I$ in een lange spoel. Heen- en terugleiding samen: het veld valt met $1/r^2$.
- De Lorentzkracht $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (op een draad $I\vec{L} \times \vec{B}$) staat loodrecht op beweging en veld; ze buigt banen tot cirkels en geeft de Hall-spanning $IB/(nqt)$.
- Faraday: $e = -N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$, met $\Phi = BA\cos\theta$. Een bewegende staaf geeft BLv, een draaiende spoel $NBA\omega\sin\omega t$. Lenz: de inductiestroom werkt de verandering tegen (energiebehoud, wervelstroomrem).
- Zelfinductie $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, energie $\frac{1}{2}LI^2$; uitschakelen vraagt een weg voor de stroom (vrijloopdiode, sneller met een zener).
- Een transformator: $u_1/u_2 = N_1/N_2$, $i_1/i_2 = N_2/N_1$, $U = 4{,}44\,fNA\hat{B}$; alleen voor wisselstroom. Een generator: $f = pn/60$, emk evenredig met het toerental.
- Habitat: de windturbine krijgt een permanente-magneetgenerator met 8 poolparen, 10,7 tot 40 Hz en 44 tot 165 V; gelijkgericht 59 tot 223 V, via een MPPT-omzetter naar 48 V.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

elektrisch veld

De kracht per lading $\vec{E} = \vec{F}/q$ (V/m) in een punt; van een puntlading $E = kq/r^2$, van meer ladingen de vectorsom.

potentiaal

De potentiële energie per lading $V = E_p/q$ (volt); spanning is een potentiaalverschil, en $E_x = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$.

equipotentiaallijn

elektronvolt

Lijn (of vlak) waarop de potentiaal overal gelijk is; staat loodrecht op de veldlijnen, en verplaatsen erlangs kost geen arbeid.

De energie die een elektron wint over 1 V: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

wet van Gauss

De elektrische flux door een gesloten oppervlak is de ingesloten lading gedeeld door ε_0.

permittiviteit

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$: hoe sterk een isolator het veld tussen de platen verzwakt en de capaciteit vergroot.

dubbellaag

Laag ionen die op minder dan een nanometer van een elektrode ligt en er een condensator mee vormt; de basis van de supercondensator.

wet van Biot-Savart

Elk stukje stroomdraad $I\,\mathrm{d}\vec{l}$ geeft een bijdrage $\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ aan het magnetisch veld.

wet van Ampère

De kringintegraal van $\vec{B}$ langs een gesloten lus is μ_0 maal de omsloten stroom.

Lorentzkracht

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$: de kracht op een bewegende lading; op een draad $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$.

Hall-effect

Dwarsspanning $U_H = IB/(nqt)$ over een stroomvoerende plaat in een magnetisch veld; basis van contactloze stroomsensoren.

magnetische flux

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\theta$, in weber (1 Wb = 1 T·m² = 1 V·s).

wet van Faraday

Een veranderende flux wekt een emk op: $e = -N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$.

wet van Lenz

De inductiestroom werkt de verandering tegen die hem veroorzaakt; het minteken in de wet van Faraday, en een gevolg van behoud van energie.

wervelstroom

Inductiestroom die rondloopt in een massief stuk metaal; remt beweging en verwarmt (wervelstroomrem, inductiekookplaat).

zelfinductie

Een spoel wekt in zichzelf een spanning op als haar stroom verandert: $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, met L in henry.

transformator

Twee spoelen rond één kern; ideaal $u_1/u_2 = N_1/N_2$ en $i_1/i_2 = N_2/N_1$.

poolpaar

Eén noord- en één zuidpool van een draaiende machine; bij p poolparen is $f = p\,n/60$.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 20

Wisselstroom

Impedantie, resonantie en vermogen: rekenen aan het net en aan de omvormer van het station

Het stopcontact levert geen constante spanning maar een sinus van 325 V piek die vijftig keer per seconde omkeert. Met de fasoren van hoofdstuk 7 reken je daar even vlot mee als met gelijkstroom: een spoel en een condensator worden complexe weerstanden, en samen kunnen ze resoneren. Je leert waarom een motor meer stroom neemt dan zijn vermogen doet vermoeden, wat reactief vermogen is en wanneer je het compenseert, en waarom het net drie fasen heeft. Aan het eind reken je de omvormer van het station door: welke stroom de 48 V-batterij levert, wat er gebeurt als de pomp aanslaat, en of een condensator iets oplevert.

8× uitleg · 9× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

L Elektriciteit en elektronica · W Wiskundig modelleren · E Energie



Drie fasen, vijftig keer per seconde omgekeerd: zo reist energie door Europa.

Na dit hoofdstuk

- Je kan de effectieve waarde van een periodieke spanning afleiden met een integraal, en uitleggen wat verschillende meters bij een niet-sinusvormige spanning aanwijzen.
- Je kan de impedantie van R, L en C en van combinaties ervan berekenen met complexe getallen, en een toestel als vervangschema met R en L voorstellen.
- Je kan een serie- en een parallelle RLC-kring doorrekenen: resonantiefrequentie, kwaliteitsfactor, bandbreedte, spanningsoverhoging, en het verloop van |Z| en de fase tegenover de frequentie.
- Je kan een resonantiekromme meten met een functiegenerator en een oscilloscoop, en de meting vergelijken met een model in Python.
- Je kan het momentane vermogen afleiden en actief, reactief en schijnbaar vermogen berekenen (S = U I*), ook voor een samengestelde belasting (vermogensdriehoek).
- Je kan de arbeidsfactor berekenen, een compensatiecondensator dimensioneren en beoordelen of compensatie zinvol is.

- Je kan fase- en lijnspanning in een driefasig net berekenen, ster- en driehoekschakeling toepassen, en uitleggen waarom het net drie fasen heeft.
- Je kan voor de omvormer van het station de stroom aan de 48 V-kant, de 100 Hz-rimpel en het effect van een aanlopende motor berekenen, en een onderbouwde beslissing over compensatie nemen.

VERHAAL · 20.1

De stroomoorlog

1/24

Op 4 september 1882 zette Thomas Edison in New York de centrale van Pearl Street aan: gelijkstroom van 110 V voor 82 klanten en 400 lampen. Gelijkstroom had één groot probleem. Bij een vaste spanning is het verlies in de kabels I^2R, en de stroom kan alleen omlaag als de spanning omhoog gaat. Gelijkspanning kon je toen niet omzetten: de centrale mocht niet verder dan ongeveer 800 m van de klanten staan. Een stad vroeg een centrale per wijk.

Wisselspanning kan je wel omzetten, met een transformator (hoofdstuk 19). Lucien Gaulard en John Gibbs toonden er een in 1884 in Turijn; bij Ganz in Boedapest bouwden Zipernowsky, Bláthy en Déri in 1885 de eerste met een gesloten ijzerkern (Bláthy bedacht het woord transformator), en in maart 1886 verlichtte William Stanley, voor George Westinghouse, de hoofdstraat van het stadje Great Barrington met wisselstroom. Op 16 mei 1888 stelde Nikola Tesla aan de American Institute of Electrical Engineers zijn meerfasige motor voor, die zonder borstels draaide op een draaiend magnetisch veld. Westinghouse kocht in juli de licenties.

Wat volgde, heet de **stroomoorlog**. Edisons kamp wees op de gevaren van hoge wisselspanning, en de ingenieur Harold Brown, met stille steun van Edisons bedrijf, doodde in 1888 publiek dieren met wisselstroom. De eerste terechtstelling op de elektrische stoel, op 6 augustus 1890, gebeurde met wisselstroom van een generator van Westinghouse. Maar de techniek won. In 1891 bracht Michail Dolivo-Dobrovolski (AEG) met Oskar von Miller en Charles Brown driefasige stroom van Lauffen naar Frankfurt: 175 km, 15 kV, met ongeveer 75 % rendement. In 1893 verlichtte Westinghouse de wereldtentoonstelling in Chicago, en vanaf november 1896 stuurde de centrale aan de Niagarawatervallen, met generatoren van 5000 pk op 25 Hz, stroom naar de stad Buffalo. Europa koos uiteindelijk 50 Hz, Noord-Amerika 60 Hz.

Het einde van het verhaal is minder zwart-wit. Met vermogenselektronica kan je gelijkspanning vandaag wel omzetten, en voor lange afstanden en zeekabels is gelijkstroom weer de beste keuze: de Nemo Link tussen Zeebrugge en Engeland brengt sinds 2019 1000 MW over 140 km als gelijkstroom. Ook het station is een mengvorm: een 48 V-net op gelijkspanning en een omvormer die er de wisselspanning van het stopcontact van maakt.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

De omvormer van het station (hoofdstuk 7) moet de pomp, de koelkast en de noodverwarming voeden. Of 4,0 kVA volstaat, hoeveel stroom de batterij levert en of een condensator bij de pomp zin heeft, hangt af van actief en reactief vermogen. Resonantie verklaart het filter aan de uitgang van de omvormer, en het driefasige net verklaart waarom de windturbine (hoofdstuk 19) drie fasen heeft.



Rond 1895 draaiden de eerste grote wisselstroomgeneratoren op waterkracht; hun stroom reisde tientallen kilometer ver.

UITLEG · 20.2

Wat je al weet, en de vraag van dit hoofdstuk

wat je al kan	wat nu komt
sinusoïde, fasor, Z_R, Z_L, Z_C; stromen optellen als wijzers (hoofdstuk 7)	kringen met R, L en C samen; resonantie
effectieve waarde van een sinus, gemiddelde als integraal (hoofdstuk 3)	effectieve waarde van elke golfvorm; wat een meter echt meet
de ontwerpbelasting van 3,30 kVA, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(U\bar{I})$ (hoofdstuk 7, opdracht 7.18)	actief, reactief en schijnbaar vermogen; arbeidsfactor en compensatie
de generator met drie fasen, de spoel en de condensator als velden (hoofdstuk 19)	het driefasige net, 230 en 400 V; het LC-filter van de omvormer
RC-kring in de tijd, Euler (hoofdstuk 4); de RC-tijd (hoofdstuk 24 van I)	dezelfde kringen bij een sinus, zonder differentiaalvergelijking

Hoofdstuk 7 gaf het gereedschap: een sinus is een wijzer, een complex getal. Spoel en condensator werden impedanties, en stromen van toestellen tel je op als wijzers. Hier gebruik je het om echte kringen door te rekenen: RLC-kringen die resoneren, het vermogen dat een toestel werkelijk opneemt tegenover de stroom die het vraagt, en het driefasige net.

De Habitat-vraag: de omvormer maakt 230 V uit de 48 V-batterij (4,0 kVA continu, 8 kVA gedurende 5 s, rendement ±93 %). Welke stroom levert de batterij bij de ontwerpbelasting, en bij een lege batterij? Wat ziet de batterij van het feit dat het vermogen van een wisselstroomtoestel honderd keer per seconde schommelt? Wat gebeurt er als de drukpomp aanslaat terwijl de noodverwarming aan staat? En moet er een condensator bij de pomp?

Rekenen aan 230 V, meten aan laagspanning

Alle proeven van dit hoofdstuk doe je met een functiegenerator of een veiligheidstransformator. Meet nooit zelf aan het net (hoofdstuk 5 en 19 van F). Twee verrassingen uit dit hoofdstuk zijn ook veiligheidsregels: bij resonantie kan de spanning over een condensator of een spoel vele keren hoger zijn dan de bronspanning, en een condensator voor compensatie blijft na het uitschakelen geladen. Compensatiecondensatoren hebben daarom een ontlaadweerstand.

UITLEG · 20.3

Wisselspanning en effectieve waarde

De netspanning is $u(t) = \hat{U}\sin\omega t$ met $\hat{U} = 325\,\mathrm{V}$ en $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Toch zegt iedereen '230 V'. Dat is de **effectieve waarde**: de gelijkspanning die in een weerstand hetzelfde gemiddelde vermogen geeft. Het vermogen in een weerstand is $p = u^2/R$; het gemiddelde over een periode (hoofdstuk 3) is

EFFECTIEVE WAARDE (RMS)

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t} \qquad \bar{p} = \frac{U_{\mathrm{eff}}^2}{R}$$

De wortel uit het gemiddelde van het kwadraat, in het Engels *root mean square*. Geldt voor elke periodieke golfvorm, ook voor stromen.

Voor een sinus: $\sin^2\omega t = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)$, en de cosinus heeft over een periode gemiddelde nul. Dus $\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\hat{U}^2$ en

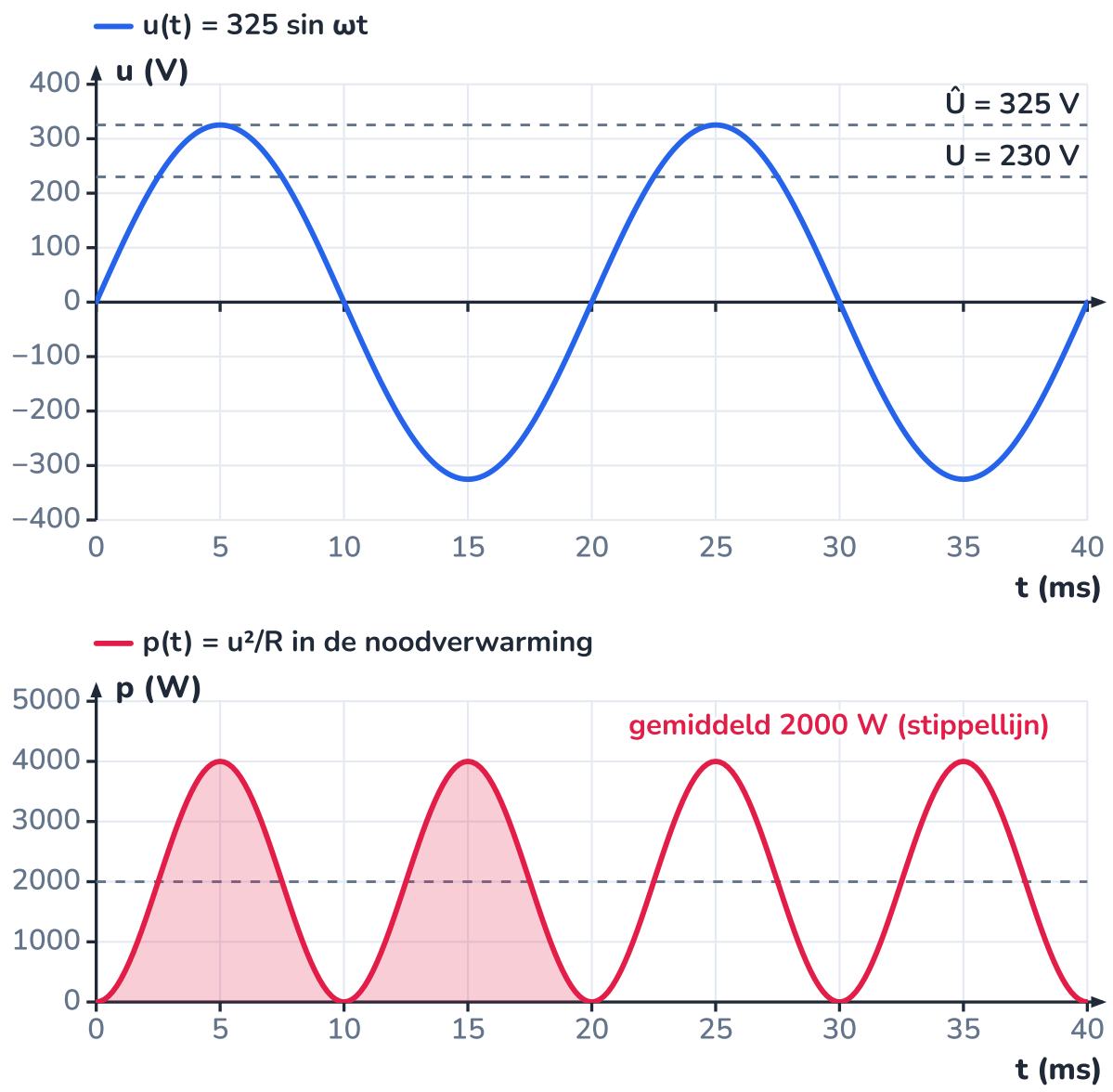
$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{325\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} = 230\,\mathrm{V}.$$

De figuur toont waarom: het vermogen in de noodverwarming schommelt tussen 0 en 4000 W, honderd keer per seconde, en het gemiddelde is precies de helft. Tenzij anders vermeld, bedoelt men bij wisselstroom altijd de effectieve waarde: 230 V, 14,3 A. Voor andere golfvormen geeft de integraal andere factoren:

golfvorm (piek $\hat{U}$)	effectieve waarde	gemiddelde van $\lvert u\rvert$
sinus	$\hat{U}/\sqrt{2} = 0{,}707\,\hat{U}$	$2\hat{U}/\pi = 0{,}637\,\hat{U}$
blokgolf $\pm\hat{U}$	$\hat{U}$	$\hat{U}$
driehoek $\pm\hat{U}$	$\hat{U}/\sqrt{3} = 0{,}577\,\hat{U}$	$\hat{U}/2$
enkelzijdig gelijkgerichte sinus	$\hat{U}/2$	$\hat{U}/\pi$
gemodificeerde sinus, $\hat{U}$ gedurende de helft van elke halve periode	$\hat{U}/\sqrt{2}$	$\hat{U}/2$

Een multimeter meet niet altijd de echte effectieve waarde. Goedkope toestellen richten gelijk, nemen het gemiddelde van $\lvert u\rvert$ en vermenigvuldigen met de **vormfactor** van een sinus, $\pi/(2\sqrt{2}) = 1{,}111$. Bij

een zuivere sinus klopt dat; bij elke andere golfvorm niet. Een meter met het opschrift 'true rms' rekent de integraal echt uit.



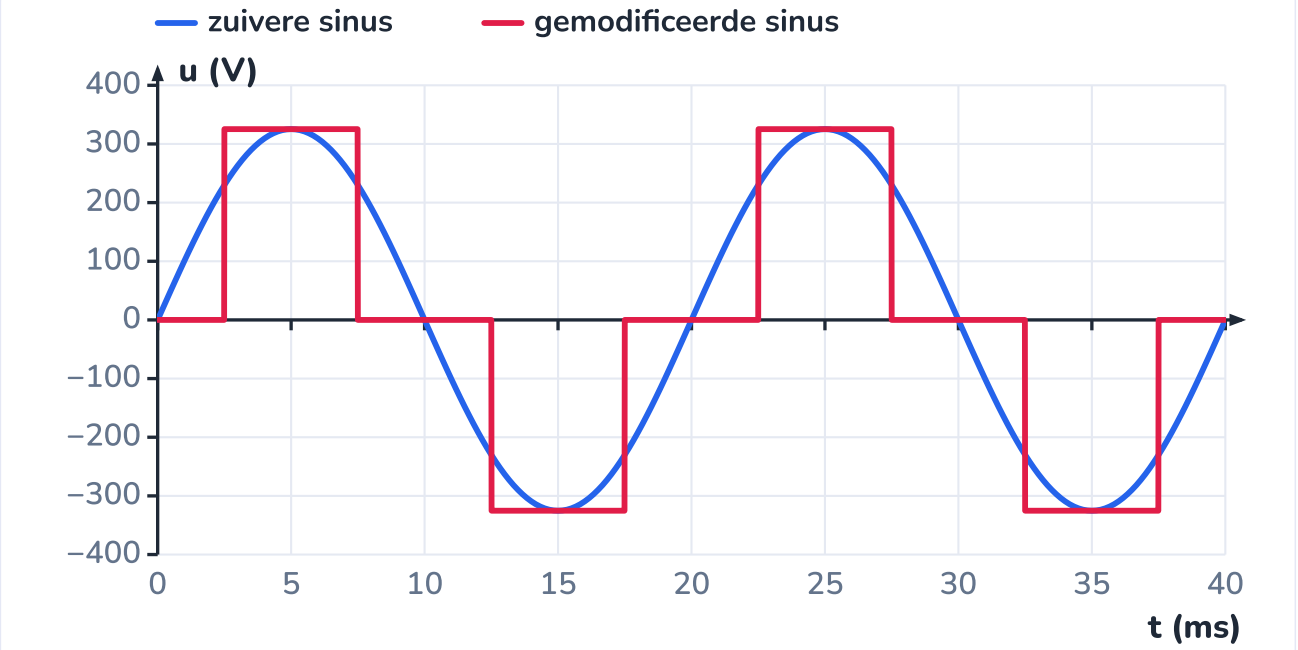
Boven de netspanning met haar piek en haar effectieve waarde. Onder het vermogen in een weerstand van 26,45 Ω: het gemiddelde (stippellijn) is de helft van de piek, 2000 W.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.4

Een zuivere en een gemodificeerde sinus

4/24

Goedkope omvormers maken geen sinus maar een 'gemodificeerde sinus': gedurende een deel van elke halve periode $+\hat{U}$ of $-\hat{U}$, daartussen nul. Het dossier (hoofdstuk 7) eist voor het station een zuivere sinus. (a) Hoe lang moet een gemodificeerde sinus met $\hat{U} = 325\,\mathrm{V}$ 'aan' staan om 230 V effectief te geven? (b) Wat wijst een gemiddelde-meter dan aan? (c) Hoe groot is de grondgolf (de 50 Hz-sinus erin), en waarom is de rest een probleem voor de drukpomp?



Beide golfvormen hebben een piek van 325 V en een effectieve waarde van 230 V; alleen de sinus is zuiver 50 Hz.

GEGEVEN

- $\hat{U} = 325\ \text{V}$, doel $U_{\text{eff}} = 230\ \text{V}$
- gemiddelde-meter: $1{,}111 \cdot \overline{|u|}$

GEVRAAGD

- het deel van de tijd 'aan'
- de aflezing van de meter
- de grondgolf

OPLOSSING

1 (a) Staat de spanning een fractie D van de tijd op $\pm\hat{U}$, dan is $\overline{u^2} = D\hat{U}^2$ en $U_{\text{eff}} = \hat{U}\sqrt{D}$. Voor 230 V: $D = (230/325)^2 = 0{,}50$: de helft van elke halve periode, 5 ms aan en 5 ms af.

2 (b) $\overline{|u|} = D\hat{U} = 162{,}6\ \text{V}$. De meter toont $1{,}111 \cdot 162{,}6 = 181\ \text{V}$: 21 % te weinig. Een true-rms-meter toont 230 V.

3 (c) De grondgolf volgt uit de Fourierreeks (hoofdstuk 21) of met de fasor uit metingen van hoofdstuk 7: voor een blok van 90° breed rond de top is haar amplitude $\frac{4\hat{U}}{\pi}\sin 45^\circ = 293\ \text{V}$, of $207\ \text{V}$ effectief.

4 De rest, $\sqrt{230^2 - 207^2} = 100\ \text{V}$ effectief, zit in hogere frequenties (150, 250, 350 Hz, …). Een motor zet die niet om in nuttig koppel, maar wel in warmte en gebrom; condensatoren in toestellen trekken er grote stromen door ($|Z_C|$ daalt met de frequentie).

ANTWOORD

De gemodificeerde sinus staat de helft van de tijd aan; een gemiddelde-meter leest 181 V in plaats van 230 V. Hij bevat maar 207 V grondgolf; de rest is vervorming die motoren en voedingen belast. Daarom de zuivere sinus in het dossier.

Klopt dit? De piek is bij beide golfvormen 325 V, de effectieve waarde 230 V: toch zijn ze heel verschillend. Grondgolf en rest staan loodrecht op elkaar (hun product middelt weg), daarom tellen hun kwadraten op: $207^2 + 100^2 = 230^2$.

Impedantie van R, L en C

In hoofdstuk 7 werd afleiden bij een sinus vermenigvuldigen met $j\omega$. Daarmee krijgen de drie basiselementen een wet van Ohm met een complexe weerstand, de **impedantie**:

IMPEDANTIE

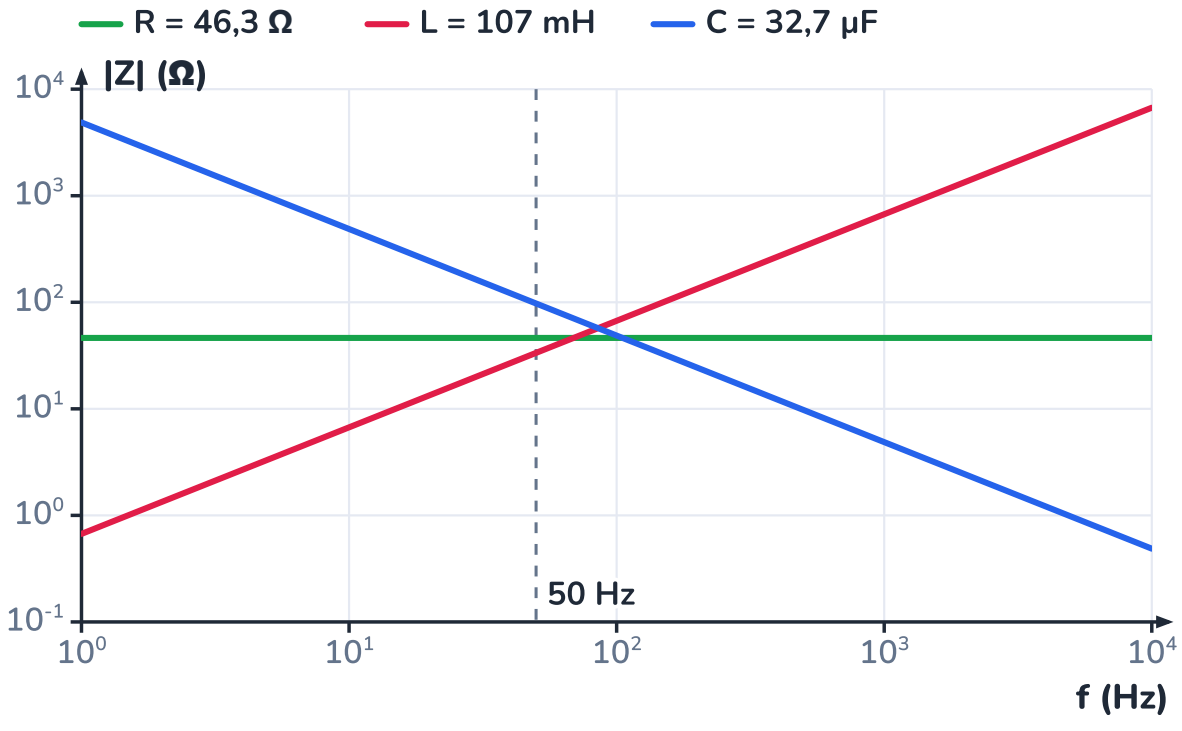
$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \qquad U = Z\,I$$

Schrijf je $Z = R + jX$, dan is R de **weerstand** en X de **reactantie**: $X_L = \omega L$, $X_C = -1/(\omega C)$. $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ is de verhouding van de amplitudes (of effectieve waarden), $\arg Z$ de hoek waarmee de spanning voorijlt op de stroom.

Impedanties combineer je zoals weerstanden (hoofdstuk 21 van I), maar met complexe getallen: in serie $Z = Z_1 + Z_2$, parallel $1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2$ (de omgekeerde $Y = 1/Z$ heet **admittantie**). Alle wetten van Kirchhoff blijven gelden, voor fasoren. Wat je aan een kring moet onthouden, lees je af uit de frequentieafhankelijkheid:

- een spoel is bij lage frequentie een kortsluiting en bij hoge een onderbreking;
- een condensator omgekeerd: gelijkspanning blokkeert hij, hoge frequenties laat hij door;
- waar $\omega L = 1/(\omega C)$ heffen ze elkaar op: resonantie (volgende bladen).

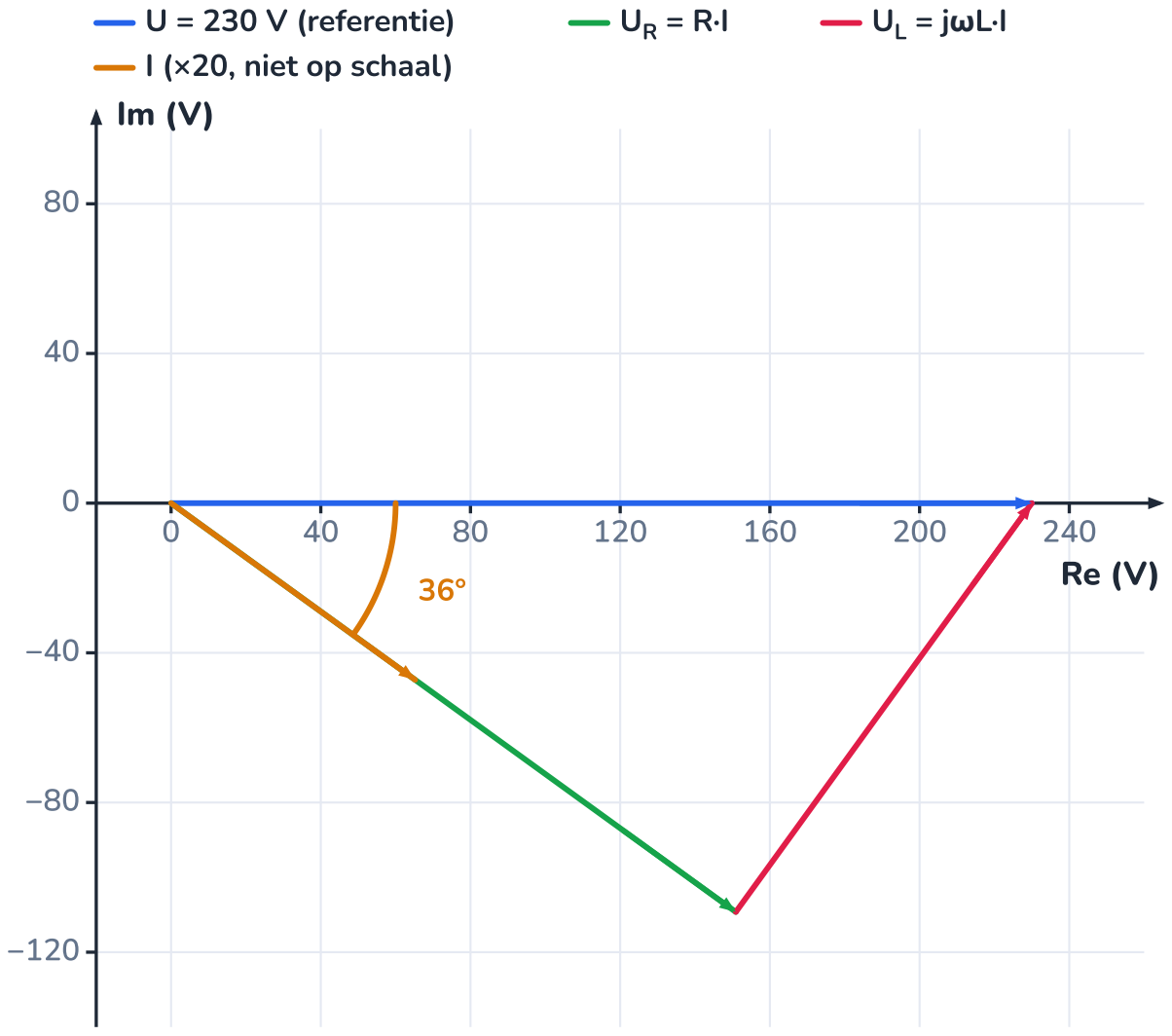
Een echt toestel is zelden één element. Voor één frequentie kan je elk toestel voorstellen door een **vervangschema**: een weerstand en een reactantie die samen dezelfde stroom en dezelfde faseverschuiving geven. Dat is een model, geen bouwtekening: bij een andere frequentie of belasting verandert het.



Logaritmische assen: de weerstand is vlak, de spoel stijgt en de condensator daalt met een factor tien per decade. Bij 50 Hz: 46,3, 33,5 en 97,4 Ω.

De drukpomp als R en L in serie

De drukpomp van het drinkwater neemt 750 W bij 230 V met $\cos\varphi = 0{,}81$ (hoofdstuk 7). Stel een vervangschema op met een weerstand en een spoel in serie. Welke spanningen staan over elk deel? Controleer met een simulatie in de tijd.



De spanning over de weerstand ligt in fase met de stroom, die over de spoel 90° ervoor; samen vormen ze de netspanning.

GEGEVEN

- $P = 750\,\text{W}$, $U = 230\,\text{V}$, $\cos\varphi = 0{,}81$, $f = 50\,\text{Hz}$

GEVRAAGD

- R en L van het vervangschema
- U_R en U_L

OPLOSSING

1 $\varphi = \arccos 0{,}81 = 35{,}9°$; $S = P/\cos\varphi = 926\,\text{VA}$; $I = S/U = 4{,}026\,\text{A}$.

2 $|Z| = U/I = 57{,}1\,\Omega$ onder $+35{,}9°$ (de spanning ijlt voor op de stroom): $R = |Z|\cos\varphi = 46{,}3\,\Omega$ en $X = |Z|\sin\varphi = 33{,}5\,\Omega$, dus $L = X/\omega = 107\,\text{mH}$.

3 Met de stroom $I = 4{,}026\angle -35{,}9^\circ\ \text{A}$: $U_R = RI = 186{,}3\angle -35{,}9^\circ\ \text{V}$ en $U_L = jXI = 134{,}9\angle 54{,}1^\circ\ \text{V}$.

4 Controle: $U_R + U_L = 230{,}0\ \text{V}$: de netspanning. Maar $|U_R| + |U_L| = 321\ \text{V}$: een voltmeter over elk deel zou samen meer dan 230 V aanwijzen, omdat de twee spanningen 90° verschillen.

5 In de tijd (hoofdstuk 4): $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = u - Ri$ met Euler, stap 20 µs, twaalf periodes. Na het inschakelverschijnsel is de stroomamplitude $5{,}70\ \text{A}$ ($5{,}69$ uit de fasor) en ijlt ze 36° na.

ANTWOORD

Vervangschema: $R = 46{,}3\ \Omega$ in serie met $L = 107\ \text{mH}$. Over de weerstand 186 V, over de spoel 135 V, als wijzers samen 230 V.

Klopt dit? De weerstand is geen koperdraad van 46 Ω: ze staat voor alles wat vermogen omzet, vooral het mechanische werk van de pomp. De spoel staat voor het magnetisch veld van de motor. Een echte asynchrone motor heeft een vervangschema dat met de belasting verandert (hoofdstuk 24); voor het rekenen aan het net bij vollast volstaat dit.

UITLEG · 20.7

RLC in serie: resonantie

7/24

Een weerstand, een spoel en een condensator in serie aan een sinus met hoekfrequentie ω:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Bij lage frequentie overheerst de condensator (Z groot, capacitief, fase naar -90°), bij hoge de spoel (inductief, naar $+90^\circ$). Daartussen is er één frequentie waar de twee reactanties even groot en tegengesteld zijn: dan is $Z = R$, zuiver resistief en minimaal, en is de stroom maximaal. Dat is **resonantie**.

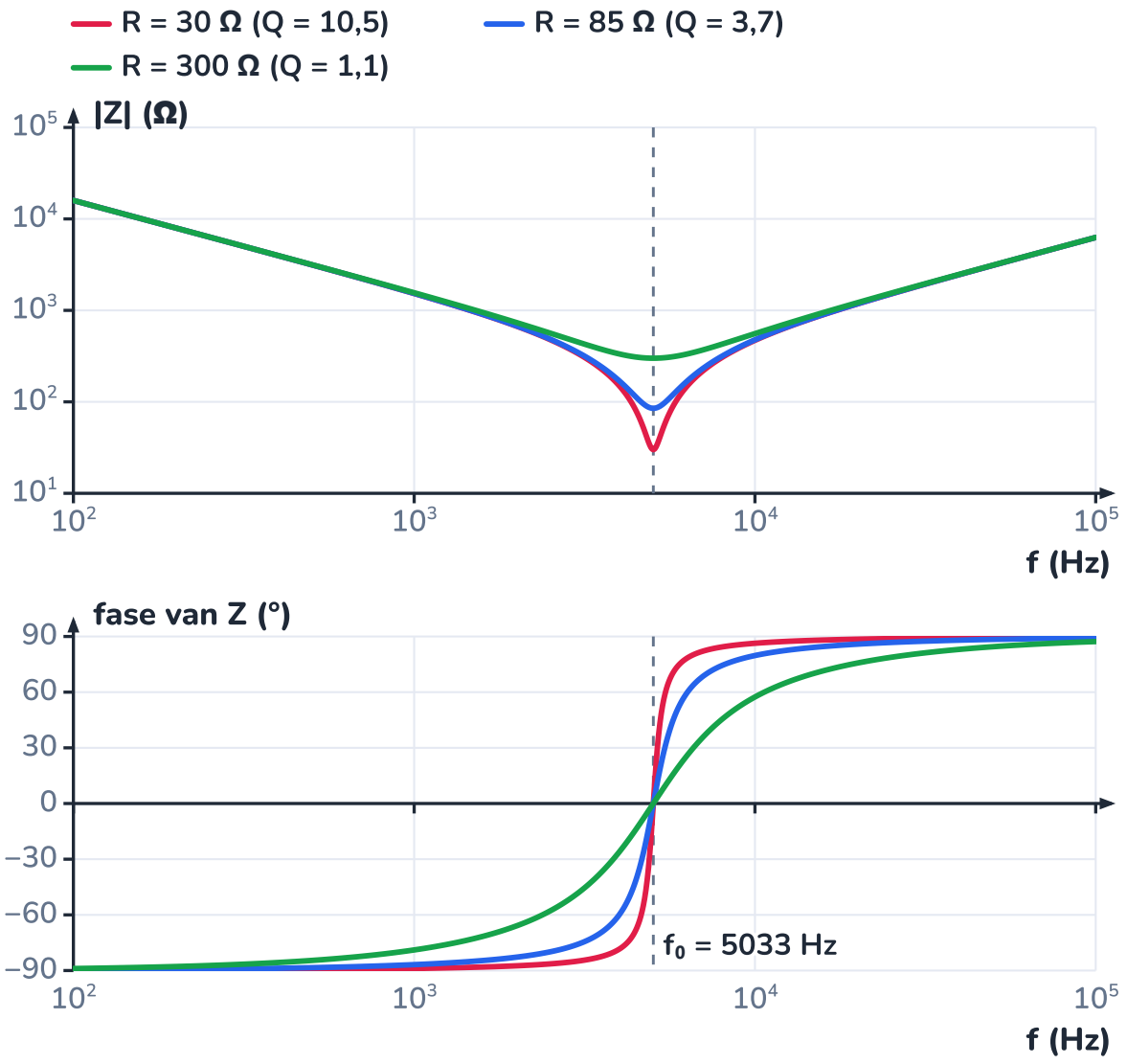
SERIERESONANTIE

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \Delta f = \frac{f_0}{Q} \qquad U_C = U_L = Q\,U \text{ bij } f_0$$

Q is de **kwaliteitsfactor**. $\sqrt{L/C}$ heet de karakteristieke impedantie: de reactantie van L en van C bij resonantie. Δf is de bandbreedte tussen de halfvermogenpunten, waar de stroom $1/\sqrt{2}$ van zijn maximum is en de fase $\pm 45^\circ$.

Waarom $\Delta f = f_0/Q$? De halfvermogenpunten liggen waar de reactantie even groot is als R: $\omega L - 1/(\omega C) = \pm R$. Dat zijn twee vierkantsvergelijkingen in ω; het verschil van hun positieve wortels is precies R/L, en $\frac{R/L}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}$. (Uitwerken: opdracht 20.7.)

De verrassing zit in de laatste formule. Bij resonantie loopt de stroom U/R door de condensator, met $|Z_C| = \sqrt{L/C}$: de spanning over de condensator is Q keer de bronspanning. Spoel en condensator wisselen hun energie telkens uit, zoals een massa en een veer (hoofdstuk 11); de bron vult alleen aan wat de weerstand verbruikt. Hetzelfde verschijnsel als bij een brug of een wijnglas, nu met spanningen.



Hoe kleiner R, hoe dieper het dal van |Z| en hoe steiler de fasesprong bij f_0. Onder f_0 is de kring capacitief (fase negatief), erboven inductief.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.8

Een serie-RLC-kring op de functiegenerator

8/24

Een spoel van 10 mH (met 25 Ω draadweerstand), een condensator van 100 nF en een meetweerstand van 10 Ω staan in serie aan een functiegenerator. Die geeft 2,0 V amplitude zonder last en heeft een uitgangsweerstand van 50 Ω. Bereken f_0, Q, de bandbreedte, de stroom en de spanningen bij resonantie. Wat verandert er zonder de 50 Ω van de generator?

GEGEVEN

- $L = 10\,\text{mH}$, $C = 100\,\text{nF}$
- $R = 25 + 10 + 50 = 85\,\Omega$; $\hat{U}_g = 2{,}0\,\text{V}$

GEVRAAGD

- f_0, Q, Δf
- $\hat{I}$, $\hat{U}_R$, $\hat{U}_C$ bij f_0

OPLOSSING

1 $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{10^{-2}\cdot 10^{-7}}} = 5033\,\text{Hz}$; $\sqrt{L/C} = 316{,}2\,\Omega$.

2 $Q = 316{,}2/85 = 3{,}72$; $\Delta f = f_0/Q = 1353\,\mathrm{Hz}$ (van ongeveer 4,40 tot 5,75 kHz).

3 Bij f_0 is $Z = 85\,\Omega$: $\hat{I} = 2{,}0/85 = 23{,}5\,\mathrm{mA}$, $\hat{U}_R = 10 \cdot \hat{I} = 235\,\mathrm{mV}$ over de meetweerstand, en $\hat{U}_C = \hat{I} \cdot 316{,}2 = 7{,}44\,\mathrm{V}$.

4 Zonder de generatorweerstand zou $R = 35\,\Omega$ zijn en $Q = 9{,}0$: de resonantie is twee keer zo scherp. De inwendige weerstand van een meettoestel hoort bij de kring.

ANTWOORD

$f_0 = 5033\,\mathrm{Hz}$, $Q = 3{,}7$, $\Delta f \approx 1353\,\mathrm{Hz}$. **Bij resonantie 23,5 mA; over de condensator 7,4 V amplitude, bijna vier keer de 2,0 V van de generator.**

Klopt dit? U_C en U_L zijn bij resonantie even groot en tegengesteld, en heffen elkaar op; de generator ziet alleen de weerstanden. Dimensies: $\sqrt{\mathrm{H/F}} = \sqrt{\Omega\,\mathrm{s}/(\mathrm{s}/\Omega)} = \Omega$. Het programma twee bladen verder vindt dezelfde getallen numeriek.

PROEF · 20.9

Resonantie meten

9/24

ONDERZOEKSVRAAG

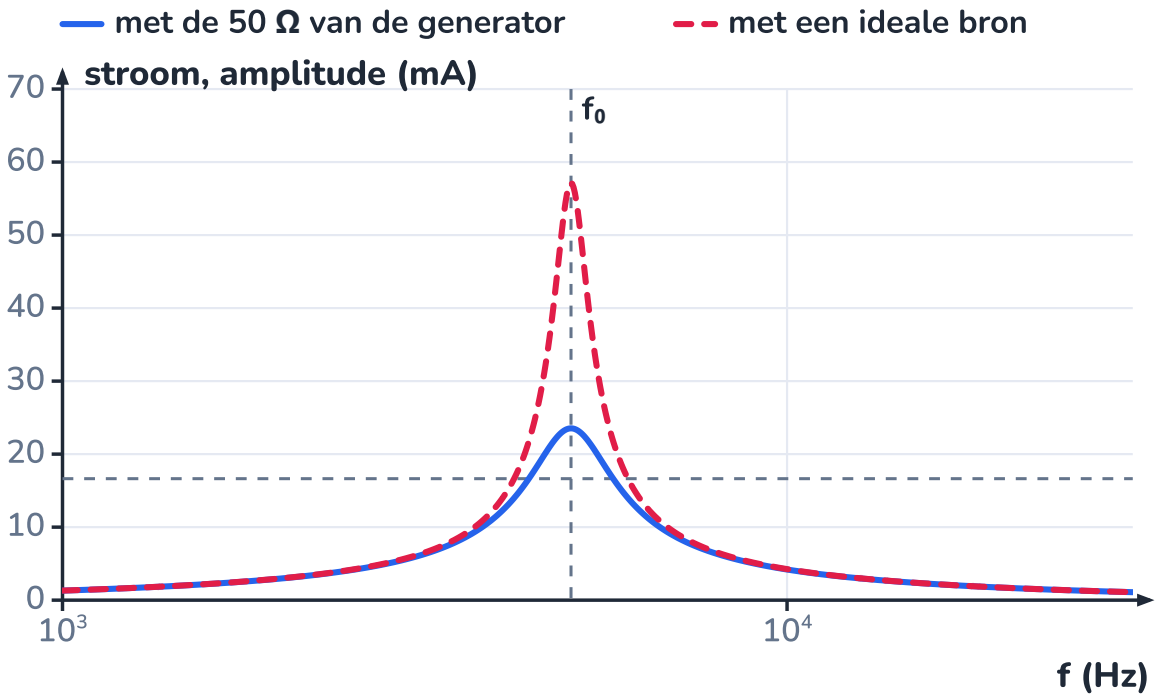
Klopt het model van de serie-RLC-kring: waar ligt de resonantie, hoe breed is ze, en hoe hoog wordt de spanning over de condensator?

MATERIAAL

- functiegenerator (sinus) en tweekanaalsoscilloscoop
- spoel ±10 mH, foliecondensator 100 nF, weerstand 10 Ω, breadboard
- een LCR-meter of multimeter om de draadweerstand van de spoel te meten

Veiligheid

Alleen de functiegenerator als bron. Met een netvoeding zou de spanningsoverhoging over de condensator levensgevaarlijk kunnen worden.



Model van de proef: met de uitgangsweerstand van de generator (volle lijn) is de piek lager en breder dan met een ideale bron (stippellijn). De hulplijn ligt op 1/√2 van het maximum.

WERKWIJZE

1. Meet eerst de weerstand van de spoel en de exacte waarden van L en C als dat kan. Bouw de kring: generator, spoel, condensator, 10 Ω naar de massa.
2. Kanaal 1 over de generator, kanaal 2 over de 10 Ω (die spanning is evenredig met de stroom). Zet de generator op 2,0 V amplitude.
3. Zoek de frequentie waarbij kanaal 2 maximaal is en de twee signalen in fase liggen (Lissajous-figuur: een rechte lijn).
4. Meet de amplitude over de 10 Ω bij 15 frequenties van 1 tot 30 kHz, dichter bij elkaar rond het maximum. Zoek de twee frequenties waar ze 1/√2 van het maximum is.
5. Meet bij resonantie (met één tastkop) de spanning over de condensator. Let op: de massa van de scoop ligt vast, meet dus met de condensator aan de massakant of met twee kanalen en het verschil.

WAARNEMING

Het model voorspelt een maximum van 235 mV over de 10 Ω bij 5033 Hz, halfvermogenpunten bij ongeveer 4,4 en 5,75 kHz, en 7,4 V over de condensator. Metingen liggen meestal iets lager en breder: de spoel verliest bij kHz meer dan haar gelijkstroomweerstand (wervelstromen in de kern, het skineffect), en de generatorspanning zakt bij resonantie, omdat de kring dan de meeste stroom trekt.

VERKLARING

Bij resonantie heffen spoel en condensator elkaar op, en bepalen alleen de weerstanden de stroom. Ook de 50 Ω van de generator: meet de spanning over de generatorklemmen tijdens de meting, en je ziet ze dalen. De spanning over de condensator is groter dan die van de generator, omdat de energie heen en weer pendelt tussen spoel en condensator; per periode vult de generator alleen het verlies aan. De verhouding U_C/U_g bij resonantie is een directe meting van Q.

CODE · 20.10

De frequentiekarakteristiek in Python

Met numpy reken je de impedantie in één keer uit voor dertigduizend frequenties, zoek je het maximum van de stroom en de halfvermogenpunten, en vergelijk je met de formules. Dezelfde functie `Z` tekent de grafieken van dit hoofdstuk; je kunt er je meetpunten naast zetten.

Python **rlc.py** 27 regels

```python
# rlc.py - frequentiekarakteristiek van de serie-RLC-kring van de proef
import numpy as np

L, C = 10e-3, 100e-9                # spoel (H) en condensator (F)
R_L, R_m, R_g = 25.0, 10.0, 50.0    # weerstand van de spoel, meetweerstand, uitgang van de generator (ohm)
U_g = 2.0                           # amplitude van de generator zonder last (V)
R = R_L + R_m + R_g


def Z(f):
    """Impedantie van de hele kring (ohm) bij frequentie f (Hz)."""
    w = 2 * np.pi * f
    return R + 1j * w * L + 1 / (1j * w * C)


f = np.logspace(2, 5, 30001)        # 100 Hz tot 100 kHz
I = U_g / np.abs(Z(f))              # amplitude van de stroom (A)
k = np.argmax(I)
f0 = f[k]
band = f[I >= I[k] / np.sqrt(2)]    # halfvermogenpunten
Q = np.sqrt(L / C) / R
print(f"f0 = {f0:.0f} Hz (theorie {1 / (2 * np.pi * np.sqrt(L * C)):.0f} Hz), Q = {Q:.2f}")
print(f"bandbreedte {band[-1] - band[0]:.0f} Hz, van {band[0]:.0f} tot {band[-1]:.0f} Hz (f0/Q = {f0 / Q:.0f} Hz)")
print(f"bij f0: I = {1000 * I[k]:.1f} mA, U_R = {1000 * I[k] * R_m:.0f} mV, U_C = {I[k] / (2 * np.pi * f0 * C):.2f} V")
for fx in (1000, 3000, 5000, 7000, 20000):
    z = Z(fx)
    print(f"{fx:6d} Hz: |Z| = {abs(z):6.0f} ohm, fase {np.degrees(np.angle(z)):+6.1f} graden")
```

Uitvoer:

```
f0 = 5033 Hz (theorie 5033 Hz), Q = 3.72
bandbreedte 1352 Hz, van 4403 tot 5754 Hz (f0/Q = 1353 Hz)
bij f0: I = 23.5 mA, U_R = 235 mV, U_C = 7.44 V
  1000 Hz: |Z| =   1531 ohm, fase  -86.8 graden
  3000 Hz: |Z| =    352 ohm, fase  -76.0 graden
  5000 Hz: |Z| =     85 ohm, fase   -2.8 graden
  7000 Hz: |Z| =    229 ohm, fase  +68.2 graden
 20000 Hz: |Z| =   1180 ohm, fase  +85.9 graden
```

De numerieke bandbreedte en f_0/Q vallen samen: de formule is exact voor een serie-RLC (het resonantiepiekje is op een logaritmische as symmetrisch, op een lineaire niet: f_0 ligt iets dichter bij de onderste grens). Onder f_0 is de fase negatief (de condensator overheerst), erboven positief. Wie meetpunten heeft, zet ze in een lijst en tekent `U_g / abs(Z(f)) * R_m` erdoor: een afwijking toont meteen of de spoelweerstand of de capaciteit anders is dan gedacht.

Parallelle resonantie

Zet je de spoel en de condensator parallel, dan draait alles om. Bij resonantie loopt er een grote stroom rond in de lus van spoel en condensator, maar de bron levert alleen het kleine verlies: de impedantie is **maximaal**. Met een echte spoel (R in serie met L) parallel aan C:

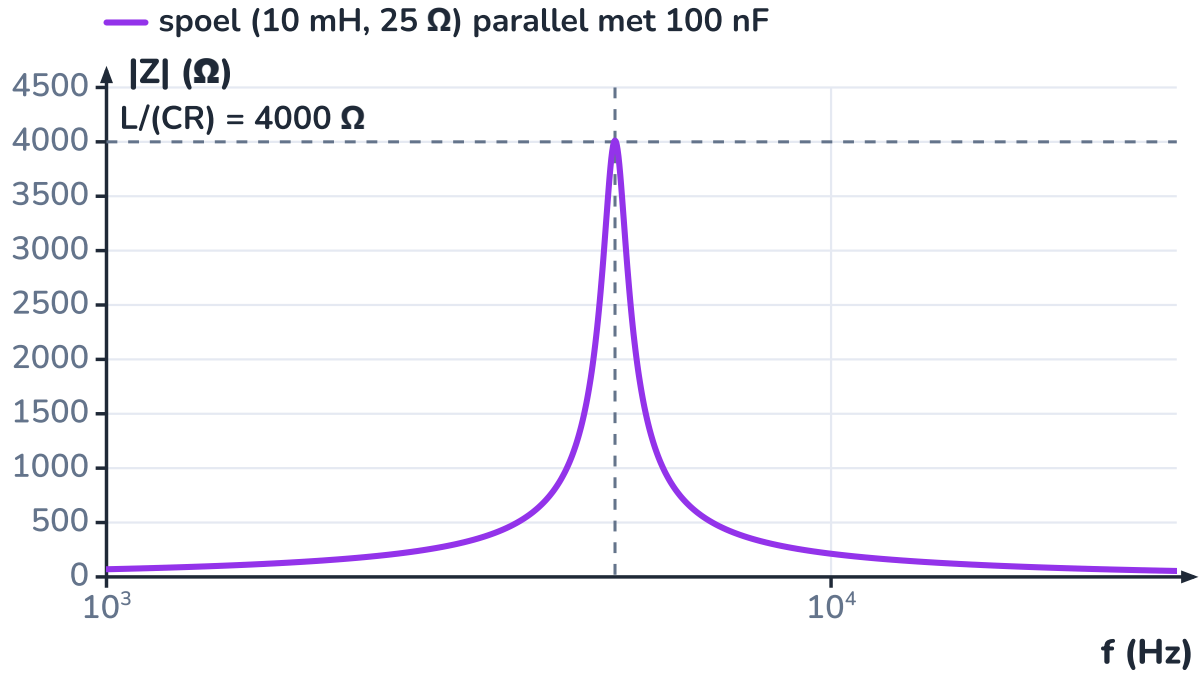
PARALLELLE KRING

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \qquad Z_{\max} \approx \frac{L}{CR} = Q^2 R \quad (Q \gg 1)$$

De resonantie ligt vrijwel bij $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Een kleine serieweerstand van de spoel wordt voor de bron een grote parallelweerstand.

Met de spoel en de condensator van de proef ($R = 25\,\Omega$): $Z_{\max} = 10^{-2}/(10^{-7} \cdot 25) = 4000\,\Omega$ bij 5033 Hz, tegenover enkele honderden ohm ernaast. Zo'n **parallelle kring** kiest in een radio één zender uit, en vormt samen met een versterker een oscillator. Waar een serieresonantie een frequentie doorlaat (lage impedantie), blokkeert een parallelle ze.

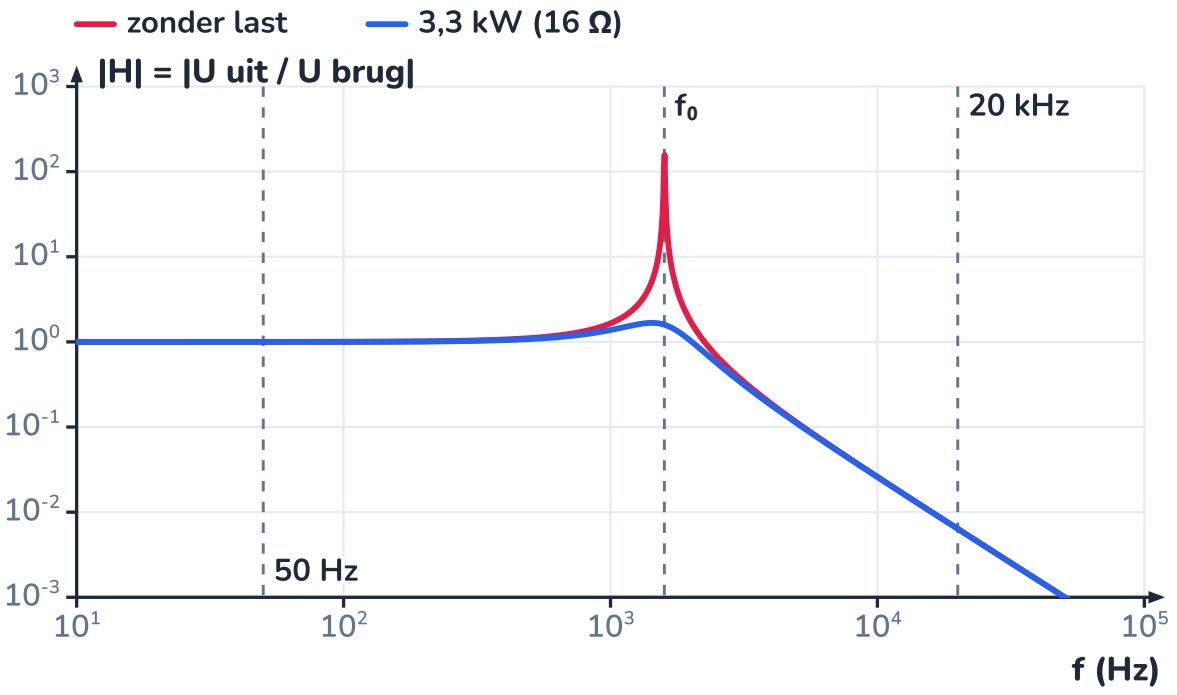
Resonantie is niet altijd welkom. Elke kring met een spoel en een condensator heeft er een, ook als je ze niet zo bedoeld hebt: de kabel en de condensatoren van een voeding, of het filter van een omvormer (volgend blad). Valt een storing of een harmonische van een belasting op die frequentie, dan wordt ze versterkt in plaats van gedempt.



Bij resonantie is de parallelle kring een grote weerstand van 4000 Ω; ver ervan af een kleine impedantie.

Habitat: het uitgangsfilter van de omvormer

De brug in de omvormer schakelt met 20 kHz tussen $+400\,\mathrm{V}$ en $-400\,\mathrm{V}$ (hoofdstuk 24). Een filter met een spoel van 1,0 mH in serie en een condensator van 10 µF naar de uitgang houdt de 50 Hz over en maakt de schakelfrequentie onschadelijk (rekenwaarden). (a) Waar ligt de resonantie? (b) Hoeveel laat het filter door bij 50 Hz en bij 20 kHz? (c) Wat gebeurt er bij de resonantiefrequentie zonder last en bij 3,3 kW? (d) Welke stroom neemt de condensator altijd, ook zonder last?



De 50 Hz gaat ongehinderd door, de schakelfrequentie van 20 kHz wordt 150 keer verzwakt. Zonder last piekt de kring bij 1,6 kHz.

GEGEVEN

- $L = 1{,}0\,\mathrm{mH}$ (0,05 Ω), $C = 10\,\mu\mathrm{F}$
- last 3,3 kW bij 230 V: $R = 230^2/3300 = 16{,}0\,\Omega$

GEVRAAGD

- f_0
- $|H|$ bij 50 Hz, 20 kHz en f_0
- I_C bij 50 Hz

OPLOSSING

1. (a) $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{10^{-3}\cdot 10^{-5}}) = 1592\,\mathrm{Hz}$; $\sqrt{L/C} = 10\,\Omega$.

2. (b) Een spanningsdeler met impedanties: $H = Z_{\mathrm{uit}}/(Z_{\mathrm{uit}} + j\omega L)$, met Z_{uit} de condensator (parallel met de last). Zonder last: $H = \dfrac{1}{1-\omega^2 LC}$. Bij 50 Hz: $|H| = 1{,}0010$: de sinus komt ongehinderd door. Bij 20 kHz: $|H| = 1/((20\,000/1592)^2 - 1) = 0{,}0064$, of $-44\,\mathrm{dB}$ (hoofdstuk 21).

3. (c) Bij f_0 zonder last beperkt alleen de 0,05 Ω van de spoel: $|H| = 200$ ($Q = 10/0{,}05$). Met 16 Ω last: $|H| = 1{,}59$. De last dempt de resonantie; zonder last zou elke storing rond 1,6 kHz tweehonderd keer versterkt worden.

4. (d) $I_C = U\omega C = 230\cdot 314{,}2\cdot 10^{-5} = 0{,}72\,\mathrm{A}$, capacitief: $166\,\mathrm{var}$ dat de omvormer altijd levert.

ANTWOORD

$f_0 = 1592\,\text{Hz}$: ver boven 50 Hz (doorgelaten) en ver onder 20 kHz (−44 dB). Zonder last is de resonantie bijna ongedempt: een ontwerp voegt een dempweerstand toe (opdracht 20.16). De condensator neemt altijd 0,72 A capacitief.

Klopt dit? Het filter is een laagdoorlaatfilter van de tweede orde: boven f_0 daalt $|H|$ met $(f_0/f)^2$, een factor honderd per decade (hoofdstuk 21). Die 166 var van de condensator is een deel van het nullastverbruik van een omvormer: de brug moet die stroom leveren en verliest er iets aan, ook als er niets aangesloten is.

UITLEG · 20.13

Vermogen bij wisselstroom: actief, reactief, schijnbaar

13/24

Een toestel met $u = \hat{U}\cos\omega t$ neemt $i = \hat{I}\cos(\omega t - \varphi)$. Het momentane vermogen, met de productformule $\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$:

$$p(t) = u\,i = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t - \varphi) \qquad (U, I \text{ effectief}).$$

Een constant deel en een deel dat met de dubbele frequentie schommelt. Het gemiddelde is het **actief vermogen** $P = UI\cos\varphi$: dat wordt werkelijk omgezet in warmte of arbeid. Schrijf je de tweede term uit als $UI\cos\varphi\cos 2\omega t + UI\sin\varphi\sin 2\omega t$, dan zie je een deel dat heen en weer pendelt zonder gemiddelde, met amplitude $Q = UI\sin\varphi$: het **reactief vermogen**. Dat is de energie die het magnetisch veld van de motor elke kwartperiode opbouwt en teruggeeft. In de figuur: waar $p(t)$ onder nul gaat, stroomt energie terug naar de bron.

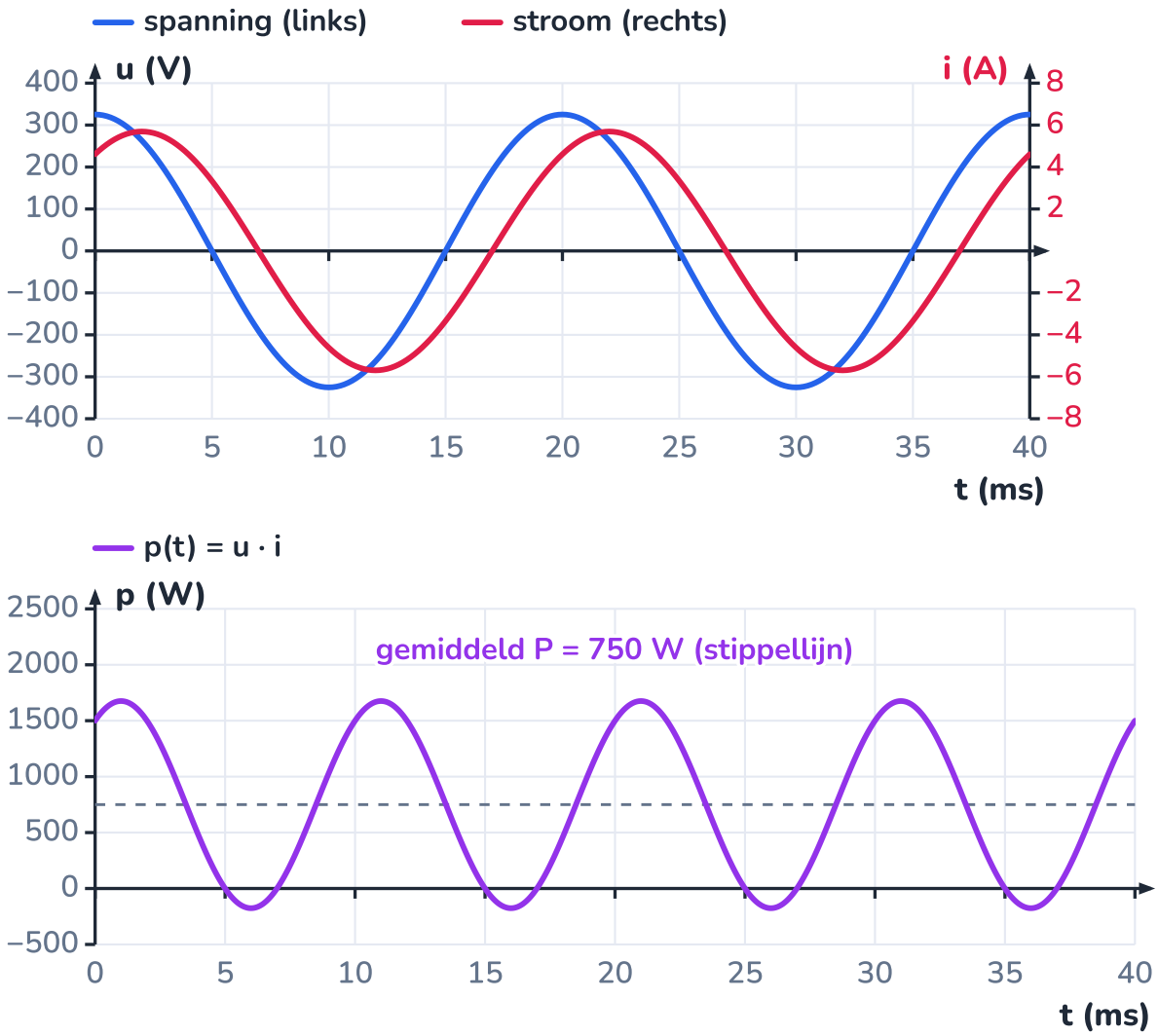
COMPLEX VERMOGEN

$$S = U\,\bar{I} = P + jQ \qquad P = UI\cos\varphi\ (\text{W}) \qquad Q = UI\sin\varphi\ (\text{var}) \qquad |S| = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}\ (\text{VA})$$

$\bar{I}$ is de toegevoegde van de stroom (hoofdstuk 7). $Q > 0$ voor een inductieve last (stroom naijlend), $Q < 0$ voor een capacitieve. Drie eenheden voor hetzelfde product UI, om ze niet te verwarren: watt, var (volt-ampère reactief), VA.

Waarom telt Q als het gemiddeld niets doet? Omdat de stroom er wel voor loopt. Kabels, transformatoren, generatoren en omvormers warmen op door de stroom, niet door het vermogen: ze worden gedimensioneerd op S, in VA. Een omvormer van 4,0 kVA levert 17,4 A, of dat nu 4 kW verwarming is of 2,4 kW motor met $\cos\varphi = 0{,}6$.

Bij een som van toestellen tel je de complexe vermogens op: P bij P en Q bij Q (behoud van energie). De grootten $|S|$ tel je niet zomaar op, net zoals de stromen in hoofdstuk 7.



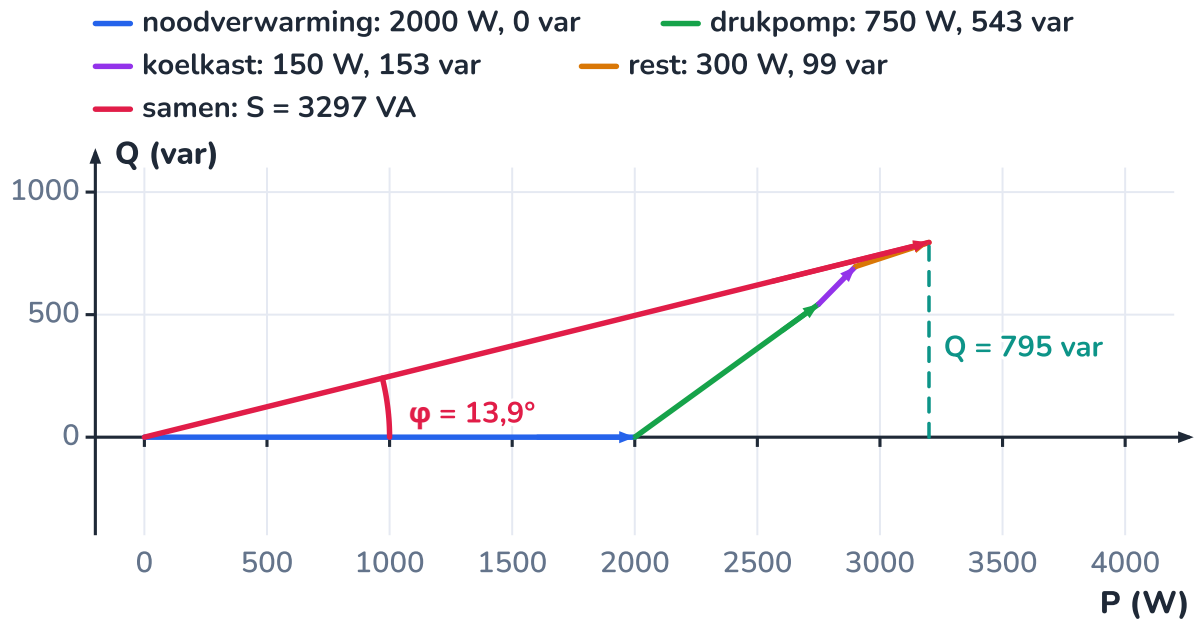
De stroom van de pomp ijlt 36° na. Het vermogen schommelt met 100 Hz tussen −176 en 1676 W, rond een gemiddelde van 750 W; waar het onder nul gaat, stroomt energie terug naar de bron.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.14

De vermogensdriehoek van de ontwerpbelasting

14/24

De ontwerpbelasting van hoofdstuk 7: noodverwarming 2,0 kW ($\cos\varphi = 1$), drukpomp 0,75 kW (0,81), koelkast 0,15 kW (0,70) en de rest 0,30 kW (0,95). Bereken per toestel en samen P, Q en S, en de arbeidsfactor van het geheel. Vergelijk met hoofdstuk 7, dat de stromen als fasoren optelde.



Elk toestel is een pijl (P, Q); kop aan staart geven ze het complexe vermogen van het geheel. Het blinde deel is klein naast de 2 kW verwarming.

GEGEVEN

- $U = 230\,\mathrm{V}$; vier toestellen met P en $\cos\varphi$

GEVRAAGD

- P, Q, S per toestel en samen
- de arbeidsfactor van het geheel

OPLOSSING

1 Per toestel: $S = P/\cos\varphi$ en $Q = P\tan\varphi$. Pomp: $\tan(\arccos 0{,}81) = 0{,}724$, dus $Q = 543\,\mathrm{var}$ en $S = 926\,\mathrm{VA}$. Zo voor elk toestel:

TOESTEL	P (W)	Q (VAR)	S (VA)	I (A)
noodverwarming	2000	0	2000	8,70
drukpomp	750	543	926	4,03
koelkast	150	153	214	0,93
rest	300	99	316	1,37
samen	**3200**	**795**	**3297**	**14,34**
gewoon opgeteld	3200	795	3456	15,03

2 Samen: $P = 3200\,\mathrm{W}$, $Q = 795\,\mathrm{var}$, $|S| = \sqrt{3200^2 + 795^2} = 3297\,\mathrm{VA}$.

3 Arbeidsfactor: $P/|S| = 0{,}971$, $\varphi = 13{,}9°$. Stroom: $|S|/U = 14{,}34\,\mathrm{A}$.

ANTWOORD

$P = 3200\,\mathrm{W}$, $Q = 795\,\mathrm{var}$, $S = 3297\,\mathrm{VA}$, arbeidsfactor 0,971. Hetzelfde als de fasorsom van hoofdstuk 7 (3,30 kVA, 14,3 A): optellen van P en Q is optellen van de stroomwijzers, maal U.

Klopt dit? De gewone som van de $|S|$ geeft 3456 VA: te veel, net als de gewone som van de stromen (15,0 A). De verwarming overheerst en trekt de arbeidsfactor van het geheel naar 1, ook al hebben de motoren samen maar ongeveer 0,8.

Arbeidsfactor en compensatie

De **arbeidsfactor** is P/S: welk deel van de stroom nuttig werk doet. Bij sinussen is hij $\cos\varphi$. Een lage arbeidsfactor kost niets aan energie in het toestel zelf, maar wel elders: meer stroom voor hetzelfde vermogen, dus meer verlies I^2R in de kabels, meer spanningsval, en grotere transformatoren, generatoren en omvormers. Netbeheerders rekenen grote verbruikers daarom blindenergie aan als hun arbeidsfactor te laag is.

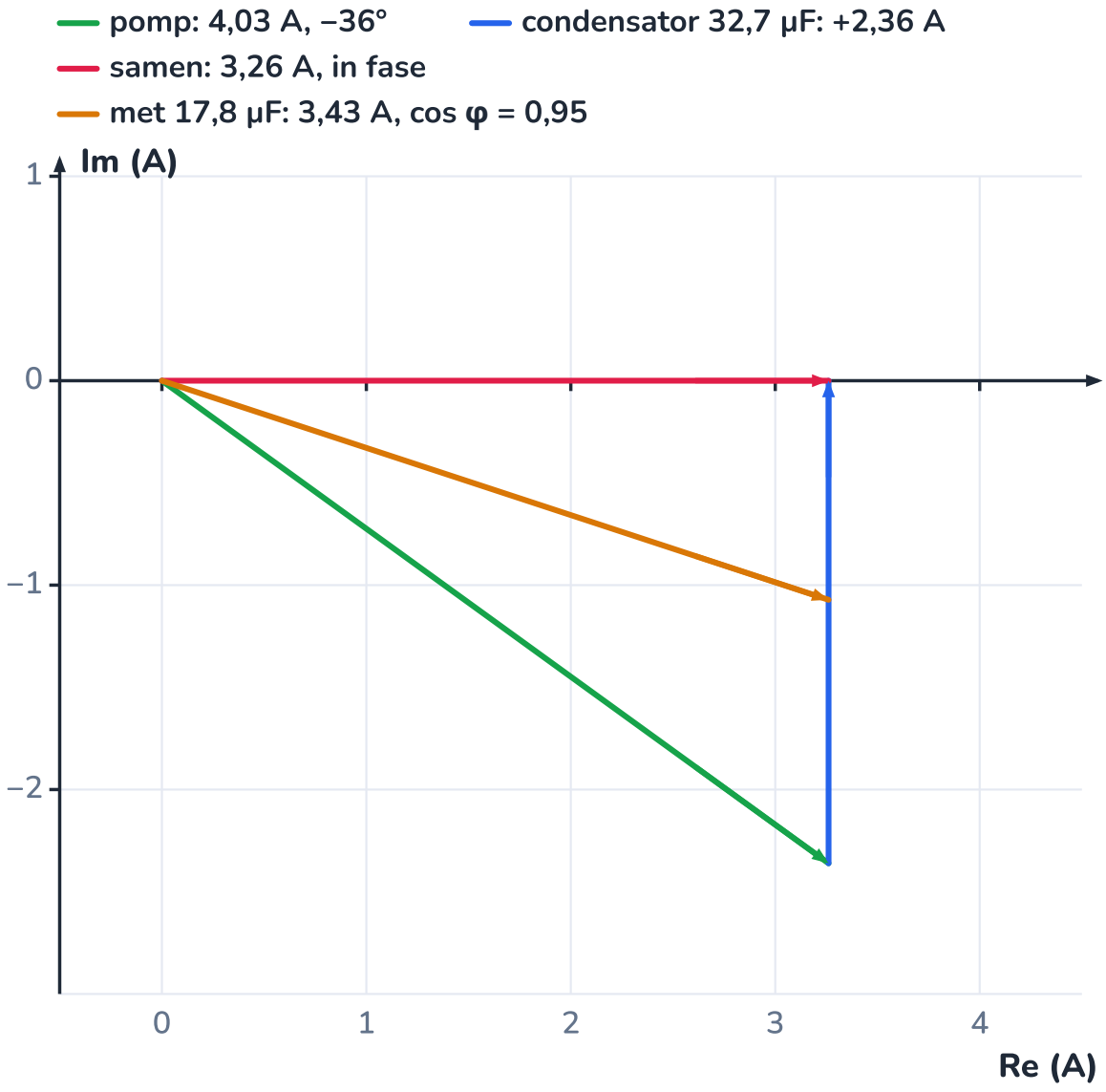
Compensatie: zet een condensator parallel aan de inductieve last. Zijn reactief vermogen is negatief, $Q_C = -U^2\omega C$, en heft een deel van dat van de motor op. De energie pendelt dan tussen motor en condensator in plaats van door de hele kabel naar de bron. De motor zelf merkt er niets van.

COMPENSATIECONDENSATOR

$$C = \frac{Q_{\text{weg}}}{U^2\omega} = \frac{P\,(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{U^2\omega}$$

Van $\cos\varphi_1$ naar $\cos\varphi_2$ bij hetzelfde actief vermogen P. De condensator moet de wisselspanning verdragen (piek 325 V; motorcondensatoren hebben 400 à 450 V~) en een ontlaadweerstand hebben.

Drie grenzen. Wie **overcompenseert**, maakt het geheel capacitief en de stroom weer groter. Bij een motor met een vaste condensator ertussen dreigt **zelfbekrachtiging**: na het uitschakelen draait de motor uit, de condensator levert zijn magnetiseringsstroom, en hij werkt als generator met een gevaarlijke spanning. Vuistregel: de condensator mag hoogstens 90 % van de blindstroom van de motor zonder last leveren. En compensatie helpt alleen voor de faseverschuiving. Toestellen met een gelijkrichter (laders, ledvoedingen) nemen stroom in korte pieken; hun arbeidsfactor is laag door **vervorming**, en daar helpt een condensator niet (opdracht 20.18, en een filter in hoofdstuk 21).



De spanning ligt langs de reële as. De condensatorstroom staat 90° voor op de spanning en heft het blinde deel van de pompstroom op. Volledig: 3,26 A in fase; tot cos φ = 0,95 (een kleinere condensator): 3,43 A.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.16

Een condensator bij de drukpomp

16/24

Compenseer de drukpomp (750 W, $\cos\varphi = 0{,}81$) (a) volledig en (b) tot $\cos\varphi = 0{,}95$. Bereken telkens de condensator en de stroom. (c) De pomp neemt zonder last ongeveer 2,0 A, bijna zuiver blind (rekenwaarde). Welke condensator mag er hoogstens vast aan de pomp hangen?

GEGEVEN

- $P = 750\,\text{W}$, $\cos\varphi_1 = 0{,}81$, $U = 230\,\text{V}$, $f = 50\,\text{Hz}$
- nullaststroom $\approx 2{,}0\,\text{A}$

GEVRAAGD

- C en I voor $\cos\varphi_2 = 1$ en $0{,}95$
- $C_{\max}$ tegen zelfbekrachtiging

OPLOSSING

1 (a) $Q = 543\,\text{var}$ moet weg: $C = \dfrac{543}{230^2 \cdot 314{,}2} = 32{,}7\,\mu\text{F}$. Stroom daarna $750/230 = 3{,}26\,\text{A}$ in plaats van $4{,}03\,\text{A}$.

2 (b) Bij 0,95 blijft $P\tan\varphi_2 = 750\cdot 0{,}329 = 247\,\text{var}$ over; weg moet $296\,\text{var}$: $C = 17{,}8\,\mu\text{F}$ en $I = 750/(0{,}95\cdot 230) = 3{,}43\,\text{A}$.

3 (c) Nullast-blindvermogen $\approx 230\cdot 2{,}0 = 460\,\text{var}$, 90 % daarvan 414 var: $C_{\max} = 414/(230^2\omega) = 24{,}9\,\mu\text{F}$. Volledig compenseren (32,7 µF) mag dus niet vast aan de pomp; tot 0,95 (17,8 µF) wel.

ANTWOORD

Volledig: 32,7 µF, 3,26 A (19 % minder stroom, 34 % minder kabelverlies in die tak), maar te veel tegen zelfbekrachtiging. Tot 0,95: een condensator van 18 µF / 450 V~ bij de pomp, 3,43 A.

Klopt dit? Het actief vermogen blijft 750 W: de pomp krijgt dezelfde spanning en doet hetzelfde werk. Wat daalt, is alleen de stroom in de kabel tussen de bron en de condensator. De condensator hoort daarom zo dicht mogelijk bij de motor, achter zijn schakelaar, zodat hij mee uitgeschakeld wordt.

UITLEG · 20.17

Het driefasige net

17/24

Een driefasige generator (hoofdstuk 19) levert drie spanningen van dezelfde grootte, 120° na elkaar. In een **sterschakeling** komen de drie wikkelingen samen in het sterpunt, dat met de **nulgeleider** (N) naar de verbruikers gaat. Tussen een fase en de nul staat de **fasespanning**, 230 V. Tussen twee fasen de **lijnspanning**, het verschil van twee wijzers (hoofdstuk 7):

$$U_{12} = U_1 - U_2 = 230\,(1 - \mathrm{e}^{-j120^\circ}) = 230\,(1{,}5 + 0{,}866\,j) = 230\sqrt{3}\angle 30^\circ = 398\angle 30^\circ\ \text{V}.$$

DRIEFASIG (EVENWICHTIG)

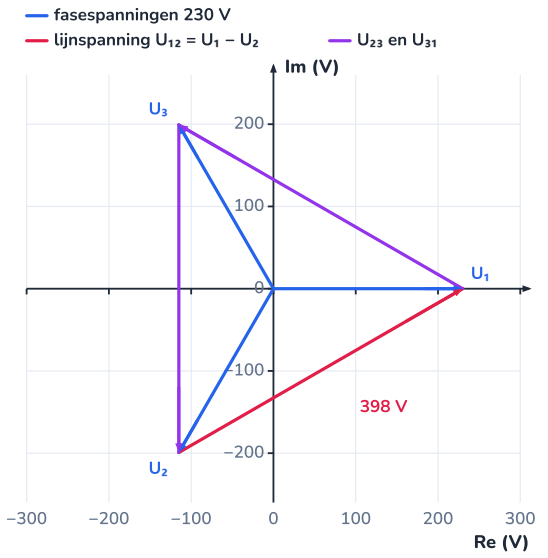
$$U_{\text{lijn}} = \sqrt{3}\,U_{\text{fase}} \qquad P = \sqrt{3}\,U_{\text{lijn}} I_{\text{lijn}}\cos\varphi = 3\,U_{\text{fase}} I_{\text{fase}}\cos\varphi$$

Ster: elke belasting op de fasespanning, lijnstroom = fasestroom. Driehoek: elke belasting tussen twee fasen, op de lijnspanning; de lijnstroom is $\sqrt{3}$ keer de stroom in elke belasting.

Waarom drie fasen? **Het vermogen staat stil.** Drie gelijke weerstanden op de drie fasen: $\sin^2 x + \sin^2(x-120^\circ) + \sin^2(x+120^\circ) = \frac{3}{2}$ op elk ogenblik. Een driefasige motor of generator heeft een constant koppel, terwijl een eenfasig toestel met 100 Hz klopt. **Minder koper**: bij een evenwichtige belasting heffen de drie stromen elkaar in het sterpunt op, de nulgeleider voert niets, en drie draden brengen drie keer het vermogen van een eenfasige aansluiting met twee draden: de helft van het koper per kilowatt. En **een draaiend veld**: drie spoelen rond een motor, gevoed met drie fasen, maken een magnetisch veld dat vanzelf ronddraait. Dat was Tesla's idee, en elke asynchrone motor werkt ermee.

3N × 400 V of 3 × 230 V

De gewone driefasige aansluiting is 3N × 400 V: drie fasen en een nul, 400 V tussen de fasen en 230 V tussen fase en nul. In België hebben veel oudere wijken nog een net van 3 × 230 V zonder nulgeleider: 230 V tussen de fasen. Een 'gewoon' 230 V-toestel hangt daar tussen twee fasen. Toestellen voor 3N × 400 V (laadpalen, warmtepompen, sommige omvormers) passen daar niet zonder meer op.



Het verschil van twee fasespanningen van 230 V die 120° uit elkaar liggen, is een lijnspanning van 398 V, 30° voor op de eerste.



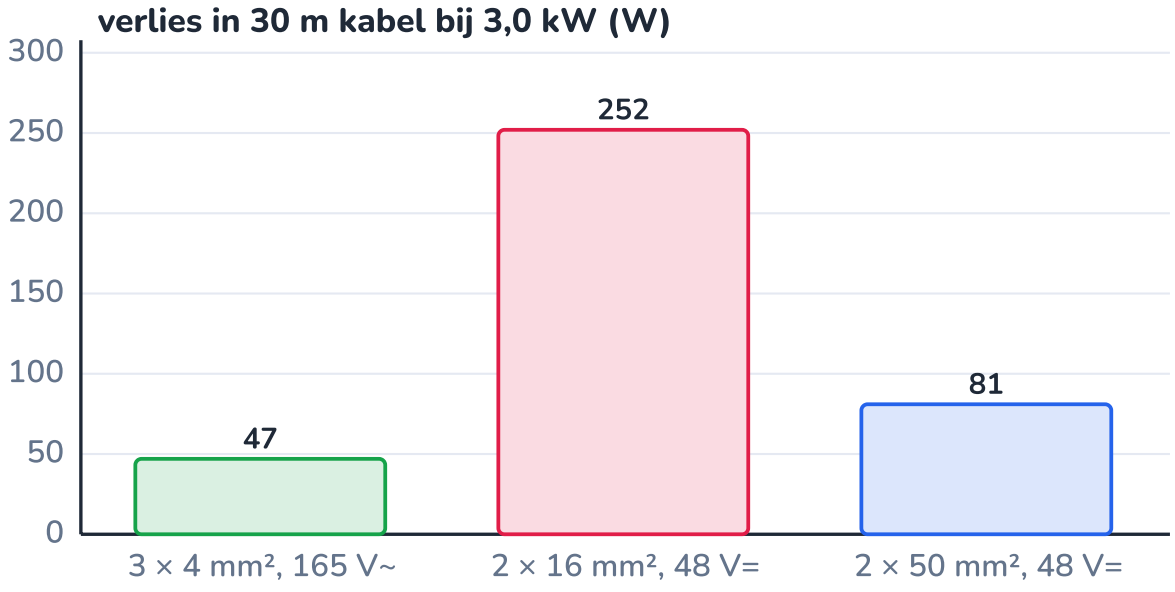
Elke fase levert een vermogen dat tussen 0 en 4000 W schommelt; de som is op elk ogenblik 6000 W.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.18

Habitat: de driefasige kabel van de windturbine

18/24

De generator van de windturbine (hoofdstuk 19) geeft bij 3,0 kW een lijnspanning van 165 V. De kabel van de gondel via de mast van 12 m naar de omzetter bij de module is ongeveer 30 m lang. Vergelijk het verlies (a) met drie geleiders van 4 mm² bij generatorspanning, en (b) als je de 3,0 kW al in de gondel naar 48 V gelijk zou omzetten, met twee geleiders van 16 mm² of 50 mm². Neem voor de generator met zijn diodebrug een arbeidsfactor van $3/\pi = 0{,}955$.



Hetzelfde vermogen, dezelfde afstand: de driefasige kabel bij generatorspanning verliest het minst, met het minste koper.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- $P = 3{,}0\,\mathrm{kW}$, $U_{\mathrm{lijn}} = 165\,\mathrm{V}$, $\lambda = 0{,}955$
- 30 m koper, $\rho = 0{,}0172\,\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$

- verlies en koper in elk geval

OPLOSSING

1 (a) $I = \dfrac{P}{\sqrt{3}\,U\lambda} = \dfrac{3000}{\sqrt{3}\cdot 165\cdot 0{,}955} = 11{,}0\,\mathrm{A}$ per geleider (hetzelfde als $\sqrt{2/3}\,I_{\mathrm{dc}}$ in hoofdstuk 19). Weerstand per geleider $0{,}0172\cdot 30/4 = 0{,}129\,\Omega$. Verlies $3I^2R = 47\,\mathrm{W}$, of 1,6 %.

2 (b) Bij 48 V: $I = 3000/48 = 62{,}5\,\mathrm{A}$. Met 16 mm²: $2I^2R = 2\cdot 62{,}5^2\cdot 0{,}0323 = 252\,\mathrm{W}$ (8,4 %). Pas met 50 mm² zak je naar 81 W (2,7 %).

3 Koper: $3\cdot 4\,\mathrm{mm}^2\cdot 30\,\mathrm{m}$ is 3,2 kg, $2\cdot 50\,\mathrm{mm}^2\cdot 30\,\mathrm{m}$ is 26,9 kg.

ANTWOORD

Bij generatorspanning verlies je 47 W (1,6 %) in 3,2 kg koper; bij 48 V 252 W met 16 mm² of 81 W met 27 kg koper. De keuze van hoofdstuk 19 staat: de energie reist bij de spanning van de generator en wordt pas bij de batterij naar 48 V omgezet.

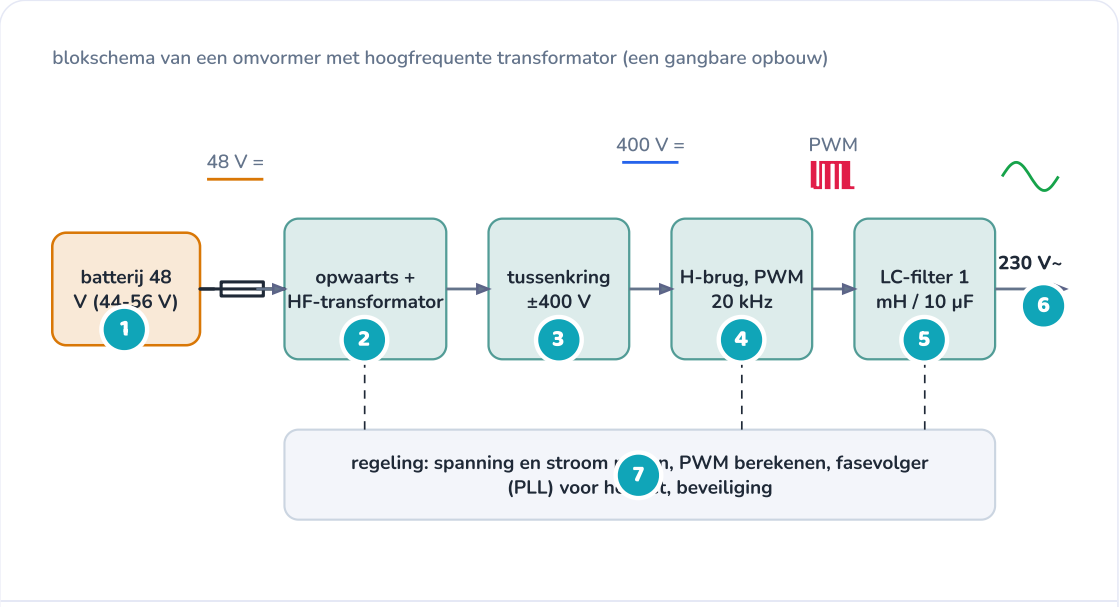
Klopt dit? Het verlies schaalt met I^2: de stroom bij 48 V is 5,7 keer groter, het verlies bij gelijke doorsnede 22 keer (twee draden in plaats van drie). Precies het argument van de stroomoorlog: hoge spanning, kleine stroom.

ONTLEED · 20.19

De omvormer tussen batterij en 230 V

19/24

Een gangbare opbouw van een omvormer die een zuivere sinus maakt uit een batterij, in blokken. Hoe elk blok werkt (schakelende omzetters, PWM, regeling), is hoofdstuk 24; hier zie je welke rol de wisselstroomtheorie erin speelt. Getallen: rekenwaarden voor de omvormer van het station.



Van 48 V gelijk naar 230 V~: opwaarts omzetten, bufferen, hakken en filteren, geregeld door een microcontroller.

1 Batterij en zekering
44 tot 56 V. Bij de ontwerpbelasting ±72 A, bij het aanslaan van de pomp tot ±128 A gedurende enkele seconden. Een trage hoofdzekering dicht bij de batterij en kabels van 2 × 35 mm² (0,18 V spanningsval bij 90 A).

2 Opwaarts omzetten
Een brug hakt de 48 V met tientallen kHz; een kleine HF-transformator (hoofdstuk 19: bij hoge frequentie volstaat een kleine kern) en een gelijkrichter maken er ±400 V van.

3 Tussenkring
Condensatoren van ±1,3 mF op 400 V vangen de 100 Hz-schommeling van het vermogen op, zodat de batterij een bijna constante stroom levert.

4 H-brug
Vier transistors, zoals de H-brug van de dakmotor (hoofdstuk 26 van I), schakelen met 20 kHz tussen +400 en −400 V. De pulsbreedte volgt een sinus van 50 Hz: het gemiddelde is de gewenste spanning.

5 LC-filter
1,0 mH en 10 µF: resonantie bij 1,6 kHz. Laat 50 Hz door en dempt 20 kHz 44 dB. De condensator neemt altijd 0,72 A (166 var).

6 Uitgang
230 V, 50 Hz, zuivere sinus; 4,0 kVA continu (17,4 A), 8 kVA gedurende 5 s. De omvormer levert zowel actief als reactief vermogen; zijn grens is de stroom.

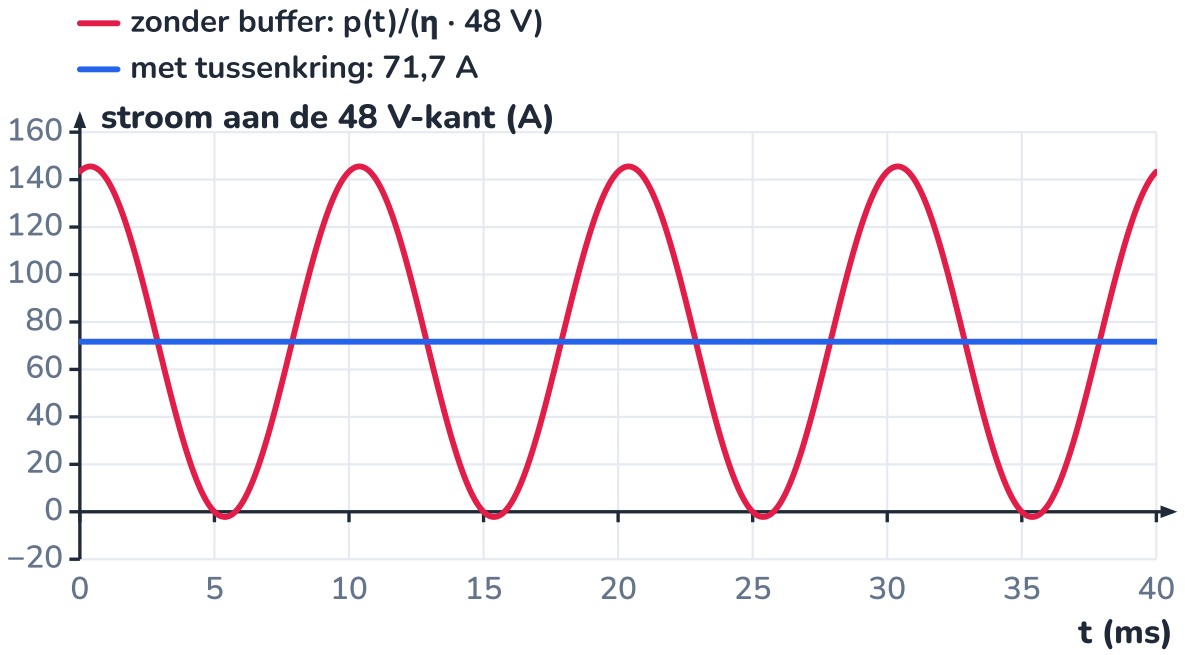
7 Regeling
Meet spanning en stroom, berekent elke periode de pulsbreedtes, volgt bij netkoppeling de fase van het net (hoofdstuk 7) en schakelt af bij overbelasting.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.20

Habitat: de omvormer bij de ontwerpbelasting

20/24

De omvormer (rendement 93 %) voedt de ontwerpbelasting: $P = 3200\,\mathrm{W}$, $Q = 795\,\mathrm{var}$. (a) Welke stroom levert de batterij bij 44, 48 en 56 V? (b) Het momentane vermogen van een eenfasige belasting schommelt met 100 Hz. Tussen welke waarden, en welke stroom zou de batterij dan leveren zonder buffer? (c) Hoe groot moet de tussenkringcondensator op 400 V zijn als zijn spanning hoogstens 20 V mag schommelen?



Zonder buffer zou de batterij een stroom leveren die met 100 Hz tussen 0 en 146 A schommelt; met de tussenkring is het een constante 71,7 A.

GEGEVEN

- $P = 3200\,\mathrm{W}$, $|S| = 3297\,\mathrm{VA}$, $\eta = 0{,}93$
- tussenkring 400 V, rimpel 20 V van top tot top

GEVRAAGD

- I_{bat}
- het bereik van $p(t)$
- C van de tussenkring

OPLOSSING

1 (a) De batterij levert het **actief** vermogen plus de verliezen: $P_{\mathrm{dc}} = P/\eta = 3441\,\mathrm{W}$. Het reactief vermogen pendelt tussen de uitgang en de condensatoren van de omvormer en komt niet uit de batterij. $I = 78{,}2,\ 71{,}7$ en $61{,}4\,\mathrm{A}$.

2 (b) $p(t) = P + |S|\cos(2\omega t - \varphi)$ schommelt tussen $P - |S| = -97\,\mathrm{W}$ en $P + |S| = 6497\,\mathrm{W}$. Zonder buffer zou de batterijstroom bij 48 V tussen ongeveer 0 en $146\,\mathrm{A}$ heen en weer gaan, honderd keer per seconde: extra warmte in batterij en kabels.

3 (c) De schommeling $|S|\cos 2\omega t$ laat de energie in de condensator op en neer gaan: integreren (hoofdstuk 3) geeft een amplitude $|S|/(2\omega)$, dus van top tot top $\Delta E = |S|/\omega$. Met $\Delta E = C\,U\,\Delta U$: $C = \dfrac{|S|}{\omega\,U\,\Delta U} = \dfrac{3297}{314{,}2 \cdot 400 \cdot 20} = 1{,}31\,\mathrm{mF}$.

ANTWOORD

De batterij levert 72 A bij 48 V (78 A bij een bijna lege batterij). Het vermogen schommelt tussen −97 en 6497 W; een tussenkring van ±1,3 mF op 400 V vangt dat op. Dossier: batterijstroom bij de ontwerpbelasting 72 A (48 V), kabels 2 × 35 mm².

Klopt dit? De batterijstroom hangt af van P, niet van S: compensatie verlaagt hem niet (volgend blad). De reactieve stroom loopt wel door de brug en het filter en kost daar een beetje verlies. Een driefasige omvormer heeft dit probleem niet: zijn totale vermogen staat stil (zie het driefasige net), en hij heeft veel kleinere condensatoren nodig.

UITGEWERKT VOORBEELD · 20.21

Habitat: de pomp slaat aan, en compenseren of niet?

21/24

Een pompmotor neemt bij het aanslaan kort ongeveer zes keer zijn stroom. Hoofdstuk 7 nam die aanloopstroom zuiver inductief en vond 6,3 kVA. Een kleine motor heeft bij stilstand echter ook een flink actief deel; neem als rekenwaarde $\cos\varphi = 0{,}5$. (a) Hoeveel kVA en kW vraagt de ontwerpbelasting tijdens het aanslaan, en welke batterijstroom bij 44 V? (b) Wat zou compensatie van de hele belasting naar $\cos\varphi = 1$ opleveren? (c) Beslis.

GEGEVEN

- aanloop pomp: $6 \cdot 4{,}03\ \mathrm{A}$ met $\cos\varphi = 0{,}5$
- omvormer 4,0 kVA continu, 8 kVA gedurende 5 s

GEVRAAGD

- S, P en I_{bat} bij het aanslaan
- effect van compensatie
- de beslissing

OPLOSSING

1. (a) Pomp bij het aanslaan: $24{,}2\angle{-60^\circ}\ \mathrm{A}$. Met de andere toestellen (fasorsom): $|I| = 31{,}6\ \mathrm{A}$, $S = 7{,}28\ \mathrm{kVA}$, $P = 5{,}23\ \mathrm{kW}$. Met het model van hoofdstuk 7 (zuiver inductief) was dat $6{,}3\ \mathrm{kVA}$ maar slechts $2{,}45\ \mathrm{kW}$.
2. Batterij bij 44 V: $5228/(0{,}93 \cdot 44) = 128\ \mathrm{A}$, zolang de pomp aanloopt (minder dan een seconde voor een pomp).
3. (b) Compensatie van alles: $C = 795/(230^2\omega) = 47{,}8\ \mu\mathrm{F}$. De stroom daalt van $14{,}34$ naar $13{,}91\ \mathrm{A}$ (3 %); de batterijstroom en de energie blijven gelijk. Het filter van de omvormer levert al 166 var capacitief: aan de brug is de arbeidsfactor 0,981.
4. (c) Compensatie levert enkele procenten stroom op in kabels van enkele meter, en de omvormer heeft 21 % marge. Bij het aanslaan helpt een condensator nauwelijks (de piek is voor een groot deel actief), en een vaste condensator zou 's nachts, als alleen kleine toestellen draaien, het geheel capacitief maken. Beslissing: **niet compenseren**.

ANTWOORD

Het aanslaan vraagt 7,3 kVA en 5,2 kW: binnen de 8 kVA van de omvormer, met 9 % marge, maar de batterij levert dan 128 A. Dossier: geen compensatie; de 48 V-kant (batterij, BMS, zekering en kabel) moet ±130 A gedurende enkele seconden en ±100 A continu (4,0 kVA bij 44 V) aankunnen.

Klopt dit? Het model van hoofdstuk 7 onderschatte zowel de kVA als het batterijvermogen: een zuiver inductieve aanloop vraagt weinig actief vermogen (60 A bij 44 V in plaats van 128 A). Rekenwaarden bepalen welke kant veilig is: kies ze per vraag. Komen er later grotere motoren bij, dan is een zachte aanloop of een frequentieregelaar (hoofdstuk 24) beter dan een grotere omvormer.

CODE · 20.22

Habitat: de omvormerrekening in Python

22/24

Alle getallen van de twee vorige bladen in één programma, met complexe getallen: stromen als fasoren, het complexe vermogen $S = U\bar{I}$, en de batterijstroom uit het actief vermogen. Wie een toestel toevoegt of een rekenwaarde verandert, ziet meteen wat het betekent voor de omvormer en de batterij.

Python `omvormer.py` 34 regels

```python
# omvormer.py - de netomvormer van het station bij de ontwerpbelasting en bij het aanslaan van de pomp
import cmath
import math
```

```python

U, F = 230.0, 50.0                  # V effectief (referentie), Hz
ETA = 0.93                          # rendement van de omvormer (rekenwaarde)
lasten = {"noodverwarming": (2000, 1.00), "drukpomp": (750, 0.81), "koelkast": (150, 0.70), "rest": (300,
0.95)}


def stroom(P, cos_phi):
    """Stroom als fasor (A), naijlend (inductief)."""
    return cmath.rect(P / (U * cos_phi), -math.acos(cos_phi))


def verslag(naam, I):
    S = U * I.conjugate()           # complex vermogen P + jQ
    print(f"{naam}: I = {abs(I):5.2f} A, P = {S.real:5.0f} W, Q = {S.imag:5.0f} var, "
          f"S = {abs(S):5.0f} VA, cos phi = {S.real / abs(S):.3f}")
    print("    aan de batterij: " + ", ".join(f"{S.real / ETA / u:5.1f} A bij {u} V" for u in (44, 48, 56)))
    return S


I_n = sum(stroom(P, c) for P, c in lasten.values())
S_n = verslag("ontwerpbelasting", I_n)
print(f"    p(t) schommelt met 100 Hz tussen {S_n.real - abs(S_n):.0f} en {S_n.real + abs(S_n):.0f} W")
C_bus = abs(S_n) / (2 * math.pi * F * 400 * 20)
print(f"    buffer op een tussenkring van 400 V met 20 V rimpel: {1000 * C_bus:.2f} mF")

I_pomp = stroom(*lasten["drukpomp"])  # aanloop: zes keer de stroom, cos phi = 0,5 (rekenwaarde)
verslag("pomp slaat aan", I_n - I_pomp + cmath.rect(6 * abs(I_pomp), -math.acos(0.5)))

C = S_n.imag / (U ** 2 * 2 * math.pi * F)   # alles compenseren naar cos phi = 1
print(f"compensatie van alles: C = {1e6 * C:.1f} uF")
verslag("gecompenseerd", I_n + 1j * U * 2 * math.pi * F * C)
```

Uitvoer:

```
ontwerpbelasting: I = 14.34 A, P =  3200 W, Q =   795 var, S =  3297 VA, cos phi = 0.971
    aan de batterij:  78.2 A bij 44 V,  71.7 A bij 48 V,  61.4 A bij 56 V
    p(t) schommelt met 100 Hz tussen -97 en 6497 W
    buffer op een tussenkring van 400 V met 20 V rimpel: 1.31 mF
pomp slaat aan: I = 31.64 A, P =  5228 W, Q =  5063 var, S =  7278 VA, cos phi = 0.718
    aan de batterij: 127.8 A bij 44 V, 117.1 A bij 48 V, 100.4 A bij 56 V
compensatie van alles: C = 47.8 uF
gecompenseerd: I = 13.91 A, P =  3200 W, Q =     0 var, S =  3200 VA, cos phi = 1.000
    aan de batterij:  78.2 A bij 44 V,  71.7 A bij 48 V,  61.4 A bij 56 V
```

Merk op dat compensatie de batterijstroom niet verandert: alleen P komt uit de batterij. De functie `verslag` is het hart: $S = U\bar{I}$ geeft in één keer P (reëel deel) en Q (imaginair deel). Het programma kan zo in de digitale tweeling van het station (hoofdstuk 49): het energiebeheer vraagt voor elk toestel dat het wil inschakelen of de omvormer en de batterij het aankunnen.

NASLAG · 20.23

Wisselstroom: formules

23/24

Werkwijze: kies een referentie (meestal de spanning), zet alles om in fasoren met effectieve waarden, reken met impedanties zoals met weerstanden, en bereken het vermogen met $S = U\bar{I}$. Controleer met een fasordiagram of met een

vermogensdriehoek.

effectieve waarde

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\tfrac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t} \qquad \text{sinus: } U_{\text{eff}} = \hat{U}/\sqrt{2}$$

impedantie

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad Z = R + jX \qquad U = Z$$

symbool	betekenis	eenheid
X	reactantie	Ω

serieresonantie

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \Delta f = \frac{f_0}{Q} \qquad U_C = QU$$

symbool	betekenis	eenheid
Q	kwaliteitsfactor	–

parallelle kring en LC-filter

$$Z_{\max} \approx \frac{L}{CR} \qquad H_{LC} = \frac{1}{1-\omega^2 LC} \text{ (onbelast)}$$

vermogen

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t - \varphi) \qquad S = U\bar{I} = P + jQ$$

symbool	betekenis	eenheid
P	actief vermogen	W
Q	reactief vermogen	var
S	schijnbaar vermogen	VA

arbeidsfactor en compensatie

$$\lambda = \frac{P}{S} \qquad C = \frac{P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{U^2\omega}$$

symbool	betekenis	eenheid
λ	arbeidsfactor	–

driefasig

$$U_{\text{lijn}} = \sqrt{3}\,U_{\text{fase}} \qquad P = \sqrt{3}\,U_{\text{lijn}} I_{\text{lijn}} \cos\varphi$$

eenfasige omvormer

$$C_{\text{tussenkring}} = \frac{|S|}{\omega\, U\, \Delta U} \qquad I_{\text{bat}} = \frac{P}{\eta\, U_{\text{bat}}}$$

golfvorm (piek $\hat{U}$)	effectieve waarde	gemiddelde van $\lvert u\rvert$
sinus	$\hat{U}/\sqrt{2} = 0{,}707\,\hat{U}$	$2\hat{U}/\pi = 0{,}637\,\hat{U}$
blokgolf $\pm\hat{U}$	$\hat{U}$	$\hat{U}$
driehoek $\pm\hat{U}$	$\hat{U}/\sqrt{3} = 0{,}577\,\hat{U}$	$\hat{U}/2$
enkelzijdig gelijkgerichte sinus	$\hat{U}/2$	$\hat{U}/\pi$
gemodificeerde sinus, $\hat{U}$ gedurende de helft van elke halve periode	$\hat{U}/\sqrt{2}$	$\hat{U}/2$

HET GEHEEL · 20.24

Waar wisselstroom vandaan komt en waar hij heen gaat

24/24

Dit hoofdstuk past de wiskunde van hoofdstuk 7 (W) toe op elektrische netten (L) en op energie (E). Resonantie is hetzelfde verschijnsel als in de mechanica (hoofdstuk 11), vermogen is energie per seconde (hoofdstuk 3), en het driefasige net is de brug tussen de generator en de motor.

F21 Elektrisch vermogen en energie

I24 Condensatoren en de RC-tijd

Laden en ontladen in de tijd; hier de condensator bij een sinus, als impedantie.

E3 Integralen: ophopen

Het gemiddelde van u² als integraal: de effectieve waarde; de energieschommeling in de tussenkring.

P = U · I bij gelijkstroom; hier P = UI cos φ en het verschil met S.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

De RL-kring in de tijd als controle van de fasorberekening.

E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren

Fasoren, impedanties en de ontwerpbelasting: hier resonantie, vermogen en compensatie.

E11 Trillingen en resonantie

Massa-veer en RLC: dezelfde vergelijking, dezelfde resonantiepiek, dezelfde Q.

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie

Spoel, condensator en transformator als velden; de driefasige generator van de windturbine.

E21 Filters en signaalverwerking

Het LC-filter als Bode-diagram, harmonischen en Fourier, de vervormde stroom van een lader.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

Hoe de omvormer, de MPPT-omzetter en de frequentieregelaar echt werken.

E49 Integratieproject: het brein van het station

De omvormerrekening als deel van het energiebeheer van de digitale tweeling.

Habitat

Dossier: bij de ontwerpbelasting $P = 3200\,\mathrm{W}$, $Q = 795\,\mathrm{var}$, $S = 3297\,\mathrm{VA}$, arbeidsfactor 0,97; batterijstroom 72 A bij 48 V, 78 A bij 44 V; 100 Hz-schommeling opgevangen in een tussenkring (±1,3 mF op 400 V). Aanslaan van de pomp (rekenwaarde cos φ = 0,5): 7,3 kVA, 5,2 kW, 128 A uit de batterij bij 44 V. Geen compensatie. Uitgangsfilter (rekenwaarden) 1,0 mH en 10 µF. Kabel van de windturbine: 3 × 4 mm², 1,6 % verlies bij 3,0 kW.

SAMENVATTING

In het kort

- De effectieve waarde is $\sqrt{\overline{u^2}}$; bij een sinus $\hat{U}/\sqrt{2}$ (325 V piek = 230 V). Een gemiddelde-meter klopt alleen bij een zuivere sinus.
- Impedanties $Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$, $Z_C = 1/(j\omega C)$ combineer je als weerstanden; een toestel kan je bij één frequentie vervangen door R en X.
- Serie-RLC: resonantie bij $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, dan $Z = R$; $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$, bandbreedte f_0/Q, spanning over C en L Q keer de bron. Parallel: de impedantie piekt $(L/(CR))$.
- $p(t) = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t - \varphi)$: actief vermogen $P = UI\cos\varphi$ (W), reactief $Q = UI\sin\varphi$ (var), schijnbaar $S = UI$ (VA); $S = U\bar{I} = P + jQ$.
- De arbeidsfactor P/S bepaalt hoeveel stroom per watt; een condensator $C = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)/(U^2\omega)$ compenseert, maar niet meer dan 90 % van de nullast-blindstroom van een motor, en niet bij vervorming.
- Driefasig: $U_{\text{lijn}} = \sqrt{3}\,U_{\text{fase}}$ (400 en 230 V), constant vermogen, de helft minder koper, een draaiend veld; in België ook nog 3 × 230 V.
- Habitat: de batterij levert $P/(\eta U)$, 72 A bij de ontwerpbelasting en 128 A tijdens het aanslaan van de pomp (44 V); een

tussenkring vangt de 100 Hz-schommeling op; compensatie is niet nodig.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

effectieve waarde

$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t}$: de gelijkspanning die in een weerstand hetzelfde vermogen geeft; bij een sinus $\hat{U}/\sqrt{2}$.

reactantie

Het imaginaire deel X van een impedantie $Z = R + jX$: $X_L = \omega L$ (positief), $X_C = -1/(\omega C)$ (negatief).

resonantie

Toestand waarin de reactanties van spoel en condensator elkaar opheffen: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; in serie is $|Z|$ dan minimaal, parallel maximaal.

kwaliteitsfactor

$Q = \omega_0 L/R = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$ (serie): hoe scherp de resonantie is; de bandbreedte is f_0/Q en de spanning over C wordt Q keer de bronspanning.

bandbreedte

Het frequentiegebied tussen de twee punten waar het vermogen gehalveerd is (stroom 1/√2 van het maximum).

actief vermogen

$P = UI\cos\varphi$ in watt: het gemiddelde vermogen dat werkelijk wordt omgezet.

reactief vermogen

$Q = UI\sin\varphi$ in var: vermogen dat heen en weer pendelt tussen bron en de velden van spoelen en condensatoren.

schijnbaar vermogen

$S = UI$ in VA; complex $S = U\bar{I} = P + jQ$. Bepaalt de stroom, dus de dikte van kabels en de grootte van omvormers.

arbeidsfactor

P/S; bij sinussen $\cos\varphi$. Bij vervormde stromen kleiner dan $\cos\varphi$ van de grondgolf.

compensatie

Een condensator parallel aan een inductieve belasting levert het reactieve vermogen ter plaatse, zodat de stroom uit het net kleiner wordt.

lijnspanning

Spanning tussen twee fasen; in een sterschakeling $\sqrt{3}$ keer de fasespanning: 400 V bij 230 V.

sterschakeling

Drie belastingen of wikkelingen met één uiteinde samen in het sterpunt (aan de nulgeleider), elk op de fasespanning.

driehoekschakeling

Drie belastingen tussen de fasen onderling, elk op de lijnspanning; geen nulgeleider.

E EXPERT · DEEL E4 · ELEKTROTECHNIEK EN ELEKTRONICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 21

Filters en signaalverwerking

Ruis beperken terwijl betekenis en reactietijd behouden blijven

Een glad sensorsignaal kan fout zijn door vertraging of aliasing. Je bouwt RC-filters op, leest hun amplitude en fase en kiest digitale verwerking die bij de fysica en de alarmen van Habitat past.

9× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

L Elektriciteit en elektronica · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Een filterontwerp wordt met zowel amplitude als reactietijd gecontroleerd.

Na dit hoofdstuk

- Je leidt RC-laag- en hoogdoorlaat af met complexe impedanties.
- Je rekent amplitudes in decibel en leest Bodecurves.
- Je verklaart Fouriercomponenten en aliasing met sampletijdstippen.
- Je vergelijkt gemiddelde en exponentieel filter op ruis en vertraging.
- Je ontwerpt een sensorpad dat alarmen en traceerbaarheid behoudt.

UITLEG · 21.1

Een sensor meet ook zijn omgeving

1/20

Een NTC-signaal bevat nuttige temperatuurverandering, thermische vertraging, ruis en soms periodieke storing. Schrijf $x(t) = s(t) + n(t)$. Een filter kan alleen scheiden als de componenten een verschillend patroon of frequentiegebied hebben. Een trage echte verandering verwijderen maakt het signaal schoner en tegelijk minder juist.

e06 gaf de NTC-ruis als 1,2 ADC-stap, ongeveer 0,10 K per meting. Een ijkfout blijft na middelen bestaan. De CO_2-waarschuwing gebruikt een minuutgemiddelde; de 5000 ppm-grens blijft op losse geldige metingen. Filterontwerp begint daarom bij doel en maximale detectietijd.

SIGNAALMODEL, GEEN GARANTIE VAN SCHEIDBAARHEID

$$x = s + n$$

UITLEG · 21.2

RC-laagdoorlaat uit Kirchhoff

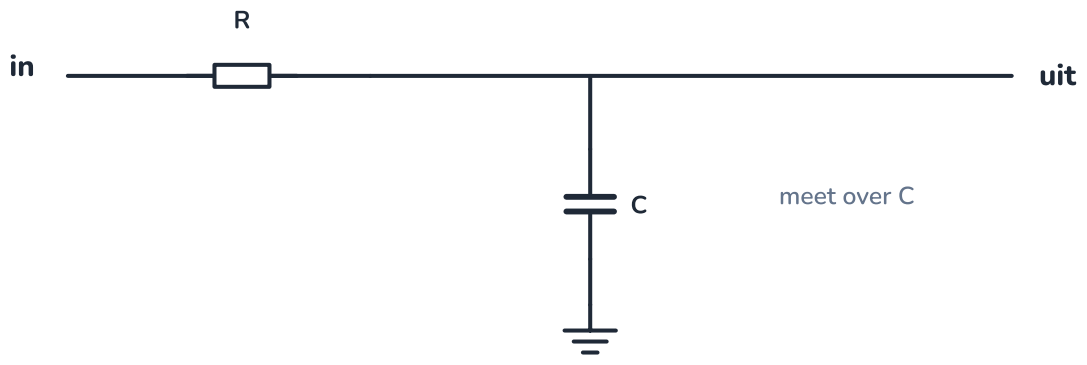
2/20

Bij een onbelaste RC-laagdoorlaat loopt door R dezelfde stroom als in C. $i = (u_i - u_o)/R = C\dot{u}_o$. Daardoor $RC\dot{u}_o + u_o = u_i$. De tijdconstante is τ = RC. Na een spanningssprong is $u_o = U(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$; snelle veranderingen worden beperkt doordat C niet onmiddellijk van lading kan veranderen.

Voor een sinus mag je met complexe impedantie rekenen: $Z_C = 1/(j\omega C)$. De spanningsdeler wordt $H(j\omega) = Z_C/(R + Z_C) = 1/(1 + j\omega RC)$. Een laagdoorlaat geeft gelijkspanning vrijwel door, zolang ingang en belasting aan de modelaannames voldoen.

TRANSFERFUNCTIE

$$H_{\mathrm{LP}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



De uitgang staat over de condensator; een aangesloten belasting kan de transferfunctie veranderen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 21.3

De bestaande batterijdeler heeft 64 Hz

3/20

Een signaalpad volledig doorrekenen.

GEGEVEN

- A3: 100 kΩ boven, 33 kΩ onder, 100 nF over de onderste weerstand; de spanningsbron is voor

GEVRAAGD

- De genoemde filter- en signaalkenmerken.

wisselsignalen ideaal.

OPLOSSING

1. De DC-verhouding is 33/(100+33) = 0,24812. Voor een kleine AC-storing ziet C de Théveninweerstand 100 kΩ parallel 33 kΩ = 24,812 kΩ.
2. τ = RthC = 2,481 ms; fc = 1/(2πτ) = 64,144 Hz.
3. Een bronimpedantie of ADC-belasting kan dit verschuiven; controleer ook settling wanneer de ADC van kanaal wisselt.

ANTWOORD

Dit verklaart de afgeronde 64 Hz in e07.

Klopt dit? Niet 100 kΩ en niet 133 kΩ gebruiken. De AC-bron wordt voor het Théveninmodel kortgesloten.

UITLEG · 21.4

Kantelfrequentie is geen harde grens

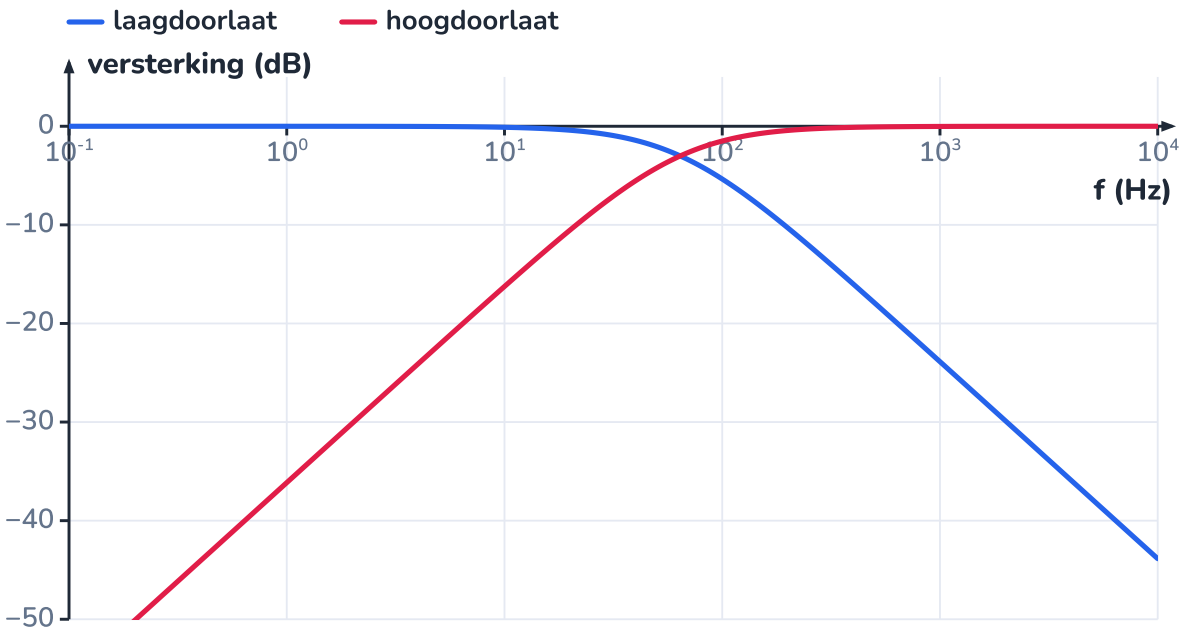
4/20

De amplitude is $|H_{\mathrm{LP}}| = 1/\sqrt{1+(f/f_c)^2}$ en de fase $-\arctan(f/f_c)$. Bij $f = f_c$ is de amplitude $1/\sqrt{2}$ en de fase −45°. Een component wordt daar dus niet afgesneden maar circa 29 % kleiner.

Bij zeer hoge frequentie wordt $|H| \approx f_c/f$. Iedere vertienvoudiging kost een factor tien in spanning. De staprespons en sinusrespons beschrijven hetzelfde systeem in twee domeinen; meer afvlakking betekent een tragere reactie.

RC-KANTELFREQUENTIE

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$



De kromme knikt geleidelijk: de hoek in een asymptotische schets is geen scherpe fysieke grens.

UITLEG · 21.5

Hoogdoorlaat: gelijkspanning blokkeren

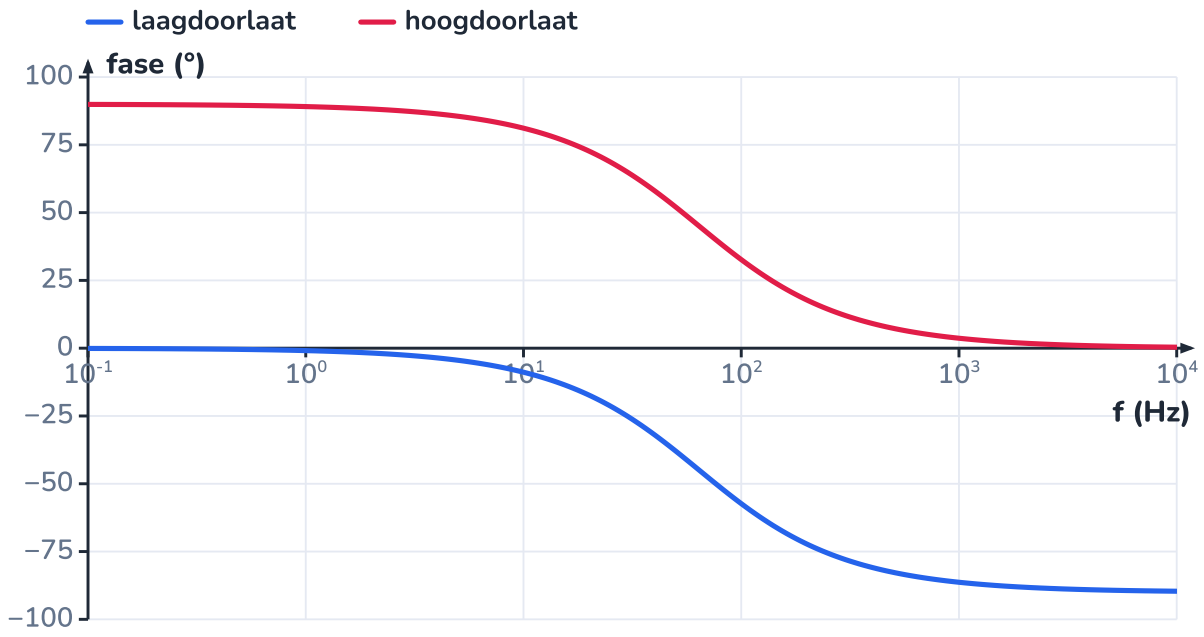
5/20

Neem de uitgang over R in een seriekring van C en R. $H_{\mathrm{HP}} = R/(R + Z_C) = j\omega RC/(1 + j\omega RC)$. De amplitude is $(f/f_c)/\sqrt{1 + (f/f_c)^2}$; fase $90° - \arctan(f/f_c)$. Gelijkspanning wordt nul; hoge frequenties gaan door.

Een stap veroorzaakt aanvankelijk een puls $U\mathrm{e}^{-t/\tau}$ die uitdooft. Een hoogdoorlaat kan een ECG-baseline beperken, maar kan ook een langzame echte verandering verwijderen. Hij lost geen hoogfrequente storing op.

HOOGDOORLAAT

$$H_{\mathrm{HP}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



Laag- en hoogdoorlaat hebben bij fc even grote amplitudes, maar tegengestelde fasebijdragen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 21.6

Decibel rekent verhoudingen, geen losse volt

6/20

Een signaalpad volledig doorrekenen.

GEGEVEN

- Vergelijk een uitgangsspanning met ingang bij gelijke impedanties; voorbeeldverhouding 0,10.

GEVRAAGD

- De genoemde filter- en signaalkenmerken.

OPLOSSING

1. Voor vermogen: L = 10 log10(Puit/Pin). Bij gelijke impedanties geldt P∝U², dus L = 20 log10(Uuit/Uin).
2. 0,10 in amplitude geeft −20 dB; 0,50 geeft −6,02 dB; 1/√2 geeft −3,01 dB en halveert vermogen.
3. Twee onafhankelijke cascades vermenigvuldigen amplitudes, dus dB-waarden tellen op. Twee maal −20 dB geeft 0,01 amplitude = −40 dB.

ANTWOORD

De eenheid dB zegt alleen een verhouding; een absolute referentie moet apart genoemd worden.

Klopt dit? 20 log gebruiken voor spanning zonder gelijke-impedantievoorwaarde is niet automatisch een vermogensvergelijking.

UITLEG · 21.7

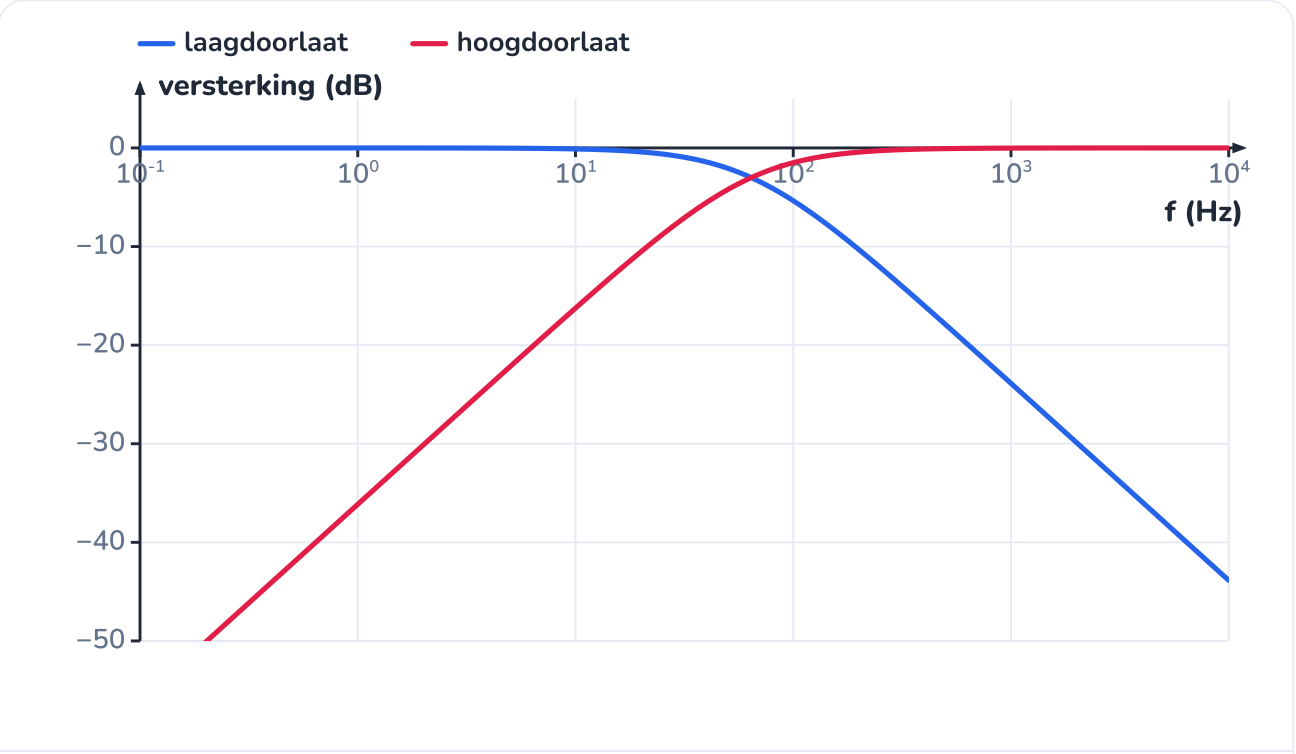
7/20

Bode: amplitude én fase lezen

Een Bodeplot heeft een logaritmische frequentieas. Een eerste-ordelaagdoorlaat benadert 0 dB ver onder fc en een helling van −20 dB per decade erboven. De fase loopt van 0° naar −90°. Een hoogdoorlaat loopt van +20 dB/decade naar 0 dB en van +90° naar 0°.

Bij cascades tel je dB en fase. Twee identieke RC-trappen geven op hun eigen fc samen −6,02 dB en −90°, niet −3 dB. Een tweede-ordefilter kan een andere vorm hebben, afhankelijk van demping; twee simpele RC's zijn niet automatisch een Butterworthfilter.

Een filter in een regelkring voegt fasevertraging toe. De gesloten lus kan daardoor minder stabiel worden. e39's sensor heeft al 60 s thermische vertraging; daarboven nog tientallen seconden middelen vergt een nieuwe luscontrole.



Een Bodeplot maakt onderdrukking zichtbaar, maar de bijbehorende fase bepaalt mede de regelmarge.

UITGEWERKT VOORBEELD · 21.8

PWM-storing op A3

8/20

Een signaalpad volledig doorrekenen.

GEGEVEN

- PWM van de Mega: f = 16 MHz/(64·510) = 490,196 Hz; A3-filter fc = 64,144 Hz.

GEVRAAGD

- De genoemde filter- en signaalkenmerken.

OPLOSSING

1. Amplitudeoverdracht bij de fundamentele PWM-frequentie: 0,1297, dus −17,74 dB.

2 Een vóór dit filter aanwezige sinuscomponent 100 mV wordt ongeveer 12,97 mV. Een echte blokvorm bevat ook harmonischen.

3 De ±10 mV uit e07 is al de residuele A3-rimpel na het bestaande filter. Daar de RC-onderdrukking nogmaals op toepassen zou dubbel rekenen.

ANTWOORD

Het filter beperkt de storing, maar is geen garantie tegen elke aliascomponent.

Klopt dit? Reken met het hele storingsbudget, samplefrequentie, harmonischen en ADC-settling; een los fc-getal volstaat niet.

UITLEG · 21.9

Fourier: een signaal als som van frequenties

9/20

Een periodiek signaal kan worden beschreven als DC plus sinussen en cosinussen op f0, 2f0, 3f0, … . Een symmetrische blokgolf bevat oneven harmonischen met amplitudes die als 1/n dalen. Een andere duty-cycle verandert ook de harmonische verdeling.

Een lineair tijdinvariant filter verandert elke sinus apart in amplitude en fase. Hun som levert de uitgang. Dat verklaart waarom een RC een blokgolf afrondt: hoge harmonischen worden veel sterker verzwakt dan de grondtoon.

Een DFT/FFT van een eindige reeks heeft frequentieafstand fs/N. Een niet-geheel aantal perioden in het meetvenster verspreidt energie over meerdere bins: spectrale lekkage. Een venster helpt bij inspectie, maar maakt geen verdwenen frequentie-informatie terug.

FOURIERBESCHRIJVING

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

UITLEG · 21.10

Nyquist: bemonstering maakt frequenties ononderscheidbaar

10/20

Een sinus gemeten op $t_k = k/f_s$ heeft samples $\sin(2\pi f k/f_s)$. Een frequentie f + mfs geeft exact dezelfde samples, want de extra fase is 2πmk. Daarom kan je uit de monsters alleen een frequentie binnen de gekozen Nyquistband terugvinden.

Voor een bandbegrensd basissignaal tot fmax is fs > 2fmax nodig; op de grens kan een bepaalde fase zelfs overal nul geven. Praktische filters hebben een overgangsband, dus kies marge. Een digitaal filter achter de ADC kan al samengevallen frequenties niet opnieuw uit elkaar halen.

GEVOUWEN FREQUENTIE TUSSEN 0 EN FS/2

$$f_{\text{alias}} = \min_{m \in \mathbb{Z}} |f - m f_s|$$



frequentiebeperking vóór het bemonsteren

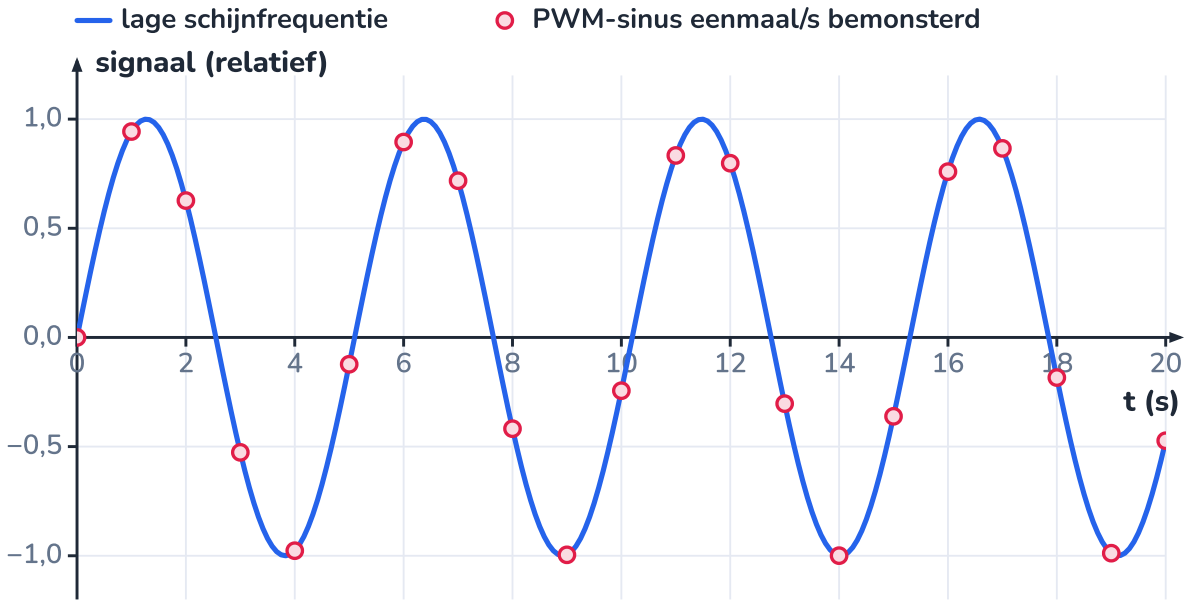
De analoge beperking moet vóór de ADC plaatsvinden; achteraf middelen kan reeds ontstane aliasing niet herstellen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 21.11

490,196 Hz wordt een trage golf

11/20

Een signaalpad volledig doorrekenen.



De punten van de snelle sinus liggen exact op een langzame alias-sinus.

GEGEVEN

- Bemonstering fs = 1 Hz; sinuscomponent op de exacte Mega-PWM-frequentie.

GEVRAAGD

- De genoemde filter- en signaalkenmerken.

OPLOSSING

1. Kies m = 490. falias = |490,196078−490·1| = 0,196078 Hz.
2. De schijnperiode is 1/falias = 5,10 s. Een schijnbare langzame verandering kan daardoor in een regellus terechtkomen.

3 De echte code vergelijkt beide monsterreeksen; zij zijn op numerieke afronding na gelijk. Een PWM-blok bevat meer harmonischen en kan een ingewikkelder patroon geven.

ANTWOORD

Eén sample per seconde maakt de PWM-frequentie onherkenbaar.

Klopt dit? Dit gaat over fasevast samplen, geen werkelijk traag variërende lampstroom.

UITLEG · 21.12

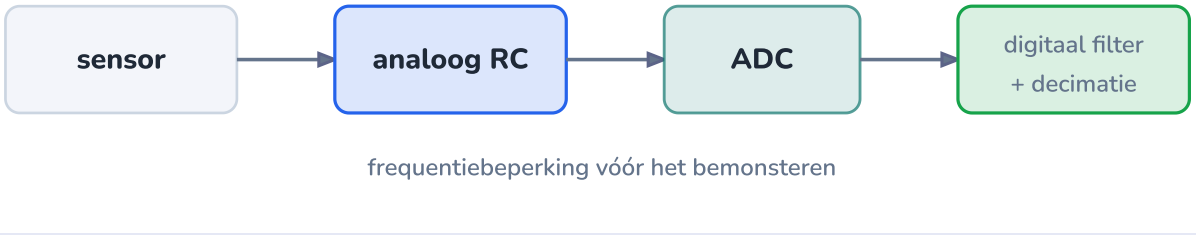
Analoog filter, oversampling en decimatie

12/20

Een traag logtempo hoeft geen traag ADC-tempo te betekenen. Neem eerst voldoende snelle monsters, beperk digitale bandbreedte en geef pas daarna bijvoorbeeld één gemiddelde per seconde door. Dat laatste verlagen van het tempo heet decimatie.

Anti-aliasontwerp specificeert toegelaten rimpel in de passband en maximaal residu in de stopband. Een RC met 64 Hz is een bruikbare bestaande A3-voortrap, maar niet automatisch voldoende voor sampletempo 1 Hz. Sample sneller of gebruik aanvullende geschikte analoge beperking. PWM-harmonischen en breedbandruis blijven onderdeel van de controle.

Analog Devices beschrijft waarom ingangfilters nodig zijn. Voor INA226-stroommeting geldt bovendien de interne conversie-/middeltijd uit i30, geen nieuw A3-schema. Verschillende sensoren krijgen verschillende signaalpaden.



De logfrequentie is geen bewijs voor de gebruikte acquisitiefrequentie.

UITGEWERKT VOORBEELD · 21.13

Voortschrijdend gemiddelde: ruis versus groepsvertraging

13/20

Een signaalpad volledig doorrekenen.

GEGEVEN

- N = 10 monsters, Δt = 1 s, onafhankelijke witte ruis σ = 0,10 K.

GEVRAAGD

- De genoemde filter- en signaalkenmerken.

OPLOSSING

1. y[k] = (x[k]+…+x[k−9])/10. Onafhankelijke varianties tellen op: var(y) = Nσ²/N² = σ²/N.

2. σy = 0,10/√10 = 0,03162 K. Correlatie of een ijkfout verlaagt niet volgens deze regel.

3. Het midden van het venster ligt (N−1)Δt/2 = 4,5 s terug. Een stap heeft tien nieuwe monsters nodig om volledig in het venster te liggen.

ANTWOORD

Een vlak gemiddelde verlaagt witte ruis, maar vertraagt een echte verandering.

Klopt dit? Een gecentreerd offline-gemiddelde gebruikt toekomstige data en is geen uitvoerbare online-regelaar.

UITLEG · 21.14

Exponentieel filter afleiden

14/20

Een eerste-ordeproces $\tau\dot{y} = x - y$ met constant x gedurende een sampleinterval heeft exact $y_k = e^{-\Delta t/\tau} y_{k-1} + (1 - e^{-\Delta t/\tau}) x_k$. Definieer α = 1−exp(−Δt/τ). Zo blijft de tijdconstante betekenis houden wanneer Δt verandert.

Voor witte ruis geldt in rust $\sigma_y^2 = (1-\alpha)^2\sigma_y^2 + \alpha^2\sigma_x^2$. Oplossen geeft $\sigma_y/\sigma_x = \sqrt{\alpha/(2-\alpha)}$. Dit voorspelt de statistische spreiding, geen garantie op iedere afzonderlijke meting.

EXPONENTIËLE SMOOTHING

$$y_k = y_{k-1} + \alpha(x_k - y_{k-1})$$

CODE · 21.15

Filters vergelijken op een bekende modelstap

15/20

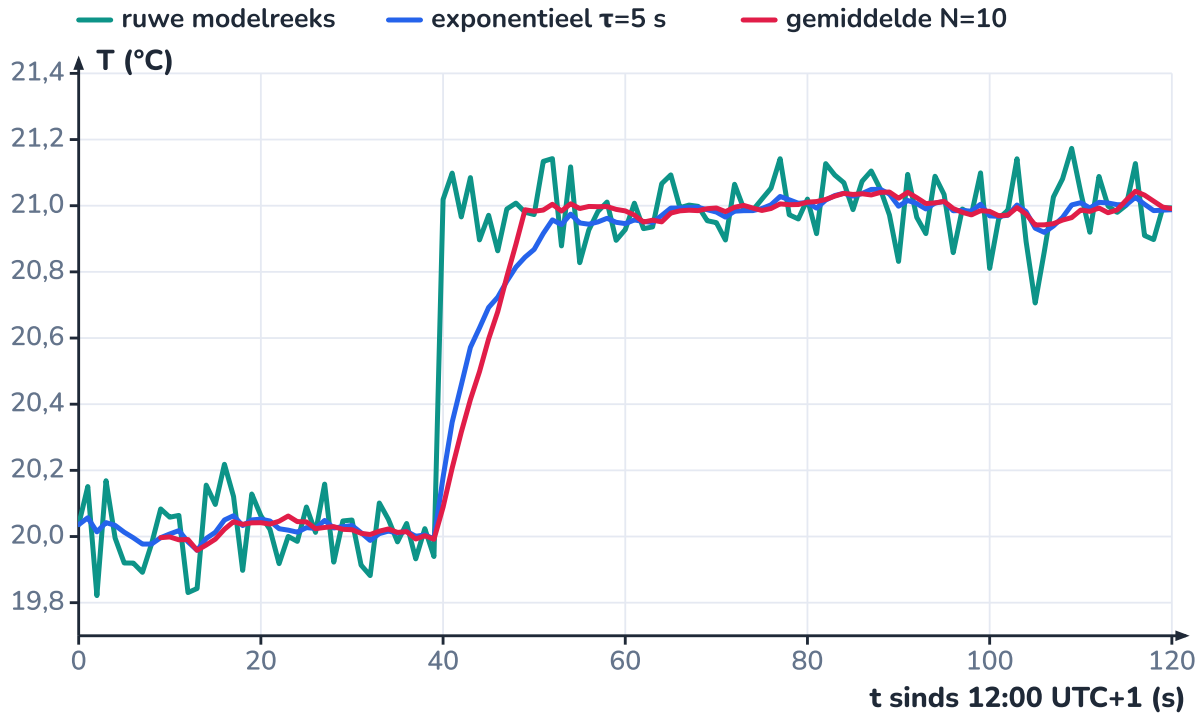
De voorbeeldreeks start om 12:00 UTC+1. De echte temperatuur springt na 40 s van 20 naar 21 °C; de sensorruis is synthetisch met vaste seed. Het voortschrijdende gemiddelde begint pas na een volledig venster. De code toont echte uitvoer en de ononderscheidbaarheid van aliasmonsters.

Python **filters.py** 23 regels

```python
# filters.py — modelreeks; t=0 bij 12:00 UTC+1, geen echte sensormeting
import numpy as np
dt, tau, N = 1.0, 5.0, 10
t = np.arange(0,121)*dt
waar = np.where(t<40,20.0,21.0)
x = waar + np.random.default_rng(21).normal(0,0.10,len(t))
alpha = 1-np.exp(-dt/tau)
y = np.empty_like(x)
y[0] = x[0]
for k in range(1,len(x)):
    y[k] = y[k-1]+alpha*(x[k]-y[k-1])
# causaal, pas na volledig venster een geldig gemiddelde
ma = np.convolve(x,np.ones(N)/N,mode="valid")
print(f"alpha {alpha:.6f}; theoretische witte-ruisfactor {np.sqrt(alpha/(2-alpha)):.4f}")
print(f"ruis standaardafwijking N={N}: {0.10/np.sqrt(N):.4f} K")
```

```python
print(f"vertraging gemiddelde: {(N-1)*dt/2:.1f} s")
for s in (40,45,50,60):
    print(f"t={s:3d} s: ruw {x[s]:.4f}, exponentieel {y[s]:.4f} °C")
fs, f = 1.0, 16e6/64/510
sample = np.sin(2*np.pi*f*np.arange(21)/fs)
laag = np.sin(2*np.pi*(f-round(f/fs)*fs)*np.arange(21)/fs)
print(f"PWM {f:.6f} Hz wordt {abs(f-round(f/fs)*fs):.6f} Hz")
print(f"zelfde monsters: maximale afwijking {max(abs(sample-laag)):.2e}")
```

```
alpha 0.181269; theoretische witte-ruisfactor 0.3157
ruis standaardafwijking N=10: 0.0316 K
vertraging gemiddelde: 4.5 s
t= 40 s: ruw 21.0189, exponentieel 20.1790 °C
t= 45 s: ruw 20.9712, exponentieel 20.6924 °C
t= 50 s: ruw 20.9732, exponentieel 20.8679 °C
t= 60 s: ruw 20.9278, exponentieel 20.9458 °C
PWM 490.196078 Hz wordt 0.196078 Hz
zelfde monsters: maximale afwijking 6.78e-12
```



Vergelijk ook de vertraging na de stap, niet alleen hoe glad de lijn eruitziet.

UITGEWERKT VOORBEELD · 21.16

Een NTC-filter met vijf seconden tijdconstante

16/20

Een signaalpad volledig doorrekenen.

GEGEVEN

- Δt = 1 s, τ = 5 s; onafhankelijke σin = 0,10 K; sensor zelf heeft nog een thermische tijdconstante van 60 s.

GEVRAAGD

- De genoemde filter- en signaalkenmerken.

OPLOSSING

1. $\alpha = 1-\exp(-1/5) = 0{,}181269$. De theoretische ruisfactor is 0,3157, dus $\sigma_{uit} \approx 0{,}0316$ K.

2. Zonder extra sensorvertraging bereikt een gefilterde stap 95 % na $-5\ \ln(0{,}05) = 14{,}98$ s.

3. De 60 s-sensor en het 5 s-filter staan in cascade. Een totale detectietijd kan je niet uit het filter alleen halen; simuleer beide.

ANTWOORD

Vijf seconden beperkt ruis met bescheiden extra traagheid tegenover de sensor.

Klopt dit? Bij ontbrekende data niet dezelfde sample tweemaal meetellen. Herstart/initieer op een geldige waarde en leg de tijdstempel vast.

PROEF · 21.17

Een RC meten zonder de opstelling te belasten

17/20

ONDERZOEKSVRAAG

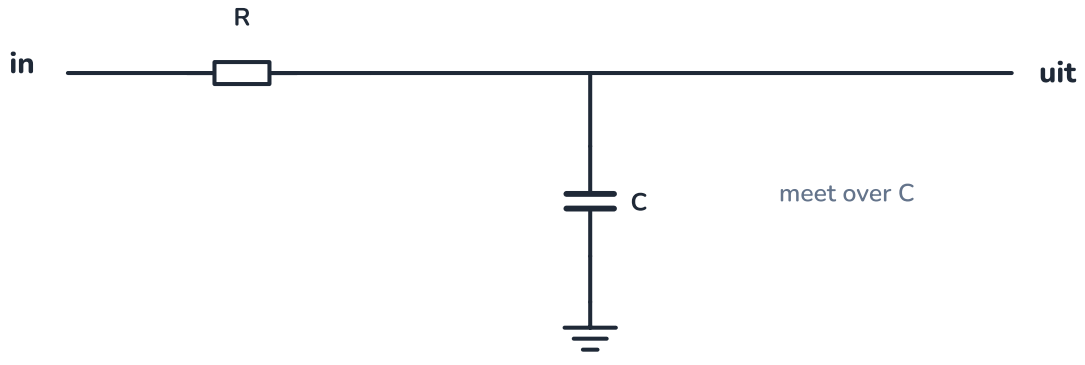
Een demonstratie vergelijkt amplitude en fase met het model.

MATERIAAL

- functiegenerator op veilige laagspanning
- R = 10 kΩ, C = 1 µF
- oscilloscoop met hoge ingangsimpedantie

Veiligheid

Uitsluitend laagspanning; verbind oscilloscoopmassa correct, geen netomvormer meten met een geaarde probe.



De meetprobe moet een veel hogere impedantie hebben dan de kring om het onbelaste model te volgen.

WERKWIJZE

1. Bouw de laagdoorlaat en controleer R/C.

2 Meet ingang en uitgang bij 1, 16, 160 en 1600 Hz met gelijke ingangs-amplitude.

3 Bepaal Uuit/Uin en fase uit tijdverschil: φ = 360°·Δt/T, met teken.

4 Vergelijk met fc≈15,9 Hz; onderzoek daarna een eindige uitgangsbelasting.

WAARNEMING

Bij ongeveer 16 Hz is Uuit≈0,707 Uin en loopt de uitgang circa 45° achter.

VERKLARING

De condensatorimpedantie wordt vergelijkbaar met R; de uitgang is complex, niet enkel kleiner.

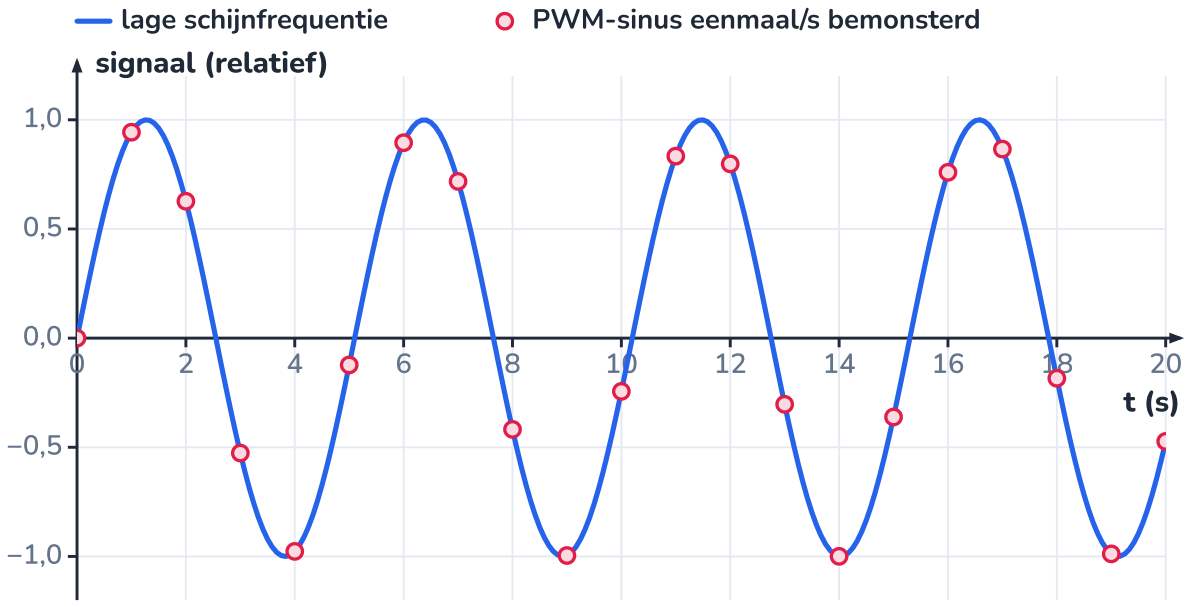
VERHAAL · 21.18

Een goed opgenomen signaal kan toch de verkeerde frequentie tonen

18/20

Een nauwkeurige ADC bewaart alleen de waarde op zijn meettijdstippen. Daardoor kan een spectaculair rustige meetreeks nog een snelle storing als langzaam gedrag weergeven. Dat is een informatieprobleem, niet alleen een probleem van sensorresolutie.

De technische uitleg van Analog Devices over bandbegrensde bemonstering verbindt de samplekeuze met het frequentiegebied dat je wil bewaren. Voor Habitat is de praktische les eenvoudig: controleer bij de logger ook het analoge ingangspad, de feitelijke ADC-tijdstippen en het PWM-schema. Een mooi grafiekprogramma herstelt een verkeerd opgenomen signaal niet.



De punten zijn correct gemeten; de frequentie-interpretatie kan zonder ingangkennis toch verkeerd zijn.

NASLAG · 21.19

Filterregels met geldigheidsvoorwaarden

19/20

RC-kantelpunt

$$f_c = (2\pi RC)^{-1}$$

symbool	betekenis	eenheid
R	effectieve bronweerstand	Ω
C	capaciteit	F

decibel

$$L_U = 20\log_{10}|H|, \quad L_P = 10\log_{10}(P_o/P_i)$$

symbool	betekenis	eenheid
L	relatief niveau	dB

onafhankelijke ruis middelen

$$\sigma_{\text{gem}} = \sigma/\sqrt{N}$$

symbool	betekenis	eenheid
N	aantal onafhankelijke monsters	1

exponentieel filter

$$\alpha = 1 - \mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}$$

symbool	betekenis	eenheid
Δt	sampleinterval	s
τ	tijdconstante	s

Keuze	Winst	Prijs
analoog RC	storing vóór ADC	fase, settling, beperkte filterorde
gemiddelde N	eenvoudig, σ/√N bij witte ruis	(N−1)Δt/2 vertraging
exponentieel	weinig geheugen, instelbare τ	stapvertraging, init nodig
decimatie	minder logdata	eerst digitale bandbreedte beperken

HET GEHEEL · 21.20

Het geheel: filters in het brein

20/20

e07 beschreef sinus en fasor, i25 de ADC/PWM. e06 scheidde ruis van ijkonzekerheid. Hier kies je een uitvoerbaar signaalpad. e40 zal sensoren samenvoegen: filtering lost een foutieve sensor niet op en maakt twee afgeleide signalen niet onafhankelijk.

E7 Sinusoïden, complexe getallen en fasoren
Complexe overdracht en fase.

I25 Van analoog naar digitaal
PWM en samplevalkuil.

E40 Sensorfusie en schatten
Meetruis en toestandsschatting.

E39 PID-regeling
Filterfase en alarmvertraging.

Habitat

A3 behoudt 100 kΩ/33 kΩ plus 100 nF, effectieve fc = 64,144 Hz. Voor de NTC is Δt = 1 s, τfilter = 5 s, α = 0,181269 een

getoetst ontwerpvoorstel

, geen wijziging van de sensorvertraging van 60 s. Log ruwe geldige en gefilterde waarde naast elkaar. De 5000 ppm-CO_2-grens en sensorvaliditeit blijven afzonderlijk beoordeeld.

SAMENVATTING

In het kort

- RC-filters hebben een geleidelijke amplitudeoverdracht en een bijbehorende fase.
- Decibel maakt een verhouding logaritmisch; 20 log bij amplitude en 10 log bij vermogen.
- Fourier beschrijft de frequentie-inhoud; de samplefrequentie bepaalt welke informatie ononderscheidbaar wordt.
- Analoog anti-aliasfilteren gebeurt vóór de ADC; digitaal filteren kan daarna bandbreedte en ruis beperken.
- Gemiddelden en exponentiële filters vragen een kwantitatieve afweging tussen ruis en detectietijd.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

kantelfrequentie
Frequentie waarbij een enkel RC-filter 1/√2 van de passbandamplitude geeft.

aliasing
Ononderscheidbaarheid van verschillende bronfrequenties na bemonstering.

decimatie
Verlagen van een digitale samplefrequentie na passende bandbreedtebeperking.

Bode-diagram
Amplitude in dB en fase tegen logaritmische frequentie.

groepsvertraging
Tijdsvertraging van de omhullende van componenten in een bepaald frequentiegebied.

E EXPERT · DEEL E4 · ELEKTROTECHNIEK EN ELEKTRONICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 22

Operationele versterkers

Millivolt betrouwbaar omzetten naar een weegwaarde

Een rekstrook produceert een klein verschil dat je met negatieve terugkoppeling kan versterken. Je leidt schakelingen af, toetst werkelijke grenzen en bouwt een meetketen voor de oogst van Habitat.

9× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

L Elektriciteit en elektronica · O Onderzoeken en meten



De bakmassa, mechanische montage en elektronica horen allemaal bij de kalibratie.

Na dit hoofdstuk

- Je gebruikt de ideale opampregels onder hun geldigheidsvoorwaarden.
- Je leidt inverterende en niet-inverterende gain af.
- Je berekent comparatorhysterese en onderscheidt lineaire versterking van schakelen.
- Je rekent een Wheatstonebrug en instrumentatieversterker door.
- Je maakt een ADC-, onzekerheids- en kalibratiebudget voor een krachtsensor.

UITLEG · 22.1

Een klein verschil wordt een bruikbare spanning

1/20

Een rekstrookje verandert zijn weerstand wanneer het materiaal vervormt. De verandering is klein; een brug zet haar om in millivolt. Een ADC op 0–5 V kan daar zonder versterking nauwelijks resolutie uit halen. Signaalconditionering past schaal, offset, bandbreedte en impedantie aan.

Een opamp is een differentiële versterker: $u_o = A_{ol}(u_+ - u_-)$. De uitgangsenergie komt uit zijn voeding, niet uit de ingang. Een groot open-lusgain alleen maakt nog geen nauwkeurige versterker; daarvoor gebruik je negatieve terugkoppeling.

OPEN-LUSMODEL

$$u_o = A_{ol}(u_+ - u_-)$$

UITLEG · 22.2

De gouden regels gelden alleen in lineair bedrijf

2/20

Een ideale opamp heeft oneindige ingangsimpedantie, zodat $i_+ = i_- = 0$, en zeer grote open-lusversterking. Bij stabiele **negatieve** terugkoppeling en een niet-verzadigde uitgang moet het ingangsverschil bijna nul worden: $u_+ \approx u_-$. Dit heet virtuele kortsluiting, maar er is geen geleidende draad tussen de ingangen.

De tweede regel geldt niet bij een comparator, positieve terugkoppeling, verzadiging of buiten het common-modebereik. Een virtuele massa is bovendien alleen nul volt als de andere ingang daadwerkelijk op nul staat. Met een referentie op 2,5 V ligt de knoop rond 2,5 V.

Gelijke spanning is geen verbinding

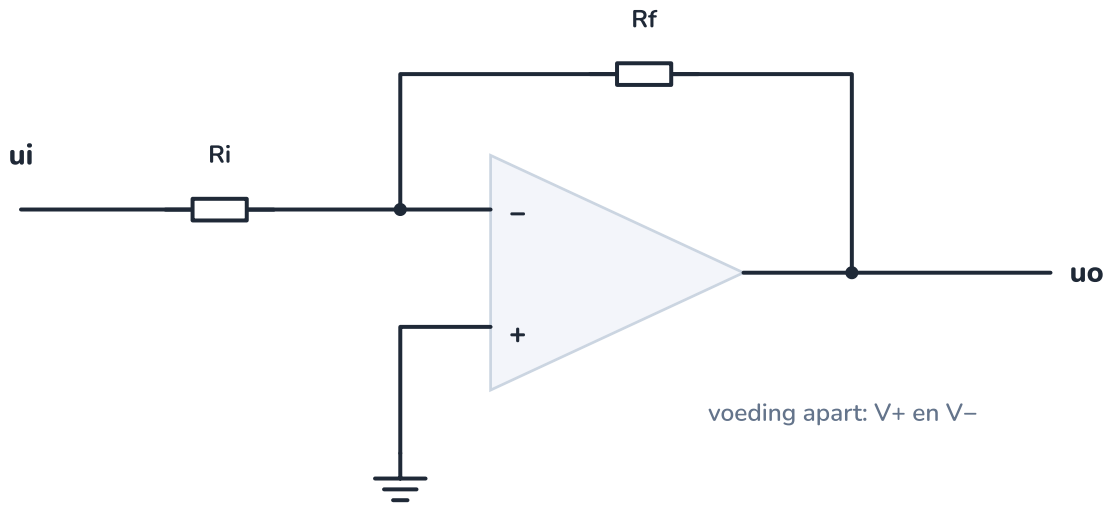
Er loopt idealiter geen stroom de opampingangen in. Stroom door een terugkoppelweerstand loopt naar de uitgangstrap en haar voeding, niet door een virtuele draad tussen + en –.

UITGEWERKT VOORBEELD · 22.3

Inverterend: Kirchhoff op de virtuele massa

3/20

Het schakelschema wordt vanuit de knooppunten doorgerekend.



De feedback gaat naar –; de + ingang vormt de referentie.

GEGEVEN

- Negatieve terugkoppeling, Ri = 10 kΩ, Rf = 47 kΩ; u+ = 0 V; voeding ±12 V, ingang +0,80 V.

GEVRAAGD

- Spanningen, grenzen en betekenis van het resultaat.

OPLOSSING

1. In lineair bedrijf $u_- = 0$. Ingangsstroom is $i = (u_i - 0)/R_i$; dezelfde stroom loopt door Rf omdat de ingang geen stroom opneemt.
2. Knooppuntwet: $(u_i - u_-)/R_i + (u_o - u_-)/R_f = 0$. Met $u_- = 0$ volgt $u_o = -(R_f/R_i)u_i$.
3. Gain −4,7; uitgang −3,76 V. Stroom 80 µA. Het negatieve teken keert de sinusfase 180° om.

ANTWOORD

−3,76 V, mits binnen de werkelijke output-/inputgrenzen.

Klopt dit? Een enkelvoudige 0–5 V-voeding kan deze negatieve uitgang niet leveren; dan moet de referentie of schakeling veranderen.

UITLEG · 22.4

Niet-inverterend: de feedbackdeler bepaalt gain

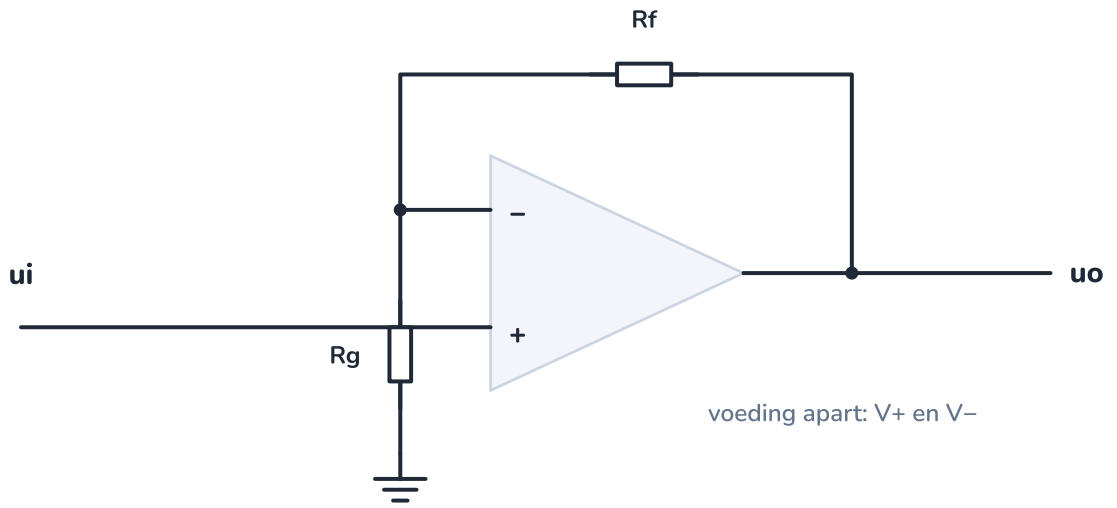
4/20

Zet ui op +. De − ingang meet een deel van de uitgang: $u_- = u_o R_g/(R_g + R_f)$. In lineair bedrijf is $u_- = u_i$, dus $u_o = (1 + R_f/R_g)u_i$. De signaalingang is hoogohmig; de weerstandsdeler belast vooral de uitgang.

Laat Rf nul zijn en Rg weg: de uitgang wordt rechtstreeks naar − teruggekoppeld. Dan is gain 1, de spanningsvolger. Die versterkt geen spanning maar maakt een zwakke bron geschikt om een belasting te voeden, binnen uitgangsstroom en stabiliteitsgrenzen.

NIET-INVERTERENDE GAIN

$$G_{\text{niet}-\text{inv}} = 1 + \frac{R_f}{R_g}$$



Een stijgende uitgang verhoogt u− en verkleint het verschil: de terugkoppeling is negatief.

UITGEWERKT VOORBEELD · 22.5

Een sensor van 0–0,40 V naar 0–4,0 V

5/20

Het schakelschema wordt vanuit de knooppunten doorgerekend.

GEGEVEN

- Niet-inverterend; Rg = 10 kΩ, gewenste gain 10; werkelijke voedings-/common-modegrenzen nog te controleren.

GEVRAAGD

- Spanningen, grenzen en betekenis van het resultaat.

OPLOSSING

1. G = 1 + Rf/Rg, dus Rf = (10−1)·10 kΩ = 90 kΩ.
2. Bij ui = 0,25 V is uo = 2,50 V. Bij 0,40 V is 4,00 V gevraagd.
3. Een realistische opamp kan bij nul volt aan zijn ingang of uitgang buiten zijn lineaire gebied komen. Kies een geschikte rail-to-railvariant of introduceer een gevalideerde offset.

ANTWOORD

Het weerstandsontwerp vraagt Rf = 90 kΩ; ideale schaal klopt.

Klopt dit? Componentkeuze vereist daarnaast voedingsspanning, ingangbereik, uitgangszwaai en belasting; de gainformule garandeert die niet.

UITLEG · 22.6

Werkelijke fouten: offset, bias en common-mode

6/20

Een ingangsoffset Vos wordt mee versterkt. Een ingangsbiasstroom door bronweerstand veroorzaakt een spanningsfout; ongelijke bronweerstanden maken verschillende fouten. Weerstandstolerantie en temperatuurcoëfficiënt veranderen de gain. Een ijking kan een vaste offset corrigeren, maar drift blijft.

Common-mode is $u_{\text{cm}} = (u_+ + u_-)/2$, terwijl het nuttige signaal $u_d = u_+ - u_-$. Beide ingangen kunnen rond 2,5 V staan met slechts 10 mV verschil. Een versterker moet zowel het common-modegebied als het differentiële bereik aankunnen; een klein verschil beschermt niet tegen verkeerde absolute ingangsspanning.

COMMON-MODEONDERDRUKKING

$$CMRR = 20 \log_{10}(A_d / A_{\text{cm}})$$

UITLEG · 22.7

Bandbreedte, slew rate en verzadiging

7/20

De open-lusgain daalt met frequentie. Bij een eenvoudig dominant-poolmodel is gesloten-lusbandbreedte ongeveer gain-bandwidthproduct gedeeld door noise-gain. Een hoge gain kan dus ruis beperken maar ook nuttig signaal vertragen. Stability bij capacitieve belasting is een afzonderlijke datasheetcontrole.

Slew rate begrenst $\mathrm{d}u_o/\mathrm{d}t$. Voor een sinus met piek U en frequentie f is maximaal $2\pi f U$ nodig. Een versterker met voldoende kleine-signaalbandbreedte kan bij grote amplitude toch vervormen. Na verzadiging duurt herstel soms langer dan één sampleinterval.

Versterken na clipping herstelt het signaal niet. Log rails/verzadiging als ongeldige meetstatus; geen begrensde code als betrouwbare volle-schaalwaarde behandelen.

GROTE-SIGNAALGRENS

$$SR_{\text{nodig}} = 2\pi f U_{\text{piek}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 22.8

Een foutbudget in gram

8/20

Het schakelschema wordt vanuit de knooppunten doorgerekend.

GEGEVEN

- 5 kg-weegcel, 2 mV/V bij volle schaal, excitatie 5 V; Ud-volleschaal = 10 mV. Ingangsoffset 25 µV als bovengrens van een voorbeeldcomponent.

GEVRAAGD

- Spanningen, grenzen en betekenis van het resultaat.

OPLOSSING

1. Bruggevoeligheid is 10 mV/5 kg = 2 mV/kg. Een offset 25 µV komt overeen met 25/2000 kg = 0,0125 kg = 12,5 g.

2. Gain 401 maakt die spanning 10,025 mV aan de ADC. Meer gain verlaagt de equivalente ingangsoffset niet.

3. Tare kan de offset op een bepaald moment wegkalibreren; drift, hysterese en mechanische kruip blijven in het budget.

ANTWOORD

Offset vóór tare kan al 12,5 g bedragen.

Klopt dit? De INA333-gegevens komen uit de TI-datasheet; gebruik de passende temperatuur- en gainvoorwaarden, geen losse typische waarde als garantie.

UITLEG · 22.9

Comparator: de uitgang kiest een toestand

9/20

Een comparator vergelijkt ui met een drempel. Bij ui boven of onder de referentie gaat de uitgang naar een digitale toestand. De opampgouden regel $u_+ = u_-$ geldt hier niet: het verschil is juist het beslissignaal.

Rond één drempel kan ruis vele schakelingen geven. Positieve terugkoppeling maakt twee drempels: Schmitt-hysterese. Een comparator is voor deze taak doorgaans geschikter dan een willekeurige opamp; uitgangstype, pull-up, common-modebereik, snelheid en overdrive verschillen.

TI's comparatorontwerp met hysterese toont de keuze van drempels en uitgang. Een opamp open-lus gebruiken is een bewuste componentbeslissing, geen automatische uitwisseling.

VEREENVOUDIGD COMPARATORGEDRAG

$$u_o = \begin{cases} U_H & u_+ > u_- \\ U_L & u_+ < u_- \end{cases}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 22.10

Hysterese met een gewogen referentie

10/20

Het schakelschema wordt vanuit de knooppunten doorgerekend.

GEGEVEN

- Inverterende comparator: ui op −; + knoop via Rref = 100 kΩ naar Uref = 2,5 V en via Rfb = 1,0 MΩ naar uitgang. UH = 5 V, UL = 0 V als rekenwaarden.

GEVRAAGD

- Spanningen, grenzen en betekenis van het resultaat.

OPLOSSING

1. Omdat de ingangsstroom klein is: V+ = (Uref/Rref+Uo/Rfb)/(1/Rref+1/Rfb).

2 Bij hoge uitgang wordt de drempel 2,7273 V; ui moet daarboven komen om naar laag te schakelen.

3 Bij lage uitgang is de drempel 2,2727 V; ui moet daaronder komen om terug naar hoog te schakelen. Band = 0,4545 V.

ANTWOORD

Stijgend ui schakelt bij 2,727 V, dalend bij 2,273 V.

Klopt dit? Bij een open-drainuitgang zijn UH en de weerstanden afhankelijk van pull-up en belasting; reken de werkelijk haalbare niveaus door.

UITLEG · 22.11

Wheatstone: een brug is twee spanningsdelers

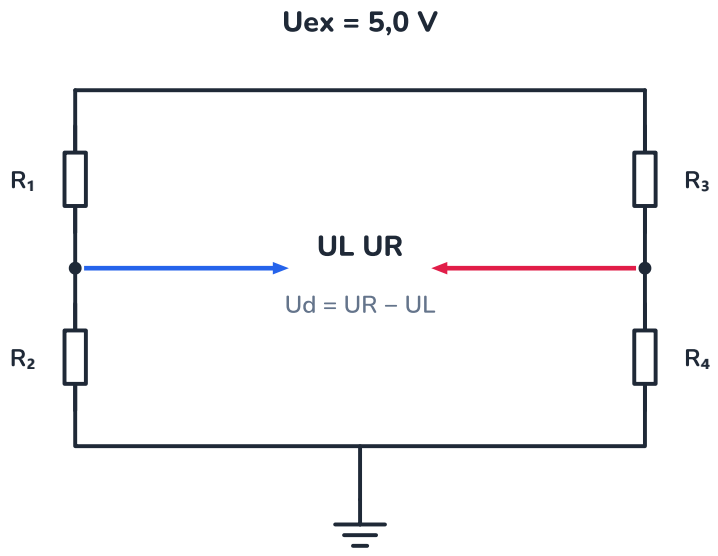
11/20

Neem links R1 boven en R2 onder, rechts R3 boven en R4 onder. Excitatie Uex staat tussen bovenknoop en massa. $U_L = U_{ex} R_2/(R_1 + R_2)$; $U_R = U_{ex} R_4/(R_3 + R_4)$. De brug is in evenwicht wanneer $R_1/R_2 = R_3/R_4$.

Een kwartbrug bevat één actief rekstrookje. Voor klein δ = ΔR/R is het verschil ongeveer Uexδ/4, met teken volgens aansluiting. Een volle brug kan vier rekstrookjes zo combineren dat trek en druk elkaar versterken en een gemeenschappelijke temperatuurverandering deels wordt onderdrukt.

REKSTROOKGEVOELIGHEID

$$\frac{\Delta R}{R} = k_{\text{rek}} \varepsilon$$



Reken altijd eerst de afzonderlijke delers: een tekenfout kan een mechanische beweging omkeren.

UITGEWERKT VOORBEELD · 22.12

Volle brug: kleine rek, meetbare millivolt

12/20

Het schakelschema wordt vanuit de knooppunten doorgerekend.

GEGEVEN

- R1 = R4 = R(1+δ), R2 = R3 = R(1−δ); Uex = 5 V, rekfactor 2, rek 1000 µm/m = 0,001.

GEVRAAGD

- Spanningen, grenzen en betekenis van het resultaat.

OPLOSSING

1. δ = 2·0,001 = 0,002. UL = Uex(1−δ)/2 = 2,495 V.
2. UR = Uex(1+δ)/2 = 2,505 V; Ud = UR−UL = Uexδ = 10 mV.
3. Dit ideale symmetrische brugmodel geeft exact 10 mV; een echte weegcel heeft montage, niet-lineariteit en temperatuurinvloed. Een geteste 2 mV/V-specificatie is daarom nuttiger dan los rek raden.

ANTWOORD

Beide ingangen liggen rond 2,5 V, met 10 mV verschil.

Klopt dit? De gekozen actieverdeling versterkt rek. Vier identiek veranderende weerstanden zouden hun delerverhouding bewaren en geen verschil geven.

UITLEG · 22.13

Instrumentatieversterker: differentieel zonder brugbelasting

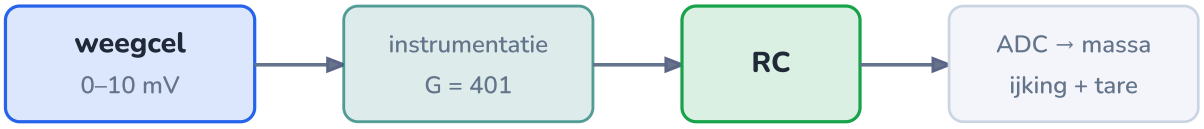
13/20

Een losse verschilversterker vraagt nauwkeurig passende weerstandsverhoudingen. Een instrumentatieversterker combineert hoge ingangsimpedantie met gecontroleerde differentiële gain en hoge CMRR. De drie-opampstructuur gebruikt twee ingangsbuffers met gekoppelde gain, gevolgd door een verschiltrap.

De INA333 is een concreet educatief voorbeeld: $G = 1 + 100\,\mathrm{k\Omega}/R_G$ en $U_o = U_{\mathrm{ref}} + G(U_+ - U_-)$. De referentiepin moet laagohmig en stabiel gestuurd worden. Voedings- en common-mode-/uitgangsgrafieken uit de TI-datasheet bepalen de werkgrenzen. De cursusschakeling is geen productiecertificering.

INSTRUMENTATIECONDITIONERING

$$U_o = U_{\mathrm{ref}} + G\,U_d$$



referentie 0,50 V; gedeelde 5 V-excitatie/ADC-referentie

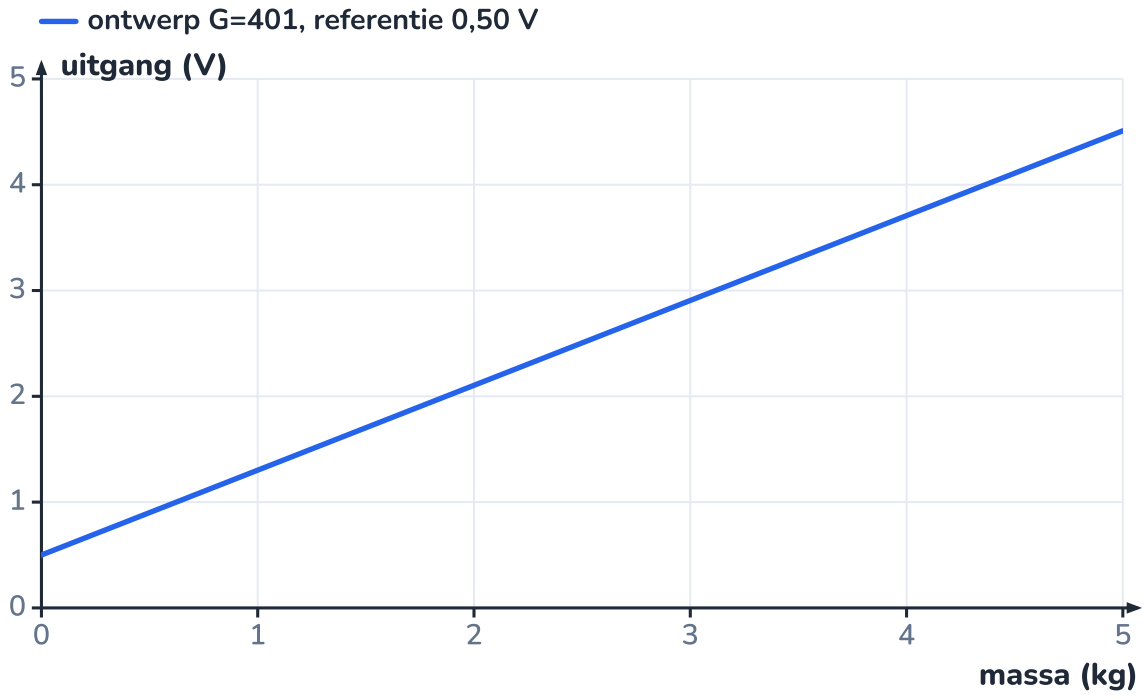
Gain alleen is niet voldoende: ook de common-mode en de interne uitgangsmarges moeten kloppen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 22.14

De oogst weegt 0 tot 5 kg

14/20

Het schakelschema wordt vanuit de knooppunten doorgerekend.



De railmarges maken kleine positieve en negatieve offsets zichtbaar zonder onmiddellijk te clippen.

GEGEVEN

- Weegcel 5 kg, 2 mV/V, 5,0 V-excitatie; INA333-voorbeeld G = 401, Rg = 250 Ω, referentie 0,50 V, ADC 10 bit op 5 V.

GEVRAAGD

- Spanningen, grenzen en betekenis van het resultaat.

OPLOSSING

1. Volleschaal Ud = 0,002·5 = 10 mV. Gain = 1+100000/250 = 401.
2. Uitgang nul = 0,50 V; bij 5 kg = 0,50+401·0,010 = 4,51 V. Ruimte tot beide rails blijft over.

3 ADC-stap 5/1024 = 4,8828 mV. Uitgangsgevoeligheid 4,01 V/5 kg = 0,802 V/kg; een code is 6,088 g.

ANTWOORD

De ideale quantisatiestap is circa 6,09 g; werkelijke nauwkeurigheid is slechter dan alleen één code.

Klopt dit? Nuloffset en overbelasting moeten nog in input/outputgrafieken, kalibratie en mechanische stop worden getoetst.

UITLEG · 22.15

Ratiometrisch meten en een realistisch ADC-budget

15/20

Wanneer brugexcitatie en ADC-referentie uit dezelfde 5 V komen, schaalt Ud mee met de referentie. Hun verhouding wordt minder gevoelig voor een gemeenschappelijke voedingsvariatie. De uitgangsreferentie moet dan ook passend met deze referentie schalen; een los vaste 0,50 V kan een restfout invoeren.

Ratiometrie verwijdert geen opampoffset, rekcelkruip, referentieruis die niet gemeenschappelijk is of weerstandstolerantie. De ADC heeft quantisatie, integral non-linearity en samplecapaciteit. Filter na versterking en controleer aanstuurbaarheid/settling; een grote RC-weerstand kan het sample-and-hold te langzaam laden.

Kalibreer massa tegen code met meerdere referentiegewichten. Tare is het aftrekken van actuele nulbelasting; het is geen nieuwe slope-calibratie. Inspecteer residuen en herhaalde stijgende én dalende belastingen voor hysterese.

EMPIRISCHE IJKING

$$\widehat{m} = a\,\mathrm{code} + b$$

CODE · 22.16

Ijken met residuen en een echte modelreeks

16/20

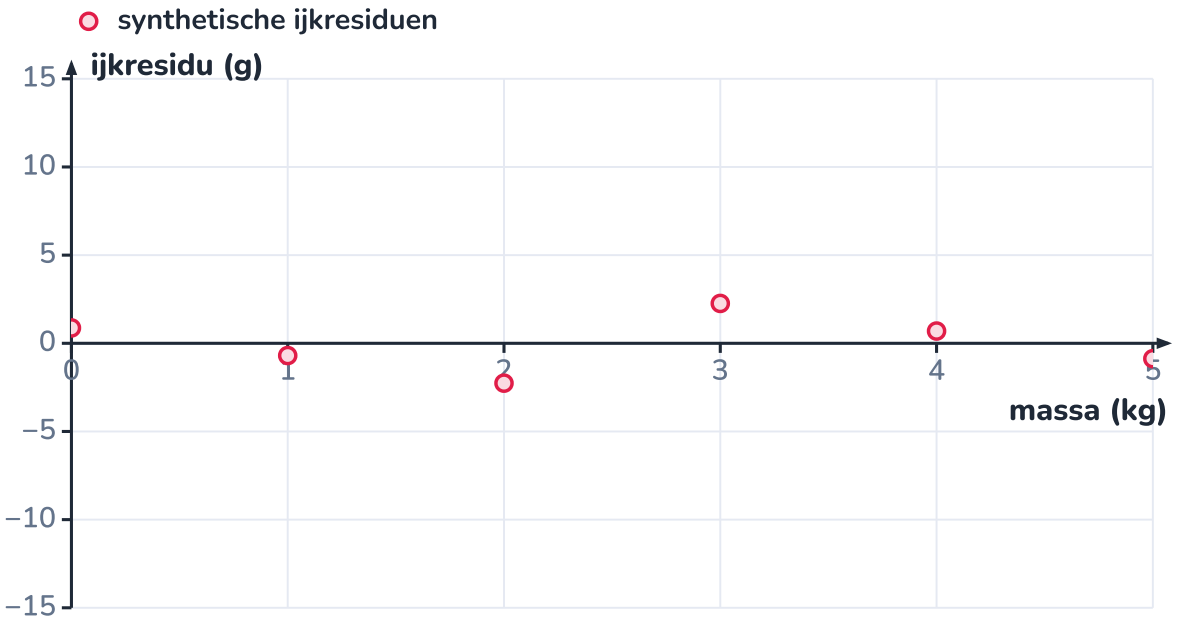
De voorbeeldcodes zijn synthetisch, inclusief een opgegeven brugoffset en kleine verstoring. De lineaire fit geeft een reproduceerbare oefening, geen bewijs dat een echte weegcel nauwkeurig is. De ADC-code gebruikt 1024 intervallen; clipping maakt de extremen ongeschikt voor een fit.

Python **oogstweging.py** 16 regels

```python
# oogstweging.py — synthetische ijking, geen meetbewijs
import numpy as np
g, uref, uex = 401.0, 0.50, 5.0
massa = np.array([0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0])
# 2 mV/V bij 5 kg, plus voorbeeldoffset en kleine meetruis
u = uref + g*(0.002*uex*massa/5+20e-6)
u += np.array([0,1,-1,1,-1,0])*0.001
adc = np.rint(u/uex*1024).clip(0,1023).astype(int)
A = np.column_stack([adc,np.ones(len(adc))])
a,b = np.linalg.lstsq(A,massa,rcond=None)[0]
fit = a*adc+b
print("voorbeeldcodes:",adc)
```

```python
print(f"massa = {a:.8f} * code {b:+.6f} kg")
print(f"grootste fitresidu {max(abs(fit-massa))*1000:.3f} g")
code = 615
print(f"code {code} geeft {a*code+b:.4f} kg")
```

```
voorbeeldcodes: [104 268 432 597 761 925]
massa = 0.00608801 * code -0.632282 kg
grootste fitresidu 2.261 g
code 615 geeft 3.1118 kg
```



Een klein fitresidu is pas betekenisvol naast een onafhankelijke toetsmassa en herhaalproef.

PROEF · 22.17

De brug en versterker afzonderlijk controleren

17/20

ONDERZOEKSVRAAG

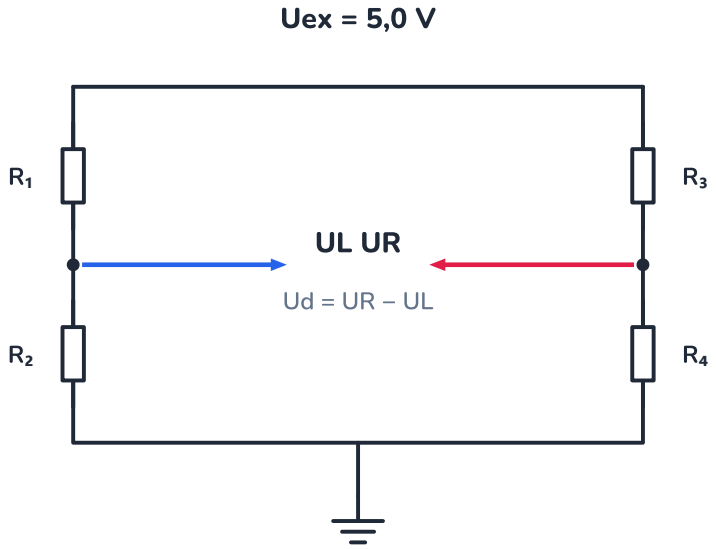
Een demonstratie bouwt de meetketen op in toetsbare stappen.

MATERIAAL

- vier gelijke weerstanden
- laagspanningsvoeding
- multimeter met mV-bereik
- instrumentatieversterker op veilige laagspanning
- referentiemassa's

Veiligheid

Alleen laagspanning. Bescherm de weegcel mechanisch; stapel gewichten stabiel en blijf onder fabrikantgrens.



Een multimetercontrole van beide knooppunten voorkomt dat een verkeerde polariteit door software wordt verborgen.

WERKWIJZE

1. Meet eerst alle weerstanden en bereken UL/UR zonder versterker.
2. Vervang één weerstand door een bekende kleine wijziging; vergelijk exact brugverschil met de lineaire schatting.
3. Sluit de instrumentatieversterker aan en meet nulreferentie en gain vóór de ADC.
4. Monteer daarna pas de weegcel; voer tare, meerpuntsijking, herhaling en stijg-/daalproef uit.
5. Controleer railalarm met een gesimuleerde meetfout, niet met onveilige mechanische overbelasting.

WAARNEMING

Een klein brugverschil verschijnt als grotere output; een te grote gain raakt een rail.

VERKLARING

Brug, versterker, ADC en mechanica hebben elk een eigen foutbron; afzonderlijk testen maakt de oorzaak zichtbaar.

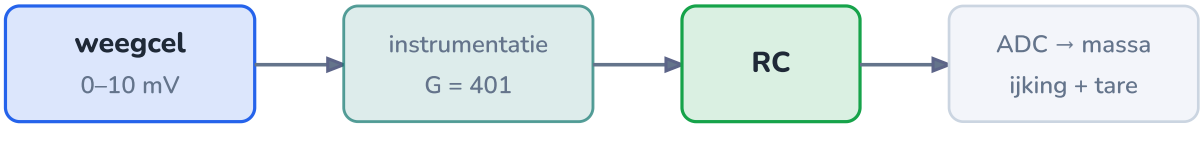
VERHAAL · 22.18

Een brug in een meetinstrument, een regelsysteem in de opamp

18/20

Een rekstrookversterker is tegelijk metrologie en regeltechniek. De elektrische terugkoppeling stuurt de uitgang totdat het verschil op de ingang klein is. De mechanische brug produceert een verschil dat de versterker moet bewaren, terwijl zij gemeenschappelijke storingen onderdrukt.

TI's geverifieerde strain-gaugeontwerp beschrijft een brug met instrumentatieversterker en referentie. Zo'n ontwerpdocument verbindt schema, datasheetmarges en metingen. Habitat gebruikt dezelfde bewijsstructuur: noem systeemgrens, toets nul en schaal, geef drift en overbelasting apart en claim geen gramnauwkeurigheid op basis van een mooie ADC-grafiek.



referentie 0,50 V; gedeelde 5 V-excitatie/ADC-referentie

Het resultaat in kilogram is pas zo betrouwbaar als het volledige pad van mechanische kracht tot kalibratie.

NASLAG · 22.19

Opampregels en grenscontroles

19/20

inverterend

$$G_{\text{inv}} = -R_f / R_i$$

symbool	betekenis	eenheid
Rf	feedbackweerstand	Ω
Ri	ingangsweerstand	Ω

niet-inverterend

$$G_{\text{niet-inv}} = 1 + R_f / R_g$$

symbool	betekenis	eenheid
Rg	weerstand naar referentie	Ω

brugverschil

$$U_d = U_{\text{ex}} \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

symbool	betekenis	eenheid
Uex	excitatie	V

rekstrook

$$\Delta R / R = k_{\text{rek}} \varepsilon$$

symbool	betekenis	eenheid
ε	rek	1
$krek$	rekfactor	1

Controle	Wat het ideale model niet garandeert
input common-mode	beide absolute ingangsspanningen toegestaan
uitgangszwaai	lineariteit bij rails en belasting
offset/bias/drift	massa-equivalente fout
bandbreedte/slew	respons en vervorming
ADC/filter	settling, aliasing, quantisatie

HET GEHEEL · 22.20

Het geheel: oogst in gram en onzekerheid

20/20

De brug bouwt op Kirchhoff en rek uit sterkteleer. e21 bepaalt filterkeuzes, e06 de meetonzekerheid, e41 de lineaire ijking. De opamp is zelf een snel teruggekoppeld systeem; dat verband helpt de gouden regels begrijpen.

I21 De wetten van Kirchhoff

E12 Sterkteleer

E21 Filters en signaalverwerking

Knooppuntwet en delers.

Mechanische rek levert ΔR.

Ruis en ADC-bandbreedte.

E41 Van data naar model: regressie

Ijking en residuen.

Habitat

Ontwerpvoorstel voor de oogstweegschaal: 5 kg-weegcel, 2 mV/V, 350 Ω-brug, excitatie 5 V; instrumentatiegain 401 met RG = 250 Ω; outputreferentie 0,50 V ratiometrisch waar mogelijk; ideaal 0,50–4,51 V en circa 6,09 g/code bij 10 bit. Deze waarden worden pas installatiekeuzes na datasheet-/common-modecontrole, proef en mechanische bescherming. Andere bestaande pinnen worden niet stilzwijgend hergebruikt.

SAMENVATTING

In het kort

- Gouden opampregels vragen stabiele negatieve feedback en lineair bedrijf.
- Inverterende gain is −Rf/Ri, niet-inverterende gain 1+Rf/Rg; voeding begrenst wat werkelijk kan.
- Een comparator gebruikt het verschil voor een toestand; positieve feedback geeft hysterese.
- Een brug zet kleine weerstandveranderingen om in verschilspanning; instrumentatie versterkt zonder sterke belasting.
- Een massa-uitkomst vraagt railcontrole, ruisbudget, tare, meerpuntsijking en onafhankelijke validatie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

virtuele massa
Een door terugkoppeling vrijwel op massapotentiaal gehouden knoop zonder directe massaverbinding.

common-mode
Gemiddelde spanning van twee differentiële ingangen.

instrumentatieversterker
Hoogohmige verschilversterker met gecontroleerde gain en hoge common-modeonderdrukking.

tare
Aftrekken van een gemeten nul-/bakmassa zonder de schaalfactor opnieuw te bepalen.

ingangsoffset
Klein equivalent ingangsverschil dat zonder werkelijk signaal een uitgangsfout geeft.

E EXPERT · DEEL E4 · ELEKTROTECHNIEK EN ELEKTRONICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 23

Digitale logica

Van waarheidstabel tot stopdominant geheugen

Een processor bestaat uit poorten, geheugen en timingafspraken. Je vereenvoudigt functies, bouwt optellers en selecties en leert waarom een noodstop meer nodig heeft dan een softwarevoorwaarde.

9× uitleg · 5× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

L Elektriciteit en elektronica · P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



Een fysieke stop blijft werken wanneer de centrale computer geen nieuwe instructies uitvoert.

Na dit hoofdstuk

- Je gebruikt Booleaanse algebra en waarheidstabellen.
- Je vereenvoudigt functies met Karnaughkaarten en toetst hun equivalentie.
- Je beschrijft opteller, multiplexer, flipflop, register en teller.
- Je verklaart timing, metastabiliteit en een eenvoudig processordatapad.
- Je specificeert een hardwarematige stop die softwarefouten en onverwachte herstart opvangt.

UITLEG · 23.1

Nul en één zijn afgesproken spanningsgebieden

1/19

Digitale logica gebruikt twee betekenisvolle toestanden, geen twee oneindig nauwkeurige spanningen. Een ingang accepteert laag onder VIL en hoog boven VIH; daartussen is de toestand niet gegarandeerd. Voedingsfamilie, temperatuur en belasting bepalen die grenzen. Een 3,3 V-Pi en een 5 V-Mega zijn niet zonder controle elektrisch compatibel.

Een zwevende CMOS-ingang kan willekeurig reageren en extra stroom trekken. Geef ongebruikte ingangen een geldig niveau en zorg voor pull-up/pull-down waar nodig. Een Booleaanse functie is een model van stabiele logische niveaus; draadbreuk en ruis horen bij de fysieke uitvoering.

BOOLEAANSE ABSTRACTIE

$$A \in \{0, 1\}$$

UITLEG · 23.2

Poorten en Booleaanse algebra

2/19

EN is 1 alleen wanneer alle ingangen 1 zijn; OF zodra minstens één 1 is; NIET keert om; XOF is 1 bij verschillende ingangen. We schrijven AB voor EN, $A + B$ voor OF en $\overline{A}$ voor NIET. Het plusteken is hier geen gewone optelling: $1 + 1 = 1$ in Booleaanse algebra.

NEN en NOF zijn de ontkende EN en OF. Elk kan als universele bouwsteen worden gebruikt. De waarheidstabel legt betekenis vast onafhankelijk van gekozen poortfamilie.

A	B	EN	OF	XOF
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

UITGEWERKT VOORBEELD · 23.3

De Morgan en absorptie

3/19

Een logische functie stap voor stap.

GEGEVEN

- F = A + AB; G = NIET(A EN B).

GEVRAAGD

- Functie, toets en implementatie.

OPLOSSING

1. F=A(1+B)=A·1=A. Als A=1 is F al 1; als A=0 maakt AB ook nul.
2. De Morgan: $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$. De vier invoercombinaties tonen dat 'niet beide' hetzelfde is als 'minstens één niet'.
3. Ook $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$. Pas een ontkenning toe op de volledige groep, niet op één losse letter.

ANTWOORD

Algebra kan poorten besparen en waarheidstabellen kunnen die vereenvoudiging exhaustief toetsen.

Klopt dit? Veiligheidsredundantie is geen logische overbodigheid: twee fysieke kanalen kunnen dezelfde logische informatie bevatten en toch fouten helpen detecteren.

UITLEG · 23.4

Waarheidstabel naar som van producten

4/19

Voor elke rij met uitgang 1 maak je een productterm met alle variabelen: een 0-ingang wordt ontkend, een 1-ingang rechtstreeks. De OF van die mintermen beschrijft precies de tabel. Een tabel met n ingangen heeft 2^n rijen; voor kleine functies kan je iedere combinatie toetsen.

Bij drie ingangen en uitgang 1 op 011,100,101,110,111 volgt F = A + BC na vereenvoudiging. De eerste minterm onder A=0 vraagt B=C=1; alle A=1-rijen vallen samen tot A.

BINAIRE RIJVOLGORDE ABC

$$F = \sum m(3,4,5,6,7) = A + BC$$

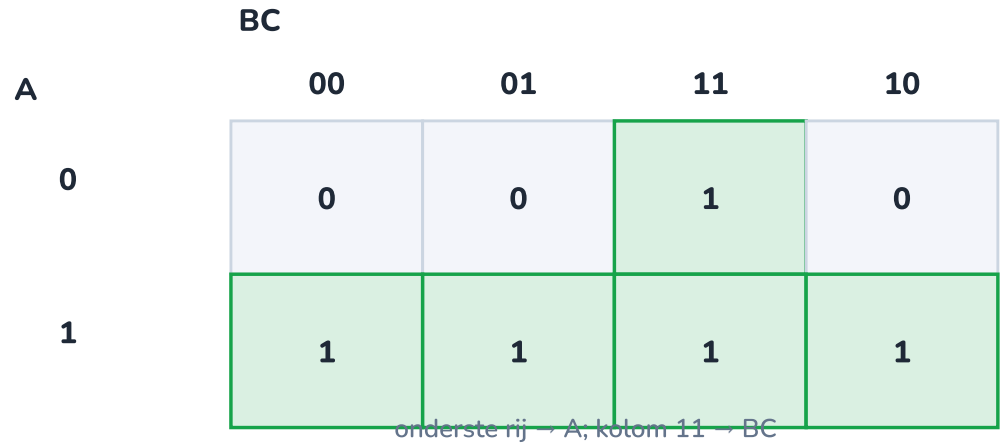
UITLEG · 23.5

Karnaugh: buren verschillen in één bit

5/19

Een Karnaughkaart plaatst kolommen in Gray-volgorde 00,01,11,10. Zo verschillen aangrenzende cellen slechts in één bit. Groepeer 1-cellen in rechthoeken van 1,2,4,8,... cellen; variabelen die in een groep wisselen verdwijnen uit de productterm. Overlap is toegestaan; de rand is periodiek.

Voor F = A+BC vormt de volledige onderste rij een groep van vier: A blijft. De kolom 11 vormt een groep van twee: BC blijft. Een diagonaal is geen buur en een groep van drie is geen geldig macht-van-tweegroep.



De Gray-volgorde en randburen vormen de kern van de vereenvoudiging.

UITGEWERKT VOORBEELD · 23.6

Karnaugh met randburen

6/19

Een logische functie stap voor stap.

GEGEVEN

- Twee ingangen A,B; F=1 op 00 en 10, F=0 op 01 en 11.

GEVRAAGD

- Functie, toets en implementatie.

OPLOSSING

1. In de kaart verschillen de twee 1-cellen alleen in A. De gezamenlijke term is ¬B.
2. Algebra: ¬A¬B + A¬B = (¬A+A)¬B = ¬B.
3. Exhaustieve controle op vier combinaties voorkomt dat een verkeerde rijvolgorde een schijnbaar eenvoudige functie oplevert.

ANTWOORD

F is alleen de ontkenning van B.

Klopt dit? 'Don't care' mag alleen bij werkelijk ontoegankelijke of vrijgelaten toestanden; een storingsinput in Habitat is geen vrije keuze.

UITLEG · 23.7

Van vereenvoudiging naar hazards

7/19

Een poort heeft voortplantingsvertraging. In een vereenvoudigde functie kunnen twee paden tijdelijk verschillende informatie zien, ook als de ideale tabel geen uitgangswissel vraagt. Een korte glitch heet een hazard.

Bij F = AB + ¬AC en B=C=1 is F altijd 1. Wanneer A wisselt kunnen beide paden kort 0 zijn. De consensus-term BC kan die statische hazard in deze tweelaagsstructuur overbruggen. Algebraïsch is zij overbodig, temporeel kan zij nuttig zijn.

Een waarheidstabel bewijst stabiele combinatorische waarden, geen timingveiligheid. Stel data tijdig voor een klokflank vast en behandel veiligheidsuitgangen met passende componenten en systeemtests.

CONSENSUS BEHOUDT DE FUNCTIE EN KAN GLITCHES BEPERKEN

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 23.8

Volle opteller: som en overdracht

8/19

Een logische functie stap voor stap.

GEGEVEN

- Bits A,B en carry-in Cin; totaal A+B+Cin in gewone rekenkundige betekenis.

GEVRAAGD

- Functie, toets en implementatie.

OPLOSSING

1. De sombit is 1 bij een oneven aantal 1-bits: S=A xor B xor Cin.
2. De overdracht is 1 bij minstens twee enen: Cout=AB+(A xor B)Cin. Alternatief AB+ACin+BCin.
3. Controle: bij 111 is gewone som3; S=1 en Cout=1 geven S+2Cout=3.

ANTWOORD

De waarheidstabel vormt een volledige test voor één bit.

Klopt dit? In een n-bit ripple-adder moet carry door meerdere trappen; de klokperiode moet die langste propagatie toelaten.

UITLEG · 23.9

De volledige optellertabel

9/19

A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Een half-adder heeft geen Cin: S=A xor B, C=AB. Een volle opteller ketent meerdere bits door Cout aan de volgende Cin te verbinden. Voor 4 bit geeft 0111+0001 =1000: carry moet drie lagere bits passeren.

Een ALU kiest tussen optellen, AND, XOR en andere functies. Dat combineert combinatorische datapaden met multiplexerselectie. Het resultaat wordt op de juiste klokflank in een register bewaard.

UITLEG · 23.10

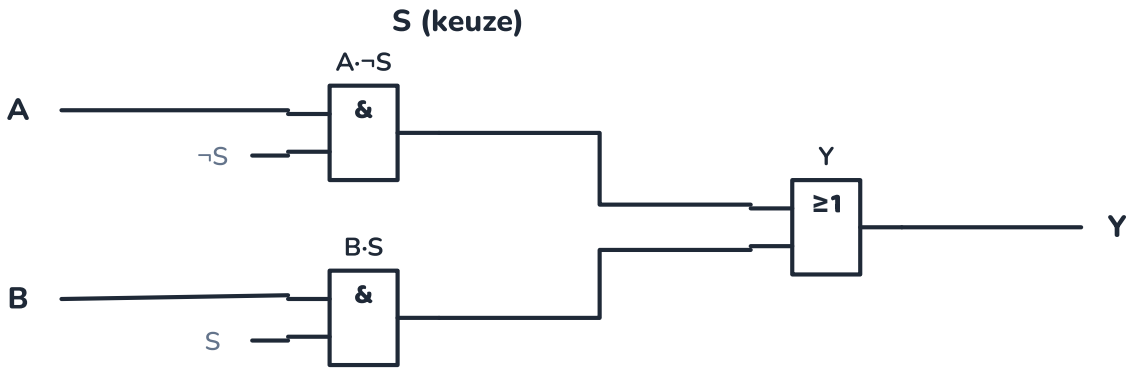
Multiplexer: selectie is ook een logische functie

10/19

Een 2-naar-1-multiplexer kiest A wanneer S=0 en B wanneer S=1: $Y = \overline{S}A + SB$. EN-poorten laten het gekozen pad door; OF combineert. Een decoder doet de omgekeerde adresverdeling: een binair

adres activeert één van meerdere lijnen.

Een 4-naar-1-mux heeft twee selectiebits; elk datapad krijgt een minterm. Deze bouwstenen maken datakeuze in een processor mogelijk. Een muxselectie die tijdens een overdracht wisselt kan een glitch geven; registreer de keuze waar timing dat vereist.



keuzesignalen S en ¬S naar beide EN-poorten

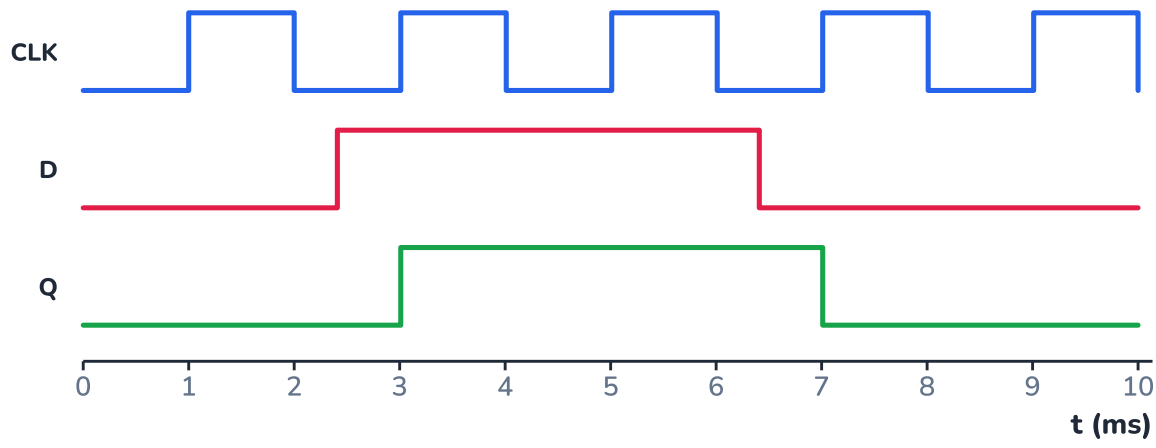
De datalijnen en selectielabels hebben verschillende functies; dezelfde waarheidstabel kan met meerdere poortnetwerken worden gemaakt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 23.11

Register, teller en klokfrequentie

11/19

Een logische functie stap voor stap.



Het tijdsdiagram laat zien dat D tussen klokflanken mag veranderen zonder Q onmiddellijk te veranderen.

GEGEVEN

- Vier D-flipflops vormen een binaire teller; één verhoging per stijgende klokflank op 1 kHz.

GEVRAAGD

- Functie, toets en implementatie.

OPLOSSING

1. Iedere D-flipflop neemt D over op de actieve flank en houdt Q vast tussen flanken. De volgende tellerwaarde is (huidige+1) modulo16.

2. Bit0 wisselt elke klokflank en heeft frequentie500 Hz; bit1 250 Hz, bit2 125 Hz, bit3 62,5 Hz.

3. Na16 flanken is de teller terug op nul. Reset en enable zijn afzonderlijke voorwaarden; een teller hoeft niet bij iedere klok te verhogen.

ANTWOORD

De vier bits representeren16 toestanden en delen frequenties door machten van twee.

Klopt dit? Een ripplecounter heeft onderlinge vertraging; voor coherent adresgebruik is een synchroon ontwerp of geregistreerde uitlezing nodig.

UITLEG · 23.12

Latch en flipflop zijn geen synoniemen

12/19

Een latch is niveaugevoelig: bij actieve enable kan de uitgang de ingang volgen. Een D-flipflop is flankgevoelig: hij neemt de waarde op de actieve klokflank over. Registers zijn bundels opslagbits; een schuifregister verplaatst die bits op iedere gekozen flank.

Setup-tijd vraagt dat D vóór de flank stabiel is, hold-tijd erna. Een asynchroon signaal kan die voorwaarden schenden en metastabiliteit veroorzaken. Een twee-flipflopsynchronisator vermindert de kans dat die onbepaalde toestand doorwerkt; hij levert geen wiskundige garantie van nul risico en synchroniseert geen willekeurige meerbitsbus atomair.

Toshiba beschrijft de synchronisator. De noodstop-energieweg mag niet eerst wachten op een Pi-klok of een gewone monitor-synchronisator.

D-OPSLAG OP EEN GELDIGE ACTIEVE FLANK

$$Q_{k+1} = D_k$$

UITLEG · 23.13

Van poorten naar een processor

13/19

Een processor combineert een datapad (registers, ALU, multiplexers) met een besturing. Een program counter selecteert een instructie; een instructieregister houdt haar vast; decodering bepaalt welke registers en ALU-functie worden gebruikt. De klok ordent de stappen.

Een eenvoudige cyclus is ophalen, decoderen, uitvoeren en resultaat opslaan. Een toevoeging R1←R1+R2 laat de ALU twee registers lezen en schrijft de som terug. Instructies zijn bitpatronen die de hardware betekenis geeft; software verandert de opeenvolging, niet het elementaire principe van de poorten.

Een microcontroller voegt geheugen en perifere circuits toe. Timers, ADC en communicatie kunnen zelfstandig werken terwijl de CPU een andere instructie uitvoert. Dat verklaart waarom PWM in i25 niet

door een herhaalde Pythonaanroep gemaakt wordt.

VEREENVOUDIGDE UITVOERKETEN

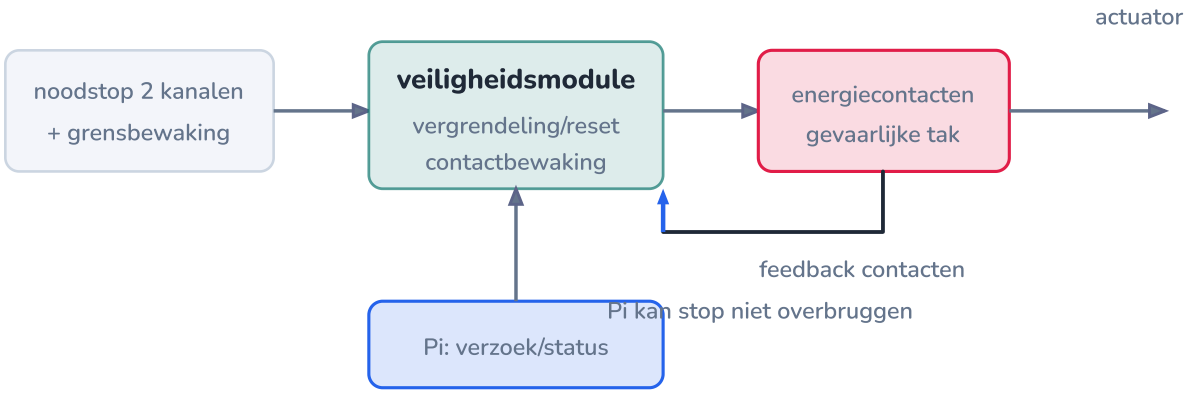
$$\text{PC} \longrightarrow \text{instructie} \longrightarrow \text{datapad} \longrightarrow \text{registers}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 23.14

Combinatorisch verzoek is nog geen veilige herstart

14/19

Een logische functie stap voor stap.



De veiligheidsmodule onderbreekt fysiek de gevaarlijke energietak, onafhankelijk van het softwareverzoek.

GEGEVEN

- Gezonde noodstop/grenzen H=1, softwareverzoek R=1; simpele uitgang Y=HR. Noodstop wordt ingedrukt en losgelaten.

GEVRAAGD

- Functie, toets en implementatie.

OPLOSSING

1. Bij indrukken H=0, Y=0. De software kan ondertussen vast op R=1 blijven staan.
2. Na loslaten H=1 wordt Y direct weer1. De AND-poort vergeet de stop en veroorzaakt automatisch herstart.
3. Introduceer een vergrendeling q=1 na stop en bij opstart. Alleen een geldige handmatige resetflank met R=0 en gezonde voorwaarden maakt q=0.

ANTWOORD

Het station vereist toestand naast combinatorische vrijgave.

Klopt dit? Een vastgehouden reset is geen nieuwe flank; herstel van voeding of communicatie is geen toestemming tot herstart.

CODE · 23.15

Stopdominant geheugen exhaustief toetsen

15/19

Dit functionele model bewijst de bedoelde logica, niet de betrouwbaarheid van een zelfgebouwde veiligheidsmodule. q=1 is vergrendeld. Gezond=False heeft altijd voorrang; reset vraagt een menselijke flank, gezonde voorwaarden en afwezig verzoek. Start daarna vraagt opnieuw een verzoek.

Python **logica.py** 27 regels

```python
# logica.py — exhaustieve combinatorische tests en functioneel latchmodel
from itertools import product
def opteller(a,b,c):
    return a^b^c, (a and b) or ((a^b) and c)
for a,b,c in product((0,1),repeat=3):
    s,co = opteller(a,b,c)
    assert s + 2*co == a+b+c
print("volle opteller: alle 8 combinaties correct")

def stap(q, gezond, aanvraag, resetflank):
    stop = not gezond
    reset_ok = resetflank and gezond and not aanvraag
    # stopdominant; q=1 betekent vergrendeld
    qnieuw = stop or (q and not reset_ok)
    uit = gezond and aanvraag and not qnieuw
    return bool(qnieuw),bool(uit)

q = True  # opstart vergrendeld
scenario = [(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)]
for k,(goed,aan,reset) in enumerate(scenario):
    q,y = stap(q,goed,aan,reset)
    print(k,"gezond",goed,"aanvraag",aan,"resetflank",reset,"slot",int(q),"uit",int(y))
assert q is False and y is True
for q,goed,aan,reset in product((False,True),repeat=4):
    qn,y = stap(q,goed,aan,reset)
    assert goed or (qn and not y)
print("stop heeft voorrang in alle 16 toestand/invoercombinaties")
```

```
volle opteller: alle 8 combinaties correct
0 gezond 1 aanvraag 0 resetflank 1 slot 0 uit 0
1 gezond 1 aanvraag 1 resetflank 0 slot 0 uit 1
2 gezond 0 aanvraag 1 resetflank 0 slot 1 uit 0
3 gezond 1 aanvraag 1 resetflank 1 slot 1 uit 0
4 gezond 1 aanvraag 0 resetflank 1 slot 0 uit 0
5 gezond 1 aanvraag 1 resetflank 0 slot 0 uit 1
stop heeft voorrang in alle 16 toestand/invoercombinaties
```

PROEF · 23.16

Poorten testen met stabiele laagspanningsingangen

16/19

ONDERZOEKSVRAAG

Een demonstratie koppelt waarheidstabel en elektrische grenzen.

MATERIAAL

- logica-IC op passende laagspanning
- schakelaars met pull-up/pull-down
- led met weerstand
- logic analyzer

Veiligheid

Dit is een oefencircuit op laagspanning; sluit het niet aan op een echte noodstopenergieweg.

WERKWIJZE

1. Lees VIL/VIH en voedingsgrenzen uit de datasheet van het gebruikte IC.
2. Geef alle ingangen een vast niveau; meet alle combinaties van EN, OF en XOF.
3. Vergelijk gemeten waarden met waarheidstabel; observeer vervolgens contactdender via de analyzer.
4. Test een D-flipflop met een gekende klok en stabiele data ruim vóór/na de flank.

WAARNEMING

Stabiele ingangcombinaties volgen de tabel; een mechanische schakelaar kan meerdere snelle flanken veroorzaken.

VERKLARING

De Booleaanse tabel abstraheert spanning en tijd. Pullweerstanden, ontdendering en timing maken de uitvoering bruikbaar.

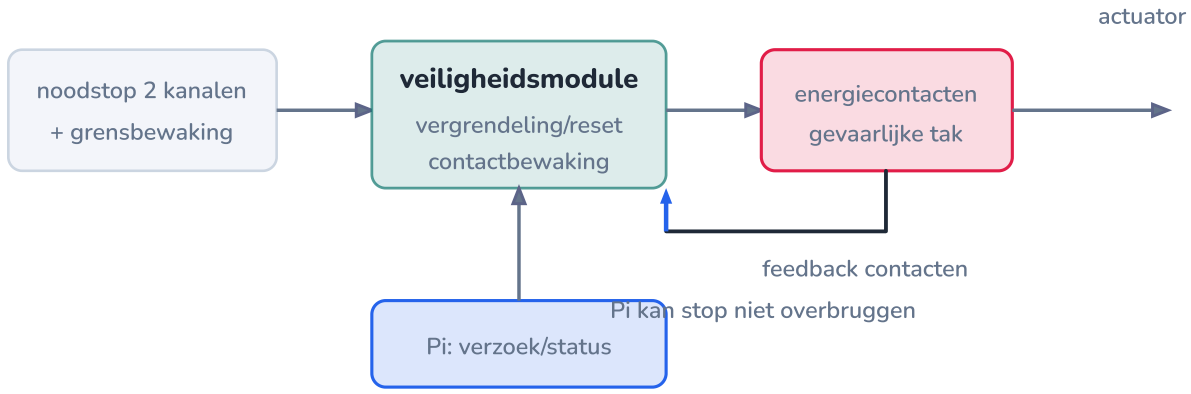
VERHAAL · 23.17

Een veiligheidsrelais bewaakt ook zijn eigen contacten

17/19

Een veiligheidsfunctie kan niet alleen steunen op een ideale AND-poort. Vastgelaste contacten, draadbreuk, kruissluiting en een vastgehouden reset veranderen de feitelijke toestand. Een geschikte veiligheidsmodule combineert signaalverwerking met bewaakte contacten en startvoorwaarden.

De Pilz PNOZ s2-handleiding onderscheidt automatisch en bewaakt handmatig starten en geeft feedbackkringen. Die bron leert vooral dat reset en onverwachte herstart expliciet ontworpen worden. Habitat kiest hier de functionele eisen; componentselectie en aansluiting vragen de toepasselijke veiligheidsbeoordeling en fabrikantvoorschriften.



De Pi leest status en vraagt werking, maar krijgt geen pad om een fysieke stop te overbruggen.

NASLAG · 23.18

Logica, tijd en veiligheidsvoorwaarden

18/19

De Morgan

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

symbool	betekenis	eenheid
A, B	Booleaanse ingangen	1

som van volle opteller

$$S = A \oplus B \oplus C_{\text{in}}$$

symbool	betekenis	eenheid
S	sombit	1

2-naar-1-multiplexer

$$Y = \overline{S}A + SB$$

symbool	betekenis	eenheid
S	selectiebit	1

stopdominante vergrendeling

$$q' = \text{stop} + q\,\overline{\text{reset}_{\text{geldig}}}$$

symbool	betekenis	eenheid
q	vergrendeld	1

Grens	Betekenis
VIL/VIH	gegarandeerde logische spanningsgebieden
setup/hold	data stabiel vóór en na actieve flank
resetflank	nieuwe handmatige actie, geen blijvend hoog signaal
opstart	vergrendeld tot geldige reset

HET GEHEEL · 23.19

Het geheel: logische eisen worden fysiek getoetst

19/19

f24 en i27 koppelden input en programma. Hier zie je dat programma's op poorten en geheugen draaien. e34 beschrijft algoritmen; e37 embedded communicatie. e46 onderzoekt fouten, terwijl e45 eisen traceerbaar maakt. Dezelfde waarheidstabel ondersteunt specificatie, simulator en testplan.

F25 Sensoren en automatisch regelen

Van ingang naar actuator.

E34 Algoritmen en complexiteit

Software gebruikt logische keuzes.

E45 Systems engineering en het V-model

Eisen naar tests.

E46 Betrouwbaarheid en risico

Poortfunctie is niet hetzelfde als fouttolerantie.

Habitat

Functionele eisen: gevaarlijke energietak heeft hardwarematige vrijgave, stopdominante vergrendeling, vergrendelde opstart, bewaakte menselijke resetflank met aanvraag uit, geen herstart door loslaten/voedingsherstel, feedback van energiecontacten en onafhankelijke thermische grens. De Pi kan geen stop overbruggen.
Ventilatie/levensondersteuning krijgt een risicogestuurde veilige toestand; 'alle energie uit' is daarvoor niet automatisch veilig. Dit is geen claim van een gecertificeerde poortschakeling.

SAMENVATTING

In het kort

- Poortfuncties werken op afgesproken elektrische niveaus.
- Waarheidstabellen en Karnaughkaarten toetsen stabiele combinatorische functies.
- Optellers en multiplexers vormen datapaden; registers en flipflops bewaren toestand.
- Timing en metastabiliteit vragen meer dan een correcte waarheidstabel.
- Habitat gebruikt een onafhankelijke stopvrijgave, stopdominante vergrendeling en bewaakte handmatige reset.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

combinatorische logica

Uitgang volgt huidige invoer zonder opgeslagen toestand.

sequentiële logica

Uitgang hangt ook van opgeslagen toestand af.

Karnaughkaart

Gray-geordende kaart waarin buren slechts één bit verschillen.

hazard

Korte ongewenste uitgangsovergang door verschillen in propagatievertraging.

stopdominant

Gelijktijdige stop en reset resulteren in stop.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 24

Vermogenselektronica en elektrische machines

Buck, boost, MPPT en motorbrug binnen hun grenzen

Een converter koppelt bronnen en lasten met andere spanningen. Je leidt buck en boost af, zoekt het PV-maximum, stuurt een borstelloze motor en rekent de elektrische en thermische grenzen van Habitat door.

11× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 12 lestijden

L Elektriciteit en elektronica · E Energie · R Regelen en robotica



Elk bron- en lastpad heeft eigen stroom-, spannings- en temperatuurgrenzen.

Na dit hoofdstuk

- Je leidt ideale CCM-buck- en boostverhoudingen af uit volt-seconden.
- Je bepaalt stroom, rimpel, verlies en thermische marges.
- Je beschrijft sinus-PWM en de DC-naar-AC-omvormer.
- Je implementeert MPPT en toetst onder variërende broncondities.
- Je beschrijft BLDC-commutatie en dimensioneert PV-, wind- en railstromen met beveiliging.

UITLEG · 24.1

Vermogen verplaatsen vraagt meer dan spanning kiezen

1/24

Het station heeft een 48 V-rail, de module een 12 V-rail en apparaten op 230 V AC. Een omzetter past spanning en stroom aan terwijl de vermogensbalans behouden blijft. Bij rendement η geldt $U_o I_o = \eta U_i I_i$. Een hogere uitgangsspanning maakt bij gelijk vermogen de stroom kleiner; energie wordt niet gratis vermenigvuldigd.

Een lineaire regelaar verbrandt het spanningsverschil. Schakelende omzetters bewaren energie tijdelijk in spoel en condensator en sturen met duty-cycle D. De schakelaar is ideaal gesloten of open; in werkelijkheid geven weerstand, flanken en stuurenergie warmte.

OMZETTERBALANS

$$P_o = \eta P_i, \qquad P_{\text{verlies}} = P_i - P_o$$



buck: cel vóór L; boost: L vóór schakelende knoop

functioneel overzicht; de volgende bladen tonen exacte topologieën

De opslagcomponenten dragen energie tussen schakeltoestanden; het is geen weerstandsdeler.

UITLEG · 24.2

Buck: de twee stroompaden zijn elektrisch verschillend

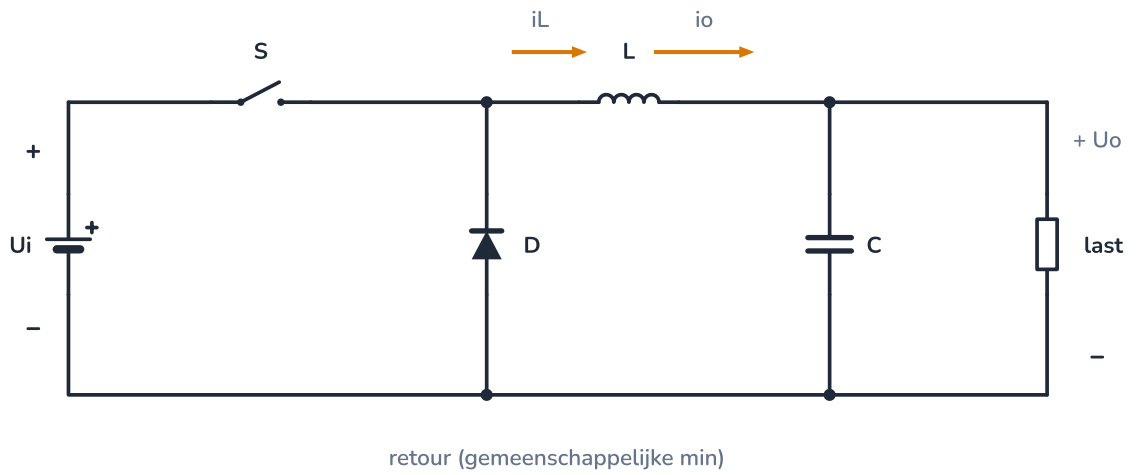
2/24

De positieve ingang voedt S, daarna de schakelende knoop, de spoel en de uitgang. C en last staan parallel tussen uitgang en retour. De diode heeft haar **anode aan retour** en haar **kathode aan de schakelende knoop**; zij geleidt dus omhoog.

S aan: de stroom loopt van Ui via S en L naar C/last en via retour terug naar de bron. De diode is sperrend; de knoop is ongeveer Ui en uL=Ui−Uo.

S uit: de spoelstroom kan niet plots nul worden. De knoop zakt tot iets onder retour; de diode geleidt retour → D → L → uitgang → last → retour. De bron is uit dit ideale vrijlooppad. De spoel levert energie en haar stroom daalt, want uL≈−Uo.

Het getekende open contact stelt een bestuurbare ideale schakelaar voor. Een praktische MOSFET vraagt een passende gatedriver; bij een synchrone buck vervangt een tweede MOSFET de vrijloopdiode, met dode tijd om railkortsluiting te vermijden.



De kathodestreep staat aan de spoelknoop: omdraaien van deze diode maakt het vrijlooppad onjuist.

ONTLEED · 24.3

Boost: de diode scheidt opladen en afleveren

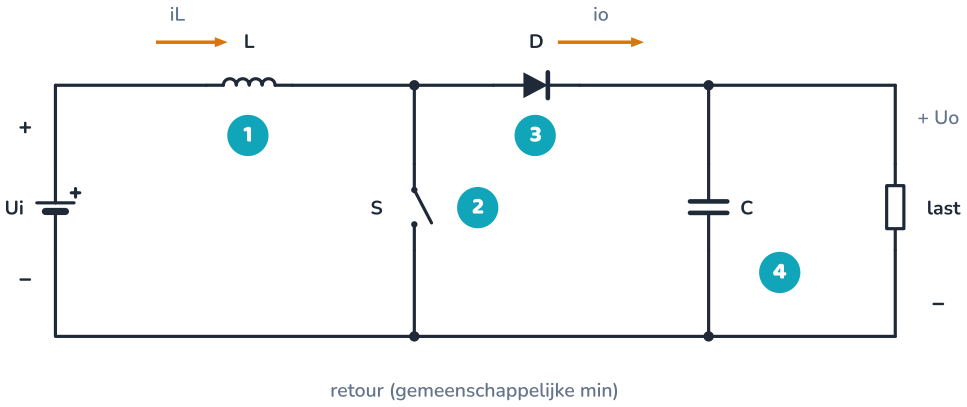
3/24

De ingang voedt eerst L. De schakelende knoop is verbonden met S naar retour én met de **anode** van D. De **kathode** van D is verbonden met de positieve uitgang. C en last staan parallel.

S aan: Ui → L → S → retour vormt het laadpad. De knoop ligt ongeveer op retour, D spert wegens de hogere positieve uitgangsspanning, en C levert tijdelijk de laststroom. De spoelstroom stijgt met Ui/L.

S uit: de spoel drijft de knoop omhoog totdat D geleidt. Ui → L → D → C/last → retour levert uitgangsenergie; bron en afnemende spoelenergie werken samen. De spoelspanning is Ui−Uo, negatief voor Uo>Ui.

Bij uitgeschakelde sturing bestaat nog een bronpad via L en D naar de uitgang. Een veiligheidsafschakeling kan dus een afzonderlijke onderbreker vereisen. De getekende ideale topologie bevat geen complete gate-, meet- of beveiligingsbedrading.



De diode geleidt van spoelknoop naar uitgang; tijdens S-aan voedt de condensator de last.

1. **Spoel**
   De bron voedt L voortdurend; aan wordt energie opgeslagen, uit wordt zij met bronenergie afgegeven.

2. **Schakelaar naar retour**
   S-aan sluit het laadpad en laat de diode sperren. S-uit laat de spoelknoop omhoog gaan.

3. **Diode naar uitgang**
   Anode links, kathode rechts. Stroom naar de uitgang bij S-uit; geen ideale terugstroom vanuit C.

4. **Uitgangscondensator**
   C voedt de last tijdens S-aan en krijgt tijdens S-uit bron- en spoelenergie.

UITLEG · 24.4

Spoelvolt-seconden en condensatorlading

Voor een ideale spoel is $u_L = L\dot{i}_L$. Over een periodieke stationaire schakelcyclus moet de stroom terugkomen op dezelfde waarde. Daarom $\int_0^{T_s} u_L \,\mathrm{d}t = 0$: positieve en negatieve volt-seconden zijn gelijk. Bij een condensator geldt analoog $\int_0^{T_s} i_C \,\mathrm{d}t = 0$.

Deze voorwaarden leveren gemiddelde omzetverhoudingen. CCM betekent dat de spoelstroom niet nul wordt gedurende de cyclus. DCM heeft een extra nulstroomfase en kan een belastingafhankelijke verhouding geven. De ideale formule wordt dus niet onbeperkt doorgetrokken tot nullast.

GEMIDDELDE SPOELSPANNING

$$D\,u_{L,\text{aan}} + (1-D)u_{L,\text{uit}} = 0$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.5

Buck: spanning omlaag door duty-cycle

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- Ideaal, stationair, CCM. Aan: bron via schakelaar naar spoel/belasting; uit: spoel blijft via vrijloopdiode of synchrone MOSFET stroom leveren.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1. Aan krijgt L spanning $U_i - U_o$; uit krijgt L $-U_o$. Volt-seconden: $D(U_i - U_o) + (1-D)(-U_o) = 0$.

2. Daaruit $U_o = DU_i$. Condensator houdt het spanningsniveau; gemiddelde spoelstroom is de belastingstroom.

3. Bij 24→12 V is D=0,50. Een uitgang van 12 V/5 A levert 60 W; ideale ingangsstroom 2,5 A, bij 95 % wordt die 2,632 A.

ANTWOORD

Een buck verlaagt spanning en vergroot bij vergelijkbaar vermogen de uitgangsstroom.

Klopt dit? Een diodegeleidingsval en MOSFETweerstand wijzigen de benodigde D; CCM en goede regelkring blijven voorwaarden.

UITLEG · 24.6

Boost: eerst opslaan, dan samen met de bron leveren

6/24

In een boost ligt L aan de ingang. Aan verbindt de schakelaar de spoelknoop naar de retour, zodat $u_L = U_i$ en de spoelenergie groeit; de uitgangsdiode blokkeert en C voedt de belasting. Uit stuurt de spoel stroom door de diode naar de hogere uitgang, zodat $u_L = U_i - U_o$.

Volt-secondebalans geeft $DU_i + (1-D)(U_i - U_o) = 0$ en dus $U_o = U_i/(1-D)$. Naar D=1 gaan betekent niet onbeperkt veilig vermogen: stroom, verlies, rimpel, schakeltijden en componentgrenzen worden dominant. De boost heeft meestal geen volledige uitgangsafschakeling via alleen zijn dutyregeling.

IDEALE BOOST IN CCM

$$U_o = \frac{U_i}{1-D}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.7

Een boost naar de tussenkring

7/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- 48 V naar 400 V; gewenste uitgang van 1,0 kW; η=0,93 als rekenwaarde.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1. D=1−48/400=0,88. Uitgangsstroom 1000/400=2,50 A.
2. Ingangsstroom 1000/(0,93·48)=22,40 A; bij 44 V wordt 24,44 A en D=0,89.
3. Verlies=1000/0,93−1000=75,27 W. Een praktische omvormer kan hiervoor een transformator of andere topologie gebruiken.

ANTWOORD

De eenvoudige boost laat de hoge duty en ingangsstroom zien.

Klopt dit? Dit is een topologievoorbeeld, geen voorschrift om de 4 kVA-stationsomvormer zelf te bouwen.

UITLEG · 24.8

Stroomrimpel en componentkeuze

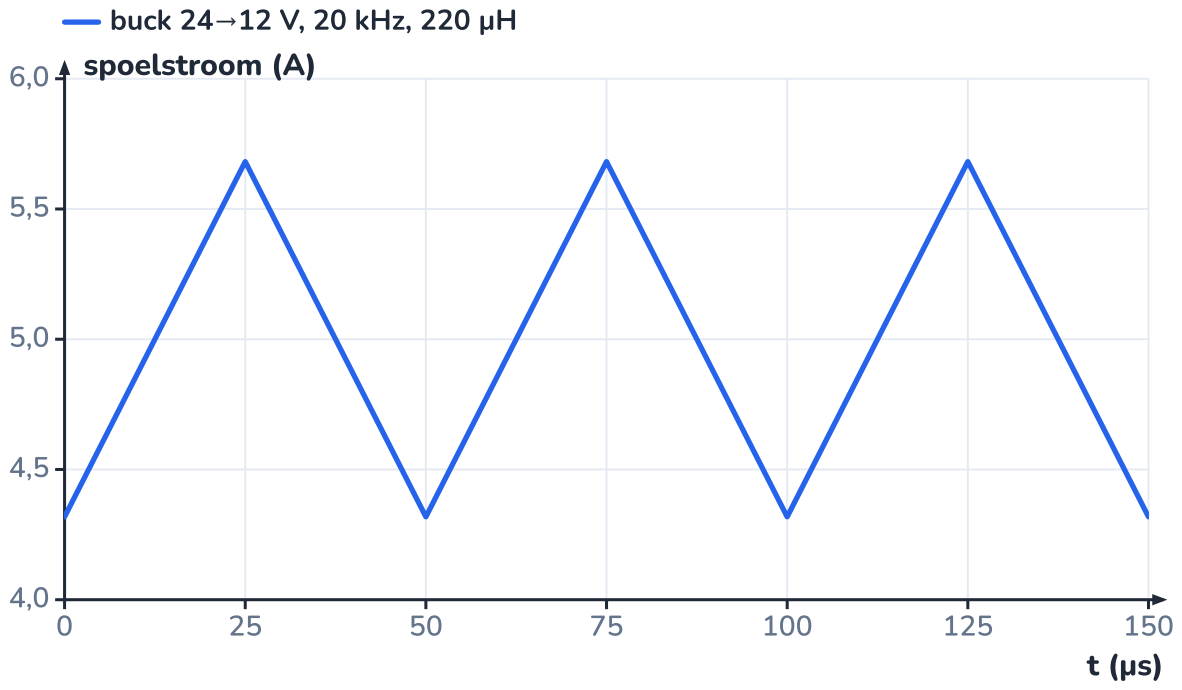
8/24

Voor een buck is $\Delta I_L = (U_i - U_o)D/(Lf_s)$. Deze piek-piekwaarde komt uit de aanhelling maal aantijd. Controleer $I_{\text{piek}} = I_o + \Delta I_L/2$ tegen spoelverzadiging en schakel-/diodegrenzen. Een spoel met de juiste inductie maar te lage verzadigingsstroom is ongeschikt.

Bij verwaarloosbare ESR is de condensatorspanningsrimpel ongeveer $\Delta U_C = \Delta I_L/(8f_sC)$. ESR voegt ongeveer $\Delta I_L\, ESR$ toe. De rimpelstroomrating en thermische levensduur zijn afzonderlijke controles; meer capaciteit alleen verlaagt ESR niet automatisch.

BUCK-RIMPEL

$$\Delta I_L = \frac{(U_i - U_o)D}{Lf_s}$$



De stroom blijft boven nul: dit voorbeeld voldoet aan CCM.

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.9

Buck 24→12 V: rimpelbudget

9/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- Io=5 A, fs=20 kHz, L=220 µH, C=470 µF, ESR=50 mΩ; ideale D=0,5.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1. ΔIL=12·0,5/(220 µH·20 kHz)=1,364 A. Minimum 4,318 A, maximum 5,682 A.

2. Ideale C-rimpel=18,13 mV; ESR-term=68,18 mV. De ESR-term is hier groter.

3. Een ontwerpmarge boven 5,682 A voor verzadiging en piekstroom is nodig. Controleer ook thermisch RMS-gedrag en fout-/aanloopstromen.

ANTWOORD

De rimpel is circa 1,36 A piek-piek; elektrische en thermische grenzen worden apart getoetst.

Klopt dit? De twee rimpeltermen zijn een rekenbenadering; een volledige waveform of datasheetmethode bepaalt hun fase en werkelijke som.

UITLEG · 24.10

DC naar AC: brug en sinusmodulatie

10/24

Een H-brug kan de belasting afwisselend aan +Udc en −Udc leggen. Een 50 Hz-vierkantgolf is nog geen zuivere sinus. Sinus-PWM laat de gemiddelde brugspanning een sinus volgen; een uitgangsfilter beperkt de schakelfrequentiecomponenten. e20 gaf het bestaande filter van 1 mH/10 µF en de 400 V-tussenkring.

In een eenvoudige volledige brug met 400 V DC en sinusmodulatie is $U_{1,\mathrm{rms}} \approx mU_{\mathrm{dc}}/\sqrt{2}$. Voor 230 V is m≈0,813. De DC-tussenkring moet de dubbele-netfrequentievermogensrimpel opvangen; de batterij hoeft niet elke 100 Hz-piek rechtstreeks te volgen.

Nooit beide MOSFETs van dezelfde brugpoot gelijktijdig aanzetten: shoot-through kortsluit de rail. Gatedriverinterlock en dode tijd voorkomen overlap, maar beïnvloeden vervorming.

VEREENVOUDIGDE SINUSMODULATIE

$$m = \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathrm{rms}}}{U_{\mathrm{dc}}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.11

De bestaande stationsomvormer heeft een vermogensgrens

11/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- 4,0 kVA continu, 8 kVA gedurende 5 s, η≈0,93; noodverwarming+warmtepomp+drukpomp samen 4,48 kVA volgens e16.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1. 4,48–4,00=0,48 kVA overschrijding continu. Een 8 kVA-aanlooprating maakt een langdurige 4,48 kVA-combinatie niet toegestaan.

2. e20 vraagt aan 48 V circa 100 A continu en 130 A enkele seconden; bij 44 V nemen stromen toe. Scheid kW en kVA bij de belastingstoets.

3. Energiebeheer schakelt noodverwarming of drukpomp volgens prioriteiten en minimumtijden; de hardwarestroomgrens blijft onafhankelijk.

ANTWOORD

Het brein moet de combinatie beheersen, niet de naamplaat negeren.

Klopt dit? Een som van kVA kan conservatief zijn; de dossiercombinatie en fasoren uit e20 bepalen de concrete grens.

UITLEG · 24.12

PV is een bron met een werkpunt

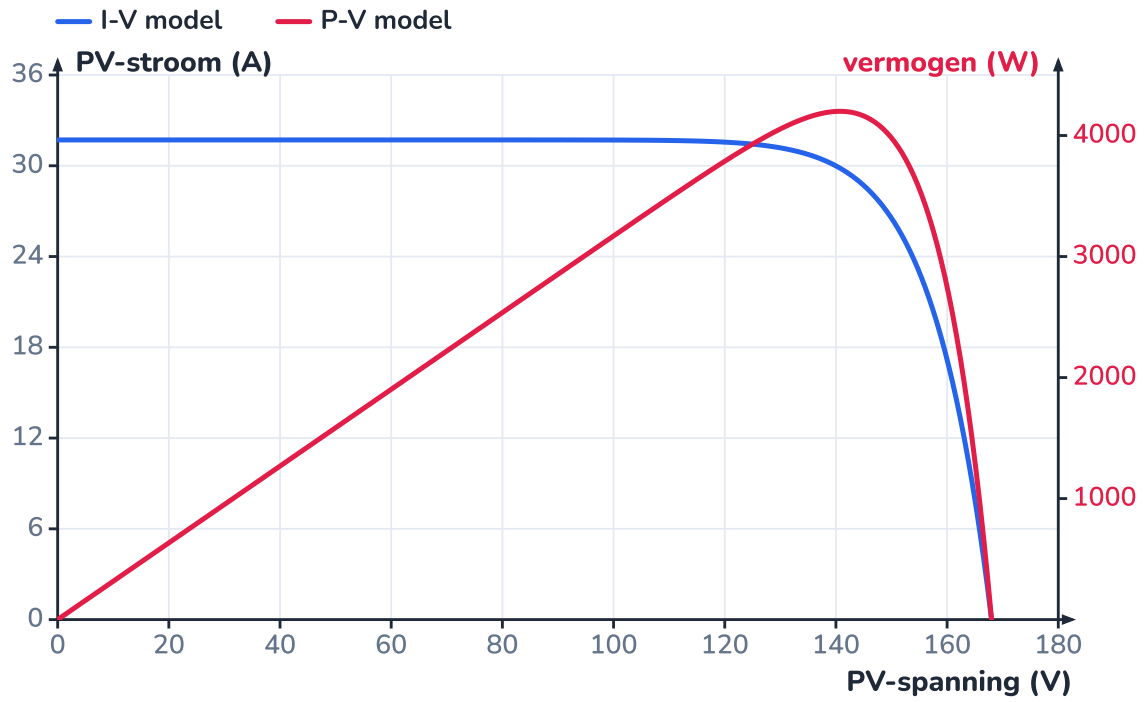
12/24

Een paneel levert een I-V-curve die van bestraling en celtemperatuur afhangt. Bij open klem is spanning hoog maar stroom nul; bij kortsluiting is stroom hoog maar spanning nul. In beide uitersten is vermogen nul. Het maximum ligt ertussen.

De lader kiest via zijn belasting welke bronspanning ontstaat. Een MPPT-buitenlus zoekt Vmp of Imp; een snellere interne converterlus volgt dat setpoint. Batterijlimieten, stroomlimiet en temperatuur gaan vóór maximale bronextractie. Is de batterij vol, dan mag de lader minder vermogen nemen.

MAXIMUMVERMOGENSVOORWAARDE

$$P(V) = V\,I(V), \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = I + V\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}V} = 0$$



De voorbeeldcurve is synthetisch met 4200 W-maximum; de dubbele y-as toont zowel stroom als vermogen.

UITLEG · 24.13

Perturb and observe: zoeken met twee metingen

13/24

P&O verandert een bronspanningssetpoint een klein stukje en vergelijkt het vermogen. Stijgt P, dan gaat de volgende stap in dezelfde richting; daalt P, dan keert de richting om. Bij vaste zon convergeert het proces naar een kleine oscillatie rond het maximum.

Grote stappen zoeken sneller maar verliezen meer rondom de top. Kleine stappen zijn rustiger maar traag. Snel veranderende zon kan P ook veranderen zonder dat de perturbatie goed of slecht was. Gedeeltelijke schaduw kan meerdere maxima maken; een lokale methode garandeert dan geen globale top.

Een alternatief, incremental conductance, vergelijkt dI/dV met –I/V. De meetruis, wachttijd na een stap en begrenzingen blijven onderdeel van het ontwerp.

VEREENVOUDIGDE P&O

$$\text{richting}_{k+1} = \begin{cases} \text{richting}_k & \Delta P \geq 0 \\ -\text{richting}_k & \Delta P < 0 \end{cases}$$

CODE · 24.14

Een MPPT die je tegen het echte modelmaximum toetst

14/24

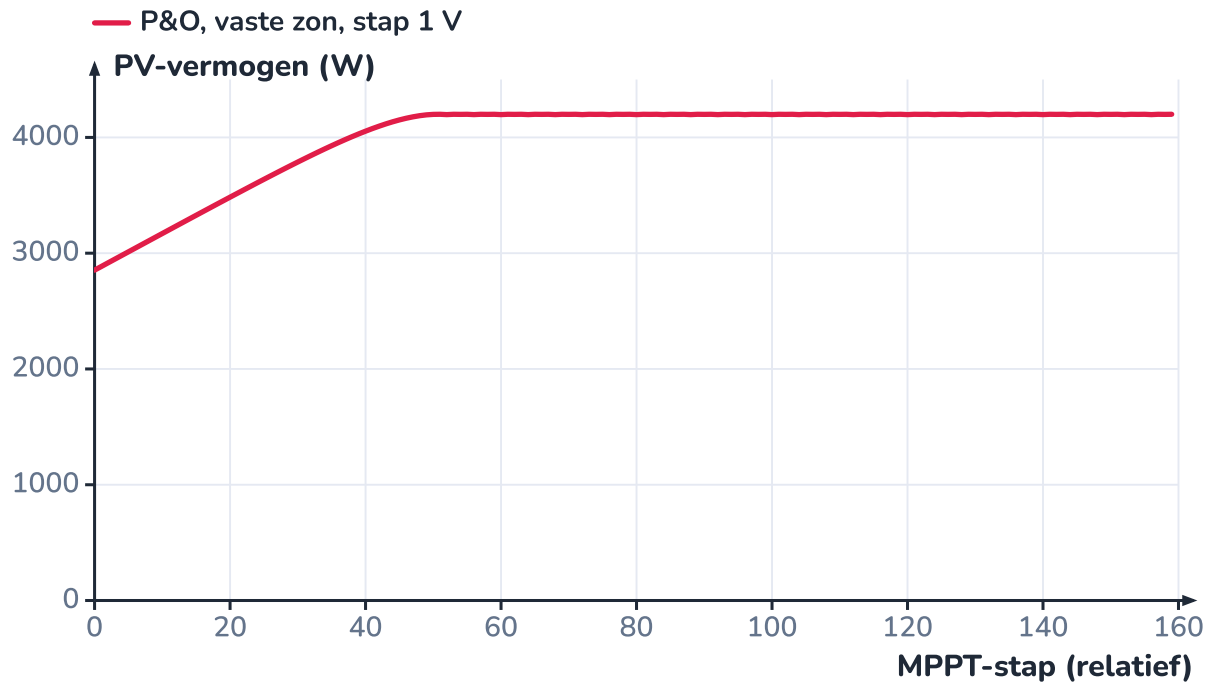
Dit model gebruikt Voc=168 V en een gladde stroomcurve; de analytische top is bekend. P&O start op 90 V, met stap 1 V. Het is een statische bronproef; een echte lader voegt settling, meetfouten en stroom-/spanningslimieten toe. De bronsetpointstap is niet gelijk aan direct een willekeurige duty-cycle stap sturen.

Python **mppt.py** 27 regels

```python
# mppt.py — gladde synthetische PV-curve; stationmodel, geen fabrikantdata
import numpy as np
voc, vorm, pmax = 168.0, 16.0, 4200.0
vm = voc/(vorm+1)**(1/vorm)
isc = pmax/(vm*vorm/(vorm+1))
def stroom(v, zon=1.0):
    return zon*isc*max(0.0,1-(v/voc)**vorm)
def vermogen(v,zon=1.0):
    return v*stroom(v,zon)

# buitenlus vraagt bronspanning; binnenlus regelt de converter daarop
v, richting, vorig = 90.0, 1.0, None
rij=[]
for k in range(160):
    p=vermogen(v)
    rij.append((k,v,p))
    if vorig is not None and p<vorig:
        richting=-richting
    vorig=p
    v=np.clip(v+richting,20.0,165.0)
rij=np.array(rij)
print(f"modelmaximum {vm:.3f} V, {stroom(vm):.3f} A, {vermogen(vm):.1f} W")
print(f"P&O laatste 20 stappen: {rij[-20:,2].min():.1f} tot {rij[-20:,2].max():.1f} W")
for ub in (44.0,48.0,56.0):
    print(f"batterij {ub:.0f} V: D={ub/vm:.4f}, Iuit={0.97*pmax/ub:.2f} A")
print(f"verlies bij 97%: {(1-0.97)*pmax:.1f} W")
print(f"koude Voc bij -15 °C: {168*(1+0.0028*40):.3f} V")
```

```
modelmaximum 140.736 V, 29.843 A, 4200.0 W
P&O laatste 20 stappen: 4197.0 tot 4199.9 W
batterij 44 V: D=0.3126, Iuit=92.59 A
batterij 48 V: D=0.3411, Iuit=84.88 A
batterij 56 V: D=0.3979, Iuit=72.75 A
verlies bij 97%: 126.0 W
koude Voc bij -15 °C: 186.816 V
```



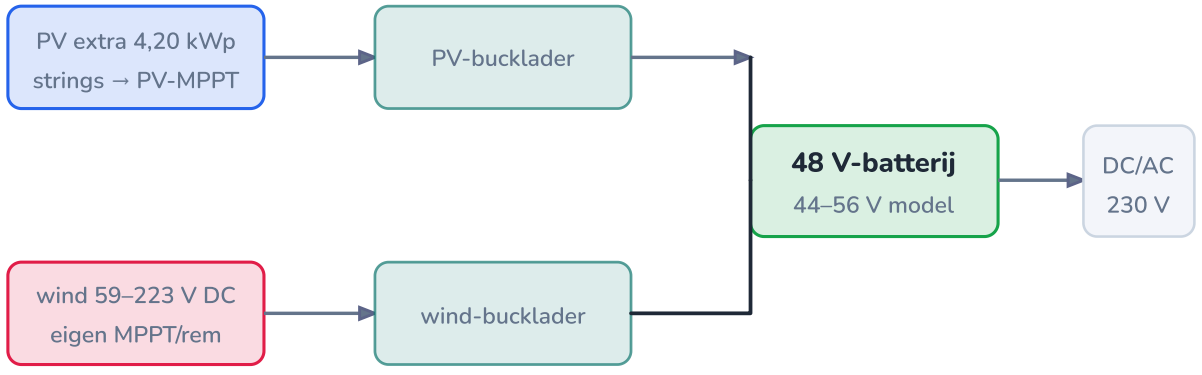
Een kleine permanente zoekoscillatie blijft over; een algoritme dat ophoudt te meten mist bronverandering.

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.15

Extra zonnepark naar het 48 V-net

15/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.



1,40 kWp / 12 V-module blijft een afzonderlijk net

Twee elektrische netten en twee bronregelaars worden niet als één onbegrensde lader behandeld.

GEGEVEN

- Station totaal 5,60 kWp: 1,40 kWp module apart en 4,20 kWp extra op 48 V. Illustratieve extra array: 12 modules van 350 W, 4 serie×3 parallel; circa 140 V op de top, open klem 168 V, ηlader = 97 %.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1. Vmp circa 4·35=140 V en Imp circa 3·10=30 A. Voor de synthetische curve komt de precieze top op 140,736 V; dit is modeldata, geen fabrikantlabel.

2. Bij 48 V is Iuit=0,97·4200/48=84,875 A. Bij 44 V 92,591 A; bij 56 V 72,750 A.

3. Verlies=(1−0,97)·4200=126 W. Stroomgrens minstens 100 A is een ontwerpvoorstel met nog afzonderlijke temperatuur-/deratingcontrole.

ANTWOORD

De 12 V-modulelader wordt niet tot 5,60 kWp uitgebreid; de netten blijven onderscheiden.

Klopt dit? PV-stringkeuze is illustratief: echte Voc/Isc/tempco/toleranties en inverter-/laderlimieten vóór installatie uit datasheets halen.

UITLEG · 24.16

Koude openklemspanning en volle batterij

16/24

Een paneel heeft bij koudere cellen meestal hogere openklemspanning. Reken met de laagste ontwerpcelltemperatuur, temperatuurcoëfficiënt en tolerantie, niet alleen met Vmp bij standaardcondities. Onze rekenarray heeft Voc bij 25 °C=168 V en αVoc=−0,0028/K.

Bij −15 °C wordt Voc =168[1+0,0028·40]=186,816 V. Met 3 % bovenmarge is 192,420 V. Een 250 V-invoerklasse is daarom een **ontwerpvoorstel**, geen bewijs van bescherming tegen transiënten of iedere werkelijke paneelvariant.

Bij volle batterij beperkt de lader vermogen. Kabel-/zekeringskeuze gebruikt ook foutstromen en meerdere parallelstrings. Een PV-curve kan bij licht nog spanning blijven leveren wanneer de lader uit staat; een softwarestop is geen fysieke spanningsloosheid.

LINEAIRE TEMPERATUURSCHATTING

$$V_{\mathrm{oc}}(T) = V_{\mathrm{oc},25}[1 + \alpha_{\mathrm{Voc}}(T - 25)]$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.17

Wind 59–223 V naar batterij 44–56 V

17/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- Generator en diodebrug uit e19; MPPT-buck naar stationrail. Ideale duty eerst.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1. Bij 48 V: D=48/59=0,8136 aan de lage bronkant en 48/223=0,2152 aan de hoge.

2 Bij batterij 56 V en bron 59 V wordt D=0,9492: weinig ruimte voor componentverliezen. Controleer minimuminvoermarge en beperk stroom indien nodig.

3 Bij 3 kW bron en 97 % omzetting levert bij 48 V 60,625 A. De regelaar verplaatst ook generatorbelasting/koppel; bronspanning is geen onafhankelijk vast voedingstoestel.

ANTWOORD

Een eigen windregelaar is nodig; één PV-P&O-algoritme op dezelfde rail vervangt de remregeling niet.

Klopt dit? Bij 330 tpm voorspelt de e19-generator circa 245 V gelijk; een 300 V-invoerklasse met afzonderlijke surge-/dumpbeveiliging is een voorstel. De 16,6 Ω/3 kW-dumpbelasting en overtoerenfunctie blijven onafhankelijk.

UITLEG · 24.18

Borstelloze motor: het statorveld moet de rotor volgen

18/24

Een BLDC-motor heeft een permanente-magneetrotor en meerdere statorfasen. Een driefasebrug commutereert het veld elektronisch. Bij zesstappenbesturing worden doorgaans twee fasen aangestuurd en één vrijgelaten; de volgende sector wordt na 60 elektrische graden gekozen.

Een voorbeeldvolgorde is A+ B–, A+ C–, B+ C–, B+ A–, C+ A–, C+ B–. De werkelijke Hallcodevolgorde hangt van motor en bedrading af en moet worden geijkt. Elektrische snelheid is poolparen maal mechanische snelheid. Met 4 poolparen en 1500 tpm is elektrisch 100 Hz en zijn er 600 sectorwissels per seconde.

Microchips sensored-BLDC-uitleg koppelt Hallpositie aan commutatie. Sensorloos via back-EMF is bij stilstand lastig omdat er nog geen snelheidssignaal is.

ELEKTRISCHE FREQUENTIE MET P POOLPAREN

$$f_e = p\,\frac{n}{60}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.19

Koppel, tegen-EMK en stroombegrenzing

19/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- Rekenmotor kt=0,10 N·m/A, ke=0,10 V·s/rad, n=1500 tpm; koppel 1,0 N·m; effectieve windingweerstand 0,40 Ω.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1 ω=2π·1500/60=157,08 rad/s. Stroom I=M/kt=10 A.

2 Tegen-EMK E=keω=15,708 V; ohmse val IR=4 V. Vereenvoudigd gevraagd spanningsniveau circa 19,708 V.

3 Mechanisch P=Mω=157,08 W. Koperverlies I²R=40 W; extra ijzer-/schakel-/mechanische verliezen zijn niet inbegrepen.

ANTWOORD

Het model toont waarom bij stilstand een stroomgrens nodig is: E=0 en de windingweerstand alleen begrenst de stroom.

Klopt dit? Deze scalair equivalente motorwaarden zijn rekenwaarden, niet rechtstreeks de fase-/lijnconstanten van de windgenerator.

UITLEG · 24.20

Rendement wordt een warmtevraag

20/24

Geleidingsverlies is ongeveer Irms²RDS(on); diodeverlies Vflgem; schakelverlies bij een lineaire overlap ongeveer $\frac{1}{2}UI(t_r + t_f)f_s$. Gateverlies is QgVgf_s. Spoelkoper, kernverlies, condensator-ESR en stuurcircuits vullen het budget aan.

RDS(on) stijgt vaak bij warmer silicium; een typische 25 °C-waarde is geen worst-case. Een transistor kan genoeg stroom verdragen op papier en toch te heet worden door slechte behuizing/koeling. Stroomrating zonder temperatuurconditie is onbruikbaar.

Thermisch geldt $T_j = T_a + P_{\text{verlies}}(R_{\theta jc} + R_{\theta cs} + R_{\theta sa})$. Het rendement moet bij de hele belastingscurve worden getoetst; nullast 25 W van de bestaande omvormer telt ook in het stationbudget.

THERMISCHE ONTWERPBALANS

$$T_j - T_a = P_{\text{verlies}} R_{\theta,\text{totaal}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 24.21

Een koellichaam kiezen op verlies

21/24

Een energieomzetter stap voor stap doorrekenen.

GEGEVEN

- Vermogensmodule verliest 40 W; Ta=40 °C, ontwerplimiet Tj=100 °C; Rθjc=0,50 K/W,Rθcs=0,20 K/W.

GEVRAAGD

- Schakelverhouding, stroom, verlies en ontwerpgrenzen.

OPLOSSING

1 Totale toegelaten weerstand (100−40)/40=1,50 K/W.

2 Koellichaam naar lucht moet Rθsa≤1,50−0,50−0,20=0,80 K/W.

3 Vervuiling, ventilatoruitval, contactkwaliteit en warmte van buurdelen veranderen de conditie. Voeg temperatuurmeting/derating toe; een thermische beveiliging vervangt geen dimensionering.

ANTWOORD

Maximaal 0,80 K/W voor het koellichaam onder deze rekencondities.

Klopt dit? Gebruik geen absoluut siliciummaximum als normale bedrijfstemperatuur; datasheetthermische waarden hangen van montage af.

VERHAAL · 24.22

Een motorregelaar is een omvormer met positie-informatie

22/24

Dezelfde drie brugpoten die een driefasespanning maken, kunnen motorwikkelingen sturen. Bij een BLDC bepaalt rotorpositie wanneer er geschakeld wordt; bij een netomvormer bepaalt de gewenste netfase het ritme. Het schakelgereedschap is vergelijkbaar, de regeldoelen en veiligheidsgrenzen verschillen.

Microchip onderscheidt zesstappenbesturing en andere motoralgoritmen. De interessante les voor Habitat is dat een toerentalcommando pas bruikbaar is met stroomlimiet, positie-/snelheidsmeting, feedback en veilige fouttoestand. Een vast PWM-percentage bewijst geen vast koppel of vast toerental.



buck: cel vóór L; boost: L vóór schakelende knoop

functioneel overzicht; de volgende bladen tonen exacte topologieën

Elektronische omzetting past elektrische energie aan het gewenste mechanische of netgedrag aan.

NASLAG · 24.23

Converterrelaties en geldigheidsgebied

23/24

ideale buck, stationair CCM

$$U_o = DU_i$$

symbool	betekenis	eenheid
D	duty-cycle	1

ideale boost, stationair CCM

$$U_o = U_i/(1-D)$$

symbool	betekenis	eenheid
Ui, Uo	in- en uitgangsspanning	V

omzettervermogen

$$P_o = \eta P_i$$

symbool	betekenis	eenheid
η	rendement	1

buckstroomrimpel

$$\Delta I = (U_i - U_o)D/(Lf_s)$$

symbool	betekenis	eenheid
L	inductie	H
fs	schakelfrequentie	Hz

ohmse warmte

$$P_{\text{koper}} = I^2 R$$

symbool	betekenis	eenheid
I	RMS-stroom	A
R	effectieve weerstand	Ω

Grens	Te controleren
bron	koude Voc, Isc, transiënten
rail	44–56 V, BMS en stroomlimiet
halfgeleiders	spanning, stroom, schakelflanken, temperatuur
spoel/C	verzadiging, RMS, ESR, rimpel
regeling	settling, stabiliteit, MPPT versus laden

HET GEHEEL · 24.24

Het geheel: zon, wind en lasten krijgen eigen grenzen

24/24

e19/e20 beschrijven generator en omvormer; e21 filters en e23 fysieke stopvoorwaarden. Hier komen converterbalansen, MPPT, motorsturing en thermische dimensionering samen. e49 kan alleen betrouwbaar plannen wanneer vermogenslimieten en volle-batterijtoestanden naast de voorspelde opbrengst staan.

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie

Windgenerator59–223 V en remfunctie.

E20 Wisselstroom

4 kVA-omvormer, kW/kVA en tussenkring.

E21 Filters en signaalverwerking

Metingen voor MPPT en stroomlus.

E23 Digitale logica

Vrijgave en veilige energietoestand.

Habitat

Behoud totaal 5,60 kWp met 1,40 kWp/12 V apart en 4,20 kWp extra naar 48 V. Ontwerpvoorstel PV-lader met 250 V-ingangsklasse en 100 A-uitgangsklasse met 97 % rekenrendement; illustratieve 4S3P-array van 4,20 kWp met 350 W per paneel. Wind krijgt eigen 300 V-klasse buck/MPPT met onafhankelijke dump/rem. Dit zijn selectie-eisen, nog geen gekozen toestel. 4,48 kVA-combinatie blijft verboden als continu 4,0 kVA-omvormerbedrijf; circa 130 A/5 s en 100 A continu aan 48 V blijven dossiergrenzen.

SAMENVATTING

In het kort

- Volt-secondebalans levert ideale buck- en boostverhoudingen onder CCM-voorwaarden.
- Spoel- en condensatorrimpel, verzadiging, halfgeleiderverliezen en warmte bepalen werkelijke grenzen.
- Een omvormer maakt AC met brugmodulatie en filtering; haar kVA-grens blijft fysiek.
- MPPT zoekt bronvermogen; BMS, stroom, temperatuur en volle batterij gaan voor.
- Borstelloze motorsturing commuteert volgens rotorpositie en begrenst stroom.
- PV, wind, 12 V-module en 48 V-station blijven onderscheiden energiestromen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

CCM
Een schakelregime waarbij spoelstroom gedurende de hele cyclus niet nul wordt.

MPPT
Regeling die het bronwerkpunt naar maximaal beschikbaar vermogen verplaatst binnen overige grenzen.

shoot-through
Gelijktijdige geleiding van de twee schakelaars van één brugpoot, waardoor de rail kortgesloten wordt.

commutatie
Omschakelen van motorfasen volgens rotorpositie.

derating
Bewust verlagen van toegelaten belasting onder ongunstige omstandigheden.

E EXPERT · DEEL E5 · CHEMIE EN MATERIALEN

HANDBOEK · HOOFDSTUK 25

Thermochemie en reactiesnelheid

Reactiewarmte, activeringsbarrières en een compostvat in de winter

Hoeveel warmte een reactie kan leveren en hoe snel die warmte vrijkomt zijn verschillende vragen. Je verbindt enthalpie, Hess, botsingen en Arrhenius met metingen en een gekoppeld model van het compostvat.

10× uitleg · 7× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 12 lestijden

M Materie en chemie · E Energie · W Wiskundig modelleren



Een wintervat wordt pas warm wanneer biologische warmteproductie het verlies overtreft.

Na dit hoofdstuk

- Je berekent reactie-enthalpie met vormingsenthalpieën, Hess en bindingsschattingen.
- Je bepaalt een snelheidswet uit metingen en toetst een eerste-ordemodel.
- Je verklaart concentratie-, temperatuur-, oppervlakte- en katalysatoreffecten.
- Je leidt een Arrheniusverhouding af en berekent Ea.
- Je koppelt reactiesnelheid aan warmteverlies en voorraad in Habitat.

UITLEG · 25.1

Twee verschillende vragen: hoeveel warmte, en hoe snel?

1/22

Een droge tak kan veel chemische energie bevatten en toch maanden in een koud compostvat liggen. Thermochemie bepaalt het enthalpieverschil tussen begin- en eindstoffen. Kinetiek bepaalt via welke routes en met welke snelheid die omzetting plaatsvindt. Een negatieve reactie-enthalpie garandeert geen waarneembare reactie bij kamertemperatuur.

Een systeemgrens maakt de woorden precies. Kies de reagerende stoffen als systeem: warmte die het systeem aan de omgeving afgeeft, heeft een negatief teken voor q. Bij constante druk, en wanneer alleen druk-volume-arbeid relevant is, geldt q_p=ΔH. Voor de warmer wordende omgeving is het teken omgekeerd.

In een compostvat wordt slechts een deel van het organische materiaal meteen afgebroken. Warmteproductie per seconde vraagt dus zowel een enthalpie per omgezette massa als een massastroom. Dat is de verbinding die aan het einde in een model verschijnt.

WARMTEVERMOGEN BIJ EEN EXOTHERME OMZETTING

$$P_{\text{reactie}} = (-\Delta_{\text{r}}H)\,\dot{\xi}$$

UITLEG · 25.2

Reactie-enthalpie hoort bij een vergelijking en een toestand

2/22

Schrijf eerst een gebalanceerde reactievergelijking met fasen: $CH_4(g)+2\ O_2(g) \rightarrow CO_2(g)+2\ H_2O(g)$. Een waarde in kJ per mol reactie hoort precies bij deze coëfficiënten. Verdubbel je de vergelijking, dan verdubbelt ΔrH; keer je haar om, dan verandert het teken.

H=U+pV is enthalpie. Het absolute nulpunt van chemische enthalpie is niet nodig: verschillen zijn meetbaar. Een standaardvormingsenthalpie is de enthalpieverandering bij vorming van één mol stof uit elementen in hun standaardtoestand. Voor $O_2(g)$ is ΔfH° daarom nul; voor een verbinding kan zij positief of negatief zijn.

Het °-teken betekent standaardtoestanden bij de vermelde temperatuur, niet automatisch 0 °C. We rekenen hier bij 298,15 K en standaarddruk 1 bar. De waterfase en temperatuur moeten bij alle stappen overeenkomen.

PRODUCTEN MIN REACTANTEN

$$\Delta_{\text{r}}H^\circ = \sum_{\text{producten}} \nu_i \Delta_{\text{f}}H_i^\circ - \sum_{\text{reactanten}} \nu_i \Delta_{\text{f}}H_i^\circ$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.3

Methaan: vormingsenthalpieën zorgvuldig optellen

3/22

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

- Rekenwaarden bij 298,15 K: ΔfH°[$CH_4(g)$]=−74,60; $CO_2(g)$=−393,51; $H_2O(g)$=−241,826 kJ/mol; $O_2(g)$=0.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Producten: −393,51+2·(−241,826)=−877,162 kJ per mol reactie.

2 Reactanten: $-74{,}60+2\cdot0=-74{,}60$ kJ per mol reactie.

3 $\Delta_r H°=-877{,}162-(-74{,}60)=-802{,}562$ kJ/mol. Voor 0,250 mol methaan is $\Delta H=-200{,}641$ kJ.

ANTWOORD

Het reagerende systeem geeft bij deze eindtoestand 200,641 kJ af voor 0,250 mol.

Klopt dit? Vloeibaar productwater zou extra condensatiewarmte vrijgeven. Gebruik die andere eindtoestand niet stilzwijgend in dezelfde som.

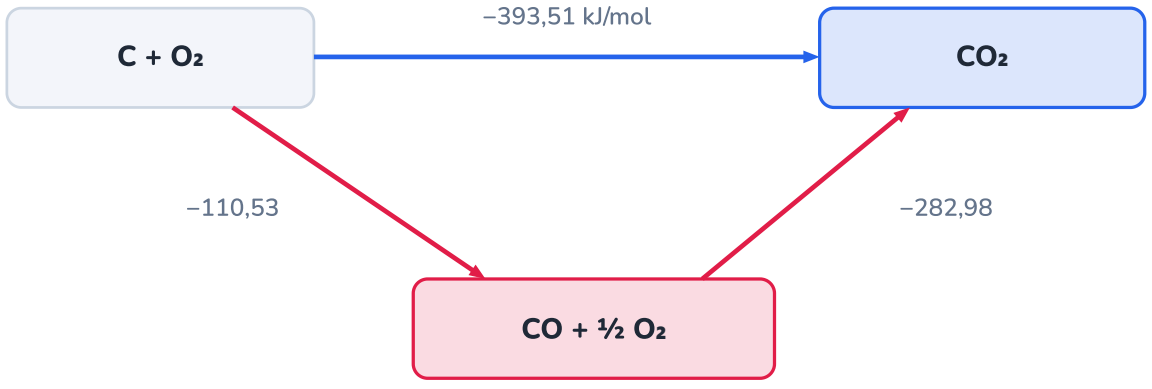
UITLEG · 25.4

Hess: de weg mag verschillen, de eindpunten niet

Enthalpie is een toestandsgrootheid. Als twee routes dezelfde stoffen, hoeveelheden, fasen en temperatuur verbinden, moet de totale ΔH gelijk zijn. Anders zou je door één route heen en de andere terug een cyclus met netto energiewinst maken.

Bij algebra met reactievergelijkingen tel je de enthalpieën mee. Tussenstoffen die aan beide kanten staan vallen weg. Vermenigvuldigen met een factor vermenigvuldigt ook ΔH; omkeren verandert het teken. Dit is de wet van Hess.

De figuur gebruikt vaste rekenwaarden voor koolstofgrafiet → CO → CO_2. Zij toont de sluiting: $-110{,}53-282{,}98=-393{,}51$ kJ/mol. Een gemeten kleine sluitfout kan uit meetonzekerheid of verschillende condities komen; zij maakt van enthalpie geen routeafhankelijke grootheid.



De indirecte route en de directe route verbinden dezelfde toestand; koolmonoxide verdwijnt uit de som.

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.5

Een onbekende reactiewarmte uit een Hess-cyclus

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

- $2\ H_2(g)+O_2(g)\rightarrow 2\ H_2O(g)$: $\Delta H=-483{,}652$ kJ.
- $H_2(g)+\frac{1}{2}\ O_2(g)\rightarrow H_2O(g)$ heeft dus $\Delta H=-241{,}826$ kJ.
- Gevraagd: $H_2O(g)\rightarrow H_2(g)+\frac{1}{2}\ O_2(g)$, voor 36,0306 g water.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Keer de tweede vergelijking om: $\Delta H=+241{,}826$ kJ/mol.
2. 36,0306 g/18,0153 g/mol=2,000 mol water.
3. $\Delta H=2{,}000\cdot 241{,}826=+483{,}652$ kJ: de omkering vraagt energie.

ANTWOORD

Water uiteenhalen vraagt in dit thermochemische model 483,652 kJ.

Klopt dit? Dit is reactie-enthalpie, geen elektrisch minimum van een elektrolyser: Gibbsenergie en warmte-uitwisseling worden in e27 onderscheiden.

UITLEG · 25.6

Bindingsenthalpieën: breken kost, vormen levert

6/22

Een binding losmaken vraagt energie; een binding vormen geeft energie af. Je kunt een gasreactie schatten door eerst alle relevante reactantenbindingen te breken en vervolgens productbindingen te vormen. Dan is $\Delta H\approx \Sigma D_{\text{gebroken}}-\Sigma D_{\text{gevormd}}$.

Een gemiddelde bindingsenthalpie geldt over verwante gasfaseomgevingen. De precieze C–H-binding in methaan is niet automatisch gelijk aan die in elke andere verbinding; successive dissociatiestappen kunnen verschillen. Deze methode geeft daarom vaak een benadering, terwijl consistente vormingsenthalpieën een specifieke reactie beter beschrijven.

Voor een vloeistof of kristal zijn ook intermoleculaire of roostereffecten nodig. Waterstofbruggen zijn geen extra covalente O–H-bindingen. Je mag gasfasebindingswaarden niet zonder fasecorrectie voor een oplossing gebruiken.

BINDINGSENTHALPIEBENADERING

$$\Delta H \approx \sum D_{\text{breken}} - \sum D_{\text{vormen}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.7

Twee H–Cl-bindingen vormen

7/22

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- $H_2(g)+Cl_2(g)\rightarrow 2\,HCl(g)$. Illustratieve gemiddelde D: H–H 436, Cl–Cl 243, H–Cl 431 kJ/mol.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Breken: 436+243=679 kJ/mol reactie.
2. Vormen: 2·431=862 kJ/mol reactie komt vrij.
3. Geschat $\Delta H = 679 - 862 = -183$ kJ/mol. De factor twee hoort bij twee gevormde bindingen.

ANTWOORD

De schatting is exotherm: −183 kJ/mol reactie.

Klopt dit? De waarden zijn verstrekte rekenwaarden, geen voorstel voor een klasproef met chloorgas.

UITLEG · 25.8

Van waarneming naar reactiesnelheid

8/22

Voor a A → b B is de reactiesnelheid $r = -(1/a)\,dA/dt = (1/b)\,dB/dt$ bij constant volume. De coëfficiënten zorgen dat beide soorten dezelfde reactiesnelheid opleveren. Een snelheid in mol/(L·s) verschilt van een totaal moldebiet in mol/s.

Bij 2 A→B daalt [A] tweemaal zo snel als [B] stijgt. Een secant over een meetinterval geeft een gemiddelde snelheid; de raaklijn benadert de snelheid op één tijdstip. Een directe numerieke afgeleide versterkt meetruis, waardoor een lokaal model of herhaalde beginmetingen nuttig zijn.

Een snelheidswet $r = k[A]^m[B]^n$ is een empirische relatie voor het onderzochte mechanismegebied. De orde m+n volgt uit metingen, niet in het algemeen uit de stoichiometrische coëfficiënten. Alleen een bekende elementaire stap geeft extra informatie over die relatie.

STOICHIOMETRISCH GENORMALISEERDE SNELHEID

$$r = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.9

Een orde bepalen uit beginsnelheden

9/22

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

- Zelfde temperatuur. Bij [A]=0,10 mol/L, [B]=0,20 mol/L: $r = 2{,}0\cdot10^{-4}$ mol/(L·s).
- Verdubbel A bij B gelijk: $r = 8{,}0\cdot10^{-4}$. Verdubbel B bij A gelijk: $r = 4{,}0\cdot10^{-4}$.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. 2^m=4 geeft m=2. 2^n=2 geeft n=1.
2. r=k[A]²[B], totale orde drie.
3. $k=2{,}0\cdot10^{-4}/(0{,}10^2\cdot0{,}20)=0{,}100\ L^2/(mol^2\cdot s)$. De eenheid volgt uit de snelheidswet.

ANTWOORD

Deze gegevens ondersteunen tweede orde in A, eerste orde in B.

Klopt dit? Controleer een breder concentratiegebied en replicaten; drie exacte rekenpunten bewijzen geen universeel mechanisme.

UITLEG · 25.10

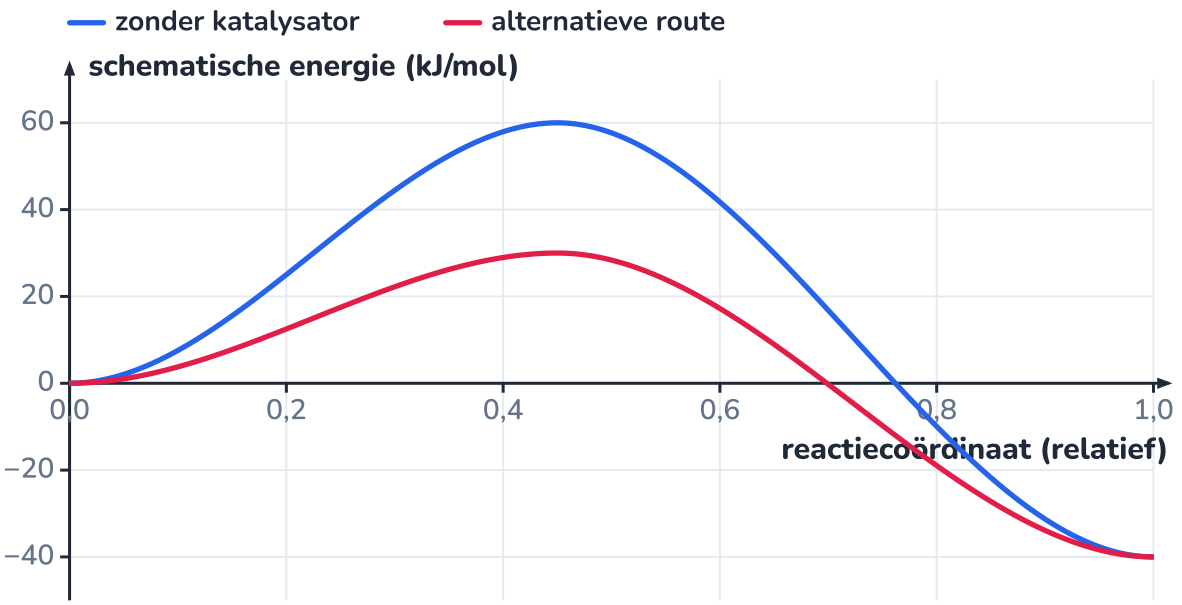
Botsingen, oriëntatie en de activeringsbarrière

10/22

Moleculen moeten elkaar ontmoeten en een geschikte configuratie vormen. Niet elke botsing herschikt de bindingen: er is een passende oriëntatie en toegang tot een overgangstoestand nodig. Bij een hogere temperatuur verschuift de energieverdeling, waardoor een groter deel die barrière kan passeren.

Het schematische profiel heeft reactanten op 0 en producten op −40 kJ/mol. De voorwaartse barrière is 60 kJ/mol; de omgekeerde ligt in deze simpele voorstelling 100 kJ/mol boven de producten. ΔH=−40 beschrijft de eindpunten, de barrière beschrijft de route.

Een werkelijke Arrhenius-activeringsenergie is een uit k(T) afgeleide parameter. Zij hoeft bij een meerstapsreactie of veranderend mechanisme niet één onveranderlijke moleculaire heuvel te zijn. Het profiel helpt bij begrippen; het is geen gemeten potentiaaloppervlak.



Een katalytische route eindigt op hetzelfde energieniveau; het warmteverschil wordt niet kleiner.

UITLEG · 25.11

Vier knoppen voor snelheid, met verschillende oorzaken

11/22

Concentratie: meer beschikbare reactanten kan de ontmoetingskans verhogen volgens de gemeten orde. **Temperatuur:** beïnvloedt zowel bewegingssnelheid als het aandeel toegang tot de route. **Oppervlakte:** een fijner vast materiaal biedt meer grensvlak bij een heterogene reactie. Voor gelijke massa bolletjes schaalt oppervlak als 1/diameter.

Katalysator: biedt een andere reactieroute en wordt over een volledige cyclus geregenereerd. Hij kan tijdelijk tussenproducten vormen. Hij verandert de totale standaard-Gibbsenergie van de reactie niet en verschuift bij gegeven condities het evenwicht niet; heen en terug verlopen sneller.

In compost is fijnmaken niet onbeperkt gunstig: dichtpakken kan poriën en zuurstoftoevoer verminderen. Een enzym is een katalysator, maar het aantal levende microben, hun groei, voeding en temperatuurgevoeligheid veranderen eveneens. Daarom wordt een simpele chemische orde niet zonder bewijs de wet voor een heel vat.

Katalysator en brandstof zijn verschillende rollen

Een katalysator levert niet telkens de reactie-energie; die komt uit het enthalpieverschil van de omgezette stoffen. Bij compost kan toegevoegd materiaal wel zowel voeding als structuurmateriaal zijn.

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.12

Oppervlakte vergroten zonder massa te veranderen

12/22

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

- 1,0 kg materiaal als gelijke bollen, dichtheid 1000 kg/m³. Diameter 20 mm of 5 mm.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Vtot=m/ρ=0,001 m³. Voor één bol is A/V=6/d; totaal A=6Vtot/d.
2. 20 mm: A=6·0,001/0,020=0,300 m².
3. 5 mm: A=1,200 m², factor vier. Alleen bij oppervlaktebeperkte reactie en vergelijkbare toegankelijkheid zou een vergelijkbare snelheidsfactor volgen.

ANTWOORD

De geometrische oppervlakte wordt viermaal zo groot.

Klopt dit? Zuurstoftransport, waterfilms, agglomeratie en poreus intern oppervlak kunnen de effectieve factor veranderen.

UITLEG · 25.13

Arrhenius: de exponent vraagt kelvin

13/22

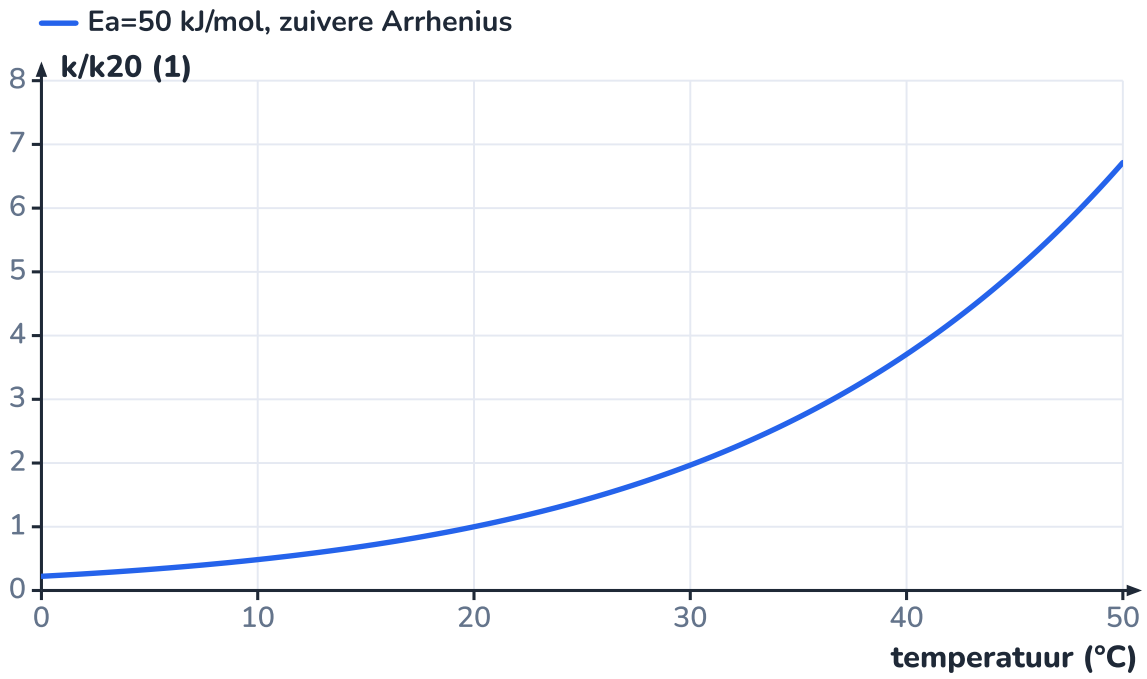
In een bruikbaar temperatuurgebied wordt k(T) vaak geschreven als A exp(−Ea/RT). Ea heeft eenheid J/mol, R J/(mol·K), T K; de exponent is dimensieloos. Celsius invullen is dus zowel fysisch als numeriek fout.

Neem de natuurlijke logaritme: ln k=ln A−(Ea/R)(1/T). Een grafiek van ln k tegen 1/T heeft helling −Ea/R. Strikt gebruik je ln(k/kref) of een vaste eenhedenconventie; de helling blijft gelijk. A heeft dezelfde eenheid als k.

Als A en Ea over het gebied constant worden genomen, volgt door twee vergelijkingen af te trekken ln(k2/k1)=−Ea/R(1/T2−1/T1). Zo vermijd je het bepalen van een soms zeer grote A. Zie de IUPAC-definitie van Arrhenius voor deze aannames.

TWEE TEMPERATUREN VERGELIJKEN

$$\ln \frac{k_2}{k_1} = -\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$



De kromme hoort bij één Ea en één mechanismegebied, niet bij onbeperkte biologische groei.

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.14

Wintervertraging kwantificeren

14/22

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

- Ea=50,0 kJ/mol; referentie 20 °C=293,15 K; zelfde mechanisme en omstandigheden.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Bij 5 °C is k5/k20=exp[−50000/R(1/278,15−1/293,15)]=0,3308.
2. Bij 0 °C is de factor 0,2227; bij 40 °C 3,707.
3. Voor een eerste-ordeproces is de halveringstijd omgekeerd evenredig met k. Bij 5 °C duurt die dus 3,02 keer zo lang als bij 20 °C.

ANTWOORD

Een koude start kan de warmteproductie sterk verlagen.

Klopt dit? De Ea is een rekenparameter. In echte compost wisselt de gemeenschap en spelen zuurstof, vocht en vriesgedrag mee; de factor is geen gemeten universele compostconstante.

UITLEG · 25.15

Eerste orde levert een exponentiële meetcurve

Voor één reagerende soort met dc/dt=−kc integreer je dc/c=−k dt. Met c(0)=c0 volgt c(t)=c0 exp(−kt). De halveringstijd t½=ln2/k is onafhankelijk van c0 zolang k constant is.

Een rechte ln c tegen t is een nuttige diagnose. Nulorde geeft c=c0−kt en tweede orde geeft 1/c=1/c0+kt voor de hier gedefinieerde verdwijning van één soort. Kies het model via residuen en fysische argumenten, niet enkel omdat één getransformeerde grafiek visueel recht lijkt.

De logtransformatie maakt fouten relatief: 1 % en 10 % absolute concentratie hebben een andere invloed. Als de meetfout ongeveer constant in mol/L is, kan rechtstreeks fitten in c-ruimte beter passen. Meet ook blanco, temperatuur, instrumentvertraging en een mogelijk eindplateau.

EERSTE ORDE BIJ CONSTANT K

$$c(t) = c_0 \mathrm{e}^{-kt}, \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

CODE · 25.16

Meetcurve fitten en compost integraal doorrekenen

De eerste dataset is synthetisch: c0=0,100 mol/L, k=0,0012 s^{-1} en multiplicatieve meetruis. De tweede helft is een afzonderlijk model van de 120 L-compostcontext. C=180 kJ/K, afbreekbare voorraad 8,0 kg, q=12 MJ/kg, buiten −2 °C, start 8 °C en k20=0,08 dag^{-1} zijn **lesrekenwaarden**. H=1 of 4 W/K vergelijkt warmteverlies. De temperatuurremming is bewust toegevoegd; Arrhenius alleen voorspelt anders onbegrensd toenemende biologie.

Python `compost.py` 45 regels

```python
# compost.py — gekoppeld onderwijsmodel, geen hygiënevalidatie
import math
import numpy as np
R, Ea = 8.31446261815324, 50000.0

def k_dag(tc):
    arr = 0.08*math.exp(-Ea/R*(1/(tc+273.15)-1/293.15))
    # Fenomenologische hogetemperatuurremming, NIET uit alleen Arrhenius.
    return arr/(1+math.exp((tc-55)/3))

def vat(hverlies, dt=60.0, dagen=10.0):
    c, q, buiten = 180000.0, 12e6, -2.0
    massa, tc = 8.0, 8.0
    rij=[]
    for i in range(round(dagen*86400/dt)+1):
        if i % max(1,round(1800/dt)) == 0:
            rij.append((i*dt/86400,tc,massa))
        # Exacte afname bij tijdens deze stap constant verondersteld T.
        dm=massa*(-math.expm1(-k_dag(tc)*dt/86400))
        p=q*dm/dt
        tc += dt*(p-hverlies*(tc-buiten))/c
        massa -= dm
    return np.array(rij)

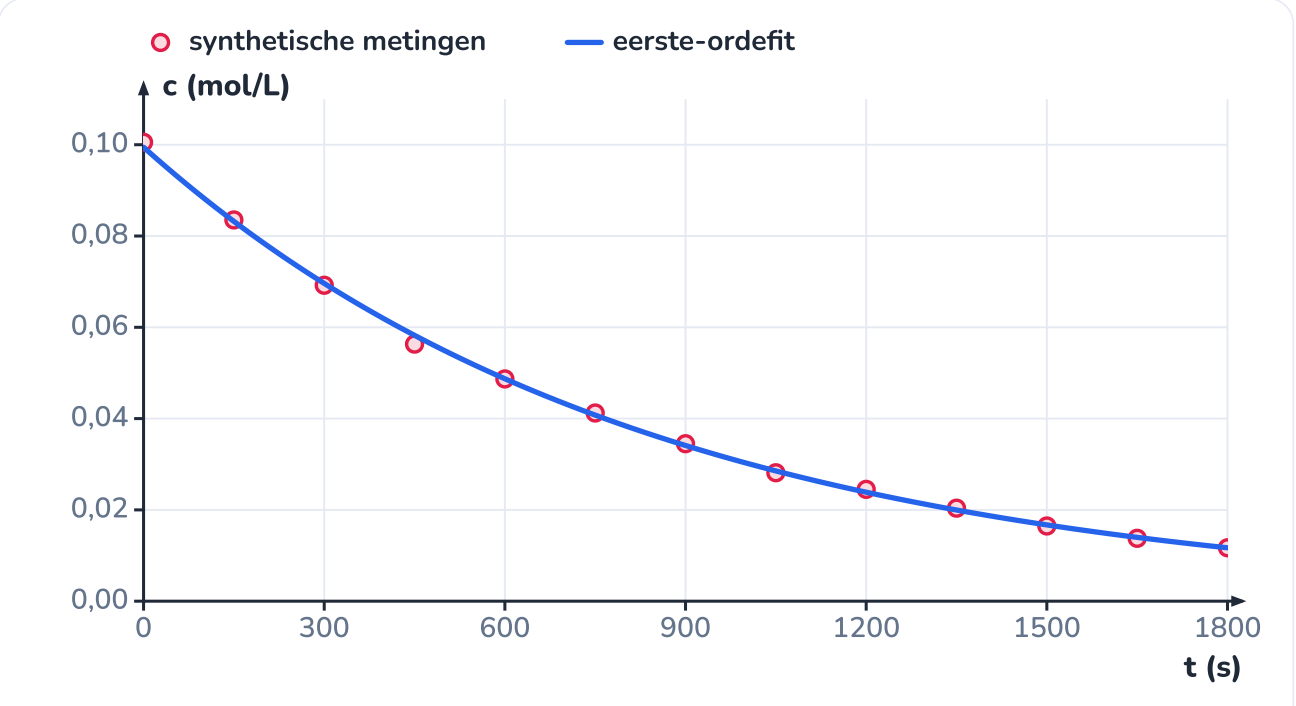
goed, lek = vat(1.0), vat(4.0)
half = vat(1.0,30.0)
```

```python
for naam,rij in (("H=1 W/K",goed),("H=4 W/K",lek)):
    top=rij[rij[:,1].argmax()]
    print(f"{naam}: top {top[1]:.3f} °C op dag {top[0]:.3f}; "
          f"dag10 {rij[-1,1]:.3f} °C, substraat {rij[-1,2]:.3f} kg")
print(f"tijdstapcontrole top: {goed[:,1].max():.3f} versus {half[:,1].max():.3f} °C")
print(f"max temperatuurverschil op dezelfde halfuursstippen: "
      f"{np.max(np.abs(goed[:,1]-half[:,1])):.5f} K")

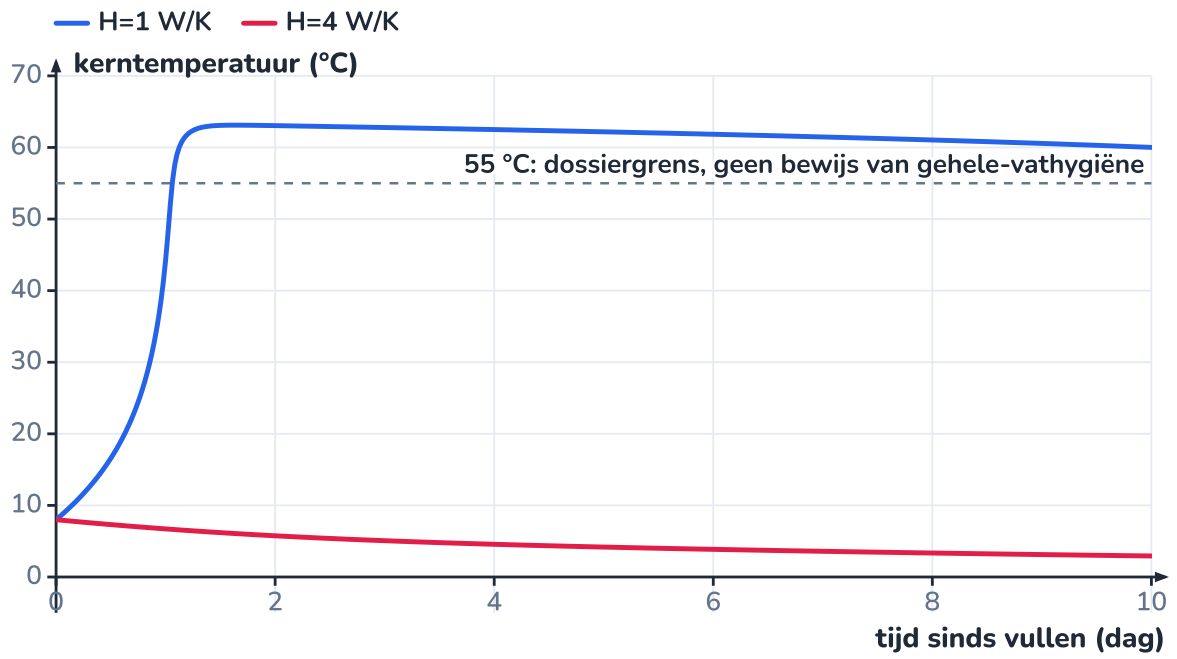
print(f"totale vrijgekomen warmte H=1: {12*(8-goed[-1,2]):.3f} MJ")

# Synthetische chemische concentratiemetingen voor eerste-ordefit.
t=np.arange(0.0,1801.0,150.0)
rng=np.random.default_rng(25)
c=0.100*np.exp(-0.0012*t)*np.exp(rng.normal(0,0.015,len(t)))
b,a=np.polyfit(t,np.log(c),1)
fit=np.exp(a+b*t)
print(f"eerste-ordefit k={-b:.7f} 1/s, c0={math.exp(a):.6f} mol/L")
print(f"halveringstijd={math.log(2)/(-b):.2f} s")
print(f"max relatief residu={100*np.max(np.abs((c-fit)/fit)):.2f}%")
```

```
H=1 W/K: top 63.114 °C op dag 1.625; dag10 60.009 °C, substraat 2.938 kg
H=4 W/K: top 8.000 °C op dag 0.000; dag10 2.935 °C, substraat 6.187 kg
tijdstapcontrole top: 63.114 versus 63.113 °C
max temperatuurverschil op dezelfde halfuursstippen: 0.09064 K
totale vrijgekomen warmte H=1: 60.739 MJ
eerste-ordefit k=0.0011892 1/s, c0=0.099459 mol/L
halveringstijd=582.88 s
max relatief residu=3.30%
```



De modelresiduen kunnen een verkeerde orde, meetvertraging of drift zichtbaar maken.



De warmere curve is een hypothese over isolatie, geen voorspelling van het bestaande vat.

UITLEG · 25.17

De compostbalans heeft een positieve terugkoppeling

17/22

Noem M de nog afbreekbare massa. Met dM/dt=−k(T)M is het reactie-vermogen q k(T)M, als k in s^{-1} staat. De warmtebalans is C dT/dt=q k(T)M−H(T−Tbuiten). De code rekent k eerst om van dag^{-1} naar s^{-1}.

Warmer → sneller → meer warmte → warmer is een positieve terugkoppeling. Zij kan een koude start voorbij een warmtedrempel helpen. Voorraaduitputting, warmteverlies en hogetemperatuurremming stoppen de stijging. Een geïsoleerd vat kan warm worden terwijl hetzelfde mengsel in een sterk lekkend vat koud blijft.

In werkelijkheid ontsnapt ook warmte met waterdamp en lucht. C en H zijn effectieve parameters; zij veranderen met vocht, beluchting en vulling. Een betrouwbare koppeling vraagt gemeten afkoelcurven, massaverlies, zuurstof-/vochtcondities en temperatuur op meerdere plekken.

GEKOPPELDE ENERGIE- EN VOORRAADBALANS

$$C\dot{T} = qk(T)M - H(T - T_b), \qquad \dot{M} = -k(T)M$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 25.18

Een koude start op vermogen toetsen

18/22

Bereken de energetische of kinetische gevolgen met expliciete aannames.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en controle van het geldigheidsgebied.

- Lesmodel: M=8,0 kg, q=12 MJ/kg, start 8 °C, buiten −2 °C, C=180 kJ/K. k20=0,08 dag^{-1}, Ea=50 kJ/mol.

OPLOSSING

1. Zonder de zeer kleine hogetemperatuurremming is k8=0,08·0,41663=0,03333 dag^{-1}.
2. Beginvermogen qMk/86400=37,03 W.
3. Bij H=1 W/K is beginverlies 10 W; bij H=4 W/K 40 W. Het teken van P−verlies bepaalt het teken van de eerste temperatuurhelling.

ANTWOORD

Isolatie kan de richting van de eerste opwarming veranderen.

Klopt dit? Het beginteken bewijst nog geen uiteindelijke piek of tijd boven 55 °C; daarvoor zijn voorraad en veranderende k(T) geïntegreerd.

PROEF · 25.19

Reactiesnelheid meten zonder onbekende microben te kweken

19/22

ONDERZOEKSVRAAG

Hoe verandert een reproduceerbare bruisreactie met temperatuur, en welke meetfout kan hetzelfde effect nabootsen?

MATERIAAL

identieke bruistabletten uit één batch · water · bekerglas · thermometer · balans of video · waterbad op 15/25/35 °C · veiligheidsbril

Veiligheid

Gebruik gewone materialen op deze kleine schaal volgens productinstructies; draag bril, proef niets en sluit gasproductie nooit luchtdicht af. Kweek of open geen onbekende compostculturen voor deze meting.

WERKWIJZE

1. Kies één waarneming: tijd tot een vaste massadaling door CO_2 of tot hetzelfde beeldcriterium; gebruik geen gesloten drukvat.
2. Houd watervolume, tablette massa, glasvorm en roeren gelijk. Laat water en tabletcondities stabiliseren; meet de werkelijke temperatuur.
3. Doe minstens drie replicaten per temperatuur, in afwisselende volgorde. Noteer beginvertraging en blanco-verdamping.
4. Plot waarneming tegen tijd; vergelijk beginsnelheid of een vooraf gekozen conversietijd. Test afzonderlijk intact versus verkleind bij gelijke massa.

WAARNEMING

Een hogere temperatuur kan sneller gasverlies geven; verkleinen kan een snellere beginfase geven. De mate volgt uit de eigen metingen.

VERKLARING

Oplossen, reactie en gastransport kunnen alle limiteren. De totale bruistijd is daarom niet automatisch 1/k van één elementaire stap. CO_2 dat in water blijft en verdamping beïnvloeden de balans.

VERHAAL · 25.20

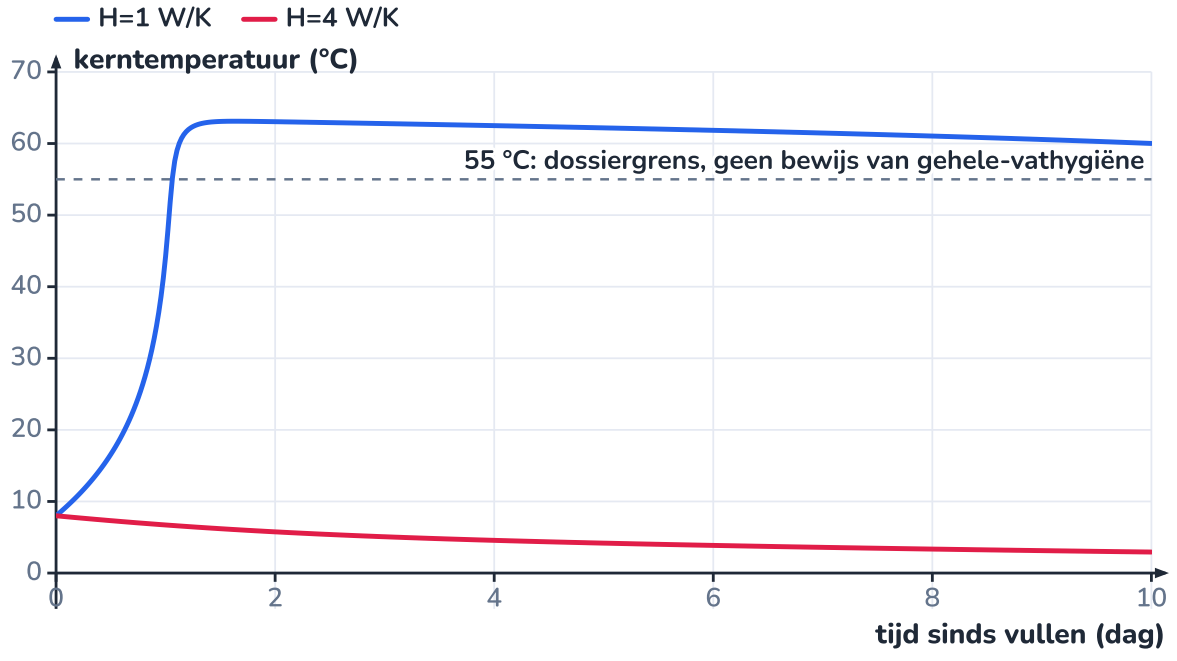
Een composthoop is ook een warmtewisselaar

20/22

Bij compostering voeren micro-organismen oxidaties uit en verdelen zij de vrijgekomen energie over groei en warmte. Een hoge kerntemperatuur zegt dus iets over het evenwicht tussen productie en verlies. Een klein vat heeft veel buitenoppervlak per hoeveelheid inhoud en verliest relatief gemakkelijk warmte.

Cornells temperatuurblad beschrijft deze productie-verliesbalans en het effect van koude omstandigheden. Dat verklaart waarom winterse stilstand zowel een kinetisch als een thermisch probleem is.

Voor Habitat blijft het vat 120 L, geïsoleerd en buiten de kweekruimte. De bestaande eis C/N 25–35 vraagt de verhouding van beschikbare koolstof en stikstof, geen simpele emmerverhouding. Een temperatuurpiek in één probe bewijst niet dat de hele massa voldoende behandeld is; het gebruiks- en hygiëneprotocol uit i35 blijft apart nodig.



Zelfverwarming is een gemeten systeemgedrag; thermisch ontwerp en biologische beschikbaarheid moeten samen kloppen.

NASLAG · 25.21

Thermochemie en kinetiek bij elkaar

vormingsenthalpieën

$$\Delta_r H^\circ = \sum \nu \Delta_f H^\circ_{prod} - \sum \nu \Delta_f H^\circ_{react}$$

symbool	betekenis	eenheid
ΔrH	enthalpie per mol geschreven reactie	J/mol

empirische snelheidswet

$$r = k[A]^m[B]^n$$

symbool	betekenis	eenheid
r	reactiesnelheid	mol/(L·s)
m, n	partiële ordes	1

Arrhenius

$$k = Ae^{-E_a/(RT)}$$

symbool	betekenis	eenheid
Ea	activeringsenergie	J/mol
T	absolute temperatuur	K

eerste orde

$$c = c_0 e^{-kt}$$

symbool	betekenis	eenheid
k	eerste-ordeconstante	s^{-1}

warmtebalans

$$C\dot{T} = P_{reactie} - P_{verlies}$$

symbool	betekenis	eenheid
C	warmtecapaciteit	J/K

Verandering	ΔH	k
vergelijking omkeren	teken omkeren	andere richting / mechanisme
vergelijking verdubbelen	verdubbelen	definitie van r controleren
katalysator toevoegen	zelfde eindpunten	route en snelheid veranderen
temperatuur veranderen	eventueel warmtecapaciteitscorrectie	Arrhenius binnen geldig gebied

Thermochemische referentie: NIST methaan, CO_2 en waterdamp. Waarden, fase en gekozen review zijn expliciet vermeld; raadpleegdatum 30-09-2026. Katalysatorbegrip: IUPAC.

HET GEHEEL · 25.22

Habitat: winterstilstand diagnosticeren voordat je ingrijpt

Kinetiek geeft de warmtebron, e17 geeft de warmtebalans en i35 geeft biologie en hygiëne. De wintervraag begint met gegevens: vatvulling, C/N, vocht, poreuze structuur, zuurstoftoevoer, buiten- en kerntemperatuur. Een koud vat kan substraatarm, zuurstofarm, te nat, te droog of thermisch te klein zijn.

Meet eerst, vergelijk daarna kleine veilige wijzigingen in mengsel of isolatie en beoordeel warmteverlies én beluchting. Meer isolatie zonder zuurstofpad kan het proces verslechteren. Een externe warmtebron verbruikt stationenergie en vraagt een afzonderlijk beveiligd ontwerp.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief

I35 Micro-organismen en biotechnologie

E26 Chemisch evenwicht

Warmteproductie moet groter zijn dan verlies.

Compostvat, C/N en hygiëne.

Een snelle reactie hoeft niet volledig af te lopen.

E31 Bioprocestechniek

Groei en substraatbalansen met meer biologische detail.

Habitat

Het 120 L-vat en C/N 25–35 blijven dossierwaarden. Nieuwe simulatieparameters C=180 kJ/K, H=1/4 W/K, 8 kg afbreekbare voorraad, 12 MJ/kg, Ea=50 kJ/mol en k20=0,08 dag^{-1} zijn een **te toetsen lesmodel**. Zij zijn geen nieuwe metingen of gegarandeerde hygiëneprestatie. Compost blijft buiten de kweekruimte en gaat nooit in het NFT-circuit.

SAMENVATTING

In het kort

- Enthalpie vergelijkt begin- en eindtoestand; snelheid beschrijft de route in de tijd.
- Hess telt consistente reacties en enthalpieën op; bindingsenthalpieën geven een gasfaseschatting.
- Reactieordes volgen uit metingen, niet automatisch uit coëfficiënten.
- Temperatuur, concentratie, oppervlak en katalysator hebben verschillende effecten.
- Arrhenius gebruikt kelvin en een gecontroleerd mechanismegebied.
- Een compostmodel koppelt afbraak, voorraad, warmteproductie en warmteverlies; hygiëne vraagt afzonderlijk bewijs.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

reactie-enthalpie

Enthalpieverschil per mol van de geschreven reactie bij gespecificeerde toestanden.

reactieorde

Som van gemeten concentratie-exponenten in een snelheidswet.

activeringsenergie

Parameter die de temperatuurgevoeligheid van k in een Arrheniusgebied beschrijft.

katalysator

Stof die een snellere route mogelijk maakt en over de cyclus wordt geregenereerd.

halveringstijd

Tijd om de concentratie tot de helft terug te brengen; bij eerste orde ln2/k.

E EXPERT · DEEL E5 · CHEMIE EN MATERIALEN

HANDBOEK · HOOFDSTUK 26

Chemisch evenwicht

Van Q en K naar buffers die een eindige verstoring opvangen

Een evenwicht staat op moleculair niveau niet stil. Je berekent zuur-baseverdelingen, eindige buffercapaciteit en neerslag, en onderzoekt hoe de hydroponie stabiel kan blijven zonder haar voedingschemie te verstoren.

11× uitleg · 7× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 12 lestijden

M Materie en chemie · B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren



Een buffer wordt eerst buiten de voedingsinstallatie op capaciteit en compatibiliteit getoetst.

Na dit hoofdstuk

- Je onderscheidt dynamisch evenwicht, Q en K en berekent een eenvoudige evenwichtssamenstelling.
- Je verklaart Le Chatelier via Q en benoemt druk-/temperatuurcondities.
- Je berekent zwakke zuur/base-pH met controle van massa en lading.
- Je leidt Henderson–Hasselbalch af en berekent buffervoorraad en capaciteit.
- Je gebruikt vrije-ionenproducten voor neerslag en toetst een hydroponische bufferkandidaat.

UITLEG · 26.1

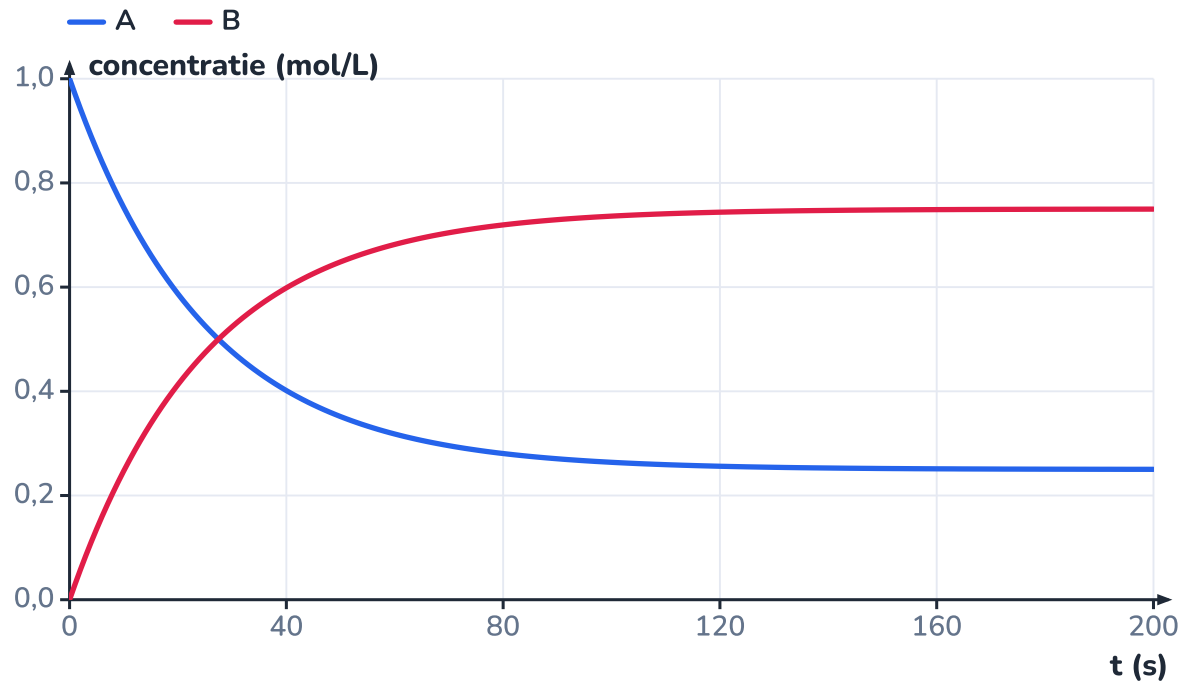
Evenwicht is beweging met netto nul

1/23

Een omkeerbare reactie blijft op moleculair niveau in beide richtingen verlopen. Bij evenwicht zijn heen- en terugreactiesnelheid gelijk, zodat de macroscopische samenstelling niet meer verandert. Het is dus dynamisch; de reactanten zijn niet noodzakelijk opgebruikt.

Voor het eenvoudige A ⇌ B-model geldt rheen=kheen[A] en rterug=kterug[B]. Gelijkstellen geeft [B]/[A]=kheen/kterug. Met 0,03 en 0,01 s^{-1} is die verhouding drie. Het totaal [A]+[B]=1,0 mol/L blijft behouden: evenwicht A=0,25 en B=0,75 mol/L.

Na een verstoring worden de snelheden tijdelijk ongelijk en verandert de samenstelling tot een nieuw evenwicht. Een afvoer of toevoer kan een stationaire toestand met netto doorstroming maken; dat is geen gesloten chemisch evenwicht.



Op 200 s is de netto snelheid klein; beide afzonderlijke omzettingen zijn nog aanwezig.

UITLEG · 26.2

K en Q: dezelfde vorm, een andere rol

2/23

Voor a A+b B ⇌ c C+d D definieer je Q=aC^c aD^d/(aA^a aB^b), met activiteiten a. Bij evenwicht is Q=K. Q gebruikt de actuele samenstelling; K karakteriseert de gekozen reactie bij een bepaalde temperatuur.

In een verdunde ideale oplossing benader je a≈c/c°. Met c°=1 mol/L worden numerieke concentraties vaak direct ingevuld, maar de thermodynamische K is dimensieloos. Voor ideale gassen gebruik je p/p°. Zuivere vaste stoffen en vloeistoffen hebben in hun standaardtoestand activiteit ongeveer één en verschijnen niet als variabele concentratie in de uitdrukking.

Q kleiner dan K geeft thermodynamische drijving naar producten; Q groter dan K naar reactanten. Dit zegt niets over hoe snel die verandering verloopt. Zie IUPAC voor verschillende evenwichtsconstanten.

POSITIEVE N VOOR PRODUCTEN, NEGATIEVE VOOR REACTANTEN

$$Q = \prod_i a_i^{\nu_i}, \qquad Q_{\text{evenwicht}} = K$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.3

N_2O_4 en NO_2: een ICE-tabel oplossen

3/23

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

- $N_2O_4 \rightleftharpoons 2\ NO_2$; aanvankelijk 0,100 mol/L N_2O_4, geen NO_2. Verstrekte concentratieconstante Kc=0,040 bij 298,15 K in de genormaliseerde c/c°-conventie; c°=1 mol/L. Dit is geen Kp.

GEVRAAGD

- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Noem x de hoeveelheid N_2O_4 die per liter dissocieert. Evenwicht: N_2O_4=0,100−x; NO_2=2x.
2. Kc=(2x/c°)²/[(0,100−x)/c°]. Met numerieke waarden in mol/L: $4x^2/(0{,}100-x)=0{,}040$.
3. $4x^2+0{,}040x-0{,}00400=0$. De positieve wortel is x=0,027016 mol/L; de negatieve is fysisch ongeschikt.
4. N_2O_4=0,072984; NO_2=0,054031 mol/L. Controleer atoom-/massabalans en Q.

ANTWOORD

Er blijft zowel dimeer als monomeer over.

Klopt dit? Deze gassen vormen geen klasproef; de verstrekte K is rekenmateriaal bij vaste condities.

UITLEG · 26.4

Gasevenwicht: Kc en Kp niet verwisselen

4/23

Het N_2O_4-voorbeeld verstrekt een **concentratieconstante Kc** in de genormaliseerde c/c°-conventie. De thermodynamische gasconstante Kp gebruikt activiteiten p/p°. Voor ideale gassen is p=cRT; bij c in mol/m³ volgt daarom $Kp=Kc(RTc°/p°)^{\Delta vgas}$.

Hier is Δvgas=1, c°=1000 mol/m³ en p°=100000 Pa. Bij 298,15 K is de factor 24,78957; de verstrekte Kc=0,040 zou dan Kp≈0,99158 betekenen. De getallen zijn rekengegevens, geen gemeten NO_2-dataset. Vul 0,040 dus niet als drukconstante in.

Bij constante T veranderen Qc en Qp tijdens compressie met dezelfde volumefactor en geven zij dezelfde richting. Als T verandert, verandert ook de RT-omrekenfactor. De Van 't Hoff-relatie met de thermodynamische reactie-enthalpie geldt rechtstreeks voor de thermodynamische gasdrukconstante Kp; voor Kc moet je de temperatuurafhankelijke conversie meenemen.

IDEALE GASACTIVITEITEN VERSUS GENORMALISEERDE CONCENTRATIES

$$K_p = K_c \left(\frac{RTc^\circ}{p^\circ} \right)^{\Delta \nu_{\text{gas}}}$$

UITLEG · 26.5

Le Chatelier krijgt betekenis via Q

Voeg reactant toe: de noemer van Q groeit, Q daalt en het systeem kan meer product vormen. Verwijder product: hetzelfde gebeurt via de teller. De reactie werkt de verstoring gedeeltelijk tegen; zij hoeft de oorspronkelijke concentratie niet exact terug te brengen.

Verklein het volume van een ideaal gasmengsel: alle partiële drukken stijgen. Voor $N_2O_4 \rightleftharpoons 2\ NO_2$ groeit Q met de drukfactor, want Δvgas=+1. Bij constante temperatuur blijft K gelijk en verschuift de samenstelling naar N_2O_4. Bij gelijke aantallen gasmolen aan beide kanten is er in dit ideale geval geen directe drukverschuiving.

Inert gas toevoegen bij constant volume verandert de partiële drukken van de reagerende soorten niet. Bij constante totale druk wordt het volume groter; dan veranderen die partiële drukken wel. Schrijf dus altijd de proefconditie erbij in plaats van alleen 'meer druk'.

IDEALE GASSEN BIJ VASTE TEMPERATUUR

$$Q_{\text{na compressie}} = \lambda^{\Delta\nu_{\text{gas}}} Q_{\text{voor}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.6

Compressie en katalysator uit elkaar houden

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

- $N_2O_4 \rightleftharpoons 2\ NO_2$ is in evenwicht, Kc=0,040 in de concentratieconventie van het vorige voorbeeld. Het volume wordt snel gehalveerd bij constante T.

GEVRAAGD

- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Vóór reactie veranderen alle partiële drukken met factor twee. Qc wordt 2^(2−1)·Kc=0,080; de bijbehorende Qp verdubbelt eveneens.
2. Qc groter dan Kc drijft netto naar N_2O_4. Tijdens herschikking zijn de oorspronkelijke stofhoeveelheden niet vast.
3. Een katalysator verandert de snelheid van bereiken, niet K bij dezelfde T. Hij verplaatst het uiteindelijke evenwicht niet.

ANTWOORD

Compressie verschuift dit evenwicht naar minder gasdeeltjes.

Klopt dit? Snel comprimeren kan in werkelijkheid T verhogen; de berekening neemt vervolgens temperatuurbeheersing aan.

UITLEG · 26.7

Temperatuur verandert K zelf

7/23

Concentratie en druk veranderen Q; bij dezelfde temperatuur blijft K hetzelfde. Temperatuur kan K veranderen. Voor een exotherme voorwaartse reactie bevoordeelt hogere T doorgaans de terugrichting; voor een endotherme voorwaartse reactie de heenrichting. 'Warmte als product' is een geheugensteun, geen extra chemische soort in Q.

Thermodynamisch is ΔrG°=−RT ln K. Voor ongeveer constante reactie-enthalpie over een beperkt gebied volgt de geïntegreerde Van 't Hoff-relatie ln(K2/K1)=−ΔrH°/R(1/T2−1/T1). Het teken verklaart de richting.

Hogere temperatuur kan tegelijk k in beide richtingen vergroten. Een reactie kan dus sneller een evenwicht bereiken waarin minder van het gewenste product zit. Dat verbindt de kinetiek uit e25 met de evenwichtssamenstelling.

BEPERKT TEMPERATUURGEBIED, ONGEVEER CONSTANTE ΔRH°

$$\ln \frac{K_2}{K_1} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

UITLEG · 26.8

Ka, pKa en pH zijn verwant maar verschillend

8/23

Voor HA+H_2O ⇌ H_3O^++A^- is Ka=aH aA/aHA. De wateractiviteit wordt in dit verdunde model in de constante opgenomen. pKa=−log10 Ka karakteriseert de zuursterkte bij gespecificeerde condities: kleinere pKa betekent sterker zuur.

pH=−log10 aH karakteriseert een oplossing, niet alleen de stof. In het ideale concentratiemodel wordt dat −log10([H_3O^+]/c°). De precieze IUPAC-definitie gebruikt activiteit; ionsterkte en temperatuur kunnen een hydroponische berekening merkbaar beïnvloeden.

Bij 25 °C nemen we Kw=[H_3O^+][OH^-]=10^{-14} in de gebruikelijke mol/L-conventie. pH+pOH=14 geldt dus bij die temperatuur en benadering. Een neutrale oplossing heeft [H_3O^+]=[OH^-]; haar pH is niet op elke temperatuur exact zeven.

DIMENSIELOZE ZUURCONSTANTE MET STANDAARDCONCENTRATIE

$$K_a \approx \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA]c^\circ}, \qquad pK_a = -\log_{10} K_a$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.9

Een zwak zuur: eerst de balans, dan de wortel

9/23

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- HA totaal C=0,100 mol/L, Ka=1,8·10^{-5}; geen toegevoegd zout; 25 °C.
- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Als waterbijdrage verwaarloosbaar is: [H]=[A]=x en [HA]=C−x.
2. Ka=x²/[(C−x)c°]. Met numerieke mol/L-waarden geeft x²+Ka x−Ka C=0.
3. x=[−Ka+√(Ka²+4KaC)]/2=0,00133271 mol/L; pH=2,87528.
4. De benadering x≈√(KaC)=0,00134164 geeft pH=2,87236. Dissociatie 1,33 % is klein; de fout wordt gecontroleerd.

ANTWOORD

De zwakke zuur-pH is ongeveer 2,875.

Klopt dit? Een zwak zuur kan bij deze concentratie toch een zure oplossing geven. 'Zwak' slaat op het evenwicht, niet op ongevaarlijkheid.

UITLEG · 26.10

Wanneer de eenvoudige wortel niet volstaat

10/23

Bij zeer verdunde oplossingen kan water niet worden weggelaten. Een sterk zuur van 10^{-8} mol/L heeft niet pH 8: zuur toevoegen aan water maakt de oplossing niet basisch. Ladingsbalans $h=C_{zuur}+K_w/h$ geeft $h=(C_{zuur}+\sqrt{(C_{zuur}^2+4K_w)})/2$ en pH≈6,9783.

Voor een algemeen monoprotisch zuur heb je $C_T=[HA]+[A^-]$, de Ka-relatie en ladingsbalans nodig. $A^-=C_T\,K_a/(K_a+h)$ in de numerieke mol/L-conventie. Inerte tegenionen tellen mee: $h+c_{sterk}=K_w/h+[A^-]$. Daarmee kun je zout, toegevoegd sterk zuur en sterke base consistent oplossen.

De code zoekt in pH-ruimte met bisectie. Een interval pH 0–14 dekt de gekozen voorbeelden; voor sterkere of zeer bijzondere oplossingen moet het interval en activiteitenmodel worden aangepast. Een numerieke wortel maakt verkeerde chemische aannames niet juist.



Activiteiten, temperatuur en complexvorming bepalen de modelkwaliteit

Een berekening is pas gesloten als zowel stofbehoud als elektroneutraliteit klopt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.11

De geconjugeerde base is zelf een zwakke base

11/23

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

- $A^-+H_2O \rightleftharpoons HA+OH^-$; $Ka(HA)=1{,}8\cdot10^{-5}$; $Kw=10^{-14}$; zoutconcentratie 0,050 mol/L.

GEVRAAGD

- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. $Kb=Kw/Ka=5{,}5556\cdot10^{-10}$, want de twee evenwichtsreacties samen geven waterauto-ionisatie.
2. Bij kleine omzetting $[OH]\approx\sqrt{(KbC)}=5{,}2705\cdot10^{-6}$ mol/L.
3. $pOH=5{,}27815$; $pH\approx8{,}72185$. Hydrolysefractie is ongeveer 0,0105 %, zodat de C-benadering passend is.

ANTWOORD

Een oplossing van het zout van dit zwakke zuur is basisch.

Klopt dit? De activiteit van tegenionen en water blijft ideaal aangenomen; die zoutoplossing is geen hydroponisch recept.

UITLEG · 26.12

Een buffer heeft twee voorraadbakken

12/23

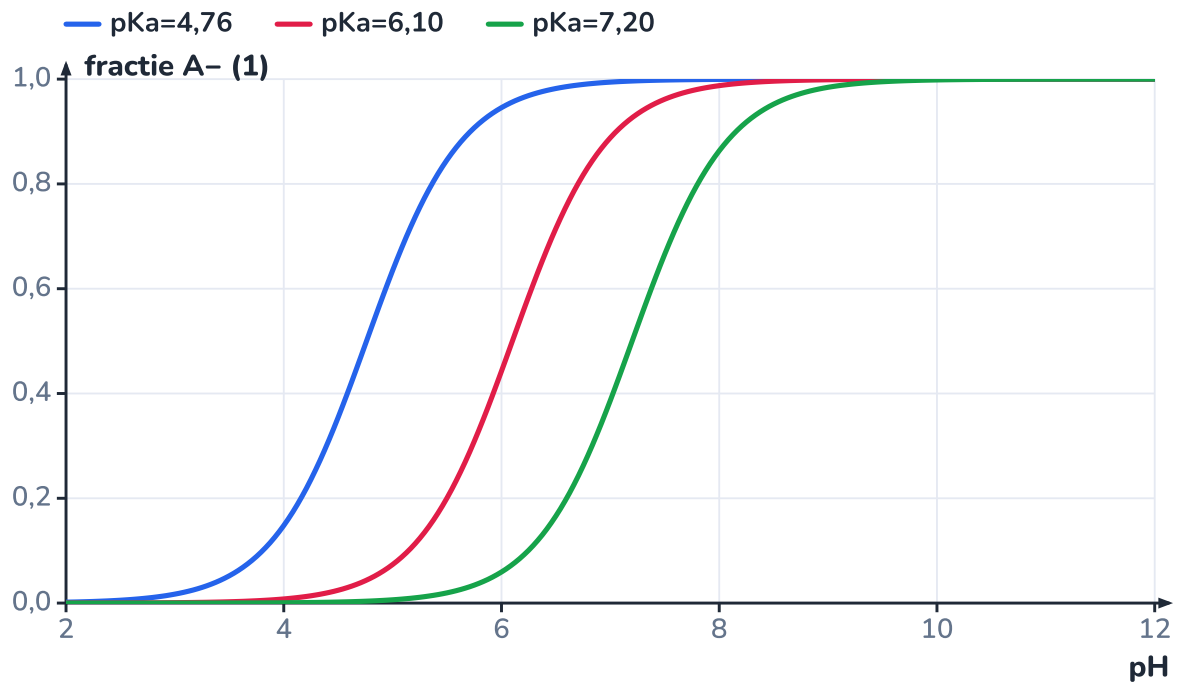
Een zuur-basebuffer bevat aanzienlijke hoeveelheden HA én A^-. Toegevoegd H_3O^+ wordt grotendeels door A^- opgevangen: $A^-+H_3O^+\rightarrow HA+H_2O$. Toegevoegd OH^- gebruikt HA: $HA+OH^-\rightarrow A^-+H_2O$. De verhouding verandert; pH blijft daarom slechts ongeveer gelijk.

$Ka=h[A]/[HA]$ leidt tot Henderson–Hasselbalch: $pH=pKa+\log10([A]/[HA])$ in de ideale benadering. De verhouding bepaalt het pH-niveau; de totale concentratie bepaalt hoeveel verstoring opgevangen kan worden. Verdunnen behoudt de verhouding ongeveer maar vermindert capaciteit per liter.

Bij $pH=pKa$ zijn beide vormen gelijk. Rond $pKa\pm1$ liggen de verhoudingen ongeveer tussen 0,1 en 10; daar zijn beide vormen bruikbaar aanwezig. Een buffer is geen onbeperkte pH-vergrendeling.

HENDERSON–HASSELBALCH ONDER DE GENOEMDE AANNAMES

$$pH = pK_a + \log_{10}\frac{[A^-]}{[HA]}$$



Bij pH 5,8 heeft een pKa van 7,2 weinig basische buffervoorraad; pKa-keuze en capaciteit zijn aparte vragen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.13

Buffer bij pH 5,80: een rekenkandidaat

13/23

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

- Monoprotisch model met pKa=6,10, CT=2,00 mmol/L, 25 °C; doel pH 5,80. Deze parameters zijn een geïsoleerde proef, geen toevoeging aan NFT.

GEVRAAGD

- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. [A]/[HA]=10^(5,80−6,10)=0,501187.
2. [HA]=2/(1+0,501187)=1,332279 mmol/L; [A]=0,667721 mmol/L.
3. Een netto sterke-basedosis van 0,200 mmol/L zet HA om in A: HA=1,132279 en A=0,867721 mmol/L.
4. Henderson geeft pH=6,10+log10(0,867721/1,132279)≈5,984. De volledige balans in de code neemt ook vrij H en OH mee.

ANTWOORD

De beperkte basedosis verschuift pH veel minder dan in ongebufferd water.

Klopt dit? Henderson vereist resterende hoeveelheden van beide vormen; buiten die voorraad moet je de volledige balans gebruiken.

UITLEG · 26.14

Buffercapaciteit is een lokale helling

14/23

Noem b de netto toegevoegde sterke base per liter en definieer β=db/dpH. Voor een ideale monoprotische buffer bij constant volume is β=ln10[h+Kw/h+CT Ka h/(Ka+h)²]. De eerste twee termen komen van vrij zuur en water; de derde van omzetting tussen HA en A^-.

De bufferterm is maximaal bij h=Ka: βmax=ln10·CT/4≈0,576 CT per pH-eenheid. De capaciteit is een lokale afgeleide. Een stap van één pH-eenheid vraagt integraal van β, niet automatisch β op het begin maal één.

Een meer geconcentreerde buffer kan de pH stabieler maken maar ook ionsterkte, nutriëntenbelasting, complexvorming of biologische effecten verhogen. Een functioneel hydroponisch ontwerp vraagt meer dan een hoge β.

IDEALE LOKALE BUFFERCAPACITEIT

$$\beta = \ln 10 \left(h + \frac{K_w}{h} + \frac{C_T K_a h}{(K_a + h)^2} \right)$$

CODE · 26.15

pH oplossen vanuit lading en stofbehoud

15/23

De code berekent pH na zuur/base zonder de Hendersonbenadering tot voorbij uitputting door te trekken. Het 2 mmol/L-, pKa 6,10-model is een wiskundige kandidaat voor een proef buiten het NFT-circuit. De begintegenionen worden zo gekozen dat de volledige balans precies pH 5,80 geeft. Positieve dosis is sterke base, negatieve dosis sterk zuur; volume blijft constant verondersteld.

Python **evenwicht.py** 49 regels

```python
# evenwicht.py — activiteiten benaderd door c/(1 mol/L), 25 °C
import math
import numpy as np
KW=1e-14

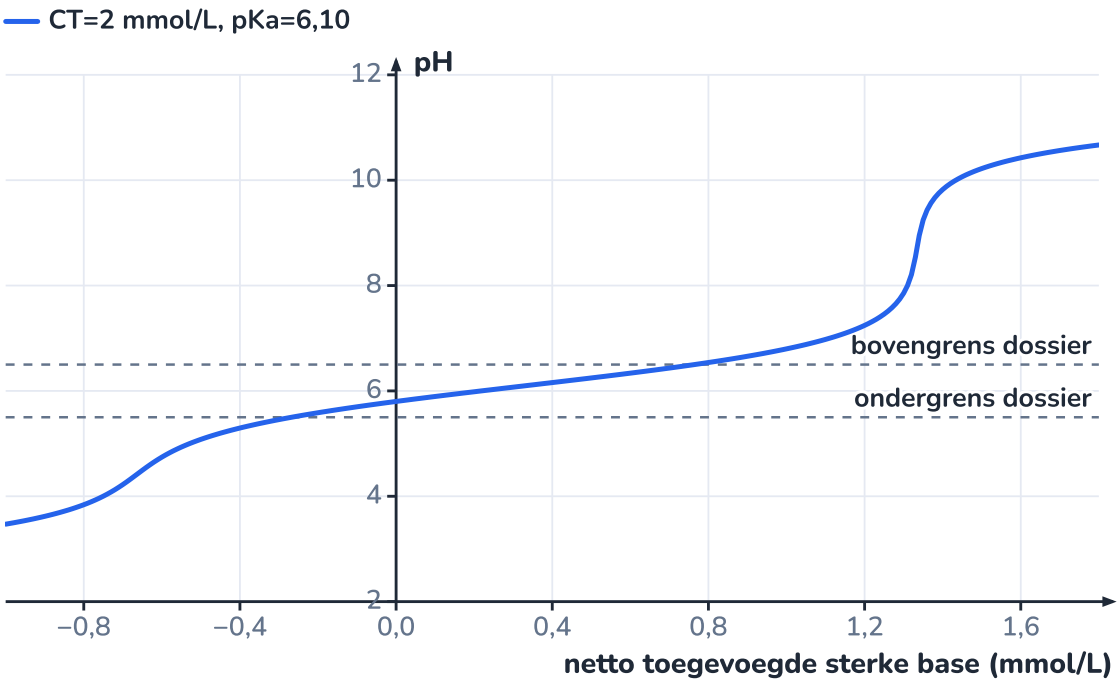
def ph(ct,ka,sterk):
    # HA/A- plus inert monovalent tegenion:
    # h + sterk = Kw/h + ct*Ka/(Ka+h).
    # sterk is netto sterke-kationen minus sterke-anionen (mol/L).
    lo,hi=0.0,14.0
    for i in range(100):
        mid=(lo+hi)/2
        h=10**(-mid)
        rest=h+sterk-KW/h-ct*ka/(ka+h)
        if rest>0: lo=mid
        else: hi=mid
    return (lo+hi)/2

ct, pka, start = 0.002, 6.10, 5.80
ka=10**(-pka)
h0=10**(-start)
a0=ct*ka/(ka+h0)
sterk0=a0+KW/h0-h0
dos=np.linspace(-0.001,0.0018,281)
curve=np.array([(d*1000,ph(ct,ka,sterk0+d)) for d in dos])
```

```
for d in (-0.0002,0,0.0002,0.0005,0.001):
    print(f"netto base {d*1000:+.3f} mmol/L: pH {ph(ct,ka,sterk0+d):.5f}")
print(f"begin HA={(ct-a0)*1000:.6f}, A-={a0*1000:.6f} mmol/L")
beta=math.log(10)*(h0+KW/h0+ct*ka*h0/(ka+h0)**2)
print(f"buffercapaciteit bij start {beta*1000:.6f} mmol/(L pH)")
for grens in (5.5,6.5):
    h=10**(-grens)
    nodig=KW/h+ct*ka/(ka+h)-h-sterk0
    print(f"naar pH {grens:.1f}: {nodig*1000:+.6f} mmol/L; "
          f"voor 56 L {nodig*56*1000:+.4f} mmol")

# Zwak zuur zonder toegevoegd zout: volledige water-/ladingsbalans.
print(f"HA 0.100 mol/L, Ka1.8e-5: pH {ph(0.1,1.8e-5,0):.6f}")
print(f"sterk zuur 1e-8 mol/L: pH {ph(0,1,-1e-8):.6f}")
# De kinetiek A <-> B conserveert totaal; K=kheen/kterug=3.
t=np.linspace(0,200,201)
b=.75*(1-np.exp(-.04*t))
a=1-b
print(f"A/B op 200 s: {a[-1]:.6f}/{b[-1]:.6f} mol/L")
# AgCl-model na mengen gelijke volumes 1e-3 M Ag+ en 1e-3 M Cl-.
tot=0.0005
s=math.sqrt(1.8e-10)
print(f"AgCl: evenwicht {s:.8f} mol/L; "
      f"neerslag in 0.100 L {(tot-s)*0.100*143.32*1000:.4f} mg")
```

```
netto base -0.200 mmol/L: pH 5.58588
netto base +0.000 mmol/L: pH 5.80000
netto base +0.200 mmol/L: pH 5.98394
netto base +0.500 mmol/L: pH 6.24615
netto base +1.000 mmol/L: pH 6.79830
begin HA=1.332279, A-=0.667721 mmol/L
buffercapaciteit bij start 1.027843 mmol/(L pH)
naar pH 5.5: -0.267782 mmol/L; voor 56 L -14.9958 mmol
naar pH 6.5: +0.764078 mmol/L; voor 56 L +42.7884 mmol
HA 0.100 mol/L, Ka1.8e-5: pH 2.875277
sterk zuur 1e-8 mol/L: pH 6.978294
A/B op 200 s: 0.250252/0.749748 mol/L
AgCl: evenwicht 0.00001342 mol/L; neerslag in 0.100 L 6.9737 mg
```



De steile buitenstukken tonen uitputting van één buffervoorraad; een berekend plateau is eindig.

UITLEG · 26.16

Hydroponie: kies een kandidaat, geen blind recept

16/23

Het dossier vraagt pH 5,8, met bijsturing onder 5,5 en boven 6,5. Een pKa in de buurt helpt, maar een voedingsbuffer moet compatibel zijn met planten, microben, mineralen, materiaal en meetsonde. Een fosfaatpaar met pKa rond 7,2 heeft bij 5,8 verhouding ongeveer 0,040; veel extra fosfaat kan dan nodig lijken en het nutriëntenrecept verstoren.

MES is een voorbeeld van een laboratoriumbuffer in het juiste pH-gebied. Het referentiecentrum van de fabrikant vermeldt pKa 6,10 bij 25 °C en een temperatuureffect. Dat is een gegevensbron voor de rekenkandidaat, geen bewijs dat deze stof geschikt of gewenst is in het bestaande teeltsysteem.

Begin met een gescheiden klein monster en een nulproef van de bestaande voeding. Meet buffervermogen en EC, kijk naar neerslag en drift, en beoordeel daarna plantcompatibiliteit met een gecontroleerde aparte proef. De bestaande pH-minwerkoplossing en proeftitratie uit i15 blijven het operationele uitgangspunt.

Een pH-getal bepaalt geen zuurdosis

De benodigde dosis hangt ook van alkaliniteit, buffers en totaalvolume af. Hetzelfde pH-getal kan in twee watermonsters een heel andere titratievraag geven.

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.17

De kandidaat heeft een eindige Habitat-marge

17/23

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

- Model CT=2 mmol/L, pKa=6,10, start pH 5,80; denkbeeldig volume 56 L, constant volume.

GEVRAAGD

- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Los voor elke grens de balans op: b=Kw/h+CT Ka/(Ka+h)−h−csterk,0.
2. De echte code-uitvoer geeft de zuur-/basedosis naar 5,5 en 6,5 en schaalt die met 56 L.
3. Vergelijk met 90 mL van 0,50 mol/L zuur uit het bestaande i15-proeftitratievoorbeeld: dat is 45 mmol zuur. Die dosis hoort bij dat gemeten voedingsmonster en mag niet in deze nieuwe buffer worden gekopieerd.
4. Na toevoegen verandert tevens de hoeveelheid nitraat en het volume. Werk met equivalente mol zuur, juiste verdunning en opnieuw meten na mengen.

ANTWOORD

Een buffer vermindert drift maar verandert de benodigde titratiedosis.

Klopt dit? Er is geen nieuwe automatische dosering vastgelegd. Eerst experimentele compatibiliteit, capaciteit en regel-/doseergrenzen bepalen.

UITLEG · 26.18

Oplossen is ook een dynamisch evenwicht

18/23

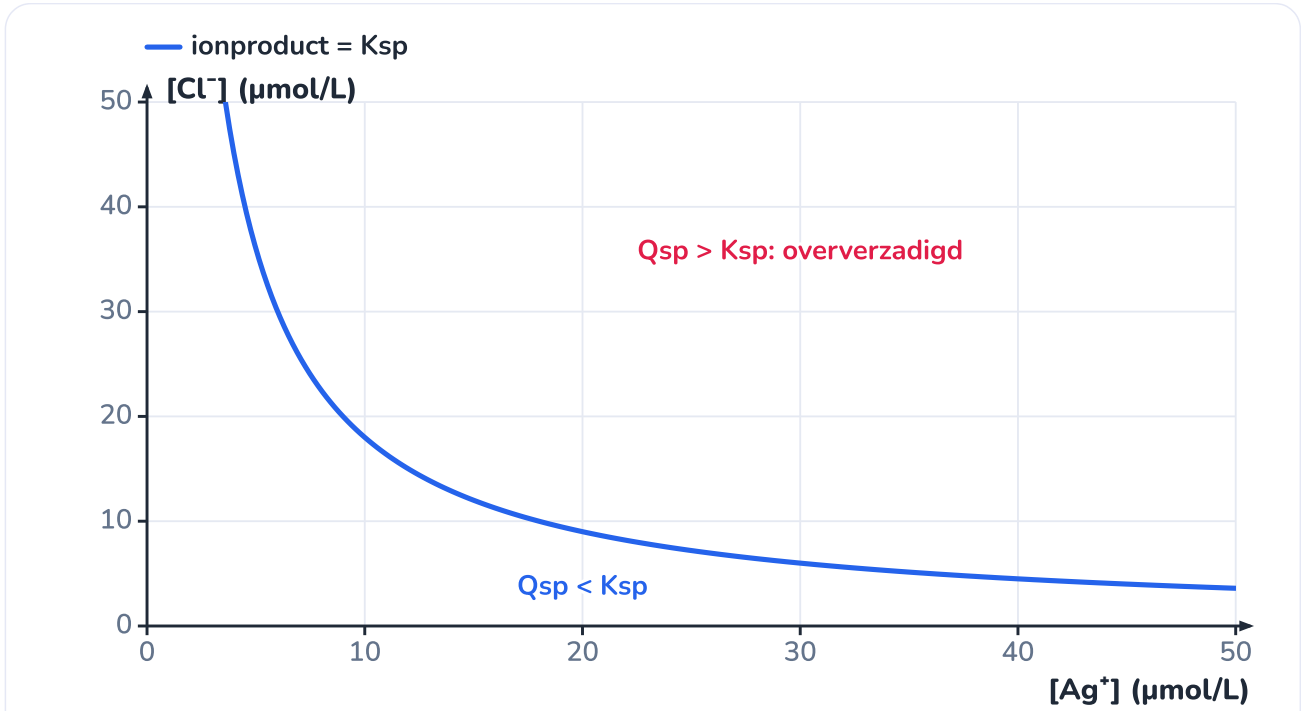
Voor $AgCl(s) \rightleftharpoons Ag^+(aq)+Cl^-(aq)$ is $Ksp=aAg\ aCl$; de activiteit van de zuivere vaste fase is één. In het ideale model: $Ksp \approx ([Ag]/c^\circ)([Cl]/c^\circ)$. In zuiver water zonder andere reacties zijn beide concentraties s en volgt $s \approx c^\circ\sqrt{Ksp}$.

Het actuele ionproduct Qsp vertelt of de vrije-ionensamenstelling onder- of oververzadigd is. Qsp kleiner dan Ksp: aanwezige vaste stof kan oplossen. Qsp groter: neerslag is thermodynamisch mogelijk, maar kiemvorming kan tijd vragen. Bij evenwicht met vaste stof is Qsp=Ksp.

Een gemeenschappelijk ion verlaagt in dit eenvoudige model de oplosbaarheid. Complexvorming kan vrije ionen verlagen en juist meer totale stof in oplossing houden. Daarom is totaal zilver niet automatisch gelijk aan vrij Ag^+, en totaal fosfaat niet gelijk aan PO_4^{3-}.

OPLOSBAARHEIDSPRODUCT VAN DE RELEVANTE VRIJE IONEN

$$K_{\mathrm{sp}} = \prod_i a_i^{\nu_i}$$



Onder de hyperbool is het idealiseerde mengsel onderverzadigd; erboven kan AgCl neerslaan.

UITGEWERKT VOORBEELD · 26.19

Neerslag na mengen: eerst verdunnen

19/23

Bereken het evenwicht met massa-, ladings- en evenwichtsrelaties.

GEGEVEN

- 50,0 mL met 1,00 mmol/L Ag^+ en 50,0 mL met 1,00 mmol/L Cl^-; Ksp=1,8·10⁻¹⁰; MAgCl=143,32 g/mol. Ideaal model zonder complexen.

GEVRAAGD

- Samenstelling, pH of neerslag met controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Na mengen is elk totaal 0,500 mmol/L; $Q_{sp}=(5{,}00\cdot10^{-4})^2=2{,}50\cdot10^{-7}$, groter dan Ksp.
2. Bij gelijke hoeveelheden blijven vrije [Ag]=[Cl]=$\sqrt{K_{sp}}=1{,}34164\cdot10^{-5}$ mol/L.
3. Neerslagmol=(0,000500−0,0000134164)·0,100=$4{,}86584\cdot10^{-5}$ mol.
4. Massa=6,9737 mg. Een kleine vrije rest blijft in oplossing.

ANTWOORD

Ongeveer 6,974 mg AgCl slaat in het rekenmodel neer.

Klopt dit? AgCl is een rekenvoorbeeld; zilverzouten horen niet in de voedingsoplossing. De MIT-les over oplosbaarheid gebruikt deze Ksp-orde.

PROEF · 26.20

Buffervermogen vergelijken op kleine schaal

20/23

ONDERZOEKSVRAAG

Hebben twee vloeistoffen met dezelfde begin-pH hetzelfde vermogen om toegevoegde zuur/base op te vangen?

MATERIAAL

- geijkte pH-meter
- kleine identieke bekers
- water en docentbereide verdunde buffer
- micropipet of doseerspuit
- door docent gekozen verdunde testoplossing
- veiligheidsbril

Veiligheid

De docent kiest verdunde reagentia en voert het veiligheidsprotocol uit. Gebruik niet de voedingsinstallatie als proefvat, voeg nooit willekeurige buffer of zilverzouten aan NFT toe en meng geen geconcentreerde zuren/basen zelfstandig.

WERKWIJZE

1. Laat de docent twee oplossingen bij dezelfde temperatuur en begin-pH klaarzetten: weinig gebufferd en gebufferd.
2. Meet het volume en de pH; voeg in elke beker gelijke kleine molhoeveelheden van dezelfde testoplossing toe.
3. Roer, wacht op stabiele meting en log cumulatieve mol per liter tegen pH. Doe zuur en base in aparte verse monsters.
4. Herhaal met een verdunde buffer en vergelijk de verhouding met capaciteit. Verzamel afval volgens gebruikte stoffen.

WAARNEMING

De pH-curven verschillen ondanks hetzelfde beginpunt. De verdunde buffer heeft ongeveer dezelfde begin-pH en minder capaciteit per liter.

VERKLARING

De voorraad HA/A^- vangt molhoeveelheden op; een pH-meter meet een activiteit en vertelt die voorraad niet rechtstreeks.

VERHAAL · 26.21

De voorraadfles en het reservoir zijn chemisch verschillend

21/23

Een voedingsrecept kan in verdunde vorm helder zijn en als sterk geconcentreerde voorraad toch neerslaan. Bij mengen groeien de producten van vrije calcium-, fosfaat- of sulfaatactiviteiten; hun temperatuur en pH veranderen de speciatie. Een pomp kan neerslag niet eenvoudig terug veranderen in beschikbaar mineraal.

Penn State adviseert gescheiden concentraten voor calcium en fosfaat/sulfaat vanwege deze incompatibiliteit. De les is geen universele Ksp voor een onbekend complex voedingsmengsel: eerst het echte recept, de vrije soorten en verdunningsvolgorde bepalen.

Voor Habitat hoort pH-beheersing bij nutriëntenbeschikbaarheid, EC, schoonmaak en monstername. Dezelfde buffer die de pH vlak maakt kan met metaalionen reageren of biologische belasting toevoegen. Een helder monster bewijst evenmin dat alle micro-elementen nog beschikbaar zijn.

Voorraad	Compatibiliteitsvraag
calciumconcentraat	gescheiden van fosfaat/sulfaat
bufferkandidaat	EC, metaalcomplexen en biologische effecten
eindvoeding	vrije soorten na juiste verdunning en mengtijd

NASLAG · 26.22

Welke vergelijking hoort bij welke vraag?

22/23

evenwicht

$$Q = \prod a_i^{\nu_i}, \quad Q_{\text{eq}} = K$$

symbool	betekenis	eenheid
a	relatieve activiteit	1

zuurtegraad

$$pH = -\log_{10} a_H$$

symbool	betekenis	eenheid
pH	logaritmische activiteit	1

zwak zuur

$$K_a = \frac{a_H a_A}{a_{HA}}$$

symbool	betekenis	eenheid
Ka	zuurconstante	1

bufferverhouding

$$pH = pK_a + \log_{10} \frac{a_A}{a_{HA}}$$

symbool	betekenis	eenheid
pKa	–log10 Ka	1

thermodynamische neerslagmogelijkheid

$$Q_{\text{sp}} > K_{\text{sp}}$$

symbool	betekenis	eenheid
Qsp	actueel vrije-ionenproduct	1

Vraag	Benodigde gegevens
evenwichtssamenstelling	K, beginhoeveelheden, volume, fasen
zwak zuur-pH	Ka, totaal, tegenionen, Kw
buffer na dosering	beide voorraden, sterke molbalans, nieuw volume
nutriëntenneerslag	vrije ionen, pH, complexen, activiteit, Ksp
operationele zuurdosis	representatieve proeftitratie en meng-/meetprotocol

Definities: IUPAC oplosbaarheidsproduct en gelinkte pH/K-pagina's. MES-gegevens gelden volgens de gelinkte fabrikant bij vermelde temperatuur; de gebruikte ideale buffer is een model. Raadpleegdatum 30-09-2026.

HET GEHEEL · 26.23

Habitat: stabiliteit vraagt chemie én een doseerprocedure

23/23

e25 bepaalt hoe snel een verstoring reageert; dit hoofdstuk bepaalt de evenwichtssamenstelling. e21 voorkomt dat meetruis onnodige doses uitlokt en e39 geeft de regelprincipes. Een doseerregel heeft

daarnaast maximale enkel-/dagdosis, mengtijd, sensorvalidatie en een gecontroleerde herstart nodig.

I15 Zuren, basen en pH

Bestaande pH-streefwaarde, ijking en proeftitratie.

E25 Thermochemie en reactiesnelheid

Kinetiek en samenstelling zijn verschillende vragen.

E21 Filters en signaalverwerking

Meten, filtering en onafhankelijke veiligheidsgrenzen.

E39 PID-regeling

Terugkoppeling begrenzen en vertraging begrijpen.

Habitat

Behoud pH 5,8, bijsturen onder 5,5 of boven 6,5, HNO_3-werkoplossing 0,50 mol/L en het bestaande monster-/mengprotocol. Nieuw: rekenkandidaat CT=2 mmol/L, pKa=6,10 bij 25 °C voor een **afzonderlijke bufferproef**. Er is geen nieuwe stof of dosis in NFT vastgelegd. Compatibiliteit, nutrientbalans, EC, neerslag en biologische gevolgen moeten vóór een keuze gemeten zijn.

SAMENVATTING

In het kort

- Evenwicht is netto nul met blijvende heen- en terugomzetting.
- Q reageert op samenstelling en druk; K hoort bij de reactie en temperatuur.
- Zuur-baseberekeningen combineren Ka, Kw, massa en elektroneutraliteit.
- Een bufferverhouding bepaalt pH; de dubbele voorraad bepaalt eindige capaciteit.
- Neerslag hangt van vrije-ionenactiviteiten, pH, complexen en kinetiek af.
- Voor Habitat blijft de bestaande doseerprocedure gelden; een nieuwe buffer vereist aparte validatie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

dynamisch evenwicht

Toestand met gelijke heen- en terugreactiesnelheden en constante macroscopische samenstelling.

reactiequotiënt

Activiteitenproduct Q van de actuele samenstelling, te vergelijken met K.

buffer

Mengsel met zuur- en basische voorraad dat eindige zuur/baseverstoring dempt.

buffercapaciteit

Lokale benodigde sterke-basehoeveelheid per volume en pH-verandering.

oplosbaarheidsproduct

Evenwichtsproduct van relevante vrije-ionenactiviteiten bij verzadiging.

E EXPERT · DEEL E5 · CHEMIE EN MATERIALEN

HANDBOEK · HOOFDSTUK 27

Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Van halfreacties naar een begrensd waterstofscenario

Elektronen en ionen volgen verschillende routes in batterijen, elektrolysers en brandstofcellen. Je berekent spanning, lading, verliezen en opslag en toetst of seizoenswaterstof bij Habitat kan passen.

11× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 13 lestijden

M Materie en chemie · E Energie · L Elektriciteit en elektronica



Een opslagkeuze vraagt energie, vermogen, systeemgrenzen en een gecontroleerd ontwerp.

Na dit hoofdstuk

- Je combineert standaardreductiepotentialen en halfreacties zonder coëfficiëntfout.
- Je verbindt Nernst, Gibbsenergie en reversibele spanning.
- Je verklaart lithium-ionwerking, laden en veroudering en rekent Ah/kWh door.
- Je berekent elektrolysehoeveelheid en onderscheidt reversibel, thermoneutraal en systeemrendement.
- Je vergelijkt opslag op dezelfde grens en toetst rail, vermogen en voorraad van een waterstofscenario.

UITLEG · 27.1

Redox levert werk als elektronen een omweg nemen

1/24

Oxidatie geeft elektronen af, reductie neemt ze op. In een galvanische cel gebeuren ze aan gescheiden elektroden, zodat de elektronen via een externe last lopen. Het elektrolyt en een separator of zoutbrug sluiten de ionenstroom; losse elektronen stromen niet op dezelfde manier door de vloeistof.

De anode is altijd de elektrode van oxidatie, de kathode die van reductie. Tijdens galvanisch leveren is de anode negatief en de kathode positief. Bij elektrolyse dwingt een voeding de ongunstige richting af: de oxidatie-anode is dan positief. Onthoud de reactiebetekenis van de naam, niet één universeel spanningsteken.

De cel zet een chemisch potentiaalverschil om in elektrische arbeid. Dat verschil verandert met samenstelling, temperatuur en laad-/reactietoestand. Een gemeten klemspanning onder belasting bevat bovendien verliezen; zij is niet automatisch de reversibele celspanning.

ANODE VERSUS KATHODE

$$\text{oxidatie : } e^- \text{ afgeven;} \quad \text{reductie : } e^- \text{ opnemen}$$

UITLEG · 27.2

Standaardelektrodepotentialen delen één referentie

2/24

Een losse elektrodepotentiaal meet je niet absoluut: je meet een verschil tegenover een referentie. De standaardwaterstofelektrode krijgt E°=0 V. Tabellen geven meestal **reductiepotentialen** bij standaardactiviteiten, druk en vermelde temperatuur.

Voor de galvanische richting geldt E°cel=E°red,kathode−E°red,anode. Keer de anodische reductie om tot oxidatie, dan verandert haar teken. Elektronen aantallen moeten in de reacties gelijk worden, maar een potentiaal in volt vermenigvuldig je niet met de reactiecoëfficiënt.

Waarom niet? Elektrische arbeid is −nFE. Verdubbel de reactie: ΔG en n verdubbelen samen en E blijft gelijk. Gebruik dezelfde tabelconventie door de hele berekening; een gemengde oxidatie-/reductietabel maakt tekenfouten gemakkelijk.

BEIDE WAARDEN ALS REDUCTIEPOTENTIALEN

$$E^\circ_{\text{cel}} = E^\circ_{\text{red,kathode}} - E^\circ_{\text{red,anode}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.3

De Daniell-cel uit twee halfreacties

3/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- $Zn^{2+}+2\,e^-\rightarrow Zn$: E°≈−0,76 V; $Cu^{2+}+2\,e^-\rightarrow Cu$: E°≈+0,34 V; 25 °C; standaardactiviteiten.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Zink oxideert: $Zn\rightarrow Zn^{2+}+2\,e^-$. Koperionen reduceren: $Cu^{2+}+2\,e^-\rightarrow Cu$.
2. Som: $Zn+Cu^{2+}\rightarrow Zn^{2+}+Cu$. E°=0,34−(−0,76)=1,10 V.

3 n=2, dus ΔG°=−2F·1,10=−212,27 kJ/mol geschreven reactie.

ANTWOORD

De standaardrichting heeft een positieve celspanning en een negatieve Gibbsenergie.

Klopt dit? De waarden zijn afgeronde leerwaarden; Purdue geeft de halfreacties en tekenconventie. Thermodynamische drijving garandeert geen verliesloos werk bij eindige stroom.

UITLEG · 27.4

Nernst: van evenwicht naar spanning

4/24

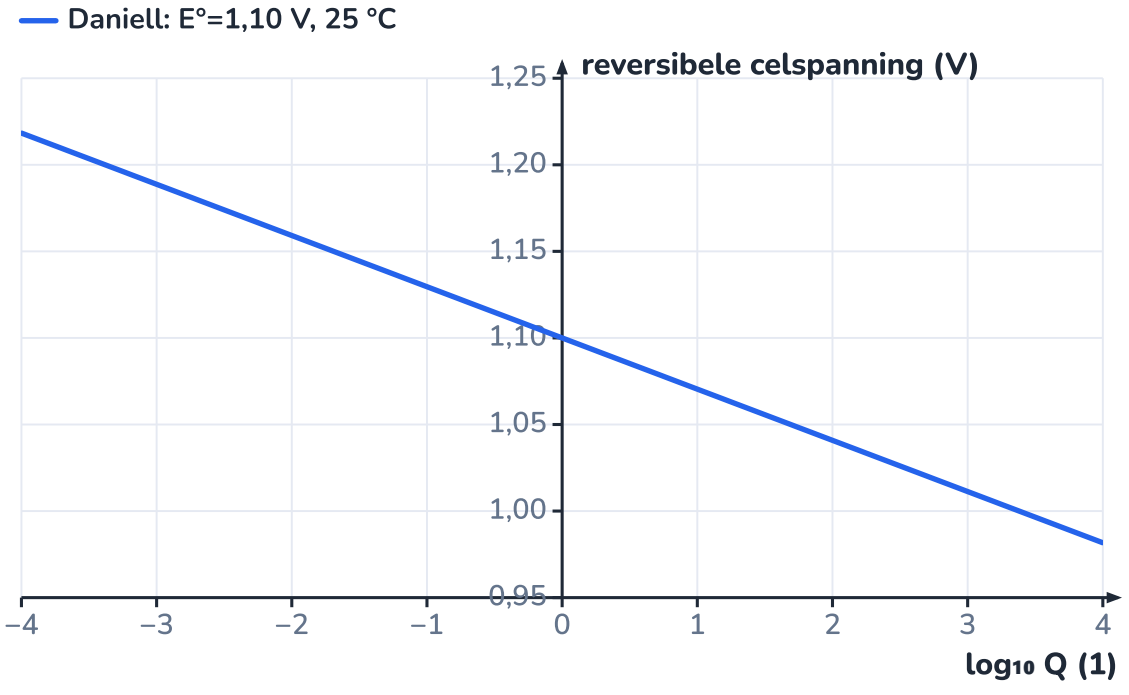
Voor de Daniell-reactie is Q=aZn²⁺/aCu²⁺, omdat zuivere metalen activiteit één hebben. ΔG=ΔG°+RT ln Q en ΔG=−nFE leveren E=E°−RT ln Q/(nF). Dit is de reversibele spanning, niet een universeel model van alle klemspanningsverliezen.

Bij 25 °C is RT ln10/F≈0,05916 V. Voor n=2 daalt E dus ongeveer 29,58 mV per factor tien stijging van Q. Wanneer Q=K, is ΔG=0 en E=0 voor netto omzetting in deze chemische richting.

Bij een lithium-ioncel veranderen de actieve materialen, faseverdelingen en ionactiviteiten. Een eenvoudige Zn/Cu-Nernstgrafiek is daarom geen geschikte SOC-kalibratiecurve van $LiFePO_4$. Voor die batterij blijven coulombtelling, rustcondities, celmeting en fabrikantdata nodig.

NERNST VOOR DE GEKOZEN REACTIE

$$E = E^\circ - \frac{RT}{nF}\ln Q$$



De logaritmische relatie geldt voor reversibele omstandigheden en correcte activiteiten.

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.5

Concentratieverhouding verandert de Daniell-spanning

5/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- Ideaal, 25 °C: $[Zn^{2+}]=0{,}10$ en $[Cu^{2+}]=0{,}0010$ mol/L; $E°=1{,}10$ V.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. $Q=0{,}10/0{,}0010=100$, zodat $\log_{10} Q=2$.
2. $E=1{,}10-(0{,}05916/2)\cdot 2\approx 1{,}04084$ V.
3. Bij stroom kan de klemspanning verder dalen door ohmse weerstand, elektrode-overpotentiaal en transportbeperking.

ANTWOORD

Reversibel ongeveer 1,041 V.

Klopt dit? Concentraties zijn als activiteiten benaderd; zoutsterkte en vloeistofjunctie kunnen meetverschillen geven.

UITLEG · 27.6

Lithium-ion: ionen in materialen, elektronen buitenom

6/24

Een lithium-ionbatterij verplaatst lithium tussen twee gastheermaterialen. Zij werkt niet als een bak waarin metalen lithium onbegrensd wordt afgezet. Bij een grafiet/$LiFePO_4$-model geeft tijdens ontladen de negatieve elektrode Li af: $LiC_6 \rightarrow C_6 + Li^+ + e^-$. Aan de positieve elektrode kan $FePO_4 + Li^+ + e^- \rightarrow LiFePO_4$ plaatsvinden.

Li^+ gaat door elektrolyt en separator, elektronen door de externe last. Tijdens laden dwingt de lader de omgekeerde verplaatsing. De separator moet iontransport toestaan en elektrisch contact tussen elektroden voorkomen.

Een echte cel heeft bindmiddel, stroomcollectoren, porositeit en beschermende grenslagen. Vermogen is afhankelijk van stroom, transport, temperatuur en weerstand; capaciteit van bruikbare lithiumvoorraad en materialen. Een beschadigde separator of verkeerde bedrijfsconditie kan tot gevaarlijke interne reacties leiden.

VEREENVOUDIGDE ONTLAADREACTIE; ELEKTRONEN EXTERN, Li^+ DOOR ELEKTROLYT

$$LiC_6 + FePO_4 \longrightarrow C_6 + LiFePO_4$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.7

De modulebatterij heeft Ah én kWh

7/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- Dossier: twee $LiFePO_4$-accu's van 12,8 V en 120 Ah parallel; verwarmde 12 V-module.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Parallel: spanning blijft 12,8 V; capaciteit wordt 240 Ah. Nominale energie≈12,8·240=3072 Wh.
2. Bij 80 % bruikbare ontlaaddiepte is dat 2457,6 Wh≈2,46 kWh. Rendement naar een last komt daar als afzonderlijke factor bij.
3. De twee accu's zijn geen 48 V-stationsbank. De capaciteit van de stationbank is in dit hoofdstuk nog niet gekozen.

ANTWOORD

3,072 kWh nominaal, circa 2,46 kWh bruikbaar op het afzonderlijke 12 V-net.

Klopt dit? Ah is lading: 240 Ah=864000 C. Nominale spanning maal Ah is een energiebenadering; echte energie is de integraal van U(t)I(t).

UITLEG · 27.8

Laden: spanning en stroom bewaken per cel

8/24

Een lithium-ionlader gebruikt doorgaans een constante-stroomfase tot een gespecificeerde spanningsgrens, gevolgd door constante spanning terwijl de stroom afneemt. De precieze laadspanningen, eindecriteria en temperatuurgrenzen horen bij de gekozen cel en batterij.

Het BMS bewaakt individuele celspanningen, temperatuur en stroom en kan laden of ontladen begrenzen. Celbalancering voorkomt niet elke overbelasting en verandert een verkeerd gekozen charger niet in een goede. Een accupackspanning kan er normaal uitzien terwijl één cel al buiten haar grens staat.

Voor Habitat blijft de bestaande regel: moduleaccu's verwarmd, niet laden onder 0 °C. Een echte fabrikant kan een strengere grens vragen: dit concrete Victronmodel staat laden pas vanaf +5 °C toe. Dat model is een bronvoorbeeld, niet de gekozen moduleaccu; pas het uiteindelijke toestelprofiel toe.

Nominaal 48 V is geen volledige spanningsspecificatie

Een denkbeeldige 16S-$LiFePO_4$-bank is nominaal 51,2 V; 16×3,65 V zou 58,4 V geven. De bestaande railrekenrange 44–56 V moet dus met de werkelijke batterij-, lader- en omvormergrenzen worden vergeleken. Er is hier geen nieuwe bank geselecteerd.

UITLEG · 27.9

Veroudering: voorraadverlies en weerstandsgroei

9/24

Kalenderveroudering verloopt met de tijd, ook zonder cycli; cyclusveroudering hangt van gebruik en energiedoorzet af. Hoge temperatuur, laadstatusgeschiedenis, stroom en diepte van ontladen beïnvloeden de mechanismen. Zij tellen niet altijd als één lineair aantal identieke cycli op.

Een grenslaag op grafiet beschermt, maar groei van die laag kan actief lithium verbruiken. Ongewenste lithiumafzetting kan onder ongunstige laadcondities optreden. De bruikbare capaciteit daalt en de inwendige weerstand kan groeien; daardoor ontstaat bij dezelfde stroom meer warmte en spanningsval.

Log temperatuur, Ah/kWh-doorzet, rustspanning en bruikbare capaciteit volgens een passende gecontroleerde meetprocedure. NREL beschrijft kalender- en cyclusmodellen met temperatuur, stroom en SOC-geschiedenis. De dossierwaarde ±3000 cycli is een orde, geen garantie onder ieder profiel.

WEERSTANDSGROEI VERHOOGT WARMTE BIJ DEZELFDE STROOM

$$P_{\text{ohms}} = I^2 R_{\text{intern}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.10

Een verouderde accu kan een last niet meer dragen

10/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- Rekenpack: rustspanning 48 V; stroom 80 A; interne weerstand eerst 20 mΩ, later 40 mΩ.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Eerst spanningsval 80·0,020=1,6 V; klem 46,4 V; ohmse warmte 80²·0,020=128 W.
2. Later val 3,2 V; klem 44,8 V; warmte 256 W.
3. Bij constante vermogenslast stijgt de stroom als klemspanning daalt; het eenvoudige vastestroomvoorbeeld onderschat dan de extra terugkoppeling.

ANTWOORD

Verdubbelde weerstand verdubbelt hier de warmte en verlaagt het vermogen binnen een spanningsgrens.

Klopt dit? De waarden zijn een equivalent lesmodel, geen gemeten stationbank. Een BMS-limiet en temperatuurrating blijven onafhankelijk.

UITLEG · 27.11

Waterelektrolyse: dezelfde balans, gedwongen richting

11/24

Bij zure PEM-elektrolyse: anode $2\,H_2O \rightarrow O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^-$; kathode $4\,H^+ + 4\,e^- \rightarrow 2\,H_2$. Som: $2\,H_2O \rightarrow 2\,H_2 + O_2$. De voeding voert elektronen naar de kathode en haalt ze van de anode; een membraan scheidt de gasstromen.

Per mol H_2 zijn twee mol elektronen nodig. Faradays wet geeft $nH_2 = \eta F\, It/(2F)$, met $F \approx 96485$ C/mol en faradisch rendement ηF. Een stapel met N seriecellen heeft dezelfde stroom door elke cel en kan N maal de productie leveren, terwijl ook de spanning ongeveer N maal wordt.

PEM, alkalische en hogetemperatuurelektrolyse vervoeren verschillende ionen. Zie DOE's technologie-uitleg. Gebruik de halfreacties van één elektrolyt consequent; meng zure en alkalische formuleringen niet zonder conversie.

FARADAYS WET VOOR ÉÉN CEL

$$n_{H_2} = \eta_F \frac{It}{2F}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.12

Stroom voorspelt waterstofhoeveelheid

12/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- Eén cel: I=100 A, t=1 uur, ηF=0,95; MH_2=2,01588 g/mol. Ucel=1,90 V als rekenwaarde.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Lading Q=100·3600=360000 C. H_2=0,95·Q/(2F)=1,772290 mol.
2. Massa=3,5727 g per uur. Elektrische energie=1,90·100·1h=190 Wh.
3. Voor 20 gelijke seriecellen: circa 38 V, 100 A, 3,8 kW en twintigmaal de massaproductie, zonder hulpapparatuur.

ANTWOORD

Lading telt moleculen; spanning bepaalt mee de benodigde elektrische energie.

Klopt dit? Verwar stapelstroom niet met de som van stromen alsof de cellen parallel stonden. Productie omvat hier geen waterzuivering, compressor of systeemstilstand.

UITLEG · 27.13

1,23 V en 1,48 V zijn verschillende grenzen

13/24

Bij 25 °C en standaardcondities vraagt waterontleding tot H_2/O_2 uit vloeibaar water ongeveer ΔG=237,13 kJ/mol H_2 als minimale reversibele elektrische arbeid en ΔH=285,83 kJ/mol als totale energievraag. Gedeeld door 2F geeft dit ongeveer 1,229 V reversibel en 1,481 V thermoneutraal.

Tussen deze grenzen kan een reversibel systeem een deel van de energie als warmte uit de omgeving opnemen. Boven de thermoneutrale spanning ontstaat in een ideale volledig elektrisch gevoede balans warmte die moet worden afgevoerd. Werkelijke cellen hebben activerings-, ohmse en transportverliezen.

De DOE/NREL-analyse onderscheidt deze grenzen en de stookwaardebasis. Een energieratio kan meer dan 100 % lijken als opgenomen warmte buiten de elektriciteitsnoemer blijft; dat is geen energiecreatie.

VLOEIBAAR WATER BIJ GENOEMDE STANDAARDCONDITIES

$$U_{\mathrm{rev}} = \frac{\Delta G}{2F}, \qquad U_{\mathrm{tn}} = \frac{\Delta H}{2F}$$

UITLEG · 27.14

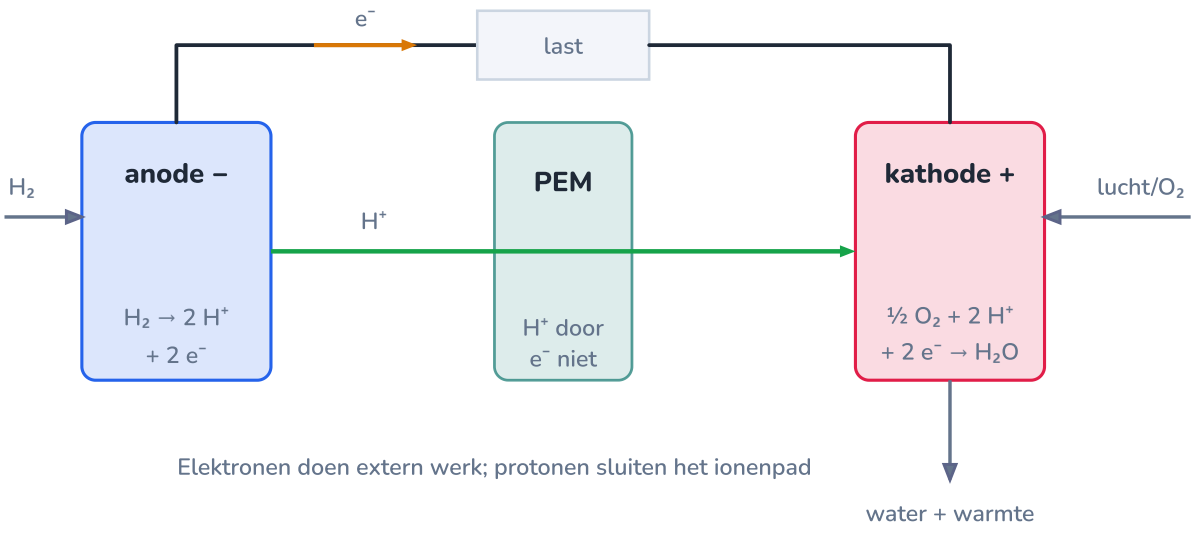
De waterstofbrandstofcel sluit de kring

14/24

In een PEM-brandstofcel oxideert H_2 aan de anode: $H_2 \rightarrow 2\,H^+ + 2\,e^-$. De protonen gaan door het membraan, de elektronen leveren extern werk. Aan de kathode: $\tfrac{1}{2}\,O_2 + 2\,H^+ + 2\,e^- \rightarrow H_2O$. Water en warmte moeten afgevoerd worden.

Een brandstofcel heeft voortdurend brandstof en oxidant nodig; haar vermogen komt niet alleen uit de opgeslagen tankmassa. Gasaanvoer, vochtregeling, luchtcompressor, koeling, katalysator en belasting bepalen de werkelijke klemspanning. Meer stroom kan meer vermogen geven maar ook lagere spanning en meer warmte.

DOE beschrijft deze gescheiden dragers. De elektrolyser en brandstofcel zijn chemisch elkaars omkering, maar hun verliezen keren niet terug in bruikbare elektriciteit. Een batterij is meestal geschikter voor snelle lastsprongen; een waterstoftank kan langer energie bewaren mits een passend professioneel systeem.



Oxidatie-anode en reductie-kathode hebben hier de galvanische tekens; bij elektrolyse verandert het stroomdoel.

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.15

Eén kilogram H₂: basis en systeemgrens vastzetten

15/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- Onderste stookwaarde LHV=120 MJ/kg=33,333 kWh/kg; netto brandstofcelrendement 50 % op dezelfde LHV-basis. Voorbeeldbelasting 0,50 kW netto op 48 V.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Elektrisch per kg: 33,333·0,50=16,667 kWh. Bij constante 0,50 kW duurt 1 kg idealiter 33,333 h.
2. H_2-verbruik=0,50/16,667=0,030 kg/h. Reactiewater bedraagt stoichiometrisch ongeveer 9 kg per kg H_2.
3. De brandstofcelrendementswaarde is hier **netto op de 48 V-rail**: lucht-/pomp-/DC-verlies zit al in de gekozen 50 %. Nogmaals dezelfde hulpverliezen aftrekken zou dubbel tellen.

ANTWOORD

Het scenario levert 16,667 kWh per kg opgeslagen H_2 aan de gekozen rail.

Klopt dit? Afvalwarmte is alleen nuttig als temperatuur, tijd en warmtevraag overeenkomen. Noem een apart warmterendement; tel warmte niet als teruggewonnen elektriciteit.

UITLEG · 27.16

Opslag vergelijken: massa van wat, energie naar waar?

16/24

Waterstof heeft hoge chemische energie per kilogram H_2, maar lage dichtheid bij omgevingsdruk. De tank, afsluiters, compressor en conversieapparatuur horen bij een compleet systeem. DOE noemt 120 MJ/kg op LHV-basis en beschrijft het volumeprobleem; gecomprimeerde opslag gebruikt speciale druksystemen.

Voor een batterij vergelijk je bruikbare elektrische kWh en de massa van het complete pack. Voor een H_2-tank kun je chemische LHV-kWh per kilogram systeem noemen, maar om elektrische kWh te vergelijken moet het brandstofcelrendement erbij. Een waarde zonder grens is misleidend.

Warm water is goedkoop als warmtevraag het doel is, maar geeft niet zonder extra warmtemachine elektriciteit terug. Een vliegwiel kan snel vermogen leveren en is minder aantrekkelijk voor maanden door zelfontlading. Opslagduur, cycli, vermogen, veiligheid en onderhoud horen naast het rondgaande rendement.

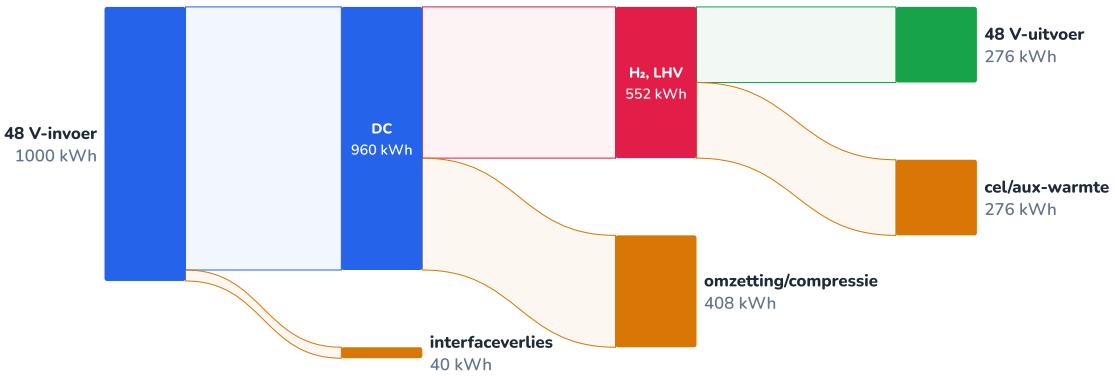
Lesvergelijking	Wat opgeslagen?	Doel en beperking
Li-ion	elektrochemische energie	elektriciteit, snel; pack/temperatuur/levensduur
H_2	chemische LHV-energie	lange duur; hele tank/keten, laag terugrendement
waterbuffer	voelbare warmte	warmte, geen directe elektrische retour
vliegwiel	rotatie-energie	snel vermogen; duurverlies

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.17

De waterstofketen heeft meer dan één rendement

17/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.



Alle stromen gebruiken dezelfde LHV-grens; de gasenergie is geen extra gratis ingang.

GEGEVEN

- Rekenscenario: elektrolysesysteem 55 kWh/kg, compressor 3 kWh/kg, voorafgaande DC-interface 96 %, netto brandstofcel 50 % LHV.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Totale downstream-invoer=58 kWh/kg. De rail moet 58/0,96=60,417 kWh leveren per kg H_2.
2. Terug per kg=33,333·0,50=16,667 kWh. Rondgaand rendement=0,96·16,667/58=27,586 %.
3. Voor 1000 kWh invoer: H_2=16,552 kg; terug 275,862 kWh. De resterende energie wordt verlies/warmte binnen de gekozen grens.

ANTWOORD

In dit scenario komt circa 27,586 % als elektriciteit terug.

Klopt dit? 55 kWh/kg sluit aan bij de DOE-systeemstatus 2022, geen garantiewaarde voor een kleine lader. Compressie/DC/brandstofcel zijn expliciete leswaarden.

CODE · 27.18

Seizoensenergie én een begrensd uurprofiel

18/24

De eerste tabel toont alleen energiebovengrenzen voor aantoonbaar beschikbare delen van 3013 kWh **systeemoverschot**. Beschikbaarheid op de juiste rail is nog te bewijzen. De tweede proef gebruikt een zelfstandig synthetisch 48 V-profiel van 1000 kWh; het is geen herverdeling van e15-panelen. 1 kW maximaal, 0,20 kW minimumlast, 12 kg tank en 0,50 kW netto brandstofcel zijn **proefconfiguraties**, geen gekozen hardware. Alle tijdstippen hebben vast UTC+1.

Python **waterstof_scenario.py** 55 regels

```python
# waterstof_scenario.py — geen selectie van een installatie
import math
import numpy as np
lhv, el, comp = 120/3.6, 55.0, 3.0 # kWh/kg
eta_dc, eta_fc = 0.96, 0.50

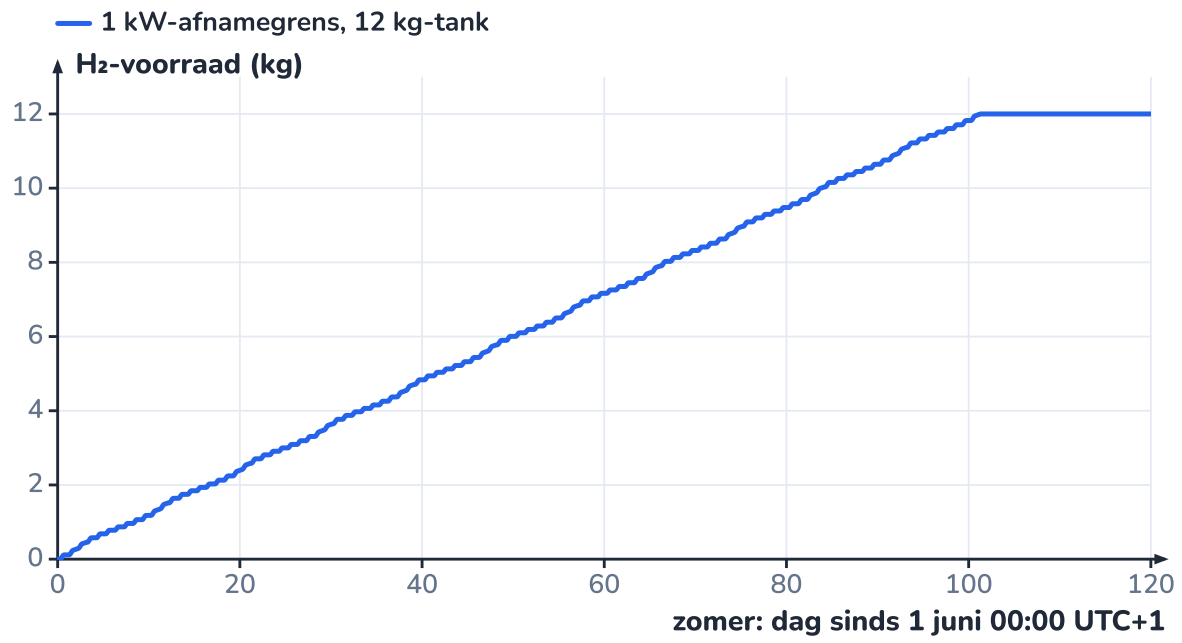
print(f"rondgaand rendement op 48V-grens={eta_dc*lhv*eta_fc/(el+comp):.5f}")
for deel in (.25,.50,1.0):
    # Louter bovengrens: dit DEEL moet fysiek beschikbaar worden aangetoond.
    ein=3013*deel
    massa=ein*eta_dc/(el+comp)
    euit=massa*lhv*eta_fc
    print(f"beschikbaar deel {deel:.2f}: {massa:.4f} kg H2, {euit:.3f} kWh terug")
print(f"175 kWh vraagt {175/(lhv*eta_fc):.4f} kg H2 en "
      f"{175/(lhv*eta_fc)*(el+comp)/eta_dc:.3f} kWh input")

# AFZONDERLIJK synthetisch 48V-profiel, geen aftrekking van e15-zon.
# 120 zomerdagen vanaf 1 juni 2021 00:00 UTC+1; uurstappen.
uren=np.arange(120*24)
vorm=np.maximum(0,np.sin(np.pi*((uren%24)-6)/12))**2
vorm += .12*(1+np.sin(2*np.pi*uren/(24*9))) # synthetische windcomponent
overschot=vorm*1000/vorm.sum() # precies 1000 kWh op de 48V-rail
pmin,pmax,mtank=0.20,1.00,12.0 # kW, kg: proefconfiguratie
m,ein,curtail=0.0,0.0,0.0
zomer=[]
for uur,p in zip(uren,overschot):
    draw=min(p,pmax)
    if draw<pmin: draw=0.0
    # Tanklimiet kan de laatste uurstap deels gebruiken:
```

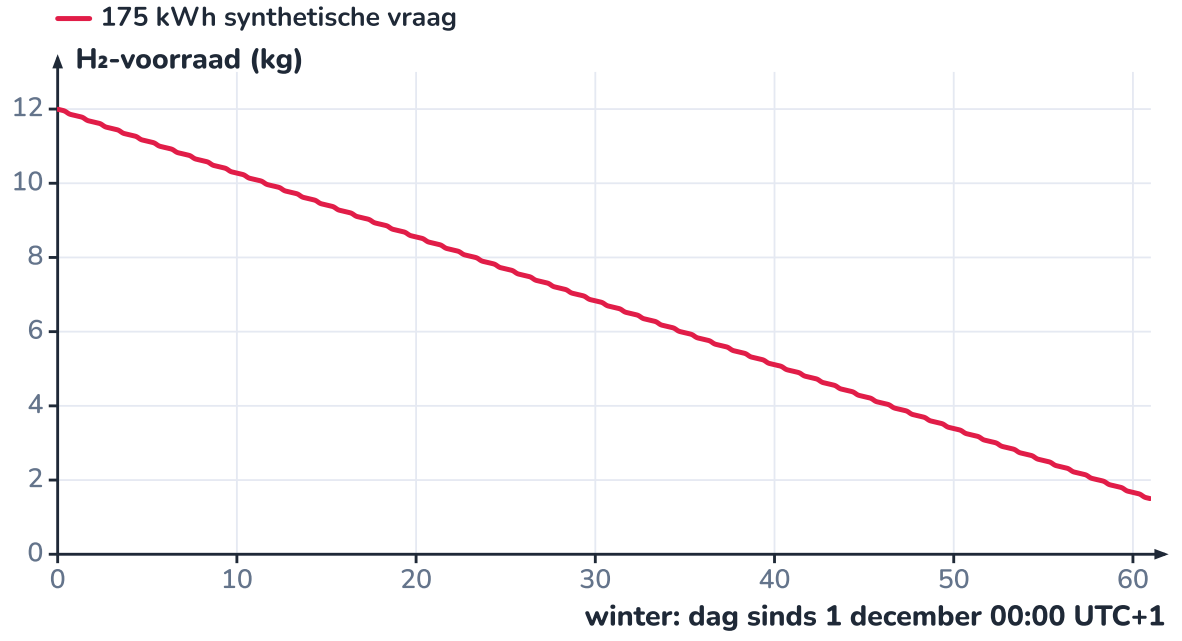
```
    # interpreteer als kortere aan-tijd, niet bedrijf onder minimumlast.
    draw=min(draw,(mtank-m)*(el+comp)/eta_dc)
    dm=draw*eta_dc/(el+comp) # dt=1 h
    m+=dm; ein+=draw; curtail+=p-draw
    zomer.append((uur/24,m,draw))
zomer=np.array(zomer)
print(f"zomer: input {ein:.3f}, niet afgenomen {curtail:.3f} kWh, tank {m:.5f} kg")

# 61 winterdagen, 1 december 2021 00:00 UTC+1 t/m 31 januari 2022.
# Tekort is een synthetische vorm met SOM 175 kWh, niet het e15-uurprofiel.
wuren=np.arange(61*24)
vraagvorm=.5+np.maximum(0,np.sin(np.pi*((wuren%24)-7)/12))**2
vraag=vraagvorm*175/vraagvorm.sum()
pfmax=.50 # kW netto 48V: proefconfiguratie, geen gekozen brandstofcel
geleverd,onbediend=0.0,0.0
winter=[]
for uur,p in zip(wuren,vraag):
    out=min(p,pfmax,m*lhv*eta_fc)
    m-=out/(lhv*eta_fc)
    geleverd+=out; onbediend+=p-out
    winter.append((uur/24,m,out))
winter=np.array(winter)
print(f"winter: geleverd {geleverd:.3f}, onbediend {onbediend:.3f} kWh, rest {m:.5f} kg")
print(f"balans zomer {ein+curtail:.6f} kWh; "
      f"H2 winterverbruik {zomer[-1,1]-m:.6f} kg")
print(f"hoogste wintervraag {vraag.max():.4f} kW, celgrens {pfmax:.2f} kW")
```

```
rondgaand rendement op 48V-grens=0.27586
beschikbaar deel 0.25: 12.4676 kg H2, 207.793 kWh terug
beschikbaar deel 0.50: 24.9352 kg H2, 415.586 kWh terug
beschikbaar deel 1.00: 49.8703 kg H2, 831.172 kWh terug
175 kWh vraagt 10.5000 kg H2 en 634.375 kWh input
zomer: input 725.000, niet afgenomen 275.000 kWh, tank 12.00000 kg
winter: geleverd 175.000, onbediend 0.000 kWh, rest 1.50000 kg
balans zomer 1000.000000 kWh; H2 winterverbruik 10.500000 kg
hoogste wintervraag 0.2391 kW, celgrens 0.50 kW
```



Minimumlast en tankgrens laten een deel van het aangeboden railoverschot ongebruikt.



De 175 kWh worden alleen geleverd omdat ook voorraad en vermogen in dit specifieke profiel volstaan.

UITLEG · 27.19

De twee netten bepalen wat werkelijk beschikbaar is

19/24

Het totale zonnevermogen 5,60 kWp bestaat uit 1,40 kWp op de eigen 12 V-module en 4,20 kWp op het 48 V-stationnet. De windregelaar voedt eveneens het stationnet. Het jaaroverschot 3013 kWh uit e15 is een rekenbalans over het systeem en maandgrenzen; het is niet automatisch allemaal elektrolyservermogen.

Voor echte beschikbaarheid heb je een railgescheiden tijdreeks nodig, met lokaal verbruik, batterijlaadlimiet, broncurtailment en beschikbare omzettercapaciteit. De 12 V-module exporteert hier

geen energie: er is geen overdrachtsinterface gekozen. Wil je later exporteren, dan moet een beveiligde, stroombegrensde DC-interface met haar verliezen en prioriteiten expliciet ontworpen worden.

De elektrolyser mag niet de accu onder haar reserve trekken en mag de gezamenlijke laadstroomgrens niet omzeilen. De e24-potentiële PV-/windbronstroom is niet hetzelfde als een toegestane BMS-laadstroom. Het bestaande 100 A-continu-ontlaadpad en de 4 kVA-omvormer blijven afzonderlijke vermogensgrenzen.

Net	Bronnen	Bewezen beschikbaarheid voor H_2?
12 V-module	1,40 kWp + eigen accu's	geen exportinterface gekozen
48 V-station	4,20 kWp + wind	railgescheiden uurprofiel en lastreserve nodig
e15-systeembalans	5,60 kWp + wind samen	3013 kWh is een som, geen aangesloten rail

UITGEWERKT VOORBEELD · 27.20

175 kWh wintertekort: een noodzakelijke energietoets

20/24

Bereken een elektrochemische of opslagbalans met expliciete systeemgrens.

GEGEVEN

- e15-rekenjaar: 175 kWh tekort in december/januari. Scenario met 50 % netto LHV-brandstofcel, 58 kWh/kg downstream plus 96 % DC-interface.

GEVRAAGD

- Spanning, lading, energie of voorraad en controle van de aannames.

OPLOSSING

1. Benodigde H_2-massa=175/16,667=10,500 kg, zonder seizoensverlies/reserve.
2. Benodigde zomerinvoer=634,375 kWh aan de expliciet gekozen 48 V-grens. Dat is 21,05 % van het systeembalansoverschot als energiebovengrens.
3. Een batterij die 175 kWh via een 93 %-omvormer uit 80 % ontlaaddiepte moet leveren vraagt nominaal 175/(0,80·0,93)=235,215 kWh, vóór zelfontlading/veroudering/reserve.
4. Deze seizoenstoets kiest geen 48 V-batterijcapaciteit. Kortdurende stationbuffer, piekstroom en winterproductie kunnen een heel ander ontwerp geven.

ANTWOORD

De energieruimte kan bestaan, maar beschikbaarheids-, vermogens- en systeemtoetsen blijven nodig.

Klopt dit? De 175 kWh hoort bij het oudere e15-verwarmingsscenario; e16-warmtepomp en latere lastplanning kunnen de wintervraag wijzigen. Gebruik geen oud tekort als definitieve dimensionering.

PROEF · 27.21

Een veilige gesloten onderwijsset vergelijken

21/24

ONDERZOEKSVRAAG

Welke energie gaat een commerciële onderwijsset in en welke elektrische energie komt terug?

MATERIAAL

- docentbegeleide commerciële PEM-onderwijsset met eigen instructies en kleine gescheiden gasopslag
- voorgeschreven water
- begrensde voedingsbron
- multimeter/logger
- kleine voorgeschreven last

Veiligheid

Geen zelfbouwdrukvat, vlamtest of gemengd H_2/O_2-reservoir. Gebruik uitsluitend de set en haar begeleidings-/ventilatieprotocol; de berekende 12 kg-configuratie wordt nooit als klasproef uitgevoerd.

WERKWIJZE

1. Volg de productspecifieke montage en spannings-/druk-/waterinstructies; controleer de gasroutes zonder zelf drukopslag te maken.
2. Log U en I tijdens elektrolyse en integreer $E_{in}=\Sigma UI\Delta t$. Noteer temperatuur, tijd en start-/stopverliezen.
3. Laat de set volgens haar instructie op de last leveren; log E_{uit} met dezelfde methode. Kies dezelfde begin-/eindgasvoorraad.
4. Rapporteer E_{uit}/E_{in} én de systeemgrens: zijn pompen, waterbehandeling en eventuele compressor meegemeten?

WAARNEMING

De elektrische retour is kleiner dan de invoer; de eigen meting bepaalt hoeveel. Een onvolledige gasvoorraad maakt de ratio onvergelijkbaar.

VERKLARING

Overpotentialen, weerstand, gas-/waterbeheer en hulpenergie maken heen- en terugomzetting verliesgevend. Een kleine onderwijsset is geen schaalmodel met identiek rendement aan een stationsinstallatie.

VERHAAL · 27.22

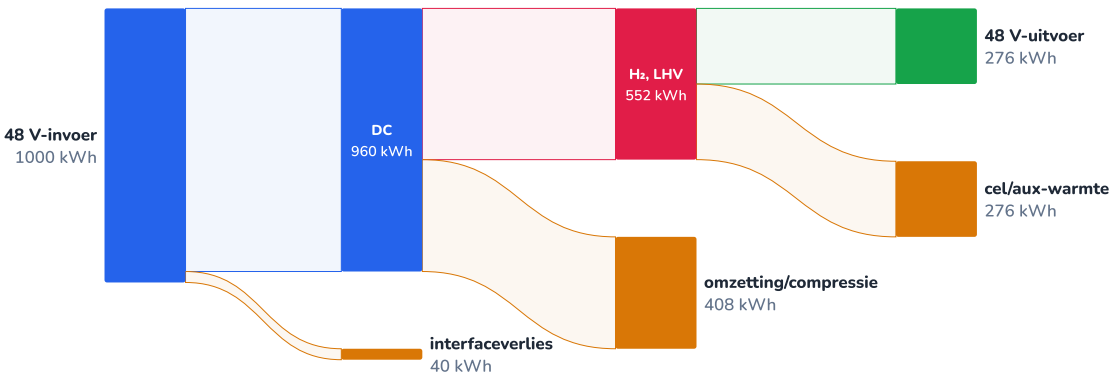
Een waterstoftank is een energiesysteem, geen extra accu

22/24

Grote opslagduur vraagt een koppeling tussen elektrolyser, waterbehandeling, compressie, gescheiden opslag, gasdetectie, ventilatie, brandstofcel en regeling. De tank houdt moleculen vast; de overige apparatuur moet er op het juiste moment veilig vermogen van maken.

DOE beschrijft drukopslag als volledig tanksysteem, met energie per kilogram en liter systeem. De veel genoemde 350–700 bar zijn voorbeelden van professionele mobiele technologie, geen drukkeuze voor Habitat. Een station kan een andere gecertificeerde opslagstrategie vragen.

De onderzoeksvraag blijft daarom open: verbeter eerst winterlast, bronprofiel en batterijdagbuffer; vergelijk daarna seizoensopslag inclusief onderhoud en betrouwbaarheid. Een efficiëntieverlies kan aanvaardbaar zijn voor zeldzame lange tekorten, maar hoge complexiteit kan voor een klein station zwaarder wegen.



De winst van langere duur wordt met een groot verlies aan teruggeleverde elektriciteit betaald.

NASLAG · 27.23

Elektronen tellen, energiegrenzen benoemen

23/24

celspanning

$$E^\circ_{\text{cel}} = E^\circ_{\text{red,k}} - E^\circ_{\text{red,a}}$$

symbool	betekenis	eenheid
E	potentiaalverschil	V

reversibele elektrische arbeid

$$\Delta G = -nFE$$

symbool	betekenis	eenheid
F	Faradayconstante	C/mol
n	elektronen per geschreven reactie	1

Nernst

$$E = E^\circ - \frac{RT}{nF}\ln Q$$

symbool	betekenis	eenheid
Q	activiteitenquotiënt	1

elektrolysehoeveelheid

$$n_{H_2} = \eta_F I t/(2F)$$

symbool	betekenis	eenheid
ηF	faradisch rendement	1

batterij-energiebenadering

$$E_{\text{bruikbaar}} \approx U_{\text{nom}} Q_{\text{Ah}} DOD\, \eta$$

symbool	betekenis	eenheid
QAh	capaciteit	Ah

rondgaande systeemratio

$$\eta_{\text{retour}} = \frac{E_{\text{elektrisch,uit}}}{E_{\text{elektrisch,in}}}$$

symbool	betekenis	eenheid
E	energie op dezelfde systeemgrens	J

Niet verwarren	Verschil
Ah / kWh	lading / energie
ηF / energierendement	elektronen naar product / energie per kg
LHV / HHV	zonder / met condensatiewarmte
stack / systeem	celapparaat / hulpapparatuur mee
H_2-massa / systeemmassa	moleculen / tank en apparatuur
jaaroverschot / beschikbaar vermogen	balanssom / railgescheiden tijdreeks

Bronnen staan bij de relevante uitleg: Purdue elektrodeconventie, DOE/NREL thermodynamica, DOE elektrolyse-/brandstofcel-/opslaggegevens, NREL batterijmodellering en expliciet Victronbronvoorbeeld. Raadpleegdatum 30-09-2026. Lesrendementen zijn geen leveranciersgaranties.

HET GEHEEL · 27.24

Habitat: eerst de dagbuffer, dan de seizoensvraag

24/24

e15 levert een jaarbalans, e16 verlaagt warmtevraag, e24 begrenst bronnen en e49 moet de railgescheiden planning en stationbatterijkeuze afronden. Dit hoofdstuk voegt elektrochemische kennis en een toetsbaar waterstofscenario toe. De keuze kan ook zijn om geen waterstofinstallatie te bouwen.

E15 De hoofdwetten van de thermodynamica

Systeemgrens, verliezen en jaarbalans.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

Twee netten, gezamenlijke bronlimiet en DC-interfaces.

I16 Redox en batterijen

Modulebatterij en coulombtelling.

E49 Integratieproject: het brein van het station

Railgescheiden dimensionering en integratie.

Habitat

Geen nieuwe stationbatterij of H_2-installatie gekozen. Behoud module 12,8 V/240 Ah parallel, 3,072 kWh nominaal/2,46 bruikbaar; 48 V-capaciteit blijft nog vast te stellen. Nieuw lesvoorstel: 1 kW-elektrolyserafname, 0,20 kW minimum, 12 kg H_2-tank, 0,50 kW netto brandstofcel, 55+3 kWh/kg en DC 96 % / cel 50 % LHV. Dat zijn proefconfiguraties met expliciete nog te valideren interfaces; 3013 kWh overschot geeft geen toestemming voor impliciete 12 V-export.

SAMENVATTING

In het kort

- Oxidatie en reductie bepalen anode/kathode; halfpotentialen delen een referentie.
- Reversibele spanning volgt uit Gibbsenergie en activiteiten; klemspanning bevat verliezen.
- Lithium-ionbatterijen verplaatsen ionen in gastheermaterialen en vragen cel-/temperatuurbeveiliging.
- Faraday telt product uit lading; spanning en hulpapparatuur bepalen energie per kg.
- H_2-ketens moeten LHV/HHV en stack/systeem consequent onderscheiden.
- Een jaaroverschot bewijst geen railbeschikbaarheid of wintervermogen; Habitat-waterstof blijft een scenario.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

anode
Elektrode waar oxidatie plaatsvindt; het spanningsteken hangt van het bedrijf af.

kathode
Elektrode waar reductie plaatsvindt.

faradisch rendement
Aandeel van de lading dat het bedoelde elektrochemische product vormt.

thermoneutrale spanning
Reactie-enthalpie gedeeld door de reactie-elektronenlading.

rondgaand rendement
Elektrische uitvoer gedeeld door elektrische invoer op dezelfde systeemgrens.

BMS
Bewakings-/beveiligingssysteem voor celspanningen, temperatuur, stroom en toegelaten batterijbedrijf.

E EXPERT · DEEL E5 · CHEMIE EN MATERIALEN

HANDBOEK · HOOFDSTUK 28

Materiaalkunde

Van roosterfout en ketenbeweging naar een getoetste materiaalkeuze

De eigenschappen van een onderdeel ontstaan uit structuur, verwerking en gebruik. Je rekent kristallen, legeringen, polymeren, vezels en dotering door en leidt een Ashby-selectie-index af voor een echte geometrische vraag.

11× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 13 lestijden

M Materie en chemie · K Krachten, beweging en constructies · D Ontwerpen en maken



Een materiaalkeuze geldt voor een grade, proces, verbinding en gebruiksomgeving samen.

Na dit hoofdstuk

- Je telt eenheidscellen en koppelt roosterfouten aan eigenschappen.
- Je verklaart versterking en staalwarmtebehandeling zonder hardheid met taaiheid te verwarren.
- Je onderscheidt ketenstructuur, glasovergang, kristalsmelten en kruip.
- Je berekent composiet- en halfgeleiderlesmodellen met richting en eenheden.
- Je leidt materiaalindexen af en toetst massa, sterkte, omgeving en verbinding.

UITLEG · 28.1

Structuur, verwerking en gebruik vormen één keten

1/24

Staal is geen enkele vaste eigenschap en kunststof evenmin. Samenstelling en microstructuur bepalen hoe een materiaal reageert; verwerking verandert de structuur, en gebruikscondities veranderen de prestaties. Een materiaalkeuze begint dus met het onderdeel en zijn belasting.

Stijfheid E bepaalt de elastische vervorming. Sterkte begrenst spanning vóór vloeien of falen. Taaiheid beschrijft weerstand tegen scheurvorming/-groei en energieopname. Een stijve keramiek kan bij een kleine scheur plots breken; een taai metaal kan eerst vervormen. Hardheid is lokale weerstand tegen indrukken en is niet hetzelfde als een veilige breukspanning.

Voor Habitat komen kou, natte zouten, zonlicht, herhaalde beweging en verbindingen samen. Een tabel bij 23 °C voor droog materiaal is een startpunt; de werkelijke toestand en levensduur moeten in de specificatie.

Eigenschap	Vraag
E	hoe ver buigt het?
sterkte	bij welke spanning begint falen/vloeien?
taaiheid	wat doet een scheur of impact?
duurzaamheid	blijft de eigenschap in deze omgeving behouden?

UITLEG · 28.2

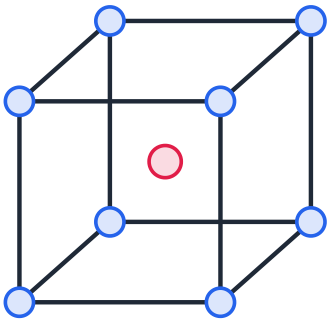
Kristallen: herhaling met een telbare eenheidscel

2/24

Een kristal heeft op lange afstand een periodiek rooster met een basis van atomen. Een polykristallijn metaal bevat veel korrels met verschillende oriëntaties; het is geen enkele grote perfecte eenheidscel. Een amorf glas mist die lange-afstandsperiodiciteit, maar heeft wel lokale ordening.

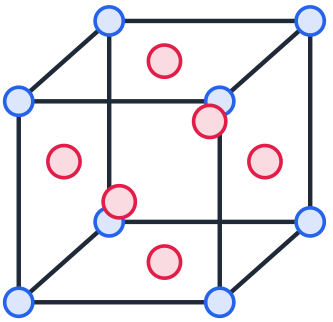
BCC heeft atoomcentra op acht hoeken en één centrum. Elke hoek wordt door acht cellen gedeeld: $8\times\frac{1}{8}+1=2$ atomen per cel. FCC voegt zes vlakcentra toe: $8\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{2}=4$. De geprojecteerde figuur tekent centra; verborgen en zichtbare vlakken tellen mee.

Voor identieke bolvormige atomen is de ideale pakkingsfractie $\mathrm{BCC}=\sqrt{3}\pi/8\approx0{,}680$ en $\mathrm{FCC}=\pi/(3\sqrt{2})\approx0{,}740$. HCP heeft eveneens een dichte ideale pakking maar een andere stapeling. Dit zijn geometrische idealisaties; materiaalgedrag vraagt ook bindings- en glijmechanismen.



BCC: centrum

N=2



FCC: vlakken

N=4

Gedeelde hoek- en vlakatomen tellen fractioneel; meer getekende punten betekenen niet evenveel hele atomen per cel.

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.3

Kristaldichtheid uit atoommassa en rooster

3/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- FCC-aluminium: a=0,405 nm, N=4, molmassa 26,9815385 g/mol. NA=6,02214076·10²³ mol⁻¹.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Massacel=4·0,0269815385/NA kg. Volume=a³=(0,405·10⁻⁹)³ m³.
2. ρ=N M/(NA a³)=2697,806 kg/m³.
3. BCC-ijzer met a=0,2866 nm, N=2, M=55,845 g/mol geeft 7878,342 kg/m³ in dezelfde berekening.

ANTWOORD

De orde van de macrodichtheid volgt rechtstreeks uit rooster en atoommassa.

Klopt dit? Roosterparameters zijn verstrekte leswaarden; temperatuur, legering, porositeit en fasen beïnvloeden echte dichtheid. Zie Cambridge microstructuuroefeningen voor het verband tussen eenheidscel en materiaaleigenschappen.

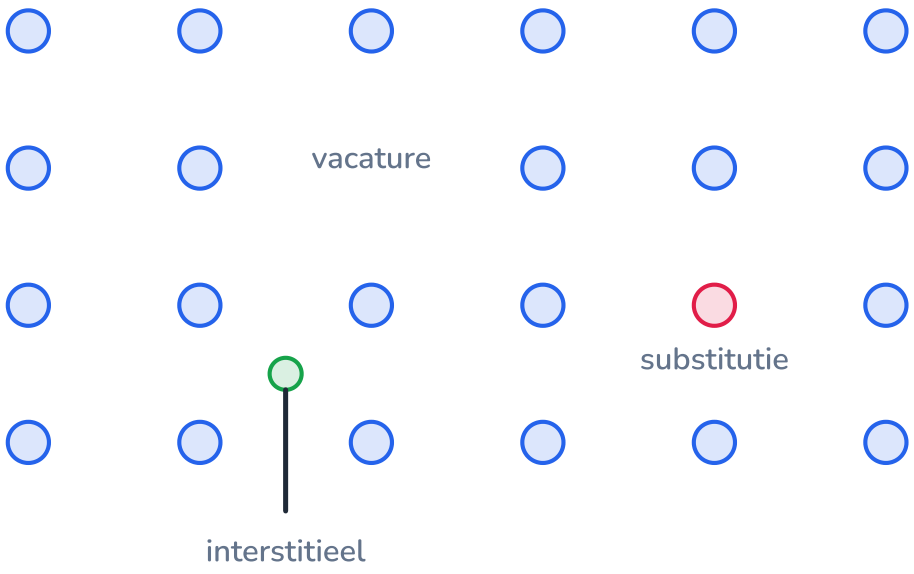
UITLEG · 28.4

Roosterfouten zijn vaak functioneel

Een vacature is een ontbrekend atoom op een roosterplaats. Een interstitieel atoom zit tussen roosterplaatsen; een substitutieatoom vervangt een ander atoom. Zulke puntfouten beïnvloeden diffusie, sterkte en elektrische geleiding.

Een dislocatie is een lijnfout: een randdislocatie kun je zien als het einde van een extra halfvlak. Door haar verplaatsing hoeft niet een heel atoomvlak tegelijk over een ander te schuiven. Dat maakt plastische vervorming mogelijk bij veel lagere spanning dan een perfect-kristalmodel voorspelt.

Korrelgrenzen, tweelinggrenzen, poriën en insluitingen vormen verdere schaalniveaus. Grenzen kunnen dislocaties hinderen en tegelijk diffusie of corrosie veranderen. 'Geen fouten' is daarom geen algemeen doel; je wilt de juiste structuur zonder schadelijke defecten voor de gekozen functie.



De tekening toont puntfouten; een echte dislocatie vraagt een vervormd driedimensionaal rooster.

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.5

Een vacaturefractie verandert sterk met temperatuur

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Lesmodel: $c_v \approx \exp(-Q_v/kBT)$; $Q_v = 0{,}80$ eV; $k_B = 8{,}617333262 \cdot 10^{-5}$ eV/K.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Bij 293 K: $\exp[-0{,}80/(k_B \cdot 293)] = 1{,}736 \cdot 10^{-14}$.

2 Bij 800 K: $\exp[-0{,}80/(k_B \cdot 800)] = 9{,}125 \cdot 10^{-6}$.

3 Het aantal evenwichtsvacatures stijgt exponentieel. Diffusie vraagt bovendien migratie; deze verhouding alleen is nog geen diffusieconstante.

ANTWOORD

Temperatuur verandert de beschikbaarheid van puntfouten met vele ordes.

Klopt dit? Qv is een modelwaarde; werkelijke vormingsentropie en quenchgeschiedenis kunnen mee bepalend zijn.

UITLEG · 28.6

Metalen en legeringen: dislocaties sturen

6/24

In metalen kunnen dislocaties langs geschikte glijsystemen bewegen. Een legering voegt andere atomen toe: substitutie of interstitieel, zoals koolstof in ijzer. Hun vervorming van het rooster kan dislocaties hinderen en de vloeigrens verhogen.

Koud vervormen vergroot dislocatiedichtheid en doorgaans de sterkte, maar kan vervormbaarheid verminderen. Kleinere korrels hinderen glijden vaak; precipitatiesterking gebruikt kleine tweede-fasedeeltjes. Elk mechanisme heeft een proces- en temperatuurgebied; een enkel etiket 'legering' vertelt het resultaat niet.

Warmtebehandeling kan herstel, rekristallisatie of faseverandering veroorzaken. Laswarmte verandert plaatselijk de structuur en restspanningen. Daardoor kan een verbinding eerder falen dan de nominale materiaalstrook, ook als de chemische samenstelling gelijk blijft.

HALL–PETCH-MODEL BINNEN ZIJN TOEPASSINGSGEBIED

$$\sigma_y \approx \sigma_0 + k_{\mathrm{HP}} d^{-1/2}$$

UITLEG · 28.7

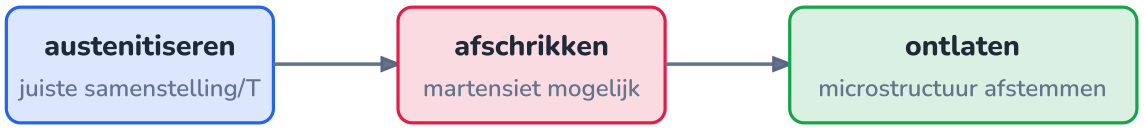
Staal: dezelfde elementen, verschillende fasen

7/24

Staal bevat ijzer met koolstof en vaak andere legeringselementen. Ferriet is een relatief koolstofarme BCC-fase; austeniet is FCC en kan meer koolstof opnemen. Cementiet is een carbide; perliet is een fijn mengsel van ferriet en cementiet, geen afzonderlijk rooster met één universele samenstelling.

Bij voldoende snelle afkoeling vanuit geschikte austeniet kan martensiet ontstaan via een diffusiearme roostervormverandering. Koolstof wordt gevangen en veroorzaakt vervorming; afhankelijk van samenstelling kan de structuur hard en minder taai zijn. Hardenbaarheid beschrijft het vermogen om door een doorsnede martensiet te vormen, niet hetzelfde als de gemeten hardheid.

Ontlaten verandert de metastabiele structuur door koolstofverdeling, carbiden en herstel. Sterkte en taaiheid worden afgewogen. Bhadeshia's Cambridge-uitleg toont waarom legering en temperatuur de ontlaatrespons veranderen.



Geen universele temperaturen: staaltype, afmeting en koelcurve bepalen het proces

Een correct proces hangt van het staal en de koelcurve af; één heet-maken-en-dompelenrecept is onvoldoende.

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.8

Korrelgrootte als sterkteparameter

8/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Illustratief Hall–Petch-model: σ_0=80 MPa, k_{HP}=0,40 MPa·√m; d=100 µm of 25 µm.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. 100 µm: $d^{-½}$=100 $m^{-½}$, dus σ_y=80+40=120 MPa.
2. 25 µm: $d^{-½}$=200 $m^{-½}$, dus σ_y=160 MPa.
3. Viermaal kleinere korreldiameter verdubbelt de korrelbijdrage, niet de totale vloeigrens.

ANTWOORD

In dit model stijgt de vloeigrens met 40 MPa.

Klopt dit? De parameters zijn verstrekte rekenwaarden; ultrafijne structuren, temperatuur en andere mechanismen kunnen het model begrenzen.

UITLEG · 28.9

Polymeren: ketens, vertakkingen en netwerken

9/24

Een polymeer bestaat uit lange ketens van herhalende eenheden. Ketenlengte, zijgroepen, vertakking, regelmaat en intermoleculaire interacties beïnvloeden beweeglijkheid en ordening. Sommige delen kunnen kristalliseren; andere blijven amorf.

Thermoplasten kunnen bij verhitting zacht worden en worden vaak opnieuw gevormd. Thermoharders hebben een covalent netwerk en smelten niet eenvoudig opnieuw zonder afbraak. Elastomeren gebruiken beweeglijke ketens met voldoende verbindingen om na rek terug te keren. De hoeveelheid crosslinks beïnvloedt gedrag.

Vezels, vulstoffen en additieven veranderen de eigenschappen. Een PP-plantenbak uit het dossier is dus niet gelijk aan een UV-onbeschermde generieke PP-proefstaaf. Productkwaliteit, stabilisatoren, vormproces en veroudering horen bij de keuze.

Structuur	Gevolg
lange verstrengelde ketens	tijdafhankelijkheid en smeltverwerking
kristallijne delen	extra ordening, eigen smeltgebied
covalent netwerk	geen gewone hernieuwde smeltstroom
vezels/additieven	richting, stijfheid, UV-/brandgedrag veranderen

UITLEG · 28.10

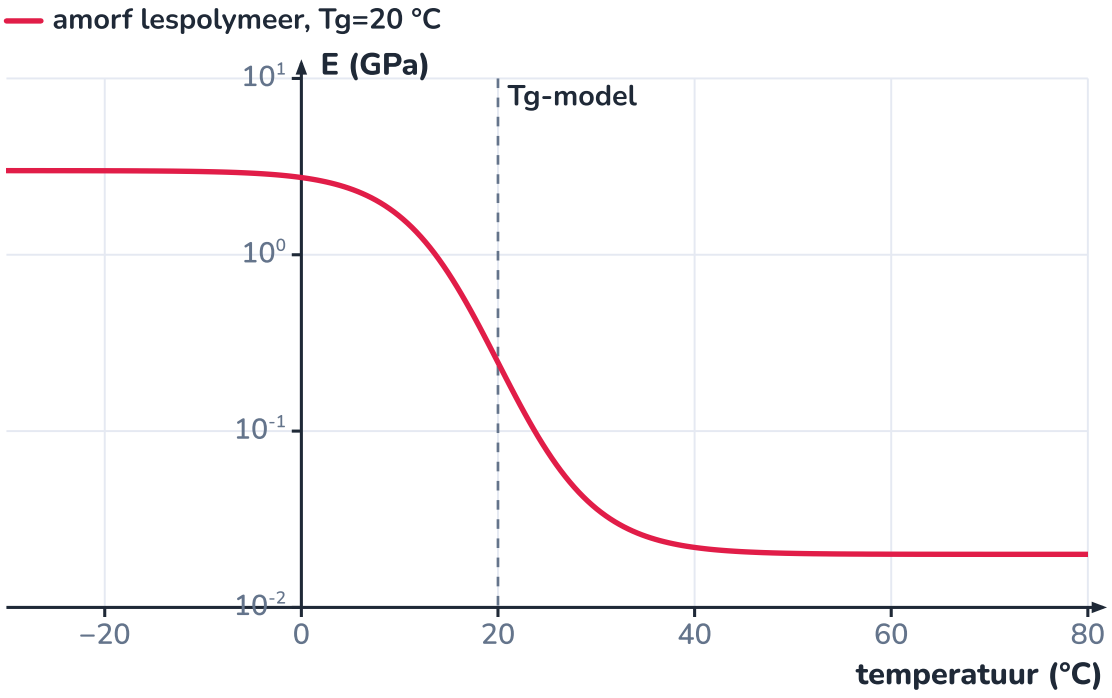
Glasovergang is geen smelten

10/24

Onder Tg zijn segmentbewegingen op de onderzochte tijdschaal beperkt; het amorfe deel reageert stijver en vaak brosser. Boven Tg neemt segmentmobiliteit toe. Tg is een gebied en hangt onder meer van meettempo, vocht en samenstelling af.

Een semi-kristallijn polymeer kan tegelijk een Tg van amorfe delen en een smeltgebied van kristallijne delen hebben. Een thermoharder kan een Tg hebben zonder als thermoplast te smelten. Viscositeit, kruip en slagvastheid hoeven niet met één universele sprong te veranderen.

MIT's glasovergangslabo koppelt segmentmobiliteit aan meetbare thermische/mechanische verandering. De grafiek is een eigen sigmoid lesmodel met Tg=20 °C, geen gemeten PP-curve.



E kan met ordes dalen rond Tg; temperatuur- én tijdsgebied moeten bij een belast onderdeel kloppen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.11

Een kunststofbeugel kan later verder doorbuigen

11/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Leskruipmodel bij constante last en temperatuur: $\delta(t)=\delta 0[1+0{,}15\ \ln(1+t/60\ s)]$, $\delta 0=1{,}0$ mm.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Na 60 s: $\delta=1+0{,}15\ \ln 2=1{,}1040$ mm.
2. Na één uur: $\delta=1+0{,}15\ \ln 61=1{,}6166$ mm.
3. Een kortdurende δ-eis kan dus gehaald worden terwijl dezelfde beugel later een grotere verplaatsing heeft. Verander temperatuur en hermeet de tijdschaal.

ANTWOORD

Na één uur ongeveer 1,617 mm in dit model.

Klopt dit? Het logmodel is een beperkte lesfit, geen universele lange-duurwet. Kruipbreuk, restvervorming en vocht moeten apart getest worden.

UITLEG · 28.12

Keramiek, composieten en dotering hebben andere mechanismen

12/24

Keramieken hebben vaak sterke ionische/covalente bindingen, goede hitte- en chemische eigenschappen en hoge stijfheid. Maar scheuren en poriën kunnen breuk sturen; oppervlaktedefecten zijn bij trek belangrijk. Hard en corrosiebestendig betekent niet automatisch impactbestendig.

Een vezelcomposiet combineert vezels en matrix. Langs vezels kan de vezel het meeste van de last dragen, dwars erop bepalen matrix en interface veel. Laagvolgorde, delaminatie, vocht, UV en verbindingen zijn essentieel. De 'CFRP langs vezel'-waarde in de lesdataset is niet voor elke richting geldig.

Een halfgeleider gebruikt gecontroleerde verontreiniging als functie. Fosfor in silicium kan donoren leveren, boor acceptoren. De hoeveelheid mobiele lading wordt gewijzigd zonder het materiaal als geheel blijvend geladen te maken: geïoniseerde dopanten en dragers bewaren elektroneutraliteit.

EENVOUDIG ISO-REK VEZELMENGMODEL

$$E_{\parallel} \approx V_f E_f + (1 - V_f) E_m$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.13

Vezels langs en dwars: dezelfde samenstelling, andere E

13/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Model: Vf=0,60, Ef=70 GPa, Em=3 GPa; perfecte hechting en ideale geometrie.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Iso-rek langs vezels: Eparallel=0,60·70+0,40·3=43,2 GPa.
2. Iso-spanning dwars als eenvoudige ondergrens: 1/Edwars=0,60/70+0,40/3, dus Edwars=7,047 GPa.
3. De verhouding is ruim zes; een enkele isotrope E zou de dwarsvervorming sterk kunnen onderschatten.

ANTWOORD

De twee idealisaties geven 43,2 en circa 7,047 GPa.

Klopt dit? Werkelijke vezelvorm, poriën, matrix/interface en schuifwerking maken deze mengregels slechts modellen; geen complete laminaatberekening.

UITLEG · 28.14

Dotering maakt de zonnecel elektrisch bruikbaar

14/24

In silicium heeft elk Si-atoom vier valentie-elektronen voor bindingen. Een substituerende donor zoals fosfor kan een extra mobiele elektron leveren; een acceptor zoals boor maakt een mobiel gat mogelijk. n-

type heeft elektronen als meerderheidsdragers; p-type gaten. Fosfor P betekent dus n-type, niet p-type.

Voor een eenvoudig volledig geïoniseerd n-typegebied is n≈ND en de geleiding σ≈q n μn. Een p-n-overgang heeft daarnaast ruimtelading en een ingebouwd veld. Dit veld en dragertransport vormen een basis van diode- en zonnecelwerking; dotering is geen gewone coating op een metaal.

MIT's dopingtutorial verklaart de kleine hoeveelheden en mobiele dragers. Bij lage temperatuur of hoge dotering zijn volledige ionisatie en constante mobiliteit niet vanzelfsprekend.

DRAGERS ÉN HUN MOBILITEIT BEPALEN DE GELEIDING

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p)$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.15

Een kleine donorfractie met grote elektrische invloed

15/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Lesmodel: ND=n=10^{22} m^{-3}, μn=0,135 $m^2/(V\cdot s)$, gaten verwaarloosbaar; q=1,602176634·10^{-19} C; 5·10^{28} Si-plaatsen/m^3.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. σ=q n μ=216,29385 S/m.
2. Soortelijke weerstand=1/σ=0,0046233 Ω·m.
3. Donorfractie=10^{22}/(5·10^{28})=2·10^{-7}=0,20 ppm. Dit is ongeveer 10^{16} cm^{-3}, want 1 m^3=10^6 cm^3.

ANTWOORD

Een kleine gecontroleerde atoomfractie geeft een functionele dragerconcentratie.

Klopt dit? De μ is een verstrekte modelwaarde, afhankelijk van temperatuur, materiaal en dotering. ND is niet altijd gelijk aan vrij n.

UITLEG · 28.16

Ashby: eerst het onderdeel, dan de index

16/24

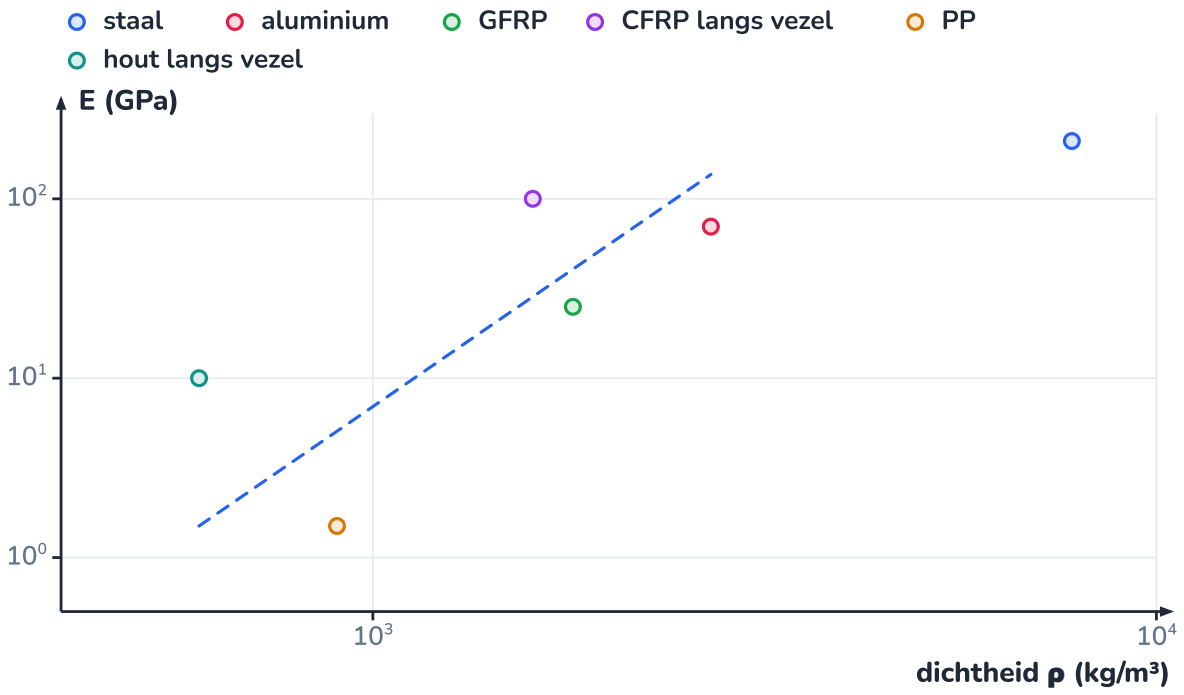
Formuleer de **functie** (een balk draagt F), **beperkingen** (lengte, maximale doorbuiging, sterkte, omgeving), **doel** (minimale massa) en **vrije variabelen** (hier materiaal en balkhoogte). Pas daarna ontstaat een materiaalindex.

Voor een vaste breedte b en vrije hoogte h is I=$bh^3/12$. Een ingeklemde balk met tiplast geeft δ=$FL^3/(3EI)$=$4FL^3/(Ebh^3)$. Uit δ≤δmax volgt h≥[$4FL^3/(Eb\delta max)$]^(1/3). Massa m=ρbhL schaalt bij vaste F/L/b/δ als ρ/E^(1/3).

Maximaliseer daarom E^(1/3)/ρ voor deze specifieke geometrievrijheid. Als breedte én hoogte gelijkvormig mogen veranderen, krijg je een andere exponent. Een trekstaaf geeft weer een andere index. Het bekende E/ρ zomaar op een buigprobleem toepassen is niet algemeen correct.

VASTE B, VRIJE H, VASTE L EN DOORBUIGINGSEIS

$$M_{\text{stijfheid}} = \frac{E^{1/3}}{\rho}$$



De stippellijn heeft E∝ρ³: constant index voor het hier afgeleide probleem, geen universele materiaalgrens.

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.17

Ook de sterkte-eis bepaalt de minimale hoogte

17/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Balk L=1,0 m, b=30 mm, F=100 N, δmax=3,0 mm. Lesstaal ρ=7800, E=210 GPa, σtoelaat=120 MPa.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Stijfheid: hδ=[4·100/(210·10⁹·0,030·0,003)]^(1/3).
2. Buigspanning σ=Mc/I=6FL/(bh²), dus hσ=√[6FL/(bσtoelaat)].
3. Kies h=max(hδ,hσ,hminimum); reken beide controles opnieuw uit. De code levert de exacte hoogten en massa voor alle kandidaten.

ANTWOORD

De grootste ondergrens bepaalt de werkelijke balkhoogte.

Klopt dit? Euler–Bernoulli, kleine vervorming, homogene effectieve E en verwaarloosde eigenlast zijn aannames; verbindingen, kruip en brosse scheuren zijn nog niet afgedekt.

CODE · 28.18

Zes kandidaten rangschikken en de rangorde testen

18/24

Elke materiaalwaarde hieronder is een **transparante leswaarde**, geen certificaat of volledige materiaalgrade. De code gebruikt dezelfde balkbelasting en rekent doorbuiging én spanning terug. De dataset neemt voor composiet/hout de langsrichting. Daarna wordt voor hout alleen E gehalveerd om gevoeligheid voor een verkeerde conditie te tonen.

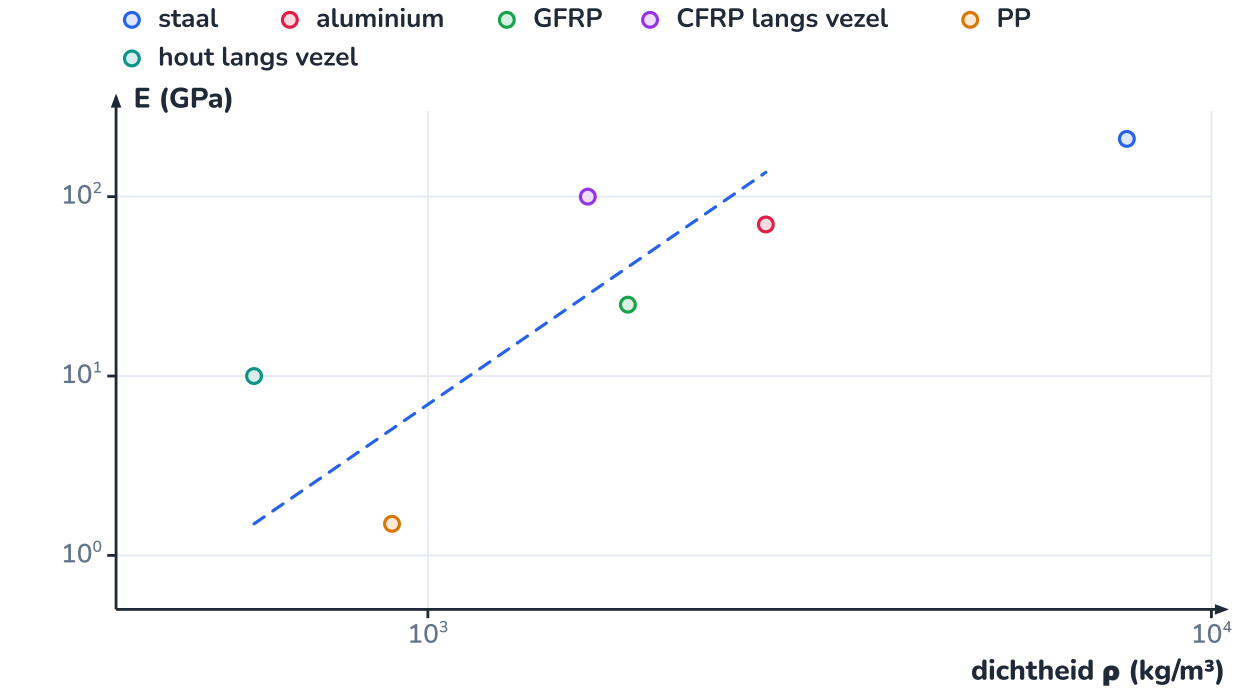
Lesmateriaal	ρ (kg/m³)	E (GPa)	σtoelaat (MPa)
staal	7800	210,0	120
aluminium	2700	70,0	80
GFRP	1800	25,0	80
CFRP langs vezel	1600	100,0	150
PP	900	1,5	12
hout langs vezel	600	10,0	12

Python **selectie.py** 42 regels

```python
# selectie.py — transparante leswaarden, geen gecertificeerde materiaaldata
import math
import numpy as np
# naam, rho kg/m3, E Pa, toegelaten spanning Pa (lesgegeven)
data=[
 ("staal",7800,210e9,120e6),
 ("aluminium",2700,70e9,80e6),
 ("GFRP",1800,25e9,80e6),
 ("CFRP langs vezel",1600,100e9,150e6),
 ("PP",900,1.5e9,12e6),
 ("hout langs vezel",600,10e9,12e6),
]
L,b,F,dmax=1.0,.030,100.0,.003
rij=[]
for naam,rho,E,sigtoel in data:
    hd=(4*F*L**3/(E*b*dmax))**(1/3)
    hs=math.sqrt(6*F*L/(b*sigtoel))
    h=max(hd,hs,.003)
    massa=rho*b*h*L
    delta=4*F*L**3/(E*b*h**3)
    sigma=6*F*L/(b*h*h)
    rij.append((naam,hd,hs,h,massa,delta,sigma,E**(1/3)/rho))
for z in sorted(rij,key=lambda z:z[4]):
    naam,hd,hs,h,m,d,s,index=z
    print(f"{naam:17s} hδ={hd*1000:6.2f} hσ={hs*1000:6.2f} "
          f"h={h*1000:6.2f} mm, m={m:.4f} kg, δ={d*1000:.4f} mm, "
          f"σ={s/1e6:.2f} MPa")
# Gevolg van modelfout/klimaat: alleen E halveert, zelfde toelaatspanning.
hout=next(z for z in data if z[0].startswith("hout"))
```

```
rho,E,sig=hout[1:]
h0=max((4*F/(E*b*dmax))**(1/3),math.sqrt(6*F/(b*sig)))
h1=max((4*F/(.5*E*b*dmax))**(1/3),math.sqrt(6*F/(b*sig)))
print(f"hout bij halve E: h {h0*1000:.2f}->{h1*1000:.2f} mm, "
      f"massa {rho*b*h0:.4f}->{rho*b*h1:.4f} kg")
# Kristal en dotering: dezelfde SI-conventie.
NA=6.02214076e23
print(f"FCC-Al uit a=0.405nm: {4*.0269815385/(NA*(.405e-9)**3):.3f} kg/m3")
print(f"BCC-Fe uit a=0.2866nm: {2*.055845/(NA*(.2866e-9)**3):.3f} kg/m3")
q,ne,mu=1.602176634e-19,1e22,.135
sig=q*ne*mu
print(f"Si-model σ={sig:.5f} S/m, soortelijke weerstand={1/sig:.7f} ohm m")
print(f"donorfractie t.o.v. 5e28 sites/m3 = {ne/5e28*1e6:.4f} ppm")
```

```
hout langs vezel  hδ= 76.31 hσ= 40.82 h= 76.31 mm, m=1.3737 kg, δ=3.0000 mm, σ=3.43 MPa
CFRP langs vezel  hδ= 35.42 hσ= 11.55 h= 35.42 mm, m=1.7003 kg, δ=3.0000 mm, σ=15.94 MPa
GFRP              hδ= 56.23 hσ= 15.81 h= 56.23 mm, m=3.0364 kg, δ=3.0000 mm, σ=6.33 MPa
aluminium         hδ= 39.89 hσ= 15.81 h= 39.89 mm, m=3.2314 kg, δ=3.0000 mm, σ=12.57 MPa
PP                hδ=143.63 hσ= 40.82 h=143.63 mm, m=3.8780 kg, δ=3.0000 mm, σ=0.97 MPa
staal             hδ= 27.66 hσ= 12.91 h= 27.66 mm, m=6.4726 kg, δ=3.0000 mm, σ=26.14 MPa
hout bij halve E: h 76.31->96.15 mm, massa 1.3737->1.7307 kg
FCC-Al uit a=0.405nm: 2697.806 kg/m3
BCC-Fe uit a=0.2866nm: 7878.342 kg/m3
Si-model σ=216.29385 S/m, soortelijke weerstand=0.0046233 ohm m
donorfractie t.o.v. 5e28 sites/m3 = 0.2000 ppm
```



De lichtste rekenbalk kan toch afvallen op zout, UV, vocht, verbinding of beschikbaar formaat.

UITLEG · 28.19

Kou, zout en UV: eigenschappen blijven geen tabelconstanten

19/24

Kou: segmentmobiliteit kan afnemen; sommige polymeren en bepaalde staaltoestanden worden bij impact minder taai. Test het relevante temperatuurgebied, belastingsnelheid, kerf en dikte. Een Tg-waarde alleen is geen complete slagvastheidsrating.

Zout en water: corrosie kan algemene aantasting, putten of spleten geven. 316 heeft in veel chlorideomstandigheden meer weerstand dan 304, maar is niet immuun. Worldstainless' ontwerpgids verlangt kennis van concentratie, temperatuur, tijd en geometrie. Vermijd vochtvasthoudende spleten en beoordeel galvanische koppels, bijvoorbeeld aluminium naast geleidende koolstofvezel.

UV: polymeren en organische matrix/coating kunnen ketenbreuk of andere veranderingen ondergaan. UV-stabilisatoren, afscherming en vervangbaarheid horen bij de productkeuze. De bestaande polycarbonaatplaat houdt haar UV-zijde naar buiten; die productinstructie wordt niet door een generieke materiaalnaam vervangen.

Risico	Ontwerpactie
koude kerf/impact	grade en specimen bij bedrijfstemperatuur toetsen
chloridespleet	drainage, reiniging, passende legering
galvanisch contact	isoleren en afdichten met onderhoudsplan
UV-veroudering	specifiek gestabiliseerd product en inspectie

UITGEWERKT VOORBEELD · 28.20

Thermische uitzetting kan de verbinding belasten

20/24

Verbind microstructuur of materiaalgegevens met een concrete berekening.

GEGEVEN

- Aluminium en staal verbonden over 1,20 m; rekenwaarden $\alpha Al = 23 \cdot 10^{-6}$/K, $\alpha staal = 12 \cdot 10^{-6}$/K; $\Delta T = 40$ K.

GEVRAAGD

- Afleiding, keuze en controle van het geldigheidsgebied.

OPLOSSING

1. Vrij verschil $\Delta L = (\alpha Al - \alpha staal) L \Delta T = 11 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}20 \cdot 40 = 0{,}528$ mm.
2. Volledig verhinderd aluminium als eenvoudige bovengrens: $\sigma \approx E \alpha \Delta T = 70$ GPa$\cdot 23 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 64{,}4$ MPa.
3. Werkelijke bout/slobgat/contactvervorming verdeelt de last. Een vrije schuifrichting kan uitzetting opnemen zonder de hoofdlastverbinding los te maken.

ANTWOORD

Er is circa 0,528 mm relatieve vrije verplaatsing in dit scenario.

Klopt dit? De spanningsbovengrens is geen echte tweemateriaalverbindingsanalyse; geometrie, wrijving en relatieve stijfheden bepalen de verdeling.

PROEF · 28.21

Stijf, sterk en taai uit elkaar meten

21/24

ONDERZOEKSVRAAG

Is de strook die het minst doorbuigt ook de strook die de meeste impact kan opnemen?

MATERIAAL

- docentgekozen veilige metaal-/kunststof-/houtstroken met gemeten maat
- lage gewichten
- liniaal of meetklok
- veilige afscherming
- thermometer

Veiligheid

Blijf met eigen stroken in een kleine veilige elastische proef; voorkom wegspringende stukken en scherpe randen. Geen ongecontroleerde staalwarmtebehandeling of vernietigende proef aan dragende Habitat-onderdelen.

WERKWIJZE

1. Meet b, h en overspanning van elke strook; vergelijk dezelfde geometrie of corrigeer met $I=bh^3/12$.
2. Breng kleine elastische lasten stapsgewijs aan en meet δ; controleer ontlasten op terugkeer en eventuele restvervorming.
3. Houd een constante kleine last langer aan bij een polymeer en meet kruip. Vergelijk alleen temperaturen die de docent veilig kan beheersen.
4. Gebruik voor impact een geschikte afgeschermde demonstratie of bestaande testresultaten; werp geen onbeschermde harde/brosse proefstukken kapot.

WAARNEMING

De δ/F-helling meet een effectieve stijfheid, restvervorming geeft een andere eigenschap, en tijdsverandering toont kruip. Een impactresultaat hoeft dezelfde rangorde niet te hebben.

VERKLARING

Stijfheid, vloeigrens, scheurgevoeligheid en energieabsorptie volgen uit verschillende mechanismen en belastingscondities.

VERHAAL · 28.22

Een materiaalkaart helpt kiezen, het onderdeel beslist

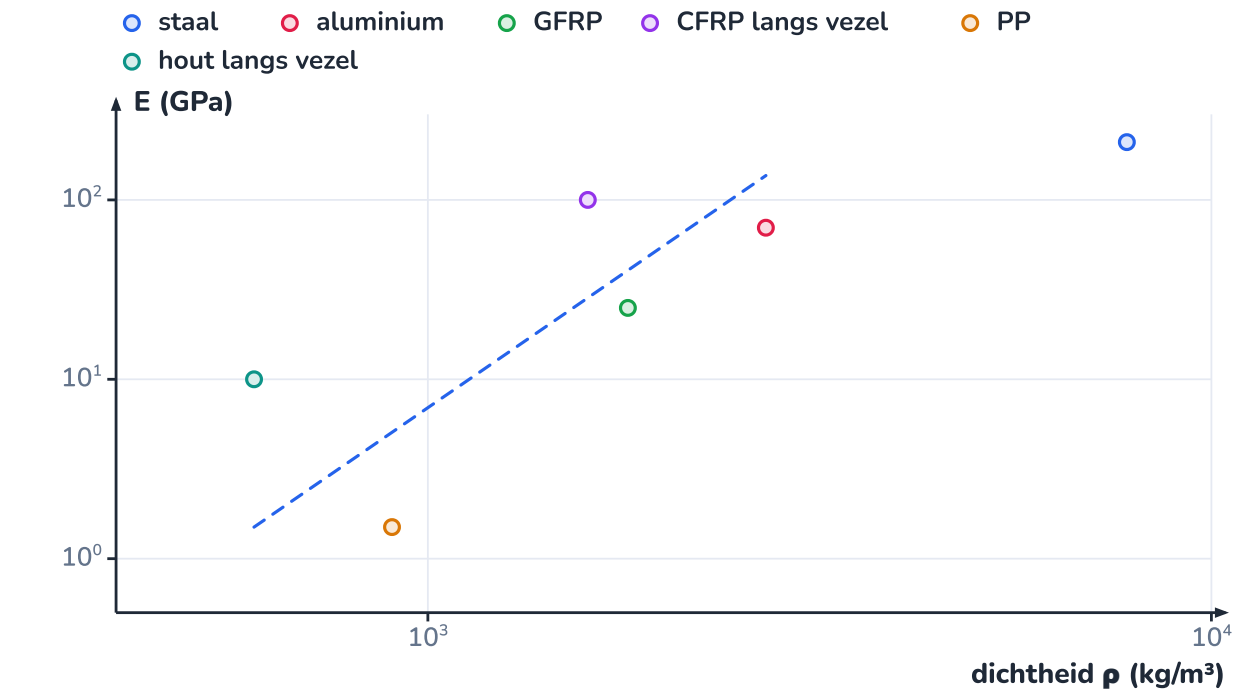
22/24

Michael Ashby's selectiekaarten brengen families en concurrerende eigenschappen op vaak logaritmische assen. De waarde zit in het zichtbaar maken van afwegingen, en in een index die uit de belasting en vrije geometrie volgt.

Cambridge koppelt de kaarten aan stijf, sterk en taai. Een punt is geen volledig materiaal: oriëntatie, proces, oppervlakte en grade verschuiven de eigenschappen. Daarom zijn familiebubbels nuttig voor

eerste selectie en specifieke leveranciersgegevens nodig voor detailontwerp.

Voor Habitat kan hout in een droge langsrichting-rekenbalk licht winnen en toch ongeschikt zijn voor een natte zoutspleet. Een aluminiumprofiel kan door zijn vormefficiëntie praktischer zijn dan een massieve materiaalstrook; de coating en isolatie van boutcontacten worden dan onderdeel van de keuze.



Deze eigen kaart gebruikt zes verstrekte punten; zij pretendeert geen volledige commerciële materiaalbibliotheek.

NASLAG · 28.23

Van atomen naar het onderdeel

23/24

kubische kristaldichtheid

$$\rho = \frac{NM}{N_A a^3}$$

symbool	betekenis	eenheid
N	atomen per cel	1
a	roosterparameter	m

korrelbijdrage

$$\sigma_y = \sigma_0 + k_{\mathrm{HP}} d^{-1/2}$$

symbool	betekenis	eenheid
d	korrelmaat	m

cantilever met vaste b

$$\delta = \frac{4FL^3}{Ebh^3}$$

symbool	betekenis	eenheid
E	Youngmodulus	Pa

buigspanning

$$\sigma_{\max} = \frac{6FL}{bh^2}$$

symbool	betekenis	eenheid
σ	normaalspanning	Pa

vrije thermische uitzetting

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

symbool	betekenis	eenheid
α	uitzettingscoëfficiënt	K^{-1}

halfgeleidergeleiding

$$\sigma_{\text{elektrisch}} = q(n\mu_n + p\mu_p)$$

symbool	betekenis	eenheid
μ	mobiliteit	$m^2/(V \cdot s)$

Niveau	Wat vastleggen?
materiaal	grade, samenstelling, toestand, richting
proces	warmtebehandeling, vorming, las-/lijmconditie
omgeving	temperatuur, vocht/zout, UV, duur
onderdeel	maat, kerf, verbinding, inspectie, vervanging

Primaire uitleg: Cambridge microstructuur/ontlaten/selectiekaarten, MIT polymeren/dotering en Worldstainless corrosieontwerp. Links staan bij relevante bladen; raadpleegdatum 30-09-2026. Dataset en modelcurven zijn expliciete lesgegevens, geen normwaarden.

HET GEHEEL · 28.24

Habitat: een materiaal plus een verbinding plus een onderhoudsplan

24/24

e05/e12 rekenen krachten en balken; dit hoofdstuk laat zien waar hun E/sterkte vandaan komen en wanneer zij veranderen. e24 vraagt koeling en e27 vraagt elektrode-/separator-/tankmaterialen. Het materiaalgedrag wordt pas bruikbaar wanneer proces en omgeving erbij staan.

E12 Sterkteleer

Stijfheid, vervorming, doorbuiging en sterkte.

E24 Vermogenselektronica en elektrische machines

Thermisch en elektrisch werkende onderdelen.

E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Corrosie, separator en opslagmaterialen.

Habitat

Bestaand PP-bakje, watervast multiplex en polycarbonaat met UV-zijde naar buiten blijven dossierkeuzes. Nieuwe 1 m/30 mm-breed/100 N/3 mm-doorbuigingvergelijking is een **selectie-oefening**, geen dragende stationsonderdeelkeuze. Voor kou/zout/UV wordt per werkelijk onderdeel een grade-, coating-, verbindings-, temperatuur- en inspectiespecificatie nodig; geen generieke 316-/CFRP-/polymeerclaim geldt automatisch als vrijgave.

SAMENVATTING

In het kort

- Kristalstructuur en fouten sturen transport en vervorming; een perfect rooster is geen algemeen doel.
- Legering en verwerking veranderen dislocaties, korrels en fasen; hardheid, sterkte en taaiheid verschillen.

- Polymeerketens en Tg verklaren temperatuur-/tijdafhankelijkheid; Tg is geen smeltpunt.
- Keramiek, vezelrichting en halfgeleiderdotering hebben eigen werkingsmechanismen.
- Een Ashby-index volgt uit belasting en vrije geometrie; toets alle beperkingen opnieuw.
- Kou, zout, UV en verbindingen vragen specifieke gradegegevens en validatie voor Habitat.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

eenheidscel
Herhalende kristalgeometrie waarvan gedeelde atomen fractioneel meetellen.

dislocatie
Lijnfout waarvan beweging plastische vervorming mogelijk maakt.

glasovergang
Verandering in segmentmobiliteit van amorfe polymeerdelen op een gegeven tijdschaal.

ontlaten
Beheerste warmtebehandeling van een metastabiele staalstructuur om eigenschappen af te stemmen.

materiaalindex
Uit functie, doel, beperkingen en vrije geometrie afgeleide combinatie van eigenschappen.

dotering
Gecontroleerde toevoeging van atomen om onder meer halfgeleiderdragers te veranderen.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 29

DNA, genen en eiwitten

Van gerichte DNA-keten naar eiwitfunctie en een toetsbare raskeuze

Je volgt informatie en materiaal van DNA via RNA naar een werkend eiwit. Richting, leesraam, voorraadbalans en omgeving maken het verschil tussen een letterverandering en een bewezen verandering van plantprestatie.

11× uitleg | 7× uitgewerkt voorbeeld | 1× proef | 1× naslag | 1× verhaal | 1× het geheel | 2× code | ± 13 lestijden

B Leven en systemen | M Materie en chemie



Een koudetolerant ras wordt beoordeeld op meetbare schade, herstel en opbrengst onder dezelfde omstandigheden.

Na dit hoofdstuk

- Je schrijft complementaire DNA/RNA-strengen met juiste richting.
- Je verklaart semiconservatieve replicatie en beide syntheses aan een vork.
- Je vertaalt een verstrekte coderende sequentie en controleert code, frame en stop.
- Je koppelt eiwitstructuur en expressiedynamiek aan functie.
- Je onderscheidt mutatieclassificatie, mechanisme en een echte koudetolerantieproef.

UITLEG · 29.1

DNA is een gerichte chemische keten

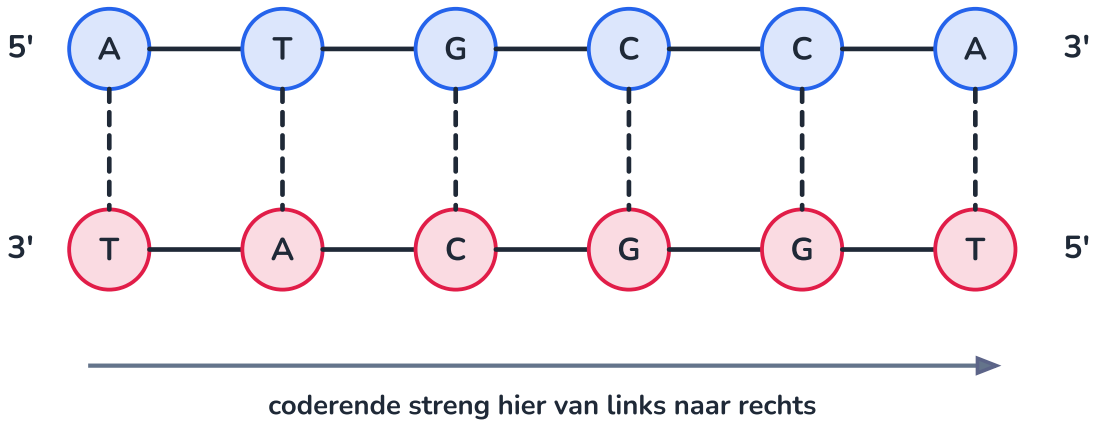
1/24

Een nucleotide bevat een fosfaat, deoxyribose en één base: A, T, G of C. De suiker–fosfaatverbindingen vormen de rug van de keten; de basenvolgorde draagt informatie. Een covalente 3'–5'-fosfodiësterbinding verbindt het 3'-OH van de ene suiker met het 5'-fosfaat van de volgende.

De twee strengen lopen **antiparallel**. A paart met T, G met C; waterstofbruggen en basestapeling dragen aan de dubbele-helixstabiliteit bij. Complementariteit maakt kopiëren mogelijk, maar is geen garantie dat elk kopieerproces foutloos verloopt.

Schrijf een losse sequentie standaard 5'→3'. Benoem daarnaast of je coderende DNA, matrijs-DNA of RNA bedoelt. Zonder die richting en rol kun je niet betrouwbaar vertalen.

Antiparallel DNA — ongedraaide detailkaart



Ruggen: suiker–fosfaat; dwars: complementaire basen

Deze vlakke kaart toont chemische richting en baseparing; zij is geen geometrisch helixmodel.

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.2

Complementair is nog niet dezelfde schrijfwijze

2/24

Volg richting, hoeveelheid of functie door een moleculair model.

GEGEVEN

- Boven: 5'-ATGCCA-3'.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. Daar direct onder past antiparallel 3'-TACGGT-5'.
2. Een databestand noteert ook de tweede streng 5'→3'. Lees haar daarom van rechts naar links: 5'-TGGCAT-3'.
3. Dat is de reverse complement, niet alleen een lettervervanging in dezelfde richting.

ANTWOORD

De tweede streng in standaardnotatie is TGGCAT.

Klopt dit? Twee keer reverse complement moet de oorspronkelijke sequentie teruggeven; beide strengen hebben zes basen.

UITLEG · 29.3

Een gen is meer dan een eiwitcode

3/24

DNA is in chromosomen georganiseerd. Bij planten liggen nucleaire genen tussen regulerende gebieden; ook chloroplasten en mitochondriën bevatten DNA. Een **allel** is een sequentievariant op een locus. Twee rassen kunnen hetzelfde type eiwit hebben en toch verschillen in het tijdstip of de hoeveelheid waarin het wordt gemaakt.

Een eiwitcoderend gen omvat de informatie die uiteindelijk een polypeptide oplevert, maar promoter, andere regulerende elementen, introns en RNA-verwerking bepalen mede wat er ontstaat. Niet elk gen codeert voor een eiwit: rRNA en tRNA vervullen hun functie als RNA.

Een genotype is dus geen complete gebruikshandleiding voor een plant. Ontwikkeling, licht, voeding, temperatuurgeschiedenis en epigenetische regulatie beïnvloeden het fenotype. Dat maakt rassen vergelijken tot een experimentele vraag.

Element	Functie	Variant kan veranderen
promoter/regulerend DNA	transcriptie aansturen	wanneer en hoeveel RNA
exoncode	bijdrage aan polypeptide	volgorde of stop
intron/splicesignaal	RNA-verwerking	welke transcriptvariant
RNA-gen	functie als RNA	RNA-structuur/hoeveelheid

UITLEG · 29.4

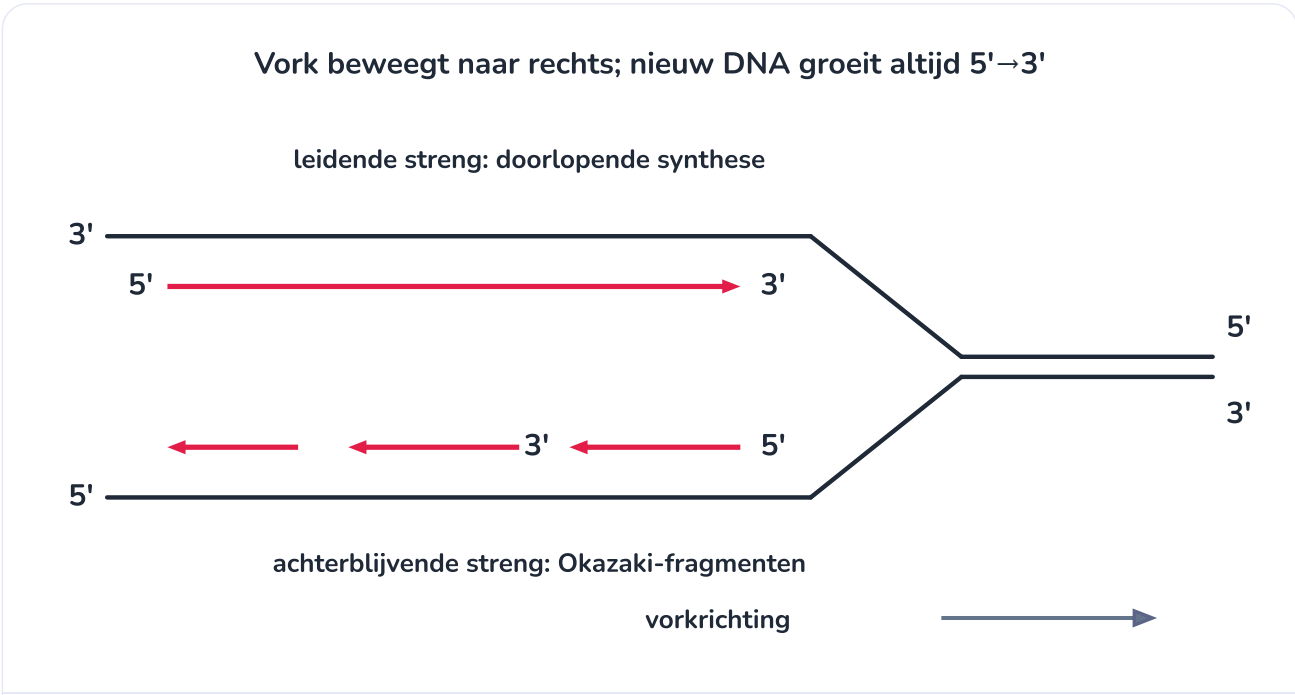
Replicatie: twee richtingen van de vork, één richting van synthese

4/24

Helicase opent het DNA; topoisomerase helpt de torsiespanning beheersen. Primase maakt een primer. Een DNA-polymerase verlengt alleen een bestaande vrije 3'-OH: nieuw DNA groeit 5'→3', terwijl de matrijs 3'→5' wordt gelezen.

Bij een vork kan de leidende streng doorlopend mee worden gevormd. De achterblijvende streng krijgt steeds nieuwe primers en korte Okazaki-fragmenten, die eveneens 5'→3' groeien maar tegengesteld aan de lokale vorkbeweging. Primerverwijdering, opvullen en ligase maken een doorlopende rug. Eukaryote chromosomen hebben veel startplaatsen; de uiteinden vragen speciale aandacht.

Semiconservatief betekent dat elk dochter-duplex een oude en een nieuwe streng bevat. Het zegt niet dat slechts de helft van de informatie wordt gekopieerd.



Alle synthese-pijlen beginnen aan 5' en eindigen aan 3'; de onderste fragmenten groeien linkswaarts.

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.5

Een isotopenproef onderscheidt kopieerhypothesen

5/24

Volg richting, hoeveelheid of functie door een moleculair model.

GEGEVEN

- Aanvankelijk alle DNA-strengen zwaar; vervolgens groei met alleen lichte nieuwe nucleotiden. Idealiseer complete generaties.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. Na één replicatie heeft elk duplex één zware en één lichte streng: 100% hybride.
2. Na twee replicaties: elk hybride duplex geeft één hybride en één volledig licht duplex. Dus 50% hybride, 50% licht.
3. Na drie generaties: 25% hybride en 75% licht; na n≥1 blijft hybridefractie 2^(1−n). Een volledig zwaar duplex ontstaat niet meer.

ANTWOORD

Na vier generaties: 12,5% hybride en 87,5% licht.

Klopt dit? Het aantal zware oude strengen blijft gelijk terwijl het aantal duplexen verdubbelt; bandintensiteit is in deze ideaalproef evenredig met DNA-massa.

UITLEG · 29.6

Kopieerfouten, herstel en kans zijn verschillende zaken

Een polymerase kan een verkeerde base inbouwen. Proofreading en verdere reparatiesystemen verlagen de kans dat zo'n fout als blijvende variant wordt doorgegeven. Schade aan DNA, een tijdelijk verkeerde baseparing en een erfelijke mutatie zijn daarom niet identiek.

Stel uitsluitend voor een rekenmodel dat de onafhankelijke overblijvende foutkans $p=10^{-8}$ per nieuw nucleotide is. Bij $N=10^6$ nucleotiden is de verwachting $Np=0{,}01$ en P(geen fout)= (1−p)^N≈e^(−Np)=0,99005. Dit is geen gemeten plantenmutatiepercentage: werkelijk herstel, sequentiecontext, schade en selectie zijn niet uniform.

ONAFHANKELIJKHEIDSMODEL; GELDIG BIJ KLEINE P

$$P(\text{geen fout}) = (1-p)^N \approx e^{-Np}$$

UITLEG · 29.7

Transcriptie leest de matrijs en maakt RNA

RNA-polymerase herkent met andere factoren een startgebied en maakt RNA 5'→3'. Het leest voor dit gen de matrijs-DNA-streng 3'→5'. In het RNA staat U waar in het coderende DNA T staat, mits je hetzelfde gebied en dezelfde 5'→3'-richting vergelijkt.

Dat ‘coderende DNA’ niet wordt afgelezen is een naamvalkuil: zijn letters lijken op het RNA, maar de complementaire matrijs wordt gelezen. De rollen kunnen op andere genen langs hetzelfde chromosoom omkeren. Een richting zonder genaanduiding is onvoldoende.

RNA is geen tweede permanent archief met dezelfde chemie. Het heeft ribose, vaak een enkele streng en eigen vouwingen en functies; mRNA is een tijdelijke boodschapper waarvan productie én afbraak tellen.

Rol	Voorbeeld bij één gen
coderend DNA 5'→3'	ATG GCT TTT
matrijs direct eronder 3'→5'	TAC CGA AAA
RNA 5'→3'	AUG GCU UUU

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.8

Van matrijs naar RNA naar vijf aminozuren

Volg richting, hoeveelheid of functie door een moleculair model.

GEGEVEN

- Matrijs voor een synthetisch minigen: 3'-TAC CGA AAA CTT GGC ATT-5'. Gebruik standaardcode en start bij het eerste AUG.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. Complementair RNA groeit: 5'-AUG GCU UUU GAA CCG UAA-3'.
2. Codons zijn AUG=Met, GCU=Ala, UUU=Phe, GAA=Glu, CCG=Pro, UAA=stop.
3. De polypeptidevolgorde is MAFEP, vijf residuen; het stopcodon codeert geen zesde aminozuur.

ANTWOORD

MAFEP, gevolgd door terminatie bij UAA.

Klopt dit? 18 nucleotiden zijn zes codons, maar hier slechts vijf aminozuren. Deze korte didactische sequentie is geen werkelijk koudetolerantiegen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.9

RNA-verwerking verandert wat vertaalbaar is

9/24

Bij eukaryote eiwitgenen wordt een primair transcript onder meer voorzien van een 5'-cap en vaak een poly(A)-staart. Splicing verwijdert introns en verbindt exons. Alternatieve splicing kan verschillende rijpe RNA's opleveren. UTR's blijven RNA maar worden in de gekozen coderende regio niet vertaald.

Voor een telvoorbeeld bevat een transcript 120 nt 5'-UTR, een exoncode van 300 nt, een intron van 180 nt, een tweede exoncode van 450 nt inclusief stop en 90 nt 3'-UTR. Primair: 1140 nt, zonder toegevoegde staart. Rijp: 960 nt. De 750 nt coderende regio bevat 250 codons inclusief stop, dus 249 aminozuren. De cap is geen extra codon.

Voordat code een genomische sequentie vertaalt, moet je dus de daadwerkelijke transcriptvariant en exonverbinding kennen. Een stop in een intron hoeft de rijpe eiwitcode niet te beëindigen.

GEGEVEN

- 120 nt 5'-UTR, 300 nt exoncode, 180 nt intron, 450 nt exoncode inclusief stop en 90 nt 3'-UTR.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. Primair 120+300+180+450+90=1140 nt.
2. Rijp 1140−180=960 nt.
3. Code 300+450=750 nt, 250 codons waarvan één stop: 249 aminozuren.

ANTWOORD

960 nt rijp RNA en 249 residuen onder de beschreven aannames.

Klopt dit? UTR, intron en toegevoegde staart worden niet stil in de eiwitcode meegerekend.

UITLEG · 29.10

De genetische code is redundant, geen willekeurige afspraak

Drie RNA-basen vormen één codon: $4^3=64$ mogelijkheden. In de hier gebruikte standaardcode specificeren 61 codons een van twintig gewone aminozuren; drie geven stop. Verschillende codons kunnen hetzelfde aminozuur aanduiden: redundantie betekent niet dat een codon willekeurig meerdere aminozuren kiest.

Onderstaande eigen tabel volgt NCBI transl_table 1. Binnen elke cel staat de derde base in de volgorde U,C,A,G. * betekent stop; M bij AUG is methionine. Biologische startkeuze vraagt startcontext; een intern AUG is ook gewoon Met. Andere organellen/organismen kunnen een andere code gebruiken, dus kies de juiste tabel.

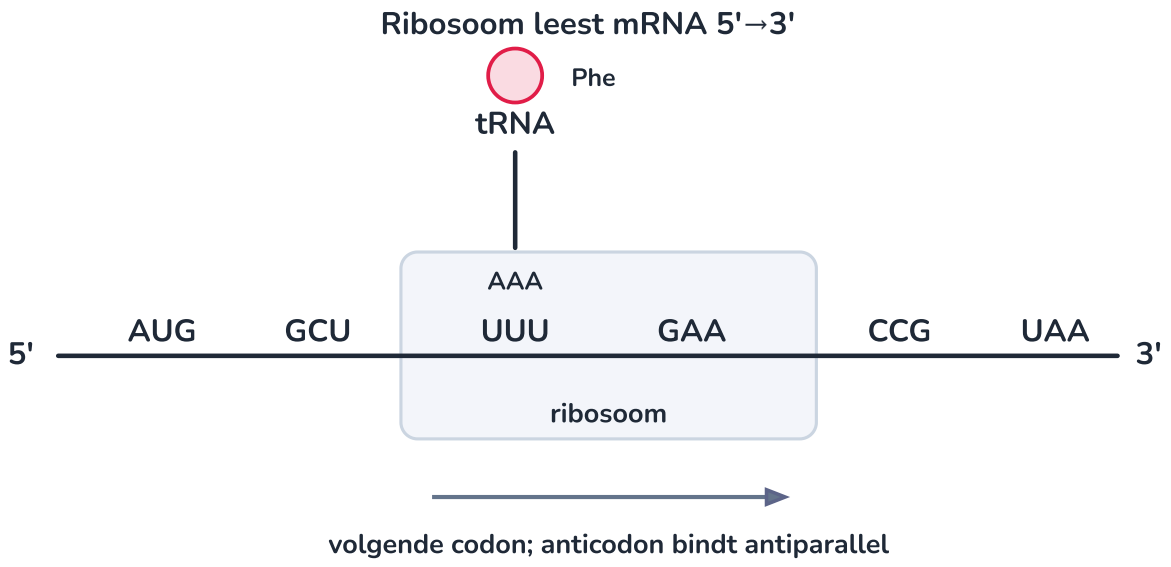
Eerste/tweede base	U	C	A	G
U	UUU → F UUC → F UUA → L UUG → L	UCU → S UCC → S UCA → S UCG → S	UAU → Y UAC → Y UAA → * UAG → *	UGU → C UGC → C UGA → * UGG → W
C	CUU → L CUC → L CUA → L CUG → L	CCU → P CCC → P CCA → P CCG → P	CAU → H CAC → H CAA → Q CAG → Q	CGU → R CGC → R CGA → R CGG → R
A	AUU → I AUC → I AUA → I AUG → M	ACU → T ACC → T ACA → T ACG → T	AAU → N AAC → N AAA → K AAG → K	AGU → S AGC → S AGA → R AGG → R
G	GUU → V GUC → V GUA → V GUG → V	GCU → A GCC → A GCA → A GCG → A	GAU → D GAC → D GAA → E GAG → E	GGU → G GGC → G GGA → G GGG → G

UITLEG · 29.11

Translatie koppelt letters aan chemische bouwstenen

Het ribosoom leest mRNA 5'→3'. Een tRNA bindt met zijn antiparallel anticodon en draagt een aminozuur. Aminoacyl-tRNA-synthetasen laden tRNA's; juiste codonparing alleen bewijst niet dat het juiste aminozuur was geladen. Peptidebindingen verbinden residuen; de keten groeit van N- naar C-terminus.

Bij elongatie komen geladen tRNA's binnen, ontstaat een peptidebinding en schuift het ribosoom. Vrijgavefactoren herkennen een stopcodon; stop is geen gewoon ‘stop-tRNA’ met een aminozuur. De synthese verbruikt geactiveerde bouwstenen en nucleotidetrifosfaten: informatieverwerking is ook een energievraag.



Het getoonde UUU/AAA-paar is één schematische tRNA-binding, geen compleet ribosomaal atoommodel.

CODE · 29.12

Alle codons en gerichte mutaties werkelijk vertalen

12/24

De code bouwt alle 64 codons uit een gecontroleerde standaardcodetabel. Zij rapporteert positie van stop en onvolledige rest, en doorloopt alle 45 mogelijke enkele substituties in de vijf coderende codons. Dit is een combinatorische telling bij één minigen; geen natuurlijke frequentie of test van eiwitfunctie.

Python **sequenties.py** 50 regels

```python
# sequenties.py — synthetisch minigen, geen werkelijk plantenconstruct
from itertools import product
bases="UCAG"
# NCBI standaardcode, rijen: eerste, tweede, derde base in deze volgorde.
letters="FFLLSSSSYY**CC*WLLLLPPPPHHQQRRRRIIIMTTTTNNKKSSRRVVVVAAAADDEEGGGG"
codons=["".join(c) for c in product(bases, repeat=3)]
code=dict(zip(codons,letters))
assert len(code)==64 and sum(a=="*" for a in code.values())==3
comp=str.maketrans("ACGT","TGCA")
def revcomp(s):
    if set(s)-set("ACGT"): raise ValueError("alleen A/C/G/T")
    return s.translate(comp)[::-1]
def vertaal(dna,frame=0):
    rna=dna.replace("T","U")
    eiwit=[]
    stop=None
    for i in range(frame,len(rna)-2,3):
        aa=code[rna[i:i+3]]
        if aa=="*":
            stop=i+1 # eerste nucleotide van stopcodon, tellen vanaf 1
            break
        eiwit.append(aa)
    return "".join(eiwit),stop,(len(rna)-frame)%3

origineel="ATGGCTTTTGAACCGTAA"
varianten={
 "origineel":origineel,
 "synoniem":origineel[:5]+"C"+origineel[6:],
```

```
 "missense":origineel[:7]+"C"+origineel[8:],
 "nonsense":origineel[:9]+"T"+origineel[10:],
 "deletie 1 base":origineel[:4]+origineel[5:],
 "deletie 1 codon":origineel[:6]+origineel[9:],
}
print("coderend 5'->3':",origineel)
print("matrijs 5'->3': ",revcomp(origineel))
for naam,s in varianten.items():
    print(naam, s, vertaal(s))
for frame in range(3):
    print("frame",frame,vertaal(origineel,frame))
# Alle mogelijke enkele substituties binnen de 15 coderende basen.
telling={"synoniem":0,"missense":0,"nonsense":0}
ref=vertaal(origineel)[0]
for i in range(15):
    for base in "ACGT":
        if base==origineel[i]: continue
        prot,stop,rest=vertaal(origineel[:i]+base+origineel[i+1:])
        soort="nonsense" if stop is not None and stop<16 else "synoniem" if prot==ref else "missense"
        telling[soort]+=1
print("45 synthetische substituties:",telling)
print("Deze telling is geen natuurlijke mutatiekans of functionele schadefrequentie.")
```

```
coderend 5'->3': ATGGCTTTTGAACCGTAA
matrijs 5'->3':  TTACGGTTCAAAAGCCAT
origineel ATGGCTTTTGAACCGTAA ('MAFEP', 16, 0)
synoniem ATGGCCTTTGAACCGTAA ('MAFEP', 16, 0)
missense ATGGCTTCTGAACCGTAA ('MASEP', 16, 0)
nonsense ATGGCTTTTTAACCGTAA ('MAF', 10, 0)
deletie 1 base ATGGTTTTGAACCGTAA ('MVLNR', None, 2)
deletie 1 codon ATGGCTGAACCGTAA ('MAEP', 13, 0)
frame 0 ('MAFEP', 16, 0)
frame 1 ('WLLNR', None, 2)
frame 2 ('GF', 9, 1)
45 synthetische substituties: {'synoniem': 8, 'missense': 36, 'nonsense': 1}
Deze telling is geen natuurlijke mutatiekans of functionele schadefrequentie.
```

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.13

Leesraam en startkeuze horen bij de vraag

13/24

Een RNA-sequentie heeft drie mogelijke tripletindelingen vanaf zijn 5'-kant. Voor DNA kun je bovendien de andere streng in de juiste richting bekijken. De code laat voor het minigen de drie frames zien. Frame 0 bevat MAFEP en stop; andere indelingen gebruiken andere triplets. Een fragment zonder stop is niet automatisch een compleet gen.

Een eenvoudig vertaalprogramma kan daarom niet uit letters alleen bewijzen waar een eiwit begint. Het gekozen beginpunt, transcript, code en stopconditie moeten als invoer vaststaan. Een 1-base-deletie verschuift het raam vanaf de deletie; een deletie van precies één volledig codon behoudt het raam, maar verwijdert wel een residu.

GEGEVEN

- Synthetisch minigen ATGGCTTTTGAACCGTAA; vaste standaardcode.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. Frame 0 leest ATG/GCT/TTT/GAA/CCG/TAA: MAFEP, stop begint bij positie 16.
2. Frame 1 leest TGG/CTT/TTG/AAC/CGT: WLLNR, geen stop in het fragment, 2 nt rest.
3. Frame 2 leest GGC/TTT/TGA: GF en stop vanaf positie 9; één nt zou buiten volledige triplets vallen.

ANTWOORD

Raamkeuze verandert vertaling; alleen frame 0 is hier vooraf als minigen opgegeven.

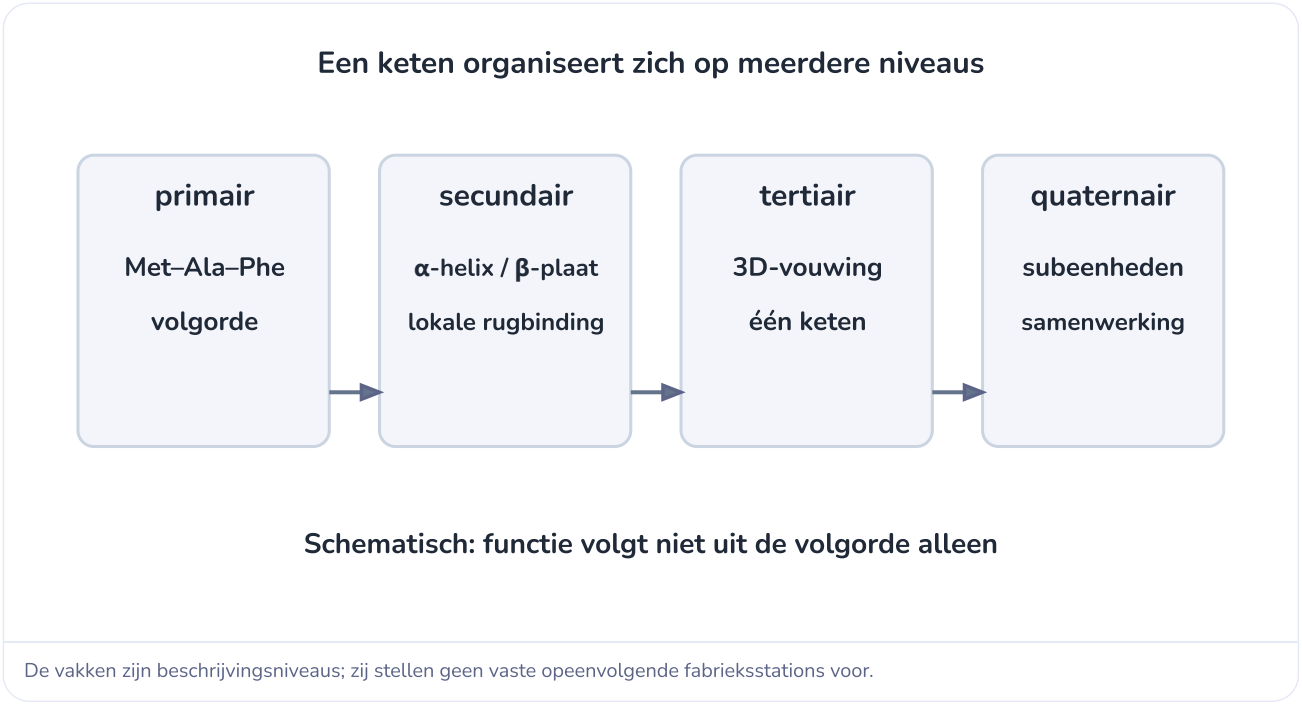
Klopt dit? Zonder biologische startcontext wordt een fragment zonder stop niet automatisch een volledig eiwit.

UITLEG · 29.14

Eiwitstructuur heeft vier beschrijvingsniveaus

De **primaire** structuur is de aminozuurvolgorde. **Secundaire** structuur bevat lokale patronen zoals α-helices en β-platen, gestabiliseerd onder meer door waterstofbruggen van de rug. **Tertiaire** structuur is de totale ruimtelijke organisatie van één polypeptide. **Quaternaire** structuur beschrijft meerdere ketens in een complex.

Hydrofobe groepen, ladingen, waterstofbruggen, covalente disulfideverbindingen en de omgeving beïnvloeden vouwing. Chaperonnes kunnen helpen. Een gewijzigd residu kan een actieve plek, binding of stabiliteit veranderen, maar kan ook weinig effect hebben. ‘Zelfde lengte’ betekent daarom niet ‘zelfde functie’.



De vakken zijn beschrijvingsniveaus; zij stellen geen vaste opeenvolgende fabrieksstations voor.

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.15

Functie vraagt vouwing, locatie en partners

15/24

Enzymen versnellen reacties; membraaneiwitten transporteren; receptoren en transcriptiefactoren geven signalen door; structurele eiwitten dragen krachten. Een enzym bindt een substraat in een specifieke omgeving en verlaagt de activeringsbarrière. Het verplaatst het chemisch evenwicht niet.

Een eenvoudig verstrekt enzymmodel v=Vmax·S/(Km+S) geeft bij S=Km precies Vmax/2. Met Vmax=4 µmol/(L·min), Km=2 mmol/L en S=6 mmol/L volgt v=3 µmol/(L·min). Deze concentratieafhankelijkheid is geen bewijs dat temperatuur en pH irrelevant zijn: zij veranderen bijvoorbeeld katalyse en de fractie goed gevouwen eiwit.

Denaturatie kan structuur en functie verliezen zonder alle peptidebindingen te breken. Afbraak van de keten is een andere verandering. Een koudere reactie kan trager zijn terwijl het eiwit nog volledig gevouwen is.

GEGEVEN

- Vmax=4 µmol/(L·min), Km=2 mmol/L, S=6 mmol/L; verstrekt enzymmodel.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. v=Vmax·S/(Km+S).
2. De fractie is 6/(2+6)=0,75.
3. v=4·0,75=3 µmol/(L·min). Bij S=Km zou v=2 zijn.

ANTWOORD

3 µmol/(L·min) bij de verstrekte toestand.

Klopt dit? Het concentratiemodel bewijst geen temperatuur-/pH-onafhankelijkheid of gelijkblijvende actieve fractie.

UITLEG · 29.16

Expressie is een dynamische voorraadbalans

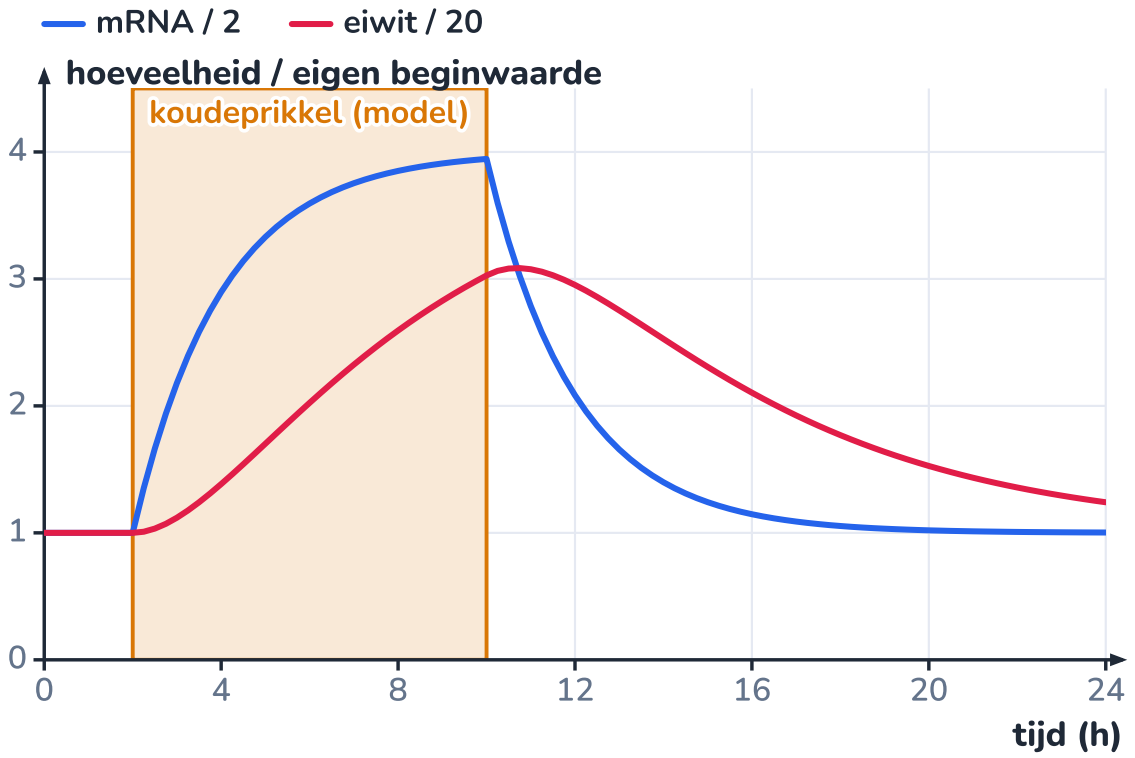
16/24

Een grotere transcriptiesnelheid geeft niet ogenblikkelijk meer eiwit. Voor relatieve RNA-voorraad m en eiwitvoorraad p gebruiken we dm/dt=s(t)−km·m en dp/dt=kt·m−kp·p. Elk verlies is evenredig met de eigen voorraad; productie van p hangt af van m.

Neem km=0,5 h^{-1}, kt=2 h^{-1} en kp=0,2 h^{-1}. Met s=1 eenheid/h is m*=2 en p*=20. Hun vervalhalfwaardetijden zijn ln2/km=1,386 h en ln2/kp=3,466 h. Een bronstap naar 4 maakt een nieuwe stationaire toestand m*=8,p*=80, maar de tijdelijke koudeprikkel duurt hier maar acht uur.

HOEVEELHEDEN IN EXPLICIETE RELATIEVE MODELEIGEN EENHEDEN

$$\frac{dm}{dt} = s(t) - k_m m, \qquad \frac{dp}{dt} = k_t m - k_p p$$



De deling door verschillende beginwaarden maakt de veranderingen vergelijkbaar; de twee voorraden zijn niet dezelfde grootheid.

CODE · 29.17

Een tijdelijke koudeprikkel heeft een naloop

17/24

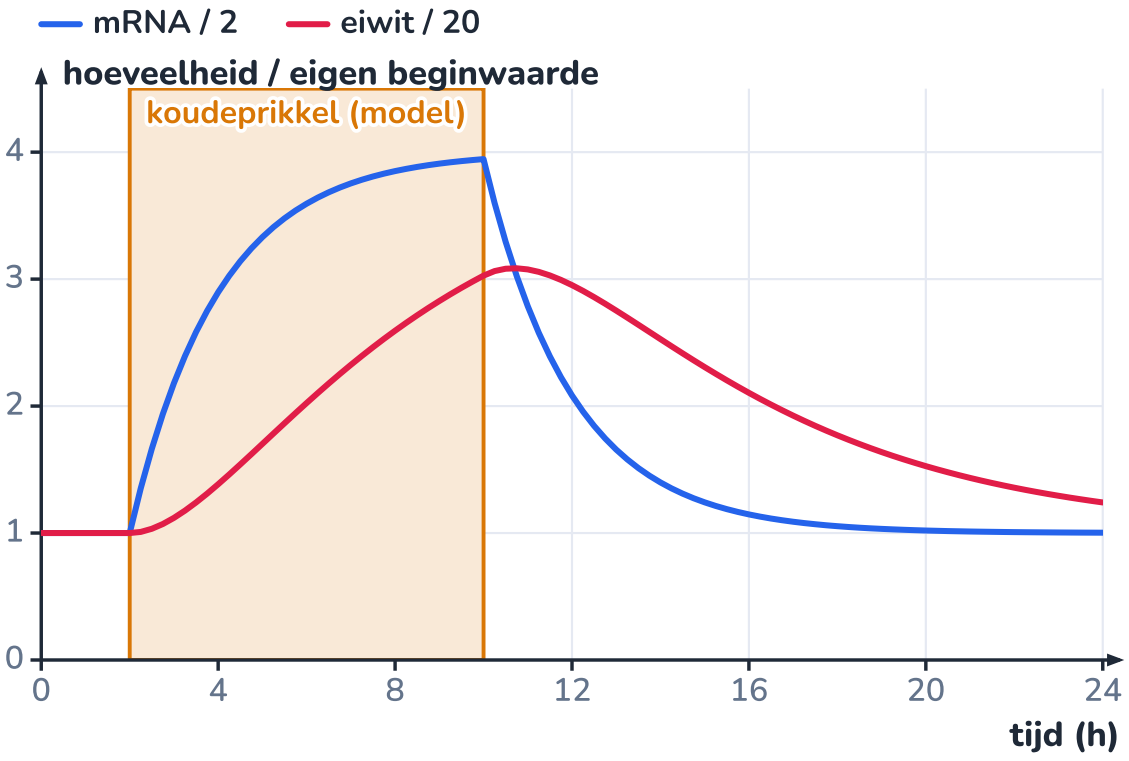
Vanaf 2 h tot 10 h wordt de transcriptiebron vier keer zo groot. RK4 rekent met vaste bron per stap zodat de sprong niet half over een integratiestap wordt gemiddeld. Twee stapgroottes worden op dezelfde kwartierpunten vergeleken. Het model zegt iets over vertraging; het voorspelt geen werkelijke planteneiwitconcentratie.

Python **expressie.py** 25 regels

```python
# expressie.py — twee gekoppelde toestanden, geen biologisch gekalibreerd model
import numpy as np
# Tijd in h; m en p zijn relatieve hoeveelheden, afzonderlijk gedefinieerd.
def bron(t):
    return 4.0 if 2.0 <= t < 10.0 else 1.0
def f(t,z):
    m,p=z
    return np.array([bron(t)-0.5*m, 2.0*m-0.2*p])
def sim(dt):
    z=np.array([2.0,20.0]); rij=[]
    # Linksconstante bron per tijdstap; stappen liggen precies op schakeltijden.
    for j in range(round(24/dt)+1):
        t=j*dt
        if j%round(.25/dt)==0: rij.append((t,*z))
        s=bron(t)
        def g(a): return np.array([s-.5*a[0],2*a[0]-.2*a[1]])
        k1=g(z); k2=g(z+dt*k1/2); k3=g(z+dt*k2/2); k4=g(z+dt*k3)
        z+=dt*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    return np.array(rij)
a=sim(.01); b=sim(.005)
print("maximum verschil m/p op kwartierpunten:",np.max(abs(a[:,1:]-b[:,1:])))
for tijd in (0,2,6,10,14,24):
    r=a[round(tijd/.25)]
```

```
    print(f"t={tijd:2d} h m={r[1]:.6f} p={r[2]:.6f}")
print("p-piek op kwartierpunten:",a[np.argmax(a[:,2])])
```

```
maximum verschil m/p op kwartierpunten: 6.87734313942201e-11
t= 0 h m=2.000000 p=20.000000
t= 2 h m=2.000000 p=20.000000
t= 6 h m=7.187988 p=40.480515
t=10 h m=7.890106 p=60.542974
t=14 h m=2.797139 p=50.546840
t=24 h m=2.005371 p=24.817465
p-piek op kwartierpunten: [10.75        6.04820682 61.70535784]
```



RNA reageert eerder; eiwit kan nog stijgen nadat de transcriptieprikkel is beëindigd.

UITLEG · 29.18

Mutaties zijn veranderingen met verschillende mogelijke gevolgen

18/24

Een substitutie kan **synoniem** zijn, een ander aminozuur geven (**missense**) of een voortijdige stop veroorzaken (**nonsense**). Inserties/deleties kunnen het leesraam verschuiven. Grotere varianten kunnen genkopieën, chromosoomstructuur of regulering veranderen. Een variant in een promoter kan de hoeveelheid veranderen zonder één eiwitresidu te vervangen.

In het minigen GCT→GCC blijft Ala. TTT→TCT maakt Phe→Ser. GAA→TAA stopt vroeger. De 1-base-deletie levert in het getoonde fragment een andere keten en geen aangetroffen stop; dat laatste is geen bewijs voor een veilig of functioneel langer eiwit.

Synoniem betekent hetzelfde gecodeerde aminozuur in deze tabel, niet altijd nul biologisch effect: RNA-stabiliteit, splicing of translatiecontext kunnen veranderen. Een ernstige verandering in een niet-gebruikt gen kan in één meetconditie onzichtbaar blijven.

Variant in minigen	Vertaling	Wat is bewezen?
GCT→GCC	MAFEP	zelfde codering
TTT→TCT	MASEP	F→S
GAA→TAA	MAF, vroeg stop	verkorte code
één base weg	MVLNR, rest 2 nt	verschoven raam in fragment
één codon weg	MAEP	raam behouden, residu verwijderd

UITGEWERKT VOORBEELD · 29.19

Van sequentievariant naar een toetsbare hypothese

19/24

Volg richting, hoeveelheid of functie door een moleculair model.

GEGEVEN

- Twee synthetische varianten: één promoter geeft meer mRNA na kou; de andere verandert een membraaneiwitresidu. Beide planten lijken na één koude nacht vitaler.

GEVRAAGD

- Een controleerbare redenering met de expliciete aannames.

OPLOSSING

1. Meet vóór/tijdens/na dezelfde prikkel mRNA en eiwithoeveelheid: een expressiehypothese voorspelt vooral een verschillend tijdsverloop.
2. Meet voor het membraaneiwit bij gelijk gemaakte hoeveelheid functie/stabiliteit: de coderingshypothese kan een andere activiteit per hoeveelheid voorspellen.
3. Gebruik meerdere onafhankelijke planten, dezelfde groeiomstandigheden, controles en blinde beoordeling. Een samenhang bewijst zonder verdere interventie geen oorzakelijk mechanisme.

ANTWOORD

Maak een apart meetplan voor hoeveelheid, functie en plantprestatie.

Klopt dit? Een DNA-variant, RNA-metingen en overleving bevinden zich op verschillende verklaringsniveaus.

UITLEG · 29.20

Koudetolerantie gebruikt een netwerk, geen enkele letter

20/24

Bij kou moeten cellen onder meer membraanfunctie, waterhuishouding, eiwitwerking en metabolisme bewaren. Voorbehandeling kan de reactie veranderen: koud-acclimatie is een geschiedenisafhankelijk fenotype. Rasverschillen kunnen in regulerende netwerken, eiwitvarianten en vele andere kenmerken liggen.

Jaglo-Ottosen en collega's (1998) verhoogden CBF1-expressie in Arabidopsis en vonden verhoogde COR-genexpressie en vriestolerantie bij niet-geacclimeerde planten. CBF1 is een transcriptiefactor; dit

ondersteunt een reguleringsmechanisme. Het bewijst niet dat dezelfde ingreep elk slaras zonder groeiverlies vorstbestendig maakt.

Voor Habitat kies je daarom rassen via een gecontroleerde proef binnen bruikbare temperatuurbereiken. Bescherm de referentieteelt; leg opbrengst én schade, herstel, kieming en acclimatie vast. Een hogere overleving met veel minder eetbare massa kan het energiebudget toch verslechteren.

Laag	Mogelijke koudereactie	Afzonderlijke toets
regulering	andere transcriptie	RNA-tijdreeks
celwerking	membraan/water/eiwitfunctie	functie en schade
hele plant	overleven, herstel, groei	replicaten en eetbare opbrengst

PROEF · 29.21

Een DNA-neerslag zien zonder te veel te concluderen

21/24

ONDERZOEKSVRAAG

Wat laat een eenvoudige extractie uit docentgekozen zacht fruit zien, en wat meet zij niet?

MATERIAAL

zacht fruit · zout-/detergentoplossing volgens lesprotocol · filter · docentbeheerde koude alcohol · kleine buisjes · veiligheidsbril

Veiligheid

Volg docentprotocol voor alcohol en detergent; vermijd vlammen en inname. Geen menselijke monsters of onbekende microbiële kweek; voer afval af volgens schoolafspraken.

WERKWIJZE

1. Maak een klein fruitmonster fijn en behandel volgens het lokale veilige protocol om cellen te openen.
2. Filter grove delen; laat de docent een kleine alcoholfase toevoegen zonder open vlam of verhitting.
3. Bekijk het grensvlak en vergelijk een blanco met dezelfde reagentia maar zonder fruit.
4. Beschrijf uiterlijk en beperkingen; spreek van een nucleïnezuurrijke neerslag, geen zuiver of gesequencet DNA.

WAARNEMING

Draderig/wit materiaal kan neerslaan; het uiterlijk geeft geen basenvolgorde, genotype of eiwitfunctie.

VERKLARING

Celopening en veranderde oplosbaarheid maken materiaal zichtbaar; andere componenten kunnen meekomen.

VERHAAL · 29.22

Een structuurmodel wordt sterker door een andere soort bewijs

22/24

In april 1953 verschenen naast Watson en Cricks structuurvoorstel ook experimentele artikelen van Franklin en Gosling en van Wilkins, Stokes en Wilson. De helixinterpretatie bouwde op geometrie en röntgendiffractie, niet op het rechtstreeks lezen van één letterketen.

Meselson en Stahl (1958) onderzochten vervolgens de verdeling van zware en lichte stikstof in gekopieerd bacterieel DNA. De na replicatie gevonden dichtheidsbanden ondersteunden semiconservatief kopiëren. Hun bewijssoort was anders dan de structuurgeometrie en maakte het mechanisme daarom sterker toetsbaar.

Dat is ook een ontwerpregel voor Habitat: een logisch sequentiemodel, een RNA-meting en een echte koudeproef mogen elkaar ondersteunen, maar geen van de drie vervangt automatisch de andere.

Bewijssoort	Vraag
röntgendiffractie/model	welke ruimtelijke structuur past?
isotopen/dichtheidsbanden	hoe worden oude strengen verdeeld?
sequentie/expressie/plantproef	welk niveau verklaart de prestatie?

NASLAG · 29.23

Richting, code, voorraad en gevolg

23/24

tripletmogelijkheden

$$N_{\text{codons}} = 4^3 = 64$$

semiconservatieve isotopenlesproef

$$f_{\text{hybride}} = 2^{1-n} \quad (n \geq 1)$$

symbool	betekenis	eenheid
n	complete generaties	1

eerste-orde-afbraak

$$t_{1/2} = \ln 2 / k$$

symbool	betekenis	eenheid
k	afbraakconstante	h^{-1}

stationaire expressie

$$m^* = s/k_m, \quad p^* = k_t m^*/k_p$$

symbool	betekenis	eenheid
m, p	modeleigen relatieve hoeveelheid	1

Begrip	Controle
DNA/RNA	strengrol, 5'/3', code en transcript aangeven
translatie	frame, begin/stop en onvolledige rest controleren
mutatie	sequentie-effect apart van functioneel effect
koude rasproef	acclimatie, replicaten, opbrengst en herstel vastleggen

Standaardcode: NCBI; historische structuur- en replicatieartikelen en primair CBF1-experiment rechtstreeks bij de bladen. Raadpleegdatum 30-09-2026. Alle korte sequenties en expressieparameters zijn didactisch synthetisch.

HET GEHEEL · 29.24

Habitat: raskeuze heeft een mechanisme en een meetproef nodig

24/24

Chemische bindingen uit i13 verklaren waarom een eiwit in een bepaalde omgeving vouwt. e25 levert reactiesnelheden; e30 bepaalt wat je uit een DNA-test kunt afleiden. De opbrengstbalans moet daarna echte eetbare biomassa en energie meenemen.

I13 Chemische bindingen en stofeigenschappen

Rugbinding, lading en vouwing.

E25 Thermochemie en reactiesnelheid

Productie en verlies als snelheidsbalansen.

E30 Biotechnologie en genetische technieken

Sequentie meten is niet hetzelfde als functie testen.

I2 Experimenten ontwerpen en rapporteren

Rassen, acclimatie en onafhankelijke replicaten.

Habitat

Geen nieuw koudetolerant ras of genetische ingreep wordt als vaste installatiekeuze ingevoerd. Een voorstel is een gecontroleerde ras×acclimatie-proef met dezelfde licht-/voedingscondities, temperatuurlog, schade/herstel en eetbare opbrengst. De synthetische sequentie en mRNA/eiwitmodel zijn geen werkelijk Habitat-gen of plantkalibratie.

SAMENVATTING

In het kort

- DNA-strengrol en 5'/3'-richting bepalen complement, transcript en leesraam.
- Nieuw DNA wordt 5'→3' gemaakt; semiconservatief kopiëren bewaart één oude streng per dochter.
- Een codontabel vraagt start, frame en transcript; stop is geen aminozuur.
- Vouwing, hoeveelheid, locatie en partners bepalen eiwitfunctie samen.
- Mutatie-etiketten zijn geen zelfstandig schade- of prestatiebewijs.
- Koudetolerantie vraagt een netwerkmechanisme en een gecontroleerde ras-/acclimatieproef.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

antiparallel

Twee ketens lopen in tegenovergestelde 5'/3'-richting.

semiconservatief

Elk dochterduplex heeft een oude en een nieuwe DNA-streng.

codon

missense

Drie opeenvolgende RNA-basen in een gekozen leesraam.

Variant die in een gekozen code een ander aminozuur oplevert.

genexpressie

Vorming en verwerking van RNA en eventueel eiwit uit genetische informatie.

acclimatie

Door de eerdere omgeving veranderde fysiologische reactie.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 30

Biotechnologie en genetische technieken

DNA verbinden, versterken en meten met een controleerbare betekenis

Genetische technieken maken kleine verschillen zichtbaar en kunnen DNA veranderen. Je rekent versterking en monstername uit, leest een gel en onderscheidt een doelknip, een geldig testresultaat en een verantwoorde toepassingsbeslissing.

11× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 14 lestijden

B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren



Een snel signaal wordt bruikbaar door monstergegevens, kalibratie en werkende controles.

Na dit hoofdstuk

- Je verklaart recombinant DNA met oriëntatie- en sequentiecontrole.
- Je berekent PCR met efficiëntie en een Ct-standaardcurve.
- Je interpreteert gelbanden met lokale kalibratie.
- Je onderscheidt Cas9-herkenning, knip en reparatie.
- Je begrenst een watertest met samplevolume, controles, LOD en validatie.

UITLEG · 30.1

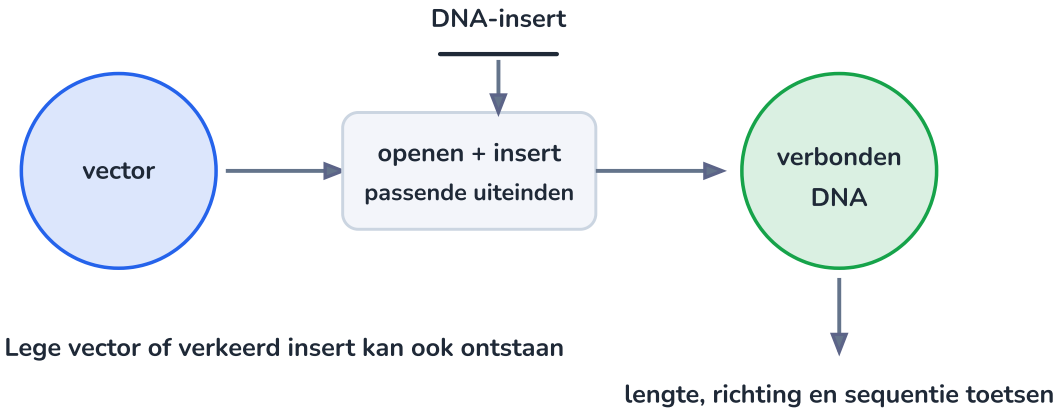
Recombinant DNA verbindt fragmenten tot een nieuwe context

1/24

Recombinant DNA combineert DNA-fragmenten tot één molecule. Een vector kan een insert dragen; restrictie-enzymen herkennen specifieke sequenties en knippen, ligase kan passende ruggen verbinden. Moderne assemblage heeft meerdere varianten, maar steeds moeten uiteinden, richting, leesraam en gewenste regulering passen.

Een teken van een verbonden molecule is nog geen bewijs voor het juiste construct. Ook een lege vector, omgekeerd insert of gewijzigde sequentie kan ontstaan. Selectie verrijkt kandidaatcellen; screening en sequentiecontrole beantwoorden andere vragen. Een selectiemerker bewijst niet zelfstandig dat het gewenste eiwit werkzaam is.

Recombinant DNA: samenvoegen, dan de uitkomst controleren



De te controleren uitkomst omvat zowel DNA-verbinding als oriëntatie en functie in de nieuwe context.

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.2

Een constructbudget is eerst een lengtebalans

2/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- Lesvector 4200 bp, gewenste insert 900 bp, verwijderd vectorsegment 100 bp.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. Na openen en segmentvervanging: 4200−100+900=5000 bp.
2. Een gekozen diagnostische knip zou volgens het ontwerp fragmenten 1200 en 3800 bp moeten geven.
3. Controleer 1200+3800=5000. Dezelfde som kan bij een ander ontwerp ontstaan; voeg richting-/sequentiecontrole toe.

ANTWOORD

Het bedoelde construct heeft 5000 bp; het patroon alleen is niet volledig identificerend.

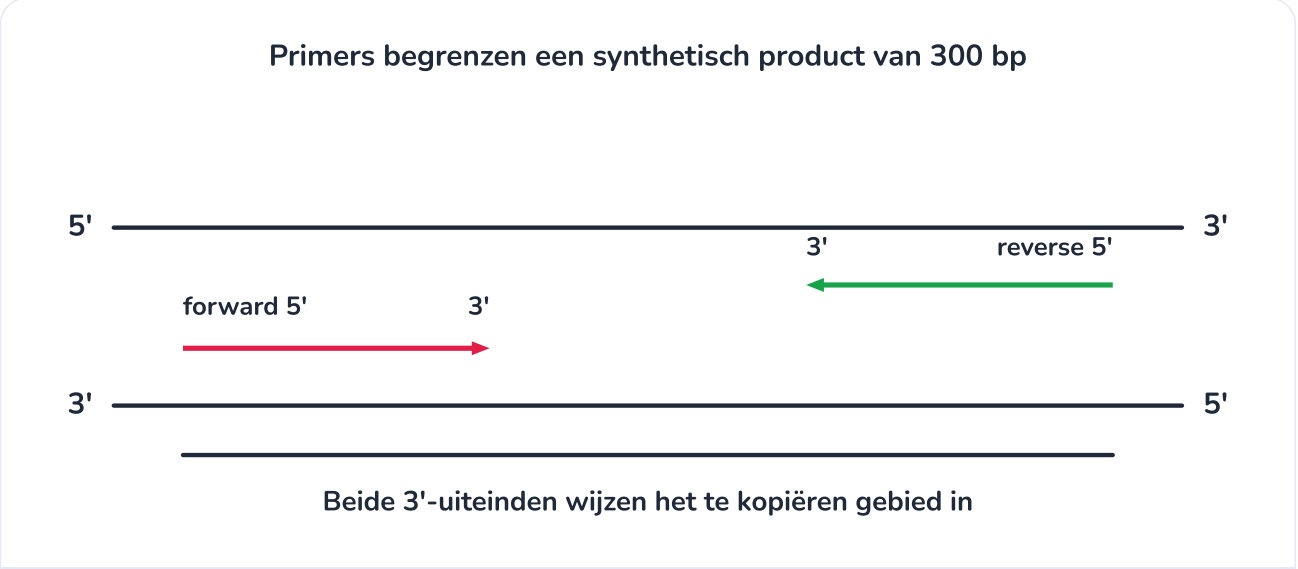
Klopt dit? Gebruik een bekende lineaire referentie; circulaire DNA-conformaties lopen niet alsof hun lengte automatisch een ladderband is.

UITLEG · 30.3

PCR gebruikt dezelfde richtingregel als replicatie

PCR kopieert een gekozen DNA-gebied met twee primers, polymerase en bouwstenen. Herhaalde scheiding van strengen, primerbinding en verlenging maakt nieuw DNA weer tot matrijs. Elke verlenging groeit 5'→3' vanaf een primer-3'-uiteinde.

De primers binden aan tegenovergestelde strengen en hun 3'-uiteinden wijzen naar elkaar, het gebied in. De reverse-primer wordt net als elke sequentie 5'→3' gerapporteerd en is de reverse complement van zijn bindgebied op de coderende referentiestreng. De synthetische 300 bp-code controleert alleen exacte letterparing, lengte en één voorkomende plaats, geen praktisch primerontwerp.



Een verkeerd gerichte primer kan geen begrensd product geven door alleen vaker te cycleren.

UITLEG · 30.4

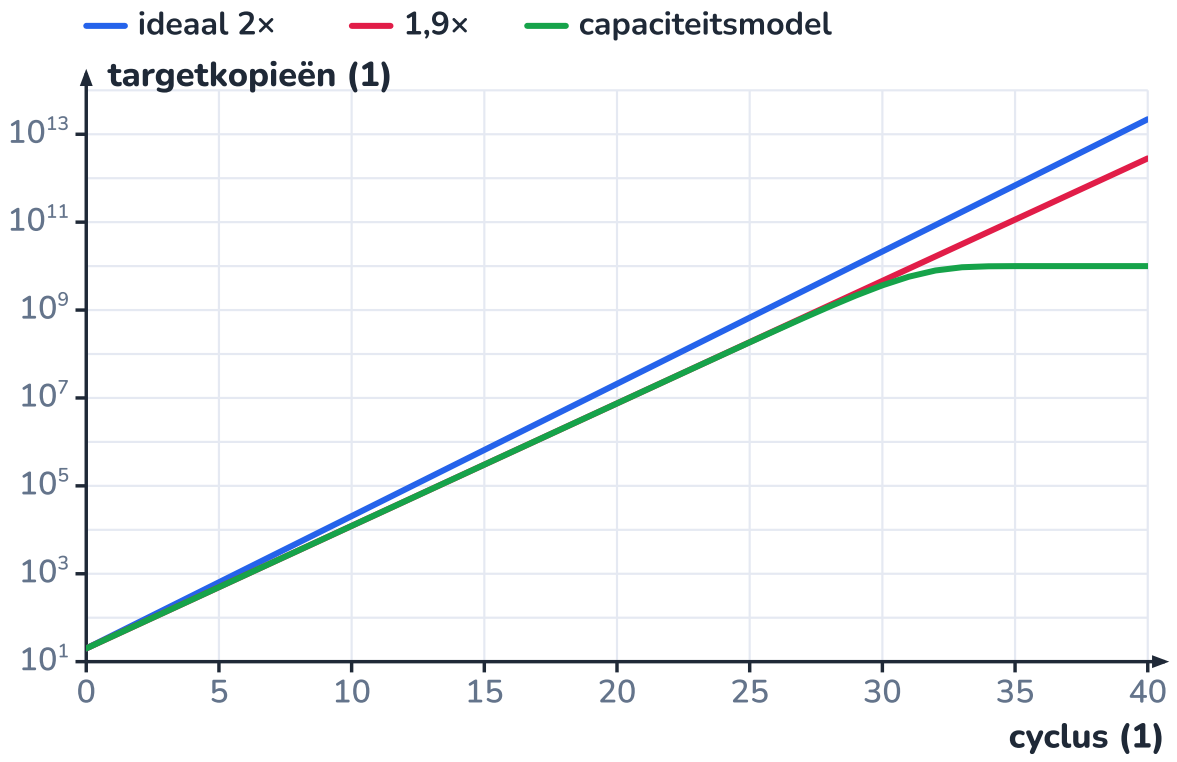
Exponentiële groei heeft een efficiëntieparameter

In een ideale exponentiële fase verdubbelt elk doelduplex per cyclus. Met N0 begin-kopieën wordt $N_n=N_0\cdot 2^n$. Definieer efficiëntie ε als nieuw gevormde kopieën per bestaande kopie; dan wordt $N_n=N_0\cdot(1+\varepsilon)^n$. 90% efficiëntie betekent factor 1,9, niet factor 0,9.

De aanname is dat iedere cyclus dezelfde efficiëntie heeft en het juiste product wordt gemeten. Primer-/bouwsteenverbruik, polymerasegedrag en remming beperken de bruikbaarheid. Een plateau maakt een eindband slecht geschikt om twee aanvankelijke hoeveelheden precies te vergelijken.

GELIJKBLIJVENDE EFFICIËNTIE IN DE EXPONENTIËLE FASE

$$N_n = N_0(1+\varepsilon)^n$$



De plateaucurve is een verstrekt capaciteitsmodel, geen universele PCR-kinetiek.

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.5

Een kleine efficiëntieafwijking wordt groot na veel cycli

5/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- N0=20, n=25; vergelijk ε=1 en ε=0,9.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. Ideaal: $20 \cdot 2^{25}=671088640$ kopieën.
2. 90%: $20 \cdot 1{,}9^{25}=186\,152\,991$ kopieën.
3. De verhouding $(1{,}9/2)^{25}=0{,}27739$; bij dezelfde start is het resultaat nog ongeveer 27,7% van ideaal.

ANTWOORD

Dezelfde 20 beginkopieën leveren sterk verschillende exponentiële eindhoeveelheden.

Klopt dit? Tel de werkelijke cycli en benoem de efficiëntie; bij het plateau geldt dit rekenmodel niet onbeperkt.

UITLEG · 30.6

qPCR meet een drempelmoment, geen magische organismeteller

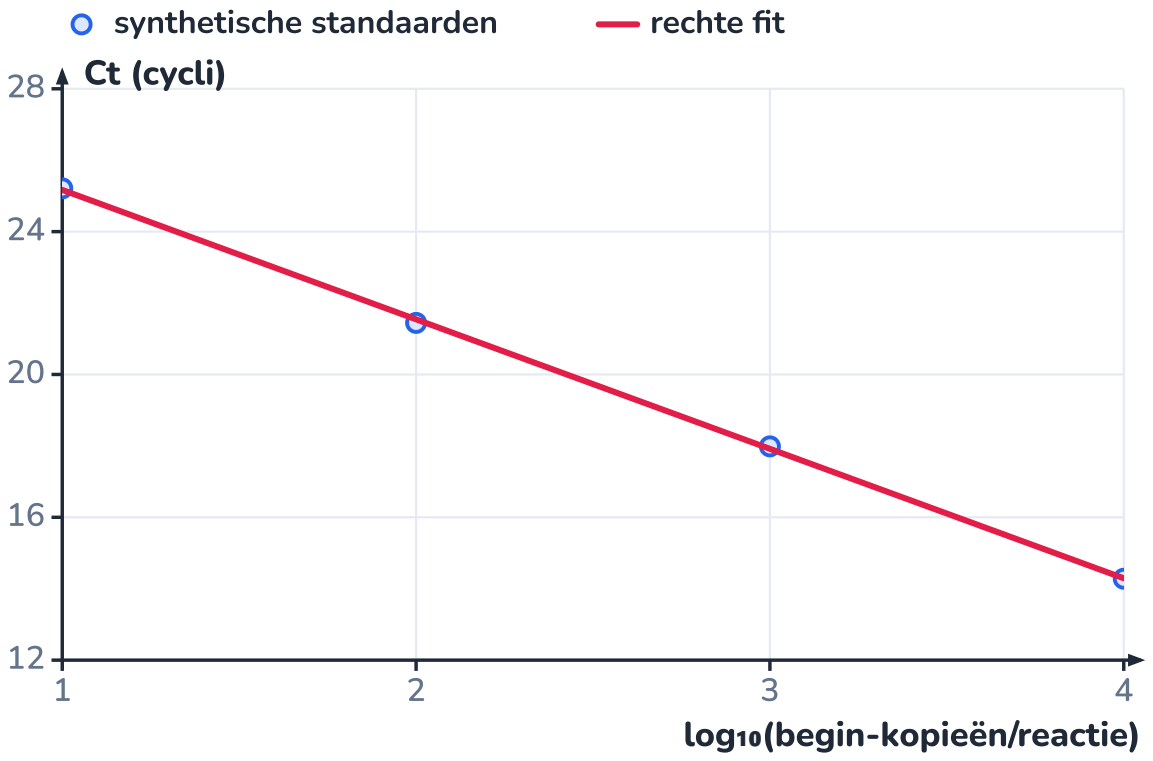
6/24

Bij qPCR wordt een fluorescentiesignaal tijdens het proces gevolgd. In een ideaal proportionaliteitsgebied komt een vaste drempel overeen met Nth kopieën. Ct=ln(Nth/N0)/ln(1+ε). Meer beginmateriaal geeft een kleinere Ct.

Een standaardcurve Ct=a+b·log10(N0) heeft b=−ln10/ln(1+ε). Daaruit ε=10^(−1/b)−1. Dit vereist standaarden, dezelfde geldige efficiëntie, een passende drempel en controles. Kopieën per reactie worden pas kopieën per oorspronkelijk volume met extractie-/verdunnings-/aliquotcorrecties.

KALIBRATIE BINNEN GEVALIDEERD MEETGEBIED

$$C_t = a + b \log_{10} N_0, \qquad \varepsilon = 10^{-1/b} - 1$$



De punten zijn synthetisch; een fit is nog geen validatie van een watertest.

CODE · 30.7

Primergrenzen, kalibratie en monsterkans samen narekenen

7/24

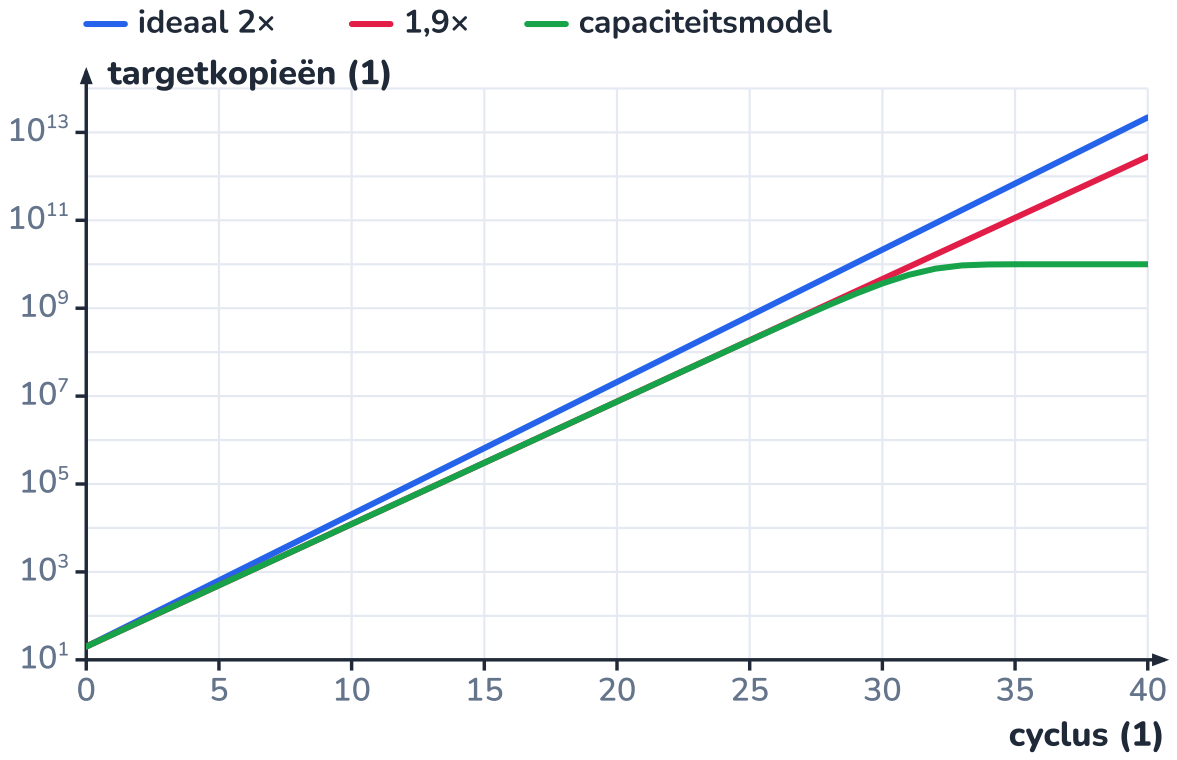
De code gebruikt een zelfgemaakte 300bp-sequentie zonder organismedoel en vier synthetische standaarden. Zij rekent de drempelfit, plateauvergelijking, Poisson-monstername en een Bayes-lesvoorbeeld uit. ‘Ct 25’ is alleen een verstrekt modelmeetpunt, geen medische of waterveiligheidsgrens.

Python `testmodel.py` 43 regels

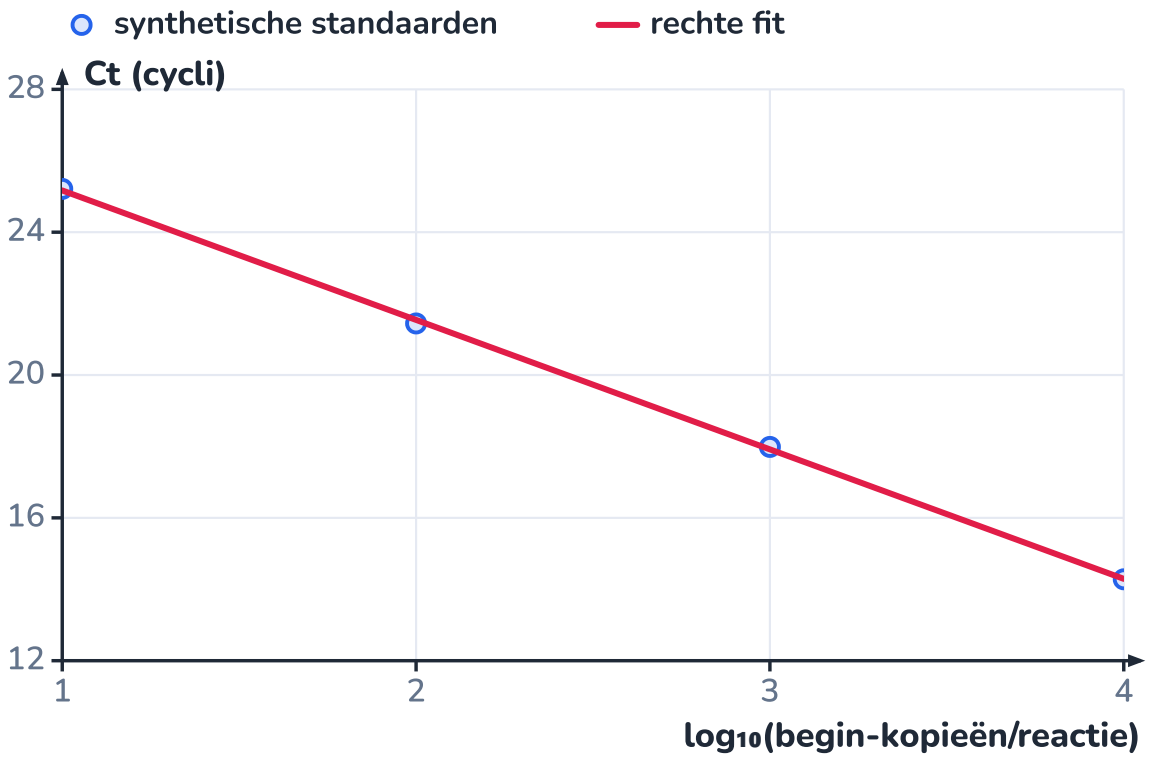
```python
# testmodel.py — volledig synthetische kalibratie en monstername
import math
import numpy as np
```

```
comp=str.maketrans("ACGT","TGCA")
revcomp=lambda s:s.translate(comp)[::-1]
target="ACGTTAGCATGCTACGATCGTACG"+"GATC"*63+"TTGACCAATCGATGCCATGACCTA"
fwd=target[:24]; rev=revcomp(target[-24:])
assert len(target)==300 and target.count(fwd)==1 and target.count(revcomp(rev))==1
print("synthetisch product bp:",len(target))
print("voorwaarts 5'->3':",fwd)
print("achterwaarts 5'->3':",rev)
# Exponentieel en een verstrekt capaciteitsmodel voor het plateau.
cycles=np.arange(41); ideaal=20*2.0**cycles; exp=20*1.9**cycles
plateau=[20.0]
for j in range(40):
    N=plateau[-1]
    plateau.append(N+.9*N*(1-N/1e10))
print("25 cycli, ideaal/90% efficiëntie:",ideaal[25],exp[25])
print("40 cycli, exp/plateaumodel:",exp[40],plateau[40])
# Ct = a + b log10(N0), alleen in exponentiële fase.
N0=np.array([10,100,1000,10000],dtype=float)
Ct=np.log(1e8/N0)/np.log(1.9)+np.array([.10,-.08,.05,-.07])
b,a=np.polyfit(np.log10(N0),Ct,1)
eff=10**(-1/b)-1
res=Ct-(a+b*np.log10(N0))
unknown_Ct=25.0
unknown=10**((unknown_Ct-a)/b)
print("kalibratie Ct:",Ct)
print(f"intercept={a:.6f} slope={b:.6f} efficiëntie={100*eff:.3f}%")
print("max residu cycli:",max(abs(res)))
print(f"Ct 25 geeft {unknown:.6f} begin-kopieën/reactie in het model")
# Poisson: willekeurige targets, onafhankelijke recovery, disjuncte aliquots.
C,V,recovery,aliquot=.5,100.0,.6,.05 # kopieën/mL, mL, fracties
lam=C*V*recovery*aliquot
print("lambda/reactie en detectiekans:",lam,1-math.exp(-lam))
print("3 disjuncte aliquots, minstens één target:",1-math.exp(-3*lam))
upper=-math.log(.05)/(V*recovery*aliquot)
print("95% bovengrens C bij één nul-telling:",upper)
print("95% bovengrens bij drie nul-tellingen:",upper/3)
# Bayes: LESwaarden, geen validatie van een bestaande assay.
preval,sens,spec=.001,.95,.99
ppv=preval*sens/(preval*sens+(1-preval)*(1-spec))
print("positieve voorspellende fractie bij lesprevalentie:",ppv)
```

```
synthetisch product bp: 300
voorwaarts 5'->3': ACGTTAGCATGCTACGATCGTACG
achterwaarts 5'->3': TAGGTCATGGCATCGATTGGTCAA
25 cycli, ideaal/90% efficiëntie: 671088640.0 186152991.376512
40 cycli, exp/plateaumodel: 2826012209078.0137 9999999902.359024
kalibratie Ct: [25.21178322 21.44438562 17.98698802 14.27959041]
intercept=28.794181 slope=-3.625398 efficiëntie=88.726%
max residu cycli: 0.09899999999998954
Ct 25 geeft 11.131554 begin-kopieën/reactie in het model
lambda/reactie en detectiekans: 1.5 0.7768698398515702
3 disjuncte aliquots, minstens één target: 0.9888910034617577
95% bovengrens C bij één nul-telling: 0.9985774245179969
95% bovengrens bij drie nul-tellingen: 0.332859141505999
positieve voorspellende fractie bij lesprevalentie: 0.08683729433272389
```



De exponentiële factor beschrijft een fase; eindplateau en vroege beginhoeveelheid verschillen.



Een standaardcurve vertaalt Ct naar begin-kopieën per reactie binnen dezelfde kalibratie.

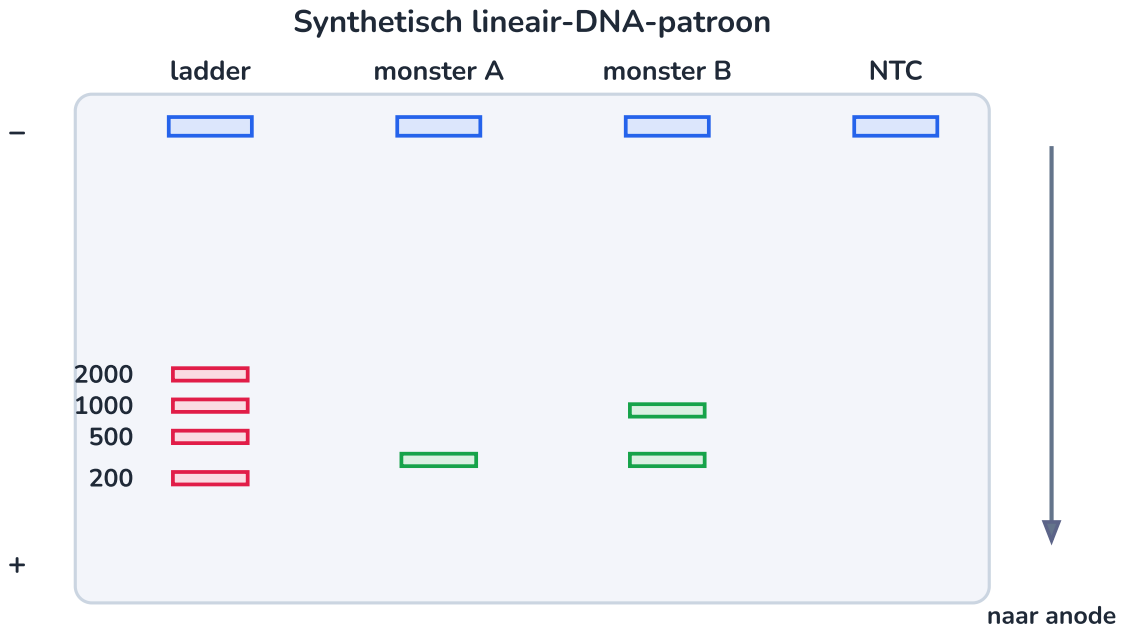
UITLEG · 30.8

Gelelektroforese scheidt, zij leest niet alle basen

8/24

De negatief geladen DNA-rug beweegt in een elektrisch veld naar de positieve anode. Een gel geeft een poriënnetwerk: bij vergelijkbare lineaire DNA-fragmenten bewegen kleinere fragmenten doorgaans verder onder dezelfde omstandigheden. Een ladder bevat bekende lengten.

Bandpositie geeft een geschatte fragmentlengte; bandintensiteit kan met passende kalibratie informatie over massa geven. Twee verschillende sequenties met dezelfde lengte kunnen op dezelfde plaats liggen. Gesupercoild, open-circulair en lineair plasmide-DNA verschillen ook in vorm en mobiliteit. Vergelijk dus soort met soort.



Monster B heeft in dit model een extra 900bp-band; geen van de banden bewijst op zichzelf een pathogeen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.9

Een ladder lokaal op loglengte kalibreren

9/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- Onder dezelfde lescondities: 200 bp loopt 45 mm, 1000 bp loopt 25 mm; onbekende band loopt 35 mm.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. Neem lokaal d=a−b·log10(L). Het verschil is 20 mm voor log10(1000/200)=log10(5).
2. 35 mm ligt halverwege beide afstanden, dus loglengte ligt ook halverwege.

3 L=√(200·1000)=447,214 bp, niet het rekenkundige gemiddelde 600 bp.

ANTWOORD

Ongeveer 447 bp in deze lokale kalibratie.

Klopt dit? De logrelatie is een lokaal empirisch model; extrapolatie, gelconditie en andere DNA-vormen kunnen haar verbreken.

UITLEG · 30.10

De juiste bandmaat beantwoordt één vraag

10/24

Een verwachte PCR-band van 300 bp ondersteunt dat een product van ongeveer die lengte is gevormd. Een extra band kan een ander product aangeven; een zwakke of afwezige band kan weinig beginmateriaal, foutieve reactie of remming betekenen. De NTC helpt reagentia-contaminatie herkennen.

Een gel zonder zichtbare NTC-band is geen bewijs dat elk monster goed geëxtraheerd of PCR-vrij van remmers was. Een positieve controle, procesblanco en interne controle beantwoorden verschillende vragen. Sequentie-/probe-specificiteit en assay-validatie zijn nodig voor identiteit.

Controle	Vraag	Bij falen
positieve controle	werkt detectie met bekende target?	run niet geldig
NTC	contaminatie in reagentia?	positiviteit onderzoeken
procesblanco	contaminatie bij filter/extractie?	proces onderzoeken
interne amplificatiecontrole	remt monstermatrix PCR?	negatief niet interpreteerbaar
recovery-/procescontrole	komt target door verwerking?	herstel/LOD beoordelen

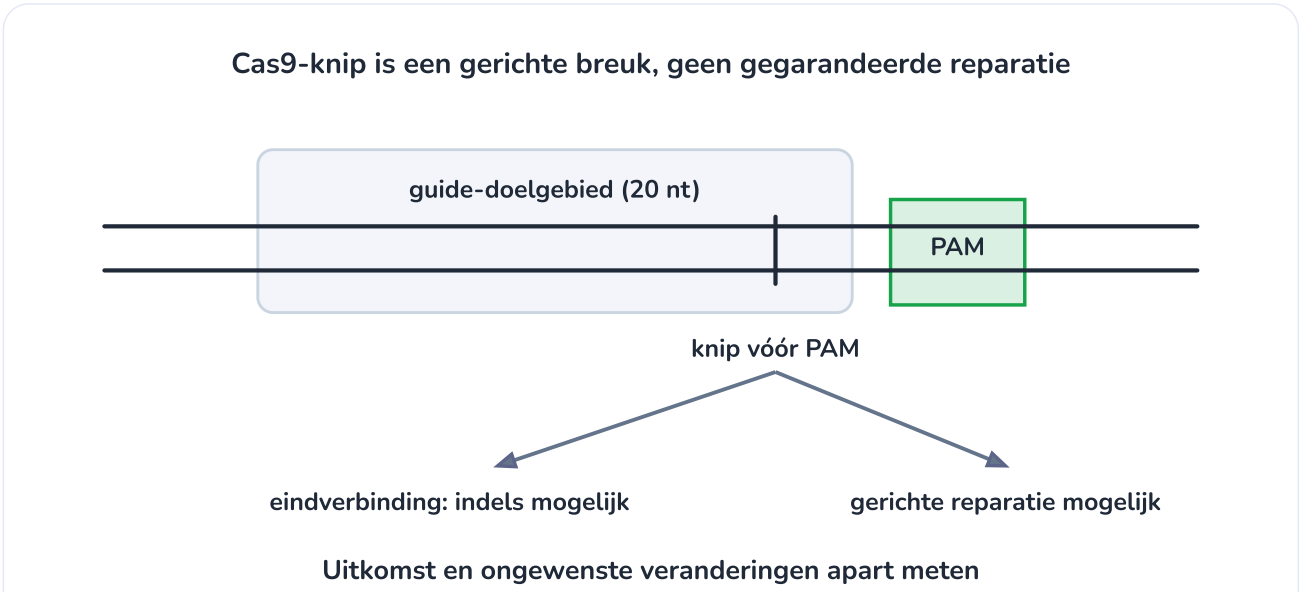
UITLEG · 30.11

CRISPR-Cas: herkenning koppelt een gids aan een nuclease

11/24

CRISPR-systemen komen voort uit prokaryote afweer. In het Cas9-principe brengt een guide-RNA het nuclease naar complementair doel-DNA met passende aangrenzende PAM. Voor het vaak gebruikte SpCas9 is een NGG-PAM een belangrijk herkenningskenmerk. Andere Cas-systemen hebben andere eisen.

Het primaire Jinek-artikel uit 2012 toonde RNA-gestuurde specifieke DNA-knip met Cas9 en een ontworpen gecombineerde RNA-gids. Dit was een moleculair knipresultaat; het stelde niet dat elke genomische reparatie precies de gewenste verandering oplevert.



De kaart is een principefiguur: doelherkenning, knip en reparatie zijn afzonderlijke gebeurtenissen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.12

Knippositie en reparatie-uitkomst uit elkaar houden

12/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- Synthetisch doel: 20 nt guidegebied gevolgd door NGG-PAM. Principeknip circa 3 bp vóór de PAM.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. De PAM begint na de 20 nt van het doelgebied. De schematische knip ligt dus na doelpositie 17.
2. De breuk kan via eindverbinding met inserties/deleties worden hersteld. Een andere reparatieroute kan met geschikte informatie een gewenste verandering ondersteunen.
3. Een kniptest meet niet het percentage precies gewenste cellen. Controleer daadwerkelijke sequentie, doelwerking en ongewenste wijzigingen apart.

ANTWOORD

Een gerichte breuk is een start van reparatie, geen gegarandeerde eindsequentie.

Klopt dit? De getallen dienen het principe, geen protocol voor een organisme of klinische toepassing.

UITLEG · 30.13

Specificiteit, reparatie en verspreiding begrenzen de toepassing

13/24

Een bijna passend doel kan ongewenst reageren; toegankelijkheid van chromatine, aflevering en celtoestand tellen mee. Een gemeten populatie kan verschillende uitkomsten bevatten. Screening van het bedoelde doel alleen sluit alle ongewenste veranderingen niet uit.

Voor een biotechnologisch product scheid je daarom analytische identiteit, functionele prestatie, stabiliteit, blootstelling en ecologische gevolgen. Een niet-erfelijke onderzoeksingreep, een voedselgewas en een erfelijke menselijke ingreep hebben verschillende belanghebbenden en consequenties. Ethische beoordeling vraagt doel, alternatieven en de mogelijkheid tot herstel.

Vraag	Benodigd bewijs
doel gewijzigd?	sequentie en populatie-uitkomst
functie passend?	meting in relevante condities
ongewenste effecten?	passende onafhankelijke controles
maatschappelijk aanvaardbaar?	belanghebbenden, alternatieven, verantwoordelijkheid

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.14

De hoeveelheid water bepaalt of je een target ontmoet

14/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- Lesmodel 0,5 targetkopie/mL, 100 mL monster, recovery 60%, 100 µL eluaat, 5 µL per reactie.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. Het monster bevat gemiddeld 0,5·100=50 targets.
2. Recovery geeft gemiddeld 30 targets in het eluaat; de aliquotfractie is 5/100=0,05.
3. λ=50·0,6·0,05=1,5 targets/reactie. Onder Poisson is P(minstens één)=1−e^−1,5=77,687%.

ANTWOORD

Zelfs bij perfecte detectie van een aanwezige target heeft één reactie circa 22,3% kans om er geen te bevatten.

Klopt dit? Willekeurige verdeling, vaste recovery en perfecte detectie bij ≥1 target zijn modelaannames; werkelijk assay-LOD kan ongunstiger zijn.

UITLEG · 30.15

Een negatief signaal heeft een detectie- en monstergrens

15/24

‘Niet gedetecteerd’ betekent dat de gekozen target in de geanalyseerde hoeveelheid niet boven de geldige detectiegrens werd gevonden. Het bewijst niet dat de hele tank geen ziekteverwekker bevat. Klontering, plaats/tijdverschil, recovery, remming en lage aantallen beperken de gevolgtrekking.

Bij een ideale nul-telling geeft P(0)=e^−λ. De eenzijdige 95%-bovengrens volgt e^−λ=0,05: λ=−ln0,05=2,9957. Met het vorige effectieve volume 100·0,6·0,05=3 mL volgt C<0,9986 kopieën/mL als statistische bovengrens onder dat model. Dit is geen wettelijke of medische vrijgavegrens en geldt niet bij falende controles.

IDEALE NUL-TELLING; V MONSTERVOLUME, R RECOVERY, F GEANALYSEERDE FRACTIE

$$C_{\text{boven}} = \frac{-\ln(0{,}05)}{V\,r\,f}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.16

Drie aliquots verbeteren één beperkte monsteranalyse

16/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- Dezelfde 100 mL-extractie; analyseer drie disjuncte aliquots van ieder 5 µL, dezelfde modelrecovery.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. Totaal geanalyseerde eluaatfractie 0,15; gemiddeld λtotaal=4,5 targets.
2. Minstens één target in de drie samen: 1−e^−4,5=98,889%.
3. Bij drie nul-tellingen wordt de ideale bovengrens 0,998577/3=0,332859 kopieën/mL.

ANTWOORD

Meer geanalyseerd volume verlaagt de kans op gemiste targets in deze extractie.

Klopt dit? Drie aliquots zijn geen drie onafhankelijke tanklocaties of dagen. Herhaalmonstername toetst andere onzekerheid.

UITLEG · 30.17

Van targetkopie naar ziekteverwekker vraagt validatie

17/24

Een DNA-target kan na verlies van levensvatbaarheid nog aanwezig zijn. De omrekening van targetkopieën naar cellen hangt onder meer af van kopieaantal per genoom en assay. Een

indicatororganisme is evenmin automatisch de ziekteverwekker zelf.

EPA Method 1611 gebruikt qPCR voor enterokokken in recreatiewater en beschrijft standaarden, blanco's en verwerking-/remmingscontroles. Dit is een voorbeeld van hoe een methode haar toepassing en kwaliteitszorg afbakent; het is geen automatisch toepasbaar Habitat-drinkwaterprotocol.

Voor Habitat moet een geschikt laboratorium het doelorganisme, monstermatrix, recovery, LOD/LOQ en interpretatie vastleggen. De onderwijsberekeningen veranderen de bestaande waterzuivering en monsterafspraken niet.

De actuele WHO-drinkwaterrichtlijn met derde addendum (17 juni 2026) plaatst testen in risicobeheer van bron tot gebruiker en onafhankelijke surveillance. De WHO-microbiële uitleg uit 2017 onderscheidt moleculaire detectie van levensvatbaarheid en infectiviteit. Een targettest is daarmee één bewijsstuk in een bredere kwaliteitsketen.

Controle	Vraag	Bij falen
positieve controle	werkt detectie met bekende target?	run niet geldig
NTC	contaminatie in reagentia?	positiviteit onderzoeken
procesblanco	contaminatie bij filter/extractie?	proces onderzoeken
interne amplificatiecontrole	remt monstermatrix PCR?	negatief niet interpreteerbaar
recovery-/procescontrole	komt target door verwerking?	herstel/LOD beoordelen

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.18

Een hoge testspecificiteit geeft niet overal dezelfde zekerheid

18/24

Bereken of interpreteer een genetische techniek binnen haar meetgrenzen.

GEGEVEN

- Uitsluitend Bayes-lesmodel: prevalentie 0,1%, sensitiviteit 95%, specificiteit 99%; 100000 monsters.

GEVRAAGD

- Afleiding, getal en betekenis van de controles.

OPLOSSING

1. 100 werkelijk targetpositieve monsters geven gemiddeld 95 positieve signalen.
2. 99900 negatieve monsters geven gemiddeld 999 foutpositieve signalen.
3. Van 1094 positieve signalen zijn 95 werkelijk targetpositief: 95/1094=8,684%.

ANTWOORD

De positieve voorspellende fractie is circa 8,684% bij deze verstrekte populatie.

Klopt dit? Deze waarden zijn niet van een echte waterassay. De analyse rechtvaardigt bevestiging en context, geen diagnose of waterveiligheidsbesluit.

UITLEG · 30.19

Een keten van controles hoort bij elke rapportage

19/24

Rapporteer doel, matrix, samplevolume/plaats/tijd, verwerking, herstel, verdunning, aliquotvolume, kalibratie, controle-uitkomsten en detectie-/kwantificatiegrens. Maak de uitkomstcategorieën duidelijk: gedetecteerd, niet gedetecteerd binnen de geldige grens, of niet interpreteerbaar wegens falende controle.

Een monster zonder targetsymbool maar met falende interne controle krijgt geen geruststellend ‘negatief’. Onderzoek de storing met de geschikte gevalideerde methode. Een onverwacht positief met contaminatie in de blanco vraagt eveneens onderzoek. Elke ontbrekende schakel maakt de eindconclusie smaller.

Target	Interne controle	Betekenis binnen model
geen signaal	geldig	niet gedetecteerd binnen vastgestelde grens
geen signaal	falen	niet interpreteerbaar
signaal	geldig	assaytarget aangetoond; identiteit/context verder toetsen

PROEF · 30.20

Een veilige gel demonstreren met bekend lesmateriaal

20/24

ONDERZOEKSVRAAG

Welke informatie geeft bandpositie, en welke informatie ontbreekt zonder controles?

MATERIAAL

commerciële DNA-onderwijsset met bekende niet-pathogene fragmenten of veilige gekleurde gelanalogen

afgeschermde docentgekozen voeding · geschikte buffer/gel en kleuring volgens set · ladder en blanco · veiligheidsbril

Veiligheid

Docent beheert elektrische opstelling, kleurstof en beeldvorming; geen open hoogspanning of onbeschermde UV. Geen pathogeenkweek, onbekende monstervoorbewerking of genetische ingreep buiten een passend ingericht en begeleid laboratorium.

WERKWIJZE

1. Volg de onderwijsset; gebruik alleen bekende goedgekeurde fragmenten, geen onbekend watermonster of levende pathogenen.
2. Leg laadvolgorde en de positieve anode vast vóór inschakelen; sluit de afgeschermde behuizing.
3. Vergelijk bandafstand met de ladder in hetzelfde gelgebied; noteer monster, blanco en bekende controle.
4. Gebruik veilige voorgeschreven beeldvorming. Bespreek dezelfde bandmaat bij verschillende mogelijke sequenties.

WAARNEMING

Bekende kleinere lineaire fragmenten bewegen verder onder deze gelcondities; blanco en ladder geven context.

VERKLARING

Lading en poriematrix bepalen beweging; bandmaat ondersteunt een lengteconclusie, geen complete biologische identiteit.

VERHAAL · 30.21

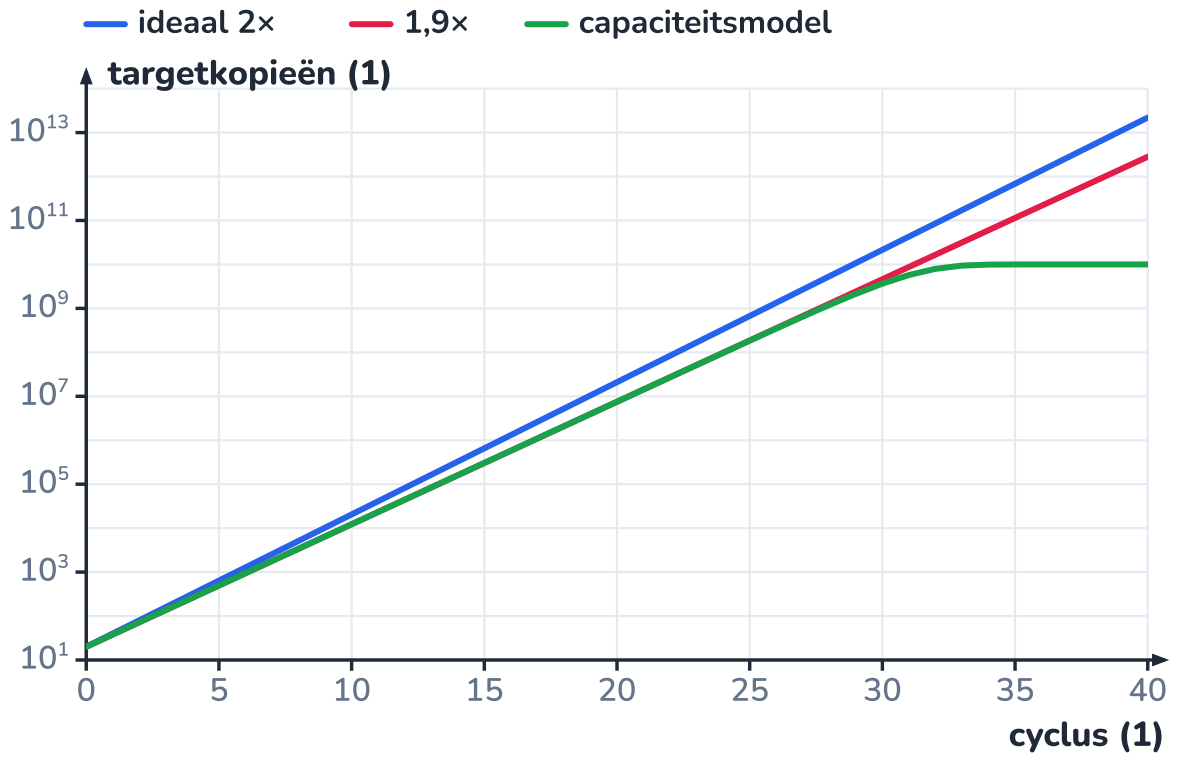
Meer gevoeligheid maakt kwaliteitszorg belangrijker

21/24

Saiki en collega's rapporteerden in 1985 primer-gemedieerde amplificatie van een specifiek humaan DNA-gebied. Die historische toepassing liet zien hoe weinig beginmateriaal een bruikbaar analytisch signaal kon leveren. Het was een zorgvuldig opgezet onderzoeksresultaat, geen universele garantie voor elk monster.

Juist omdat versterking exponentieel is, kan ook kleine contaminatie zichtbaar worden. Daarom horen gescheiden werkstromen, blanco's, standaardcurven en onafhankelijke controles bij moleculaire analyse. ‘Sneller en gevoeliger’ vraagt dus een scherper beschreven antwoord op: welk doel is in welk volume betrouwbaar aangetoond?

Voor een afgelegen station heeft een lokaal snel signaal waarde als aanleiding tot de afgesproken verificatie en technische respons. Het vervangt geen gevalideerde drinkwatercontrole of een volledige kwaliteitsketen.



Dezelfde versterkingslogica die gevoeligheid geeft, versterkt ook ongewenst beginmateriaal.

UITGEWERKT VOORBEELD · 30.22

Een negatief rapport eerlijk herschrijven

22/24

Een student schrijft: ‘PCR negatief, dus de 500L-tank is veilig.’ De interne controle faalde.

GEGEVEN

- Er is één extractie getest; target gaf geen signaal; interne controle faalde; bemonstering/LOD niet volledig vastgelegd.

GEVRAAGD

- Een technisch correct rapport en de ontbrekende informatie.

OPLOSSING

1. Rapporteer ‘deze analyse is niet interpreteerbaar wegens falende interne controle’.
2. Leg de falende stap, monsteridentiteit en ontbrekende volume-/matrix-/LOD-gegevens vast.
3. Laat passende monstername/heranalyse volgens de gevalideerde kwaliteitsprocedure uitvoeren; trek geen tankvrijgaveconclusie uit dit signaal.

ANTWOORD

Geen geldige negatieve uitslag en geen bewijs voor tankveiligheid.

Klopt dit? Ook een geldige niet-detectie zou slechts de gekozen target en geanalyseerde hoeveelheid begrenzen.

NASLAG · 30.23

Wat wordt verbonden, versterkt, gescheiden of geknipt?

23/24

exponentiële PCR-fase

$$N_n = N_0(1+\varepsilon)^n$$

symbool	betekenis	eenheid
ε	nieuwe kopieën per bestaande per cyclus	1

Ct-standaardcurve

$$\varepsilon = 10^{-1/b} - 1$$

symbool	betekenis	eenheid
b	helling Ct tegen log10 N0	1

Poisson-monstername

$$P(0) = e^{-\lambda}, \quad \lambda = CVrf$$

symbool	betekenis	eenheid
C	targetconcentratie	mL^{-1}
V	monster	mL

lokale gelkalibratie

$$d = a - b\log_{10} L$$

symbool	betekenis	eenheid
d	afstand	mm
L	fragmentlengte	bp

Techniek	Primair antwoord	Geen automatisch bewijs voor
recombinant DNA	samengevoegd ontwerp	juiste richting/functie
PCR/qPCR	target/amplificatie binnen meetgrens	levensvatbaarheid/tankveiligheid
gel	mobiliteit/geschatte lengte	volledige sequentie-identiteit
Cas9	gerichte knip	precies gewenste reparatie

Bronnen: primaire Saiki- en Jinek-artikelen; EPA-methode voor afbakening van watertesten. Raadpleegdatum 30-09-2026. Sequenties, kalibratie, efficiëntie, statistische grens en Bayeswaarden zijn expliciete lesmodellen.

HET GEHEEL · 30.24

Habitat: een snelle test krijgt een geldige beslisketen

24/24

e29 levert richting en code; i05 verklaart exponentiële versterking; e06 behandelt kans en onzekerheid; e42/e43 laten zien hoe datamodellen op onafhankelijke gegevens worden beoordeeld. Waterchemie, filters en operationele monsterafspraken blijven een eigen onderdeel van de waterketen.

E29 DNA, genen en eiwitten
Complement, richting en sequentie.

I5 Groei en verval: exponentiële modellen
Groei per cyclus.

I2 Experimenten ontwerpen en rapporteren
Controles, replicaten en rapportage.

Habitat

Het station krijgt hier een **diagnostisch ontwerpvoorstel**: doel/matrix/monsterplan, valide assay, controles, detectiegrens en passende bevestiging. Er is geen nieuwe gekozen pathogeenassay, geen nieuw drinkwaterveiligheidscriterium en geen onbegeleide kweek. De 100mL/60%/5µL-berekening is een expliciet samplingmodel, geen vervanging van een gevalideerd laboratoriumprotocol of bestaande waterzuivering.

SAMENVATTING

In het kort

- Recombinant DNA vraagt lengte, richting, identiteit en functiecontrole.
- PCR groeit exponentieel met factor 1+ε zolang de faseaannames gelden.
- Ct en gelbanden hebben kalibratie en matrix-/vormgrenzen.
- Cas9-knip en gewenste reparatie zijn afzonderlijke uitkomsten.
- Niet-detectie bewijst geen volledige afwezigheid; samplevolume en controles begrenzen de uitspraak.
- Toepassingen vragen bewijs, alternatieven en verantwoordelijkheid voor gevolgen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

vector
DNA-drager die een insert in een gekozen context brengt.

PCR-efficiëntie
Fractie nieuw product per bestaand product per exponentiële cyclus.

Ct

Cyclusmoment waarop een vastgesteld fluorescentiedrempelcriterium wordt gehaald.

PAM

Aangrenzend herkenningsmotief voor een bepaald Cas-systeem.

LOD

Gevalideerde detectiegrens binnen een bepaalde methode en matrix.

NTC

Reactiecontrole zonder toegevoegd targettemplate.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 31

Bioprocestechniek

Groei, voeding, licht en gas op één controleerbare systeemgrens

Een cultuur groeit alleen als materiaal en transport de snelheid kunnen dragen. Je rekent batch, fed-batch en continu met massabehoud door en ontdekt waarom een algenreactor ook licht, koolstof, gaslevering en een echt schaalplan nodig heeft.

11× uitleg | 7× uitgewerkt voorbeeld | 1× proef | 1× naslag | 1× verhaal | 1× het geheel | 3× code | ± 15 lestijden

B Leven en systemen | W Wiskundig modelleren | M Materie en chemie



Een getoetste reactorprestatie bevat groei, gas, oogst, lichtenergie en onderhoud samen.

Na dit hoofdstuk

- Je berekent Monod-groei en onderscheidt μ van massa per tijd.
- Je leidt batch/fed-batch/continu-balansen af met voeding en oogst.
- Je toetst de simulatie aan massabehoud, positiviteit en stapverfijning.
- Je rekent zuurstofoverdracht en fotoautotrofe element-/lichtbalansen.
- Je ontwerpt schaal- en meetproeven met productkwaliteit, energie en reserve.

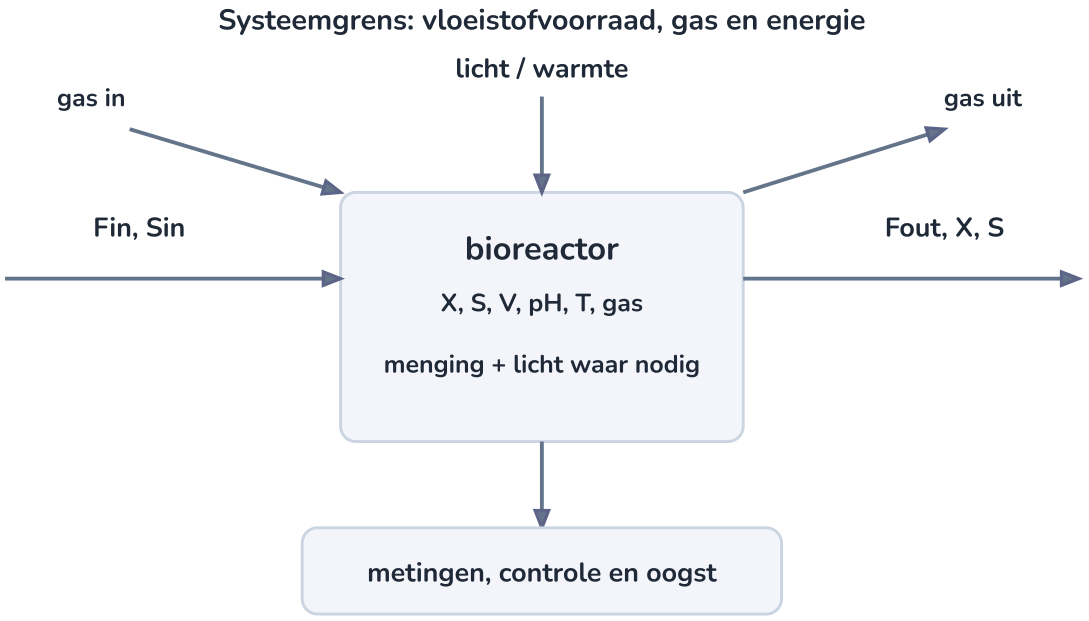
UITLEG · 31.1

Een bioreactor is een begrensd levend proces

1/25

Een bioreactor beheerst omstandigheden voor organismen of cellen en hun producten. Een procesvraag vraagt niet alleen ‘hoe snel groeien ze?’, maar ook hoeveel materiaal binnenkomt, wat wordt geoogst, welke energie wordt geleverd en welk gas of afval de grens passeert.

Definieer X als droge biomassa per vloeistofvolume en S als één beperkend substraat per volume. Cellen tellen, optische dichtheid en droogmassa zijn verschillende metingen en vragen een kalibratie. Een donker organisch-substraatmodel en een fotosynthetische algenreactor delen balansprincipes, maar niet automatisch dezelfde μmax, Ks of substraatbetekenis.



De vloeistofgrens is niet gesloten zodra voeding, oogst of gas haar passeert.

UITLEG · 31.2

Monod koppelt specifieke groei aan een beperking

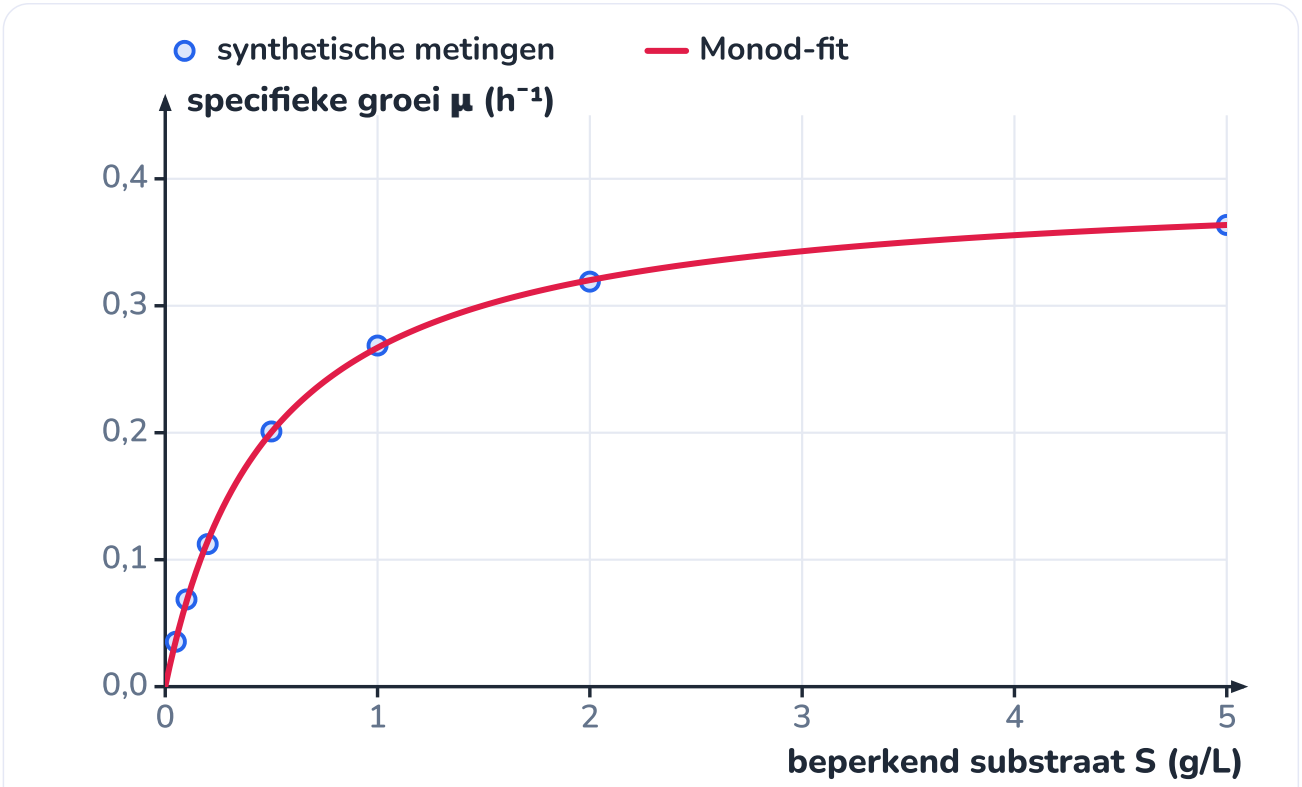
2/25

Een bruikbaar empirisch model is μ(S)=μmax·S/(Ks+S). μ is relatieve biomassatoename per tijd, geen gram per uur; de absolute vormingssnelheid is μXV. Bij S=Ks is μ=μmax/2. Bij veel S nadert het model μmax; bij weinig S wordt groei ongeveer μmax·S/Ks.

Monods bespreking van bacteriële groei (1949) vormt een historische bron. De parameters blijven afhankelijk van cultuur en condities. Lagfase, remming, temperatuur, meerdere beperkingen en onderhoud zijn in deze eenvoudige vorm niet apart gemodelleerd.

GESLOTEN VOLUME ZONDER VERLIES OF ANDERE BEPERKING

$$\mu = \mu_{\max}\frac{S}{K_s + S}, \qquad \frac{dX}{dt} = \mu X$$



Monod is een substraatmodel; de e04-logistische K is een ander soort parameter.

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.3

Specifieke groei naar een verdubbelingstijd omzetten

3/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.

GEGEVEN

- Leswaarden μmax=0,4 h⁻¹, Ks=0,5 g/L, S=1,5 g/L; houd S tijdelijk constant.

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. μ=0,4·1,5/(0,5+1,5)=0,30 h⁻¹.
2. X(t)=X0 e^(μt) zolang deze groeisnelheid gelijk blijft.
3. tverdubbel=ln2/0,30=2,310 h; bij veel S zou de ondergrens ln2/0,4=1,733 h zijn.

ANTWOORD

Circa 2,310 h in deze constante-substraattoestand.

Klopt dit? In batch daalt S: één vaste verdubbelingstijd mag niet over de hele run worden gebruikt.

UITLEG · 31.4

Opbrengst sluit biomassa en substraat aan elkaar

4/25

De opbrengst YX/S is gevormde droge biomassa per verbruikt substraat. Neem Y=0,5 g/g als lesgegeven. Zonder onderhoud/afbraak geldt dS/dt=−μX/Y. Daarom d(X+YS)/dt=0 in een gesloten constant volume.

Dit is een X-equivalentenbalans, geen volledige element- of energiebalans: een deel van het substraat kan naar gas, warmte of andere producten gaan. Als onderhoud mS of afbraak kd wordt toegevoegd, moet de extra term in de betreffende balans terechtkomen. Stil een lagere Y kiezen kan niet verklaren waar alle ontbrekende massa heen ging.

IDEALE BATCH ZONDER ONDERHOUD/STERFTE

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\mu X}{Y}, \qquad X + YS = X_0 + YS_0$$

UITLEG · 31.5

Batch: de bronvoorraad begrenst de eindbiomassa

5/25

Batch krijgt na starten geen voeding of vloeistofoogst. Groei verbruikt het begin-substraat; zodra dit bijna op is, daalt μ. Voor X0=0,1 en S0=10 g/L met Y=0,5 is de theoretische eindwaarde X0+YS0=5,1 g/L. Het Monod-model nadert uitputting asymptotisch.

Werkelijke stationaire fase kan ook andere oorzaken hebben. Zuurstof, toxische producten, pH of licht kunnen eerder begrenzen. De code hieronder controleert het verstrekte ene-substraatmodel; zij toont geen bewezen opbrengst van een echte stam.

Batchtoestand	Balans
V constant	geen Fin/Fout
X stijgt	μ(S)X
S daalt	−μ(S)X/Y
controle	X+YS blijft constant

CODE · 31.6

Batch, fed-batch en continu met echte massaboekhouding

6/25

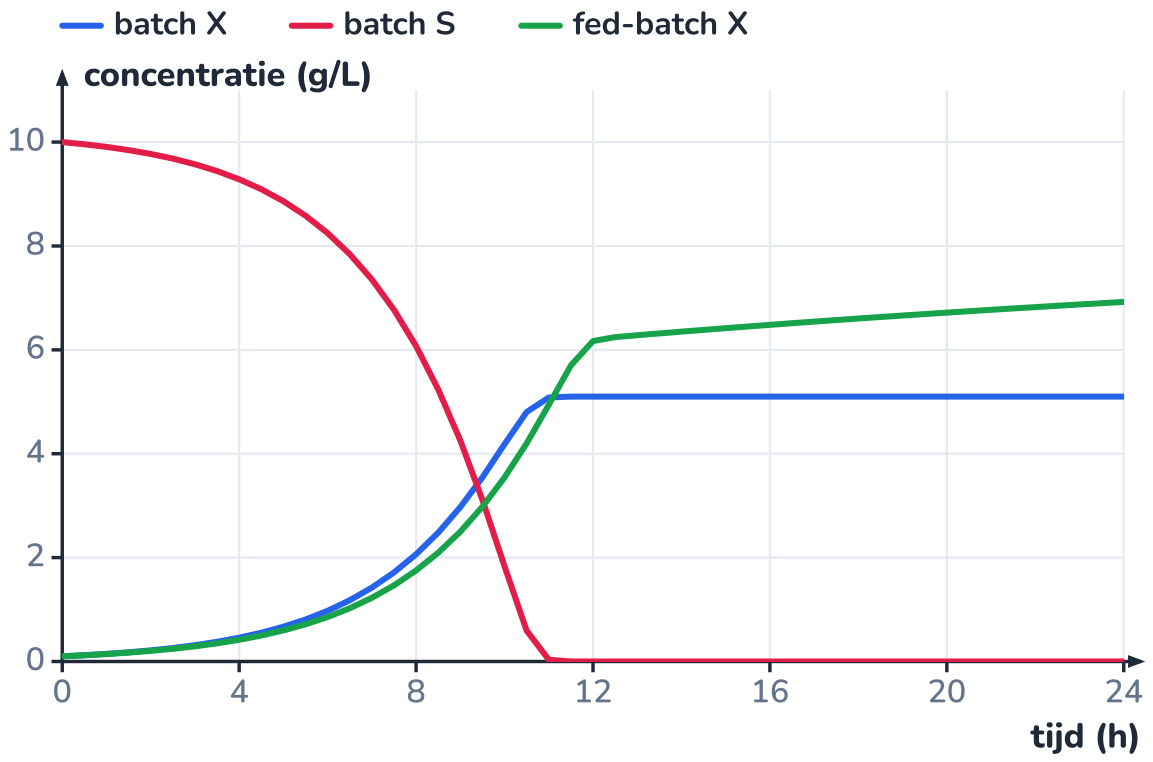
Alle vier runs starten bij V=2 L, X=0,1 en S=10 g/L. Fed-batch krijgt 0,05 L/h van Sin=20 g/L. Continu krijgt hetzelfde volume terug uit het vat, met Sin=10 g/L. RK4 en een tweede tijdstap vergelijken alle voorraden op dezelfde halve-uurpunten; de balans telt reactor, cumulatieve voeding én oogst mee.

Python `reactoren.py` 38 regels

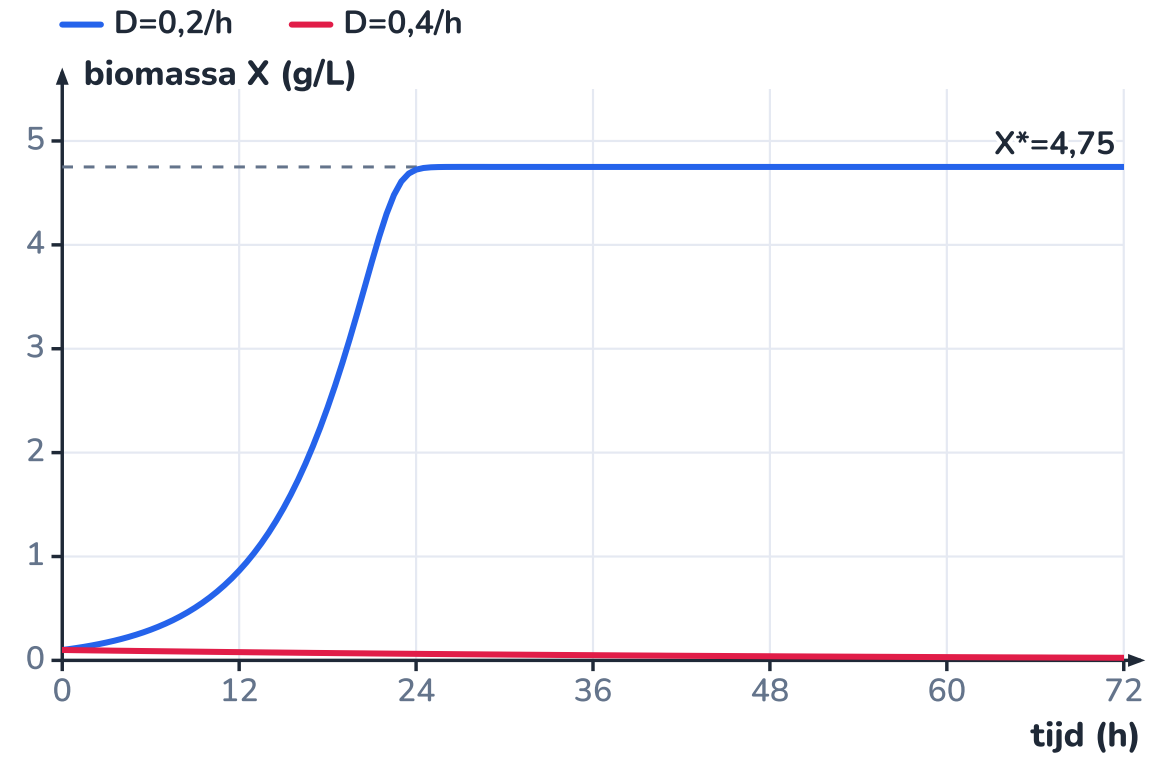
```python
# reactoren.py — generieke cultuur, niet een werkelijk algenstammodel
import math
import numpy as np
mumax,K,Y=.4,.5,.5 # h^-1, g/L, g droge X per g substraat
```

```python
# Toestand: X g/L, S g/L, V L, cumulatief ingevoerd S g,
# afgevoerd X g, afgevoerd S g.
def deriv(z,mode):
    X,S,V,I,HX,HS=z
    mu=mumax*max(S,0)/(K+max(S,0))
    if mode=="batch": fin=fout=0; sin=0
    elif mode=="fed": fin=.05; fout=0; sin=20.0
    else: fin=fout=float(mode)*V; sin=10.0
    return np.array([mu*X-fin/V*X,
        fin/V*(sin-S)-mu*X/Y,
        fin-fout,fin*sin,fout*X,fout*S])
def sim(mode,dt,tend):
    z=np.array([.1,10,2,0,0,0],float); rows=[]
    for j in range(round(tend/dt)+1):
        if j%round(.5/dt)==0: rows.append((j*dt,*z))
        k1=deriv(z,mode); k2=deriv(z+dt*k1/2,mode)
        k3=deriv(z+dt*k2/2,mode); k4=deriv(z+dt*k3,mode)
        z+=dt*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    return np.array(rows)
runs={}
for mode,tend in [("batch",24),("fed",24),(.2,72),(.4,72)]:
    a=sim(mode,.01,tend); b=sim(mode,.005,tend); runs[mode]=a
    # g X-equivalent: reactor + afvoer - ingevoerde opbrengst.
    sluit=a[:,3]*(a[:,1]+Y*a[:,2])+a[:,5]+Y*a[:,6]-Y*a[:,4]
    print("mode",mode,"eind t/X/S/V/I/HX/HS:",a[-1])
    print("max |dt0.01-dt0.005|:",np.max(abs(a[:,1:]-b[:,1:])))
    print("balansafwijking g X-equivalent:",np.max(abs(sluit-sluit[0])))
    assert np.min(a[:,1:4])>=-1e-10
    assert np.max(abs(sluit-sluit[0]))<1e-7
Dcrit=mumax*10/(K+10)
Dopt=mumax*(1-math.sqrt(K/(K+10)))
Sopt=K*Dopt/(mumax-Dopt); Xopt=Y*(10-Sopt)
print(f"Dcrit={Dcrit:.8f} Dopt={Dopt:.8f} Sopt={Sopt:.8f} Xopt={Xopt:.8f}")
print(f"max productiviteit={Dopt*Xopt:.8f} g/(L h)")
```

```
mode batch eind t/X/S/V/I/HX/HS: [2.40000000e+01 5.10000000e+00 3.08879268e-48 2.00000000e+00
 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
max |dt0.01-dt0.005|: 1.13189853878648e-08
balansafwijking g X-equivalent: 3.197442310920451e-14
mode fed eind t/X/S/V/I/HX/HS: [24.          6.92253668  0.02992664  3.2        24.          0.
  0.        ]
max |dt0.01-dt0.005|: 1.3561349987423199e-08
balansafwijking g X-equivalent: 2.007283228522283e-12
mode 0.2 eind t/X/S/V/I/HX/HS: [ 72.          4.75000006   0.49999999   2.         288.
 105.5850091   77.22998158]
max |dt0.01-dt0.005|: 7.37827576813288e-11
balansafwijking g X-equivalent: 8.430589559793589e-12
mode 0.4 eind t/X/S/V/I/HX/HS: [7.20000000e+01 2.50375832e-02 9.94992483e+00 2.00000000e+00
 5.76000000e+02 3.11459509e+00 5.70170810e+02]
max |dt0.01-dt0.005|: 1.475655153626576e-10
balansafwijking g X-equivalent: 1.6473933328597923e-11
Dcrit=0.38095238 Dopt=0.31271284 Sopt=1.79128785 Xopt=4.10435608
max productiviteit=1.28348486 g/(L h)
```



De getoonde fed-batchconcentratie houdt de volumetoename mee; totale massa is XV.



D=0,4/h ligt boven de haalbare groeisnelheid bij het gegeven voedingssubstraat.

UITLEG · 31.7

Fed-batch: concentratiegroei bevat verdunning

7/25

Bij fed-batch komt voeding binnen en blijft vloeistofoogst uit. V'=F, maar de biomassamassa volgt (XV)'=μXV. Productregel: VX'+XV'=μXV, dus X'=(μ−F/V)X. Voor substraat volgt S'=(F/V)(Sin−S)−μX/Y.

Een dalende X-concentratie hoeft dus geen sterfte te betekenen: bij snel groeiend volume kan de totale massa XV stijgen terwijl X daalt. Een bruikbaar voerprofiel kan substraat laag houden en daarmee overbelasting of ongewenste remming beperken; dat vereist passende feedback en een echte limietmeting.

VOEDING ZONDER AFVOER; F/V VERANDERT TIJDENS DE RUN

$$\dot{V} = F, \quad \dot{X} = (\mu - F/V)X, \quad \dot{S} = \frac{F}{V}(S_{\text{in}} - S) - \frac{\mu X}{Y}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.8

Een eindconcentratie met de ingevoerde massa controleren

8/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.

GEGEVEN

- Fed-run 24 h; V0=2 L, F=0,05 L/h, Sin=20 g/L; code geeft X≈6,922537 en S≈0,029927 g/L.

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. V=2+0,05·24=3,2 L. Ingevoerd substraat I=0,05·20·24=24 g.
2. Begin-equivalent V0(X0+YS0)=2(0,1+0,5·10)=10,2 g.
3. Einde V(X+YS)=3,2(6,922537+0,5·0,029927)≈22,2 g, gelijk aan 10,2+YI=10,2+12.

ANTWOORD

De 24g-voeding verklaart de extra 12g-biomassa-equivalenten, met resterend S meegeteld.

Klopt dit? Bij andere onderhoud/product/gas-termen moet de equivalente controle worden uitgebreid.

UITLEG · 31.9

Continu: groei moet de afvoer compenseren

9/25

In een goed gemengd chemostat met constant V geldt Fin=Fout=F en D=F/V. De ingaande voeding bevat hier geen X. Dan X'=(μ−D)X en S'=D(Sin−S)−μX/Y.

Voor een positieve stationaire X* moet μ(S*)=D. Oplossen van Monod geeft S*=KsD/(μmax−D) en X*=Y(Sin−S*). Die positieve oplossing bestaat alleen als S* kleiner is dan Sin. Een stationaire cultuur is

dus geen gesloten ecosysteem: haar voeding, afvoer en energie lopen voortdurend door.

POSITIEVE STATIONAIRE TOESTAND BIJ PASSENDE D

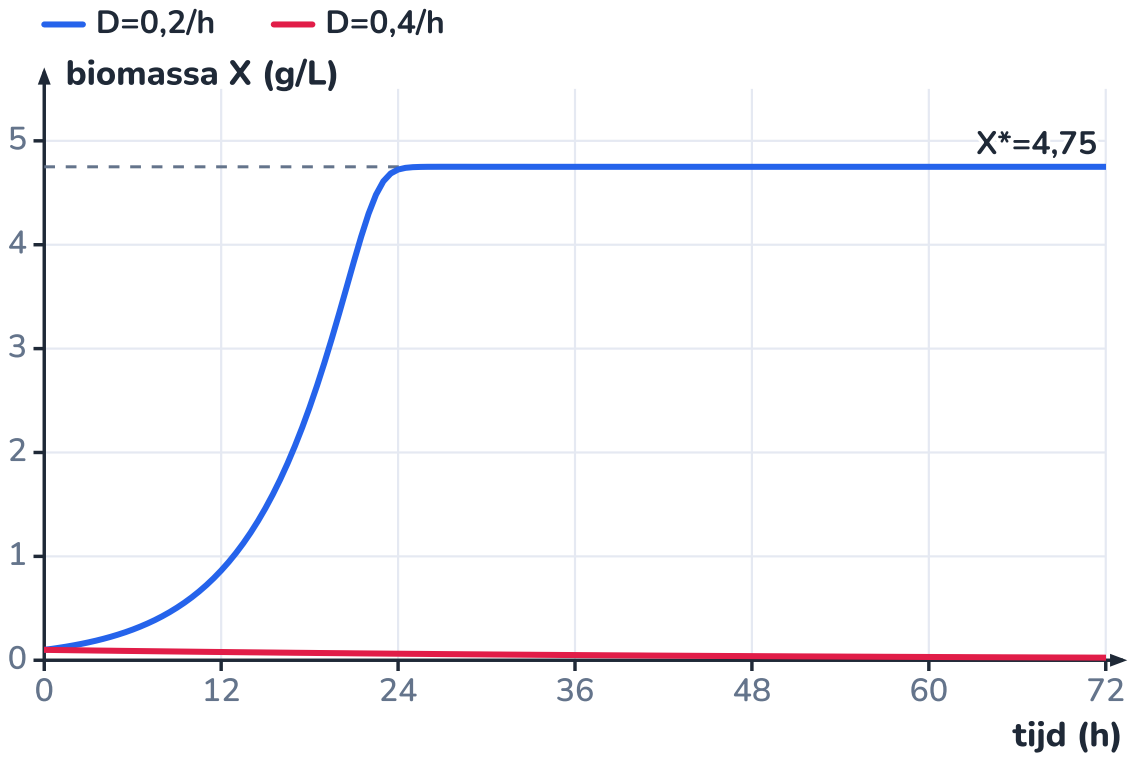
$$S^* = \frac{K_s D}{\mu_{\max} - D}, \qquad X^* = Y(S_{\text{in}} - S^*)$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.10

Uitwassen begint vóór D de maximale μ bereikt

10/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.



Het transiënt kan nog biomassa bevatten terwijl de uiteindelijke toestand uitwassen is.

GEGEVEN

- μmax=0,4 h^{-1}, Ks=0,5 g/L, Sin=10 g/L, Y=0,5.

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. Bij D=0,2 volgt S*=0,5·0,2/(0,4−0,2)=0,5 g/L en X*=0,5(10−0,5)=4,75 g/L.
2. De grens is Dcrit=μ(Sin)=0,4·10/(0,5+10)=0,380952 h^{-1}.
3. Bij D=0,4 is μ(Sin)<D; X neemt uiteindelijk af. Na 72 h is de codewaarde nog 0,025038 g/L, niet wiskundig exact nul.

ANTWOORD

De haalbare stationaire grens is 0,380952 h^{-1} voor dit Sin.

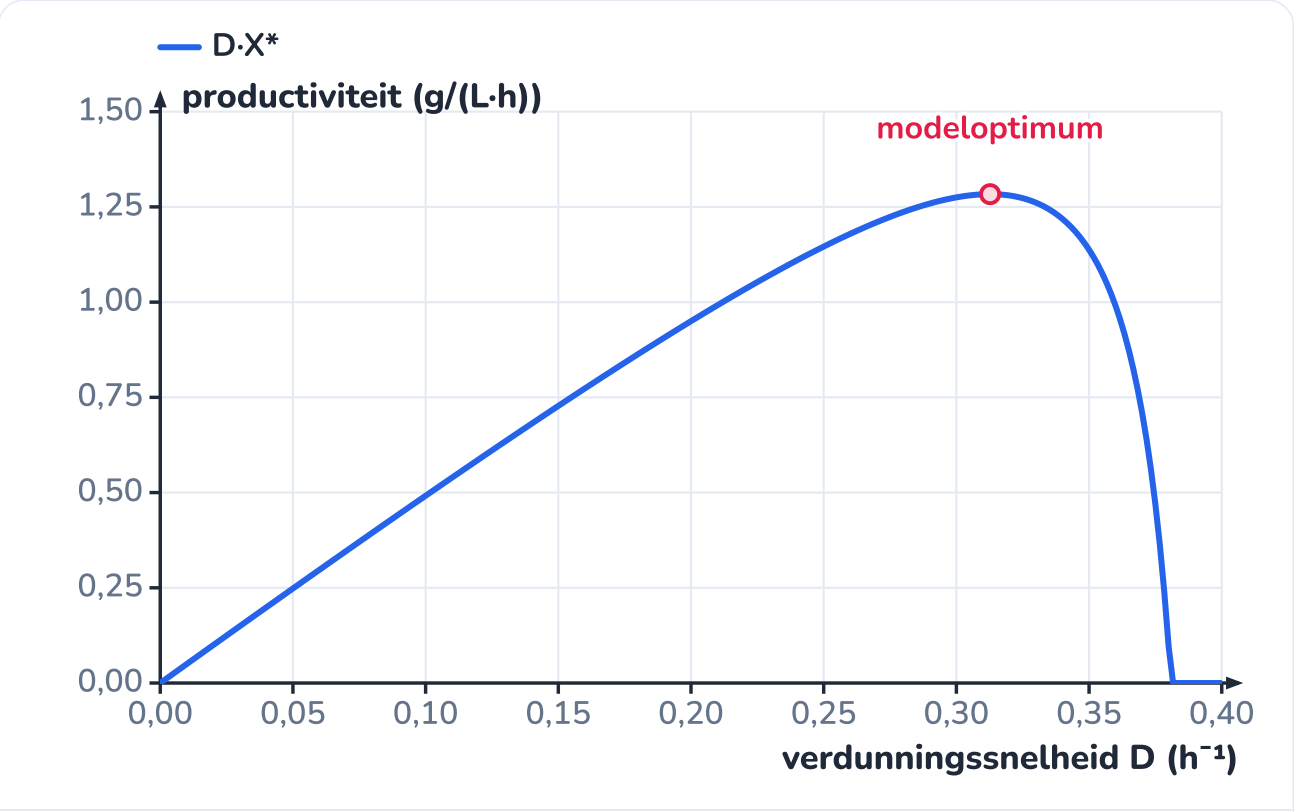
Klopt dit? D<μmax alleen is niet voldoende; ook de beschikbare voedingsconcentratie moet de vereiste μ dragen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.11

Maximale productiviteit vraagt een tussenwaarde van D

11/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.



Dit is een analytisch modeloptimum, geen bedrijfsinstelling voor een gekozen cultuur.

GEGEVEN

- Productiviteit PX=D X*=Y D[Sin−KsD/(μmax−D)]; dezelfde leswaarden.

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. Afleiden en gelijk aan nul zetten geeft Dopt=μmax[1−√(Ks/(Ks+Sin))].
2. Dopt=0,312713 h^{-1}; Sopt=1,791288 en Xopt=4,104356 g/L.
3. PX,max=1,283485 g/(L·h). Bij D→0 is afvoer klein; bij uitwassen is X* klein.

ANTWOORD

In dit ene-substraatmodel wint een begrensde tussenwaarde, geen maximaal pompdebiet.

Klopt dit? Robuustheid, zuurstof, productkwaliteit en regelreserve kunnen de werkelijke keuze onder het rekenoptimum leggen.

CODE · 31.12

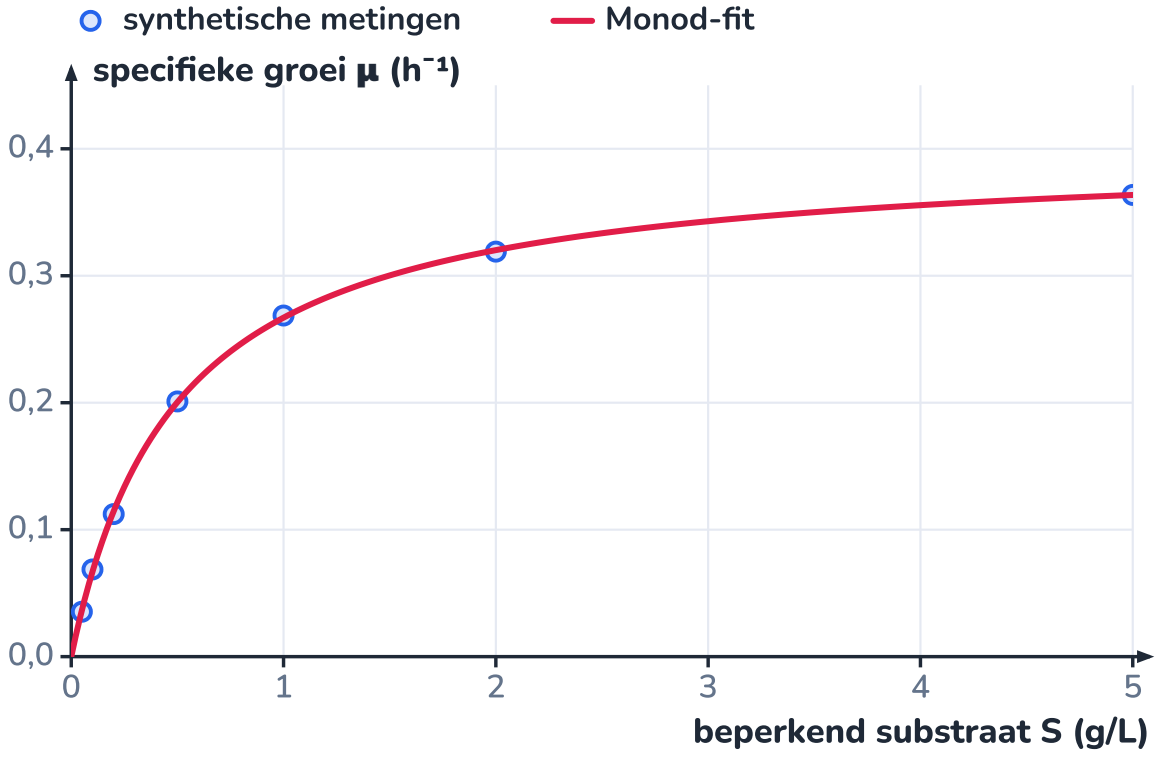
Monod-parameters uit snelheden schatten

De zeven punten zijn synthetische µ-metingen bij bekende S. Positief begrensde least squares past de originele µ-vorm; een reciproke linearisatie zou lage snelheden en hun fouten anders wegen. Metingen bij alleen S≫Ks zouden Ks slecht vastleggen, dus meet ook het overgangsgebied.

Python `monod_fit.py` 12 regels

```python
# monod_fit.py — verstrekte synthetische snelheidsmetingen
import numpy as np
from scipy.optimize import least_squares
S=np.array([.05,.1,.2,.5,1,2,5]) # g/L
gemeten=.4*S/(.5+S)+np.array([-.001,.002,-.002,.001,.002,-.001,0])
fit=least_squares(lambda z:z[0]*S/(z[1]+S)-gemeten,
    [.35,.4],bounds=([.001,.001],[2,10]))
mu,K=fit.x
print(f"mu_max={mu:.6f} h^-1; Ks={K:.6f} g/L")
print("residuen:",fit.fun)
print("max residu h^-1:",np.max(abs(fit.fun)))
print("Geen biologisch betrouwbaarheidsinterval uit alleen deze zeven lespunten.")
```

```
mu_max=0.399806 h^-1; Ks=0.497468 g/L
residuen: [ 1.15042941e-03 -1.74999831e-03  2.35917995e-03 -5.89657517e-04
 -1.67874420e-03  1.16900384e-03 -8.99722734e-06]
max residu h^-1: 0.0023591799487282517
Geen biologisch betrouwbaarheidsinterval uit alleen deze zeven lespunten.
```



µmax en Ks worden samen geschat; residuen en meetbereik bepalen wat de fit kan aantonen.

UITLEG · 31.13

Zuurstofoverdracht en verbruik vormen een tweede beperking

13/25

Voor een aerobe organisch gevoede cultuur kan opgeloste zuurstof worden aangevuld vanuit gas. OTR=kLa(C*−C) in massa/(volume·tijd). OUR=qO2X, als qO2 verbruik per biomassamassa per tijd is. De voorraadbalans C'=OTR−OUR bevat dus een transportterm en een biologische term.

kLa is een effectief product van overdracht en oppervlak, afhankelijk van vat, bellen, menging en medium. Het is geen soortconstante. Een groeimodel dat onbeperkt μ voorspelt terwijl C wegvalt, mist een beperking; voeg passend bewijs en model toe voordat je opschaalt.

VERSTREKT AEROBE-VERBRUIKSMODEL; NIET DE FOTOAUTOTROFE PRODUCTIEFORMULE

$$\dot{C} = k_L a(C^* - C) - q_{O_2} X$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.14

Bij dezelfde menging kan extra biomassa zuurstof tekortkomen

14/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.

GEGEVEN

- Procesleswaarden C*=8 mg/L, minimale procesconcentratie 2 mg/L, kLa=10 h^{-1}; qO2=0,020 g/(g·h).

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. Beschikbaar bij C=2: 10(8−2)=60 mg/(L·h).
2. Bij X=2 g/L is OUR=0,020·2=0,040 g/(L·h)=40 mg/(L·h), dus stationair C=8−40/10=4 mg/L.
3. Bij X=4 wordt OUR=80 mg/(L·h), boven de beschikbare 60. De modelgrens bij Cmin is Xcrit=60/20=3 g/L.

ANTWOORD

Vier g/L kan de verstrekte procesminimumwaarde niet handhaven bij dezelfde kLa.

Klopt dit? 2 mg/L is hier een verstrekte cultuurprocesgrens, geen gezondheids- of algemene biologische veiligheidsnorm.

UITLEG · 31.15

Algen gebruiken licht, koolstof en voedingsstoffen samen

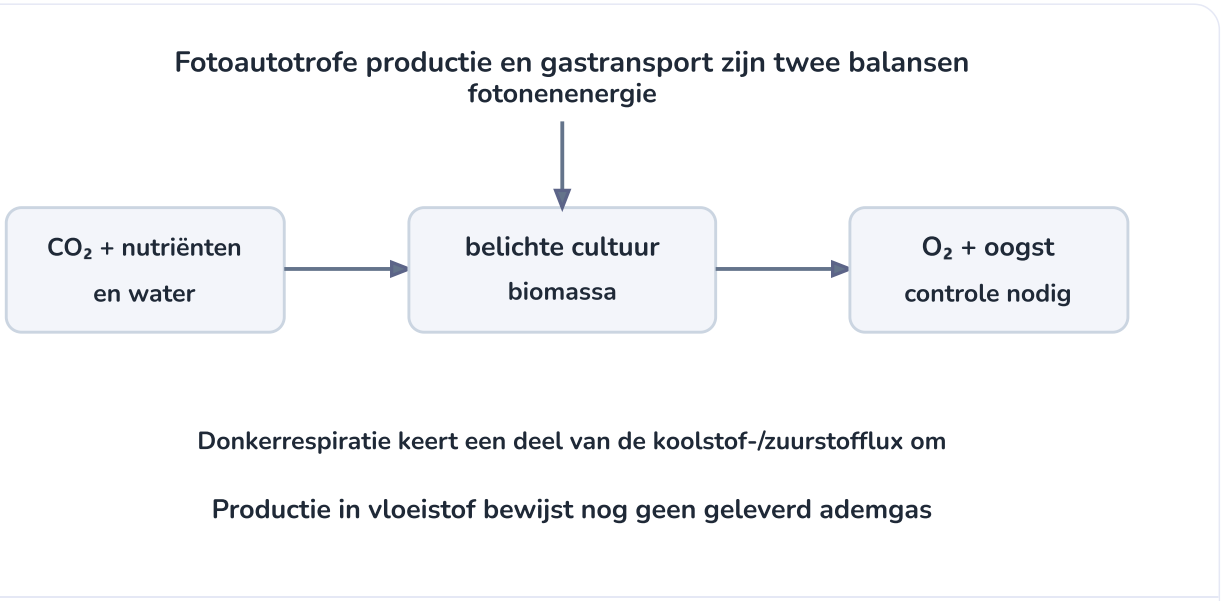
15/25

Een fotoautotrofe reactor gebruikt lichtenergie en anorganische koolstof om biomassa op te bouwen. Het bruto fotosynthetisch proces kan O_2 produceren; donkerrespiratie en andere verliezen verminderen de netto levering. Groei in het vat is bovendien nog geen bewezen veilige overdracht van ademgas naar bewoners.

Geef voor een transparante elementbalans de **lesbiomassa** $CH_{1,8}O_{0,5}N_{0,2}$ en ammoniak als model-N-bron. Dan sluit $CO_2+0{,}2NH_3+0{,}6H_2O \rightarrow CH_{1,8}O_{0,5}N_{0,2}+1{,}05O_2$. Per C-mol: 24,6 g droge biomassa, 44 g CO_2 en 33,6 g O_2. Een echte samenstelling of nitraat-N-bron geeft een andere balans; dit is geen universeel algenequivalent of voedingsprotocol.

GEGEVEN LES-SAMENSTELLING; CONTROLEER C,H,O,N AFZONDERLIJK

$$CO_2 + 0{,}2NH_3 + 0{,}6H_2O \rightarrow CH_{1,8}O_{0,5}N_{0,2} + 1{,}05O_2$$



De lesreactie koppelt koolstof, stikstof en zuurstof; een gesloten kring vraagt ook oogst en respiratie.

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.16

De bewonersvraag sluit niet met alleen een zuurstofgetal

16/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.

GEGEVEN

- Habitat-rekengegevens per bewoner: 0,84 kg O_2/dag en circa 1,0 kg CO_2/dag; station heeft twee bewoners. Gebruik de gegeven lesbiomassa.

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. O_2-vraag=1,68 kg/dag. Opbrengst 33,6/24,6=1,365854 kg O_2/kg droog.
2. Benodigde nettoproductie 1,68/(33,6/24,6)=1,23 kg droog/dag; CO_2 hiervoor 1,23·44/24,6=2,20 kg/dag.
3. Alleen de twee bewoners leveren in dit rekengeval 2,00 kg CO_2/dag: maximaal 2·33,6/44=1,527273 kg O_2/dag. Andere afvalkoolstof kan bijdragen, maar haar conversie moet apart in de balans.

ANTWOORD

De gekozen biomassa-/N-balans vraagt 0,20 kg/dag meer CO_2 dan de vereenvoudigde bewonerssom.

Klopt dit? Dit is geen voorspelling van echte ademstofwisseling of algensamenstelling; ook licht, respiratie, voedingsstoffen, oogst en gaszuiverheid moeten worden bewezen.

UITLEG · 31.17

Licht maakt reactorvolume niet vrij schaalbaar

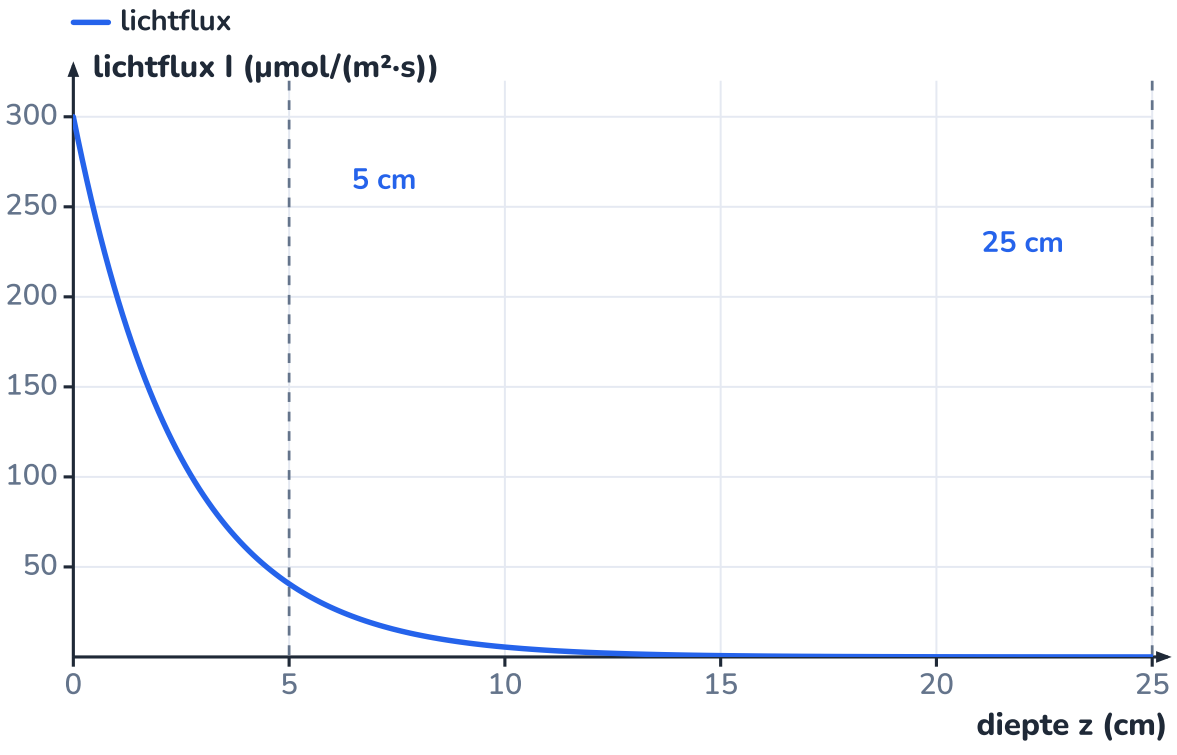
17/25

Neem een vlak belichte suspensie met I(z)=I0 e^(−κXz), X in g/m³ en κ in m²/g. Licht voor groei verzadigt volgens I/(KI+I). De lokale groeibijdrage middelen is niet hetzelfde als eerst I middelen en daarna de niet-lineaire groeifunctie toepassen.

Bij a=κX volgt analytisch flicht=(1/(aL))·ln[(KI+I0)/(KI+I0 e^(−aL))]. De netto modelgroei is μlicht·flicht−rresp. Met meer diepte wordt het donkerder volume groter; bij voldoende respiratie kan de totale netto opbrengst zelfs afnemen.

GEMIDDELDE VAN DE LOKALE VERZADIGINGSFUNCTIE, GEEN FUNCTIE VAN ALLEEN GEMIDDELDE I

$$\overline{f}_I = \frac{1}{aL}\ln\frac{K_I + I_0}{K_I + I_0 e^{-aL}}, \qquad a = \kappa X$$



κ, X, lichtbron en respiratie zijn verstrekte rekenwaarden, geen algenkalibratie.

CODE · 31.18

Vijf keer dieper levert in dit model minder netto product

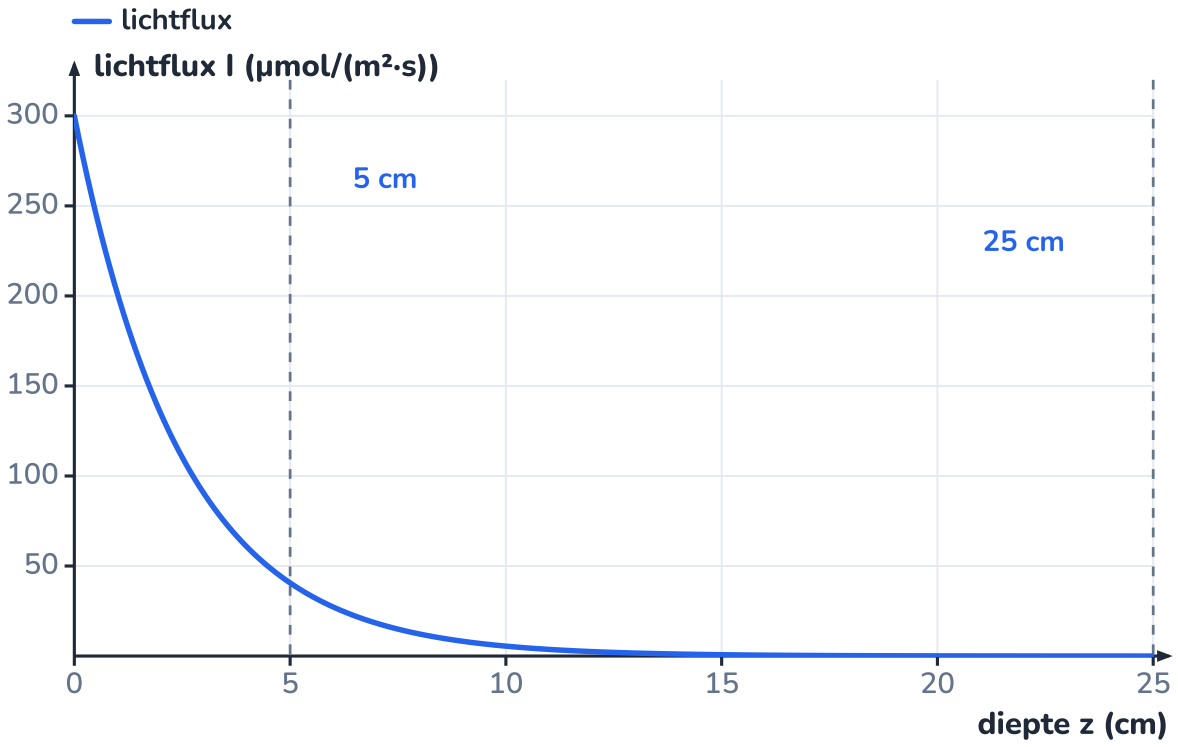
18/25

Oppervlakte is 1 m², X=0,5 g/L, I0=300 en KI=100 µmol/(m²·s), κ=0,08 m²/g. Lichtbijdrage 0,8/dag omvat 16 h licht met maximaal 0,05/h; respiratie 0,05/dag is al over 24 h gemiddeld. Het LED-budget 100 W/m²×16 h=1,6 kWh/(m²·dag) is een afzonderlijk gegeven scenario, geen fysisch afgeleide lamp-efficiëntie.

Python **licht_en_gas.py** 27 regels

```python
# licht_en_gas.py — analytisch geïntegreerde lesmodellen
import math
import numpy as np
I0,KI,kappa,X=300.0,100.0,.08,500.0 # µmol/(m2 s), zelfde, m2/g, g/m3
mu_light,resp=.8,.05 # dag^-1; .8 omvat 16 h licht à .05 h^-1
gO2,gCO2=33.6/24.6,44/24.6 # kg per kg lesbiomassa CH1.8O0.5N0.2
licht=[]
for diepte in (.05,.25):
    a=kappa*X
    factor=math.log((KI+I0)/(KI+I0*math.exp(-a*diepte)))/(a*diepte)
    avgI=I0*(-math.expm1(-a*diepte))/(a*diepte)
    mu=mu_light*factor-resp
    voorraad=X*diepte/1000 # kg bij oppervlak 1 m2
    productie=mu*voorraad
    O2=productie*gO2
    licht.append((diepte,avgI,factor,mu,productie,O2))
    print(f"L={diepte:.2f} m Iavg={avgI:.6f} factor={factor:.6f} mu_net={mu:.6f}/d")
    print(f"droog={productie:.8f} kg/d per m2; O2={O2:.8f} kg/d per m2")
    print(f"area voor 1.68kgO2/d={1.68/O2:.6f}m2; LED-scenario={1.6*1.68/O2:.6f}kWh/d")
print("biomassa voor 1.68kgO2/d:",1.68/gO2,"kg; CO2:",1.68*gCO2/gO2,"kg/d")
print("O2-bovengrens bij alleen 2kgCO2/d:",2*gO2/gCO2,"kg/d")
Np,rho,N,D,V=5.0,1000.0,5.0,.06,.001 # lesroerwerk, SI
P=Np*rho*N**3*D**5
Ns=N*10**(-2/3)
print("roerwerk P0/P1 bij gelijk N:",P,P*10**5,"W")
print("N1 bij gelijk P/V:",Ns,"s^-1; P1",P*1000,"W")
print("tipv0/tipv1:",math.pi*N*D,math.pi*Ns*D*10,"m/s")
```

```
L=0.05 m Iavg=129.699708 factor=0.522771 mu_net=0.368217/d
droog=0.00920541 kg/d per m2; O2=0.01257325 kg/d per m2
area voor 1.68kgO2/d=133.617020m2; LED-scenario=213.787233kWh/d
L=0.25 m Iavg=29.998638 factor=0.138616 mu_net=0.060893/d
droog=0.00761158 kg/d per m2; O2=0.01039631 kg/d per m2
area voor 1.68kgO2/d=161.595848m2; LED-scenario=258.553357kWh/d
biomassa voor 1.68kgO2/d: 1.23 kg; CO2: 2.2 kg/d
O2-bovengrens bij alleen 2kgCO2/d: 1.5272727272727271 kg/d
roerwerk P0/P1 bij gelijk N: 0.48599999999999993 48599.99999999999 W
N1 bij gelijk P/V: 1.077217345015942 s^-1; P1 485.99999999999994 W
tipv0/tipv1: 0.9424777960769379 2.0305068584529504 m/s
```



Bij 25 cm bevat het vat vijf keer zoveel biomassa, maar het gemiddelde actieve lichtaandeel daalt sterk.

UITLEG · 31.19

Opschalen vraagt overeenkomende transportvoorwaarden

19/25

Geometrisch vergelijkbare vaten met een lengteschaalfactor λ krijgen V×λ³ maar oppervlak×λ². A/V daalt als 1/λ. Warmteafvoer, lichtinval en gasuitwisseling volgen daarom niet automatisch hetzelfde volumevoordeel. Wandgroei, schuim en vervuiling kunnen de praktijk nog wijzigen.

Voor een turbulent lesroerwerk is P=NpρN³d⁵. Houd je toerental N gelijk bij een groter d, dan groeit P/V als λ². Houd je P/V gelijk, dan moet N als λ^(−2/3) dalen, maar de tipsnelheid πNd groeit als λ^(1/3). Menging, gasoverdracht en beschadiging vragen dus meerdere criteria.

NP CONSTANT BINNEN HETZELFDE STROMINGSREGIME; N IN S⁻¹

$$P = N_P \rho N^3 d^5, \qquad \left.\frac{P}{V}\right|_{\text{gelijk}} \Rightarrow N \propto \lambda^{-2/3}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 31.20

Een geometrisch grotere roerder laat de afweging zien

20/25

Bereken de reactor vanuit een expliciete massa-, groei- of transportbalans.

GEGEVEN

- Lesvat V=1 L, impeller d=0,06 m, N=5 s⁻¹, Np=5, ρ=1000 kg/m³; alle lengten×10.

GEVRAAGD

- Uitkomst, eenheden, balanscontrole en modelgrens.

OPLOSSING

1. $P0=5\cdot1000\cdot5^3\cdot0{,}06^5=0{,}486$ W. Het nieuwe vat heeft 1000 L.
2. Bij dezelfde N wordt $P1=P0\cdot10^5=48{,}6$ kW, honderd keer zoveel P/V.
3. Bij hetzelfde P/V wordt N1=5·10^(−2/3)=1,077217 s^{-1} en P1=486 W. Tip stijgt van 0,942478 naar 2,030507 m/s.

ANTWOORD

Gelijk P/V betekent een ander toerental en een grotere tipsnelheid.

Klopt dit? Np, stromingsregime en werkelijk kLa moeten bij schaalproeven worden gecontroleerd; dit is geen motor-/vatselectie.

UITLEG · 31.21

Meten en regelen richten zich op beperkingen en product

21/25

Volg X met een geschikte biomassakalibratie, S/nutriënten, pH, temperatuur, opgelost gas, licht en debiet. Regeling van pH, gas, licht en voeding kan beperkingen verschuiven; sensoronderhoud en drift horen bij het proces. Meet totale oogst en aangeleverde energie, niet alleen een gunstige momentane X.

Een voedingslus kan een vooraf vastgesteld tekort of overbelasting beperken. Een gaslus mag een O_2-signaal niet als bewijs voor eetbare biomassa behandelen. Voor voedsel zijn cultuuridentiteit, contaminatie, eventuele toxinen, samenstelling, oogst en verwerking eigen kwaliteitsvragen; wilde reservoiralgen zijn geen voedingsproduct.

Doel	Metingen	Risico bij één signaal
groei	X, S, V, oogst	concentratie verwarren met massa
gas	netto flux, samenstelling, licht/donker	bruto productie als levering tellen
voedsel	identiteit/kwaliteit/verwerking	groene kleur als eetbaarheid
energie	licht, pomp, menging, warmte	alleen biologische snelheid optimaliseren

PROEF · 31.22

Een bekende lescultuur meten zonder levensvoorziening te claimen

22/25

ONDERZOEKSVRAAG

Hoe verandert een geldige biomassameting met licht en meetverdunning?

MATERIAAL

- docentgekozen bekende niet-pathogene microalgen-onderwijsset
- gesloten passende lesvaten
- vastgelegde lichtbron
- temperatuurmeting
- kleur/optische meetopstelling
- blanco en kalibratie

Veiligheid

Geen consumptie, onbekende kweek, aerosolvorming of koppeling aan bewonersademlucht. Docent beheert cultuur, elektrische verlichting en afval volgens set/schoolprotocol; deze proef is geen life-supportvalidatie.

WERKWIJZE

1. Volg de onderwijsset met bekende cultuur; geen onbekend reservoir-/drinkwatermonster opkweken.
2. Vergelijk hetzelfde beginvolume en dezelfde cultuurhoeveelheid onder docentbeheerde lichtcondities; leg lichtduur en temperatuur vast.
3. Gebruik bij optisch meten een blanco en verdunningsreeks om het bruikbare meetgebied te beoordelen.
4. Log tijd, volume, meetverdunning en geschatte X; interpreteer geen overbelaste optische meting als rechtstreekse groeistop.
5. Bereken een massabalans en bespreek welke gas-/droogmassametingen ontbreken om echte netto zuurstofproductie te bewijzen.

WAARNEMING

Optisch signaal kan stijgen en later buiten zijn kalibratiegebied raken. Licht en temperatuur kunnen samen veranderen.

VERKLARING

Een meetmodel en een groeimodel zijn aparte schakels; lichtverdeling en meerdere beperkingen beïnvloeden de cultuur.

VERHAAL · 31.23

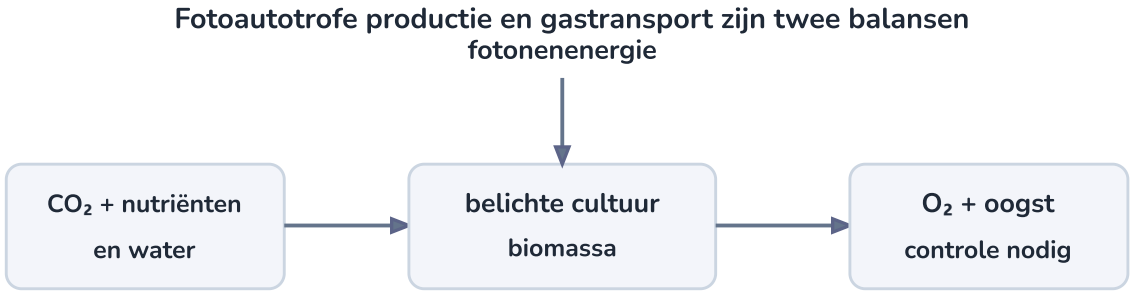
MELiSSA bouwt een kring uit afzonderlijk getoetste compartimenten

23/25

ESA's MELiSSA-concept koppelt biologische en fysische processen om water, voedsel en zuurstof uit afval en CO_2 terug te winnen met lichtenergie. De kring is opgebouwd uit verschillende procesfuncties, geen enkel vat dat alle kwaliteitstaken tegelijk oplost.

ESA beschrijft aparte compartimenten voor afvalverwerking, koolstofomzetting, nitrificatie en fotosynthetische productie met organismen en hogere planten. De fotoautotrofe stap levert een deel van de gewenste biomassa en gasfluxen; toevoer en kwaliteitscontrole van eerdere stappen blijven nodig.

De ArtemISS-proef onderzocht Arthrospira in een ruimtefotobioreactor en gas-/vloeistofscheiding. Dat is precies waarom Habitat eerst balansen, transport, meetkwaliteit en stabiele deelproeven nodig heeft voordat een complete kring een ontwerpclaim kan worden.



Donkerrespiratie keert een deel van de koolstof-/zuurstofflux om

Productie in vloeistof bewijst nog geen geleverd ademgas

Een getoetste fotosynthetische stap is één onderdeel van een kring met meerdere voorraad- en kwaliteitsbalansen.

NASLAG · 31.24

Groeisnelheid, voorraad en transport apart benoemen

24/25

Monod

$$\mu = \mu_{\max}\frac{S}{K_s + S}$$

symbool	betekenis	eenheid
μ	specifieke groei	h^{-1}
S, Ks	substraatconcentratie	g/L

chemostat

$$\dot{X} = (\mu - D)X, \quad \dot{S} = D(S_{\text{in}} - S) - \mu X/Y$$

symbool	betekenis	eenheid
D	Fin/V	h^{-1}

codecontrole

$$V(X + YS) + H_X + YH_S - YI = \text{constant}$$

symbool	betekenis	eenheid
I	ingevoerd substraat	g
HX, HS	afgevoerde massa	g

gasoverdracht

$$\text{OTR} = k_L a(C^* - C)$$

symbool	betekenis	eenheid
kLa	effectieve overdracht	h^{-1}

lichtattenuatie

$$I(z) = I_0 e^{-\kappa X z}$$

symbool	betekenis	eenheid
κ	massa-extinctie in lesmodel	m^2/g

lesroerwerk

$$P = N_P \rho N^3 d^5$$

symbool	betekenis	eenheid
N	omwentelingen per seconde	s^{-1}
d	impellerdiameter	m

Modus	Fin	Fout	Volume
batch	0	0	constant
fed-batch	positief	0	stijgt
continu	positief	gelijke stroom	constant

Primair: Monod (1949), ESA MELiSSA-concept/compartimenten/ArtemISS. Raadpleegdatum 30-09-2026. Parameters, data, biomassasamenstelling, licht-/LED-/roerwerkscenario zijn verstrekte lesmodellen.

HET GEHEEL · 31.25

Habitat: de algenreactor vraagt gas, licht, voeding en reserve

25/25

e04/i05 beschrijven de ongewenste algen in een transparant testreservoir met logistische r=0,70/dag en K≈7,7·10^5/mL. Dat model wordt hier niet stil vervangen of tot droge biomassa omgerekend. e25 levert snelheidsbalansen; e18 bepaalt debiet en e15/e27 begrenzen energie. e32 moet de gekoppelde ecosysteemvoorraad en storingen beoordelen.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie

Dynamische voorraad en logistiek.

E25 Thermochemie en reactiesnelheid

Snelheid en modelcontrole.

E18 Stroming van vloeistoffen en gassen

Voeding, pomp en transport.

E32 Ecologische modellen

Meerdere gekoppelde kringlopen en reserve.

Habitat

Geen operationele algenreactor of nieuwe eetbare cultuur gekozen. Het station behoudt twee bewoners en bevoorrading om 30 dagen. De gegeven $CH_{1,8}O_{0,5}N_{0,2}$-lesbalans vraagt voor 1,68 kg netto O_2/dag 1,23 kg droge biomassa en 2,20 kg CO_2. Het 5 cm-lichtmodel geeft per m² 0,012573 kg O_2/dag en dus 133,617 m²/213,787 kWh lampenergie per dag onder alle expliciete aannames. Dit is een **dimensioneringsscenario**, geen gevalideerd ademgas-/voedselontwerp. Gaszuiverheid, netto licht/donkerflux, voeding, oogstkwaliteit, warmte/pompen, storingsbuffer en onafhankelijke levensvoorziening moeten voor een echte koppeling aantoonbaar worden gemaakt.

SAMENVATTING

In het kort

- Monod koppelt specifieke groei aan één beperkend substraat; parameters vragen metingen.
- Batch, fed-batch en continu hebben verschillende volume-/flowbalansen.
- Massacontrole telt reactor én cumulatieve voeding/oogst; concentratie alleen is onvoldoende.
- Uitwassen kan al bij D<μmax ontstaan omdat Sin begrensd is.
- Zuurstofoverdracht en geïntegreerde lichtverdeling kunnen vóór substraat begrenzen.
- Algen voor O_2/voedsel vragen netto elementbalans, productkwaliteit, energie en onafhankelijke reserve.
- Geometrisch opschalen bewaart niet automatisch menging, licht, gas en celbelasting.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

specifieke groei
Biomassavorming per aanwezige biomassa per tijd.

opbrengst Y
Gevormde droge biomassa per verbruikt substraat in het gekozen model.

verdunningssnelheid
Vloeistofinstroom per reactorvolume per tijd.

uitwassen
Netto verlies van cultuur doordat afvoer de groei overtreft.

kLa
Effectieve volumetrische gasoverdrachtsparameter.

fotoautotroof
Organisch materiaal vormen uit anorganische koolstof met lichtenergie.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 32

Ecologische modellen

Groei, interactie en materiaalbehoud vragen elk hun eigen stabiliteitsbewijs

Een ecosysteem kan regelmatig schommelen terwijl een voorraad langzaam verdwijnt. Je leidt groei- en interactiemodellen af, controleert Euler tegen onafhankelijke oplossingen en sluit een fictieve voedingsstofboekhouding. Biosphere 2 laat zien waarom ook microben en bouwmaterialen tot een atmosfeerbalans behoren.

7× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 3× code · ± 15 lestijden

B Leven en systemen · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Een ecosysteem heeft levende én niet-levende voorraden; een groene kleur bewijst geen gesloten balans.

Na dit hoofdstuk

- Je kan logistische groei, draagkracht en oogstevenwichten afleiden.
- Je kan Lotka–Volterra simuleren en nulclijnen, fasebanen en stabiliteit verklaren.
- Je kan een Eulerfout onderscheiden van fysische instabiliteit.
- Je kan gesloten materiaalpools en expliciete export modelleren.
- Je kan de lessen van Biosphere 2 met primaire bronnen en passende grenzen toepassen.

UITLEG · 32.1

Van groei naar een dynamisch ecosysteem

1/22

In i05 groeide een kleine algenpopulatie ongeveer exponentieel. E04 begrensde die groei met een draagkracht. Hier worden organismen gekoppelde toestanden: een predator reageert op prooi, dode

biomassa wordt opnieuw voeding, en een materiaalvoorraad kan verschuiven zonder dat het totaal verandert.

De grootheid N is een concentratie bij constant watervolume, geen rechtstreeks gewicht. Gebruik dezelfde afgeronde testreservoirwaarden als e04: $r = 0{,}70\,\mathrm{dag}^{-1}$, $K = 7{,}7 \cdot 10^5$ cellen/mL en $N_0 = 1900$ cellen/mL. Een nieuwe reactor krijgt deze parameters pas na eigen identificatie.

model	verklaring	ontbreekt nog
exponentieel	groei per individu constant	voedsel- en lichtbeperking
logistisch	netto groei daalt met dichtheid	andere soorten en expliciete voorraad
prooi–predator	twee gekoppelde populaties	volledige materiaalbalans
poolmodel	materiaal verplaatst tussen reservoirs	soortenrijkdom en ruimtelijke variatie

UITLEG · 32.2

Draagkracht is een modelparameter

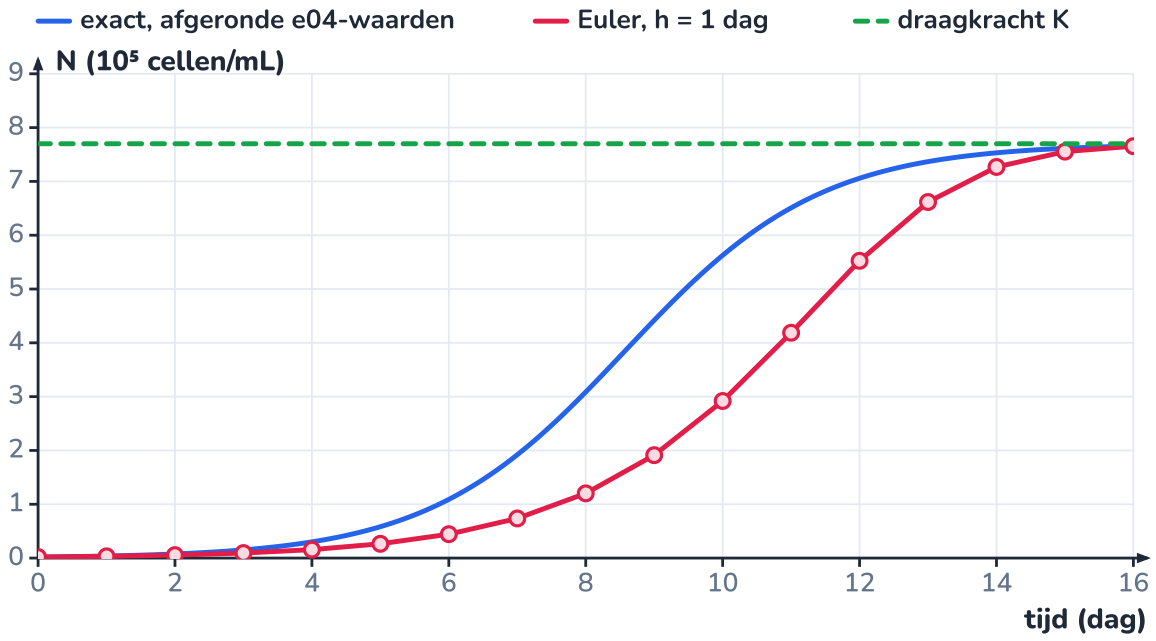
Neem geboorten minus sterfte per individu samen in een netto groei r. Veronderstel dat de beperking evenredig is met N/K. Dan volgt de logistische vergelijking. K beschrijft het evenwicht onder *dezelfde* omstandigheden: licht, temperatuur, voeding en concurrentie. Een lichtstoring maakt een vaste K soms ongeschikt.

LOGISTISCHE NETTO GROEI

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Bij $N = 0$ en $N = K$ is de afgeleide nul. Tussen beide groeit N; boven K daalt zij. Lineariseren geeft $f'(N) = r(1 - 2N/K)$: bij nul is de eigenwaarde $+r$ en bij K juist $-r$. De toestand nul is instabiel voor een positieve introductie; K is lokaal asymptotisch stabiel. In dit deterministische model wordt een positieve populatie nooit vanzelf exact nul.

Met $x = N/K$ en $s = rt$ ontstaat $\mathrm{d}x/\mathrm{d}s = x(1 - x)$. Dat toont welke grootheden een simulatie moet schalen: tijd met $1/r$, populatie met K.



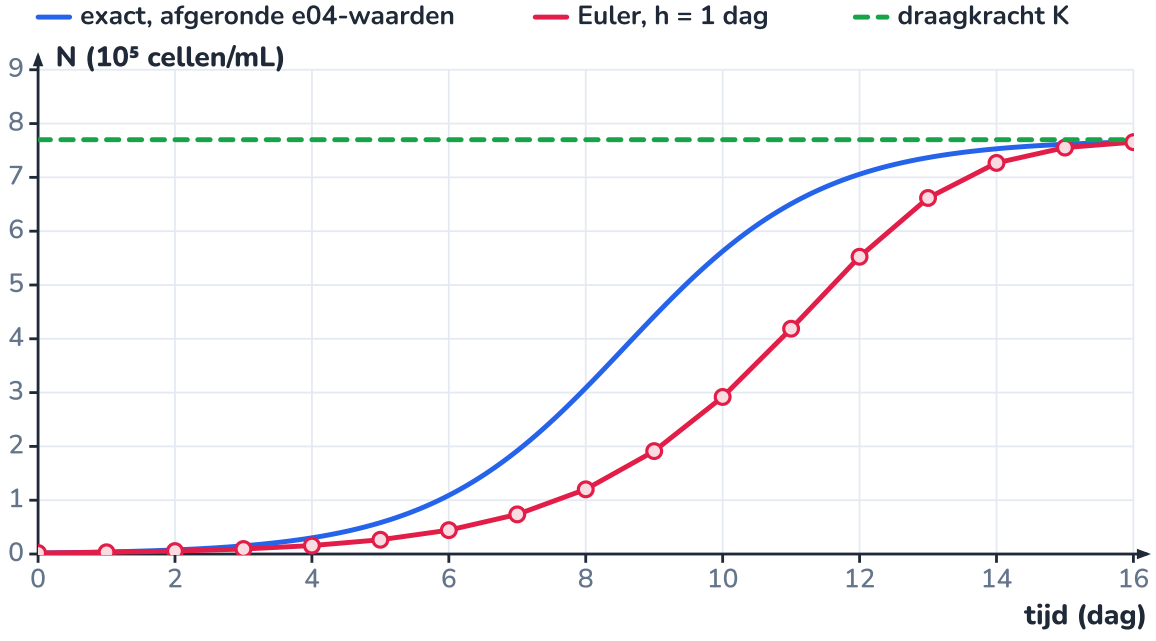
Dit testreservoir heeft rekenwaarden r = 0,70 per dag en K = 7,7 · 10^5 cellen/mL. Een dagstap blijft hier begrensd, maar verschuift de groei sterk; numerieke stabiliteit garandeert geen nauwkeurigheid.

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.3

Het alarmmoment uit de exacte oplossing

3/22

De reservoirgrens van i05 bedraagt $5 \cdot 10^5$ cellen/mL. Dit is een stationsproefgrens voor ongewenste algen, geen medische grens.



Dit testreservoir heeft rekenwaarden r = 0,70 per dag en K = 7,7 · 10^5 cellen/mL. Een dagstap blijft hier begrensd, maar verschuift de groei sterk; numerieke stabiliteit garandeert geen nauwkeurigheid.

GEGEVEN

- $r = 0{,}70$ per dag; $K = 770\,000$; $N_0 = 1900$ cellen/mL

GEVRAAGD

- De oplossing en het eerste grensmoment.

OPLOSSING

1. Scheid: $\mathrm{d}N/[N(1-N/K)] = r\mathrm{d}t$. Omdat $K/[N(K-N)] = 1/N + 1/(K-N)$ volgt $\ln[N/(K-N)] = rt + c$ voor $0 < N < K$.
2. Vul de beginwaarde in en herschik: $N(t) = K/[1 + (K/N_0 - 1)\mathrm{e}^{-rt}]$.
3. Voor een grens $L < K$ is $t_L = r^{-1}\ln[(K/N_0 - 1)L/(K-L)]$. Met $L = 500\,000$ volgt $t_L = 9{,}454646$ dagen.

ANTWOORD

Met de hier bewust afgeronde parameters wordt de grens rond dag 9,45 bereikt. E04 gebruikte ook ongeronde fitwaarden; een laatste decimaal is geen nieuwe nauwkeurige biologische voorspelling.

Klopt dit? $N(10) = 562\,602{,}175$ cellen/mL. Het buigpunt $N = K/2$ ligt op dag 8,574380; maximale netto groei is $rK/4 = 134\,750$ cellen/(mL·dag).

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.4

Een Eulerstap is een balans over een tijdvak

4/22

Een korte stap houdt de groeisnelheid constant op haar waarde aan het begin.

GEGEVEN

- $N = 100\,000$ cellen/mL; $h = 0{,}5$ dag; dezelfde r, K.

GEVRAAGD

- De volgende toestand en de betekenis van tegelijk bijwerken.

OPLOSSING

1. $f(N) = 0{,}70 \cdot 100\,000(1 - 100\,000/770\,000) = 60\,909{,}091$ cellen/(mL·dag).
2. $N_1 = N + hf(N) = 130\,454{,}545$ cellen/mL. Vermenigvuldig de snelheid eerst met tijd; tel geen snelheid bij een concentratie op.
3. De exacte groei over een halve dag vanaf 100 000 geeft 134 582,205 cellen/mL. Het verschil is een discretisatiefout: de groei veranderde tijdens de stap.

ANTWOORD

In een stelsel bereken je alle nieuwe toestanden uit dezelfde oude vector. Eerst prooi vervangen en dan die nieuwe prooi in de predatorformule stoppen voert een andere methode uit.

Klopt dit? Bij een stabiel logistisch evenwicht heeft Euler factor $1 - rh$. De lokale stabiliteitsgrens is $0 < rh < 2$; een ruime marge en stapvergelijking blijven nodig.

CODE · 32.5

Logistische groei met een echte stapvergelijking

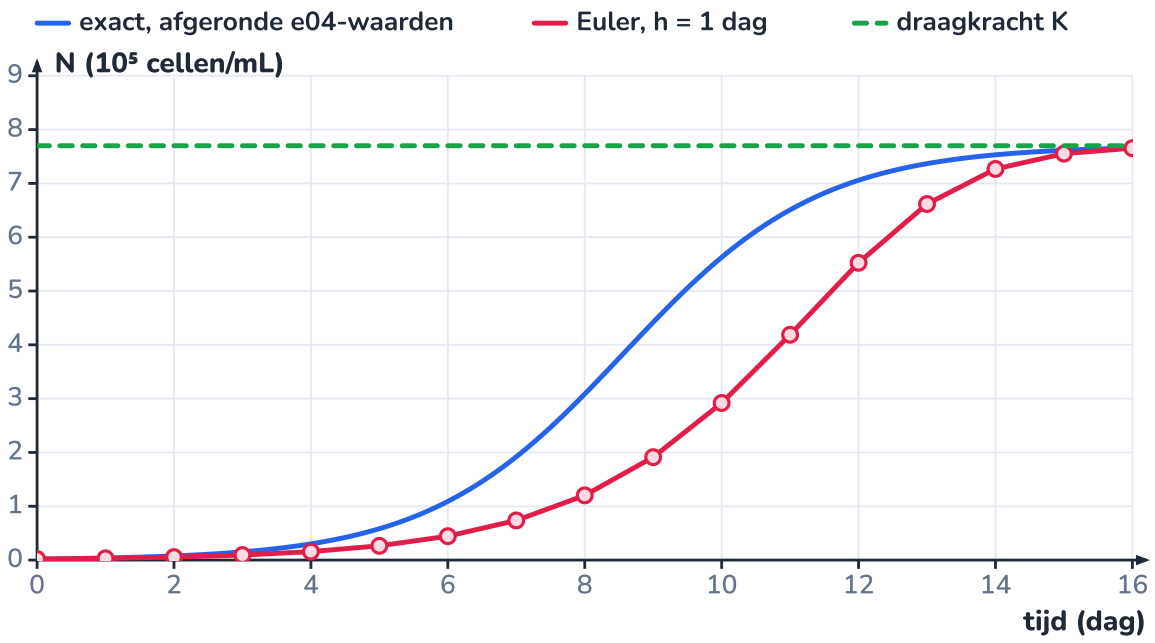
De exacte oplossing is een onafhankelijke referentie voor Euler. De tabel drukt de *getekende* fout N_Euler − N_exact af, met dezelfde beginwaarde en eindtijd. Voor kleine stappen halveert de globale fout ongeveer wanneer h halveert. De grote fout bij één dag bewijst dat 'niet ontploffen' veel te weinig is.

Python **reservoir_logistiek.py** 28 regels

```python
import math
import numpy as np

# Afgeronde leswaarden uit e04, alleen voor het testreservoir.
r=.70; K=770000.; N0=1900.; alarm=500000.
def exact(t,N=N0):
    return K/(1+(K/N-1)*math.exp(-r*t))
def euler_log(h,eind=10.,N=N0):
    n=round(eind/h)
    if not math.isclose(n*h,eind): raise ValueError("niet gehele stapreeks")
    ys=[N]
    for _ in range(n):
        N=N+h*r*N*(1-N/K); ys.append(N)
    return np.arange(n+1)*h,np.array(ys)
t_alarm=math.log((K/N0-1)*alarm/(K-alarm))/r
t_half=math.log(K/N0-1)/r
print("exact dag 10",round(exact(10),3),"cellen/mL")
print("alarmtijd",round(t_alarm,6),"dag; buigpunt",round(t_half,6))
rows=[]
for h in [1.,.5,.25,.125,.0625]:
    t,n=euler_log(h); err=n[-1]-exact(10)
    rows.append((h,n[-1],err))
    print("h,N(10),fout",h,round(n[-1],3),round(err,3))
print("groei bij K/2",r*K/4,"cellen/(mL dag)")
for E in [.25,.35,.50,.80]:
    ns=max(0.,K*(1-E/r)); print("oogst E,N*,Y",E,round(ns,3),round(E*ns,3))
assert abs(exact(0)-N0)<1e-10
assert all(rows[j+1][2]>rows[j][2] for j in range(len(rows)-1))
```

```
exact dag 10 562602.175 cellen/mL
alarmtijd 9.454646 dag; buigpunt 8.57438
h,N(10),fout 1.0 291864.674 -270737.501
h,N(10),fout 0.5 426628.189 -135973.986
h,N(10),fout 0.25 498567.152 -64035.023
h,N(10),fout 0.125 531988.613 -30613.562
h,N(10),fout 0.0625 547679.69 -14922.485
groei bij K/2 134750.0 cellen/(mL dag)
oogst E,N*,Y 0.25 495000.0 123750.0
oogst E,N*,Y 0.35 385000.0 134750.0
oogst E,N*,Y 0.5 220000.0 110000.0
oogst E,N*,Y 0.8 0.0 0.0
```



Dit testreservoir heeft rekenwaarden r = 0,70 per dag en K = 7,7 · 10^5 cellen/mL. Een dagstap blijft hier begrensd, maar verschuift de groei sterk; numerieke stabiliteit garandeert geen nauwkeurigheid.

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.6

Oogsten verschuift draagkracht en stabiliteit

6/22

Een fractie E per dag wordt continu uit de populatie verwijderd. Dit is een wiskundig oogstmodel, geen operationeel protocol.

GEGEVEN

- $\dot{N} = rN(1 - N/K) - EN$; $E = 0{,}25\,\text{dag}^{-1}$.

GEVRAAGD

- Evenwicht, stabiliteit en opbrengst.

OPLOSSING

1. Factoriseer $N[(r - E) - rN/K]$. Het positieve evenwicht is $N^* = K(1 - E/r) = 495\,000$ cellen/mL.
2. Bij N^* is $f'(N^*) = -(r - E) = -0{,}45\,\text{dag}^{-1}$: stabiel. De modelopbrengst is $EN^* = 123\,750$ cellen/(mL·dag).
3. $Y(E) = EK(1 - E/r)$ is maximaal bij $E = r/2 = 0{,}35$ per dag, $N^* = K/2$, $Y = 134\,750$. Dit optimum is alleen geldig voor exact deze vaste parameters.
4. Als groei in een stressscenario $r = 0{,}30$ per dag wordt, ligt $E = 0{,}35$ erboven: het positieve evenwicht verdwijnt. Het nominale maximum is daarom geen robuuste regelstrategie.

ANTWOORD

Een geschikte proef houdt marge tot de kleinste aannemelijke groei en meet herstel na verstoring. Cellen tellen is nog geen zuurstofopbrengst meten.

Klopt dit? Bij $E = r$ vervalt de lineaire groeifactor: $\dot{N} = -(r/K)N^2$. De afname is dan algebraïsch, niet exponentieel.

UITLEG · 32.7

Lotka–Volterra: ontmoetingen koppelen twee soorten

Noem de prooi x, de predator y. Zonder predator groeit de prooi met rx. Neem een goed gemengde omgeving waarin ontmoetingen evenredig zijn met xy. De predatieterm is axy. Een fractie η zet geconsumeerde prooi om in netto predatortoename; sterfte kost dy.

BASIS-LOTKA–VOLTERRA

$$\dot{x} = rx - axy, \qquad \dot{y} = \eta axy - dy$$

Hier zijn $r = 0{,}60$ en $d = 0{,}30$ per dag, $a = 0{,}030$ per individu per dag, $\eta = 0{,}40$, $x_0 = 40$, $y_0 = 10$. Dit zijn fictieve lespopulaties. Als één prooidier en één predator verschillende massa hebben, is η geen automatische massafractie.

De aannamen zijn sterk: continu verdeelde aantallen, geen leeftijd of seizoen, geen ruimtelijke schuilplaatsen, prooi zonder draagkracht en geen verzadiging van eten. Een kleine populatie vraagt ook een stochastisch model: één individu kan verdwijnen terwijl een continue vergelijking 0,2 voorspelt.

term	betekenis	eenheid
rx	netto prooigroei	individuen/dag
axy	verlies prooi door predatie	individuen/dag
ηaxy	netto predatortoename	individuen/dag
dy	predatorsterfte	individuen/dag

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.8

De eerste gekoppelde stap

Simuleer het fictieve paar vanaf $(40, 10)$ met $h = 0{,}1$ dag.

GEGEVEN

- De vier parameters uit het modelblad.

GEVRAAGD

- Beide nieuwe aantallen.

OPLOSSING

1. Prooi: $\dot{x} = 0{,}60 \cdot 40 - 0{,}030 \cdot 40 \cdot 10 = 12$ per dag.
2. Predator: $\dot{y} = 0{,}40 \cdot 0{,}030 \cdot 40 \cdot 10 - 0{,}30 \cdot 10 = 1{,}8$ per dag.
3. Samen: $(x_1, y_1) = (41{,}2; 10{,}18)$. Met nieuwe x_1 in de oude predatorstap zou je $y_1 = 10{,}1944$ krijgen: een ongewenste mengvorm.

ANTWOORD

De predator groeit al, maar de prooi nog sneller. Later kan de predator zo talrijk worden dat de prooigroei van teken verandert.

Klopt dit? De prooigroei is nul bij $y = r/a = 20$; de predatortoename bij $x = d/(\eta a) = 25$.

CODE · 32.9

Twee methoden en een behoudsgrootheid

9/22

Dezelfde functie levert Euler en RK4. Een kleine RK4-stap controleert de baan; de afgeleide behoudsgrootheid controleert haar onafhankelijk. De grove Eulerproef wordt geweigerd zodra een populatie niet meer positief is. Stilzwijgend negatieve aantallen naar nul afkappen zou het model en zijn balans veranderen.

De uitvoer noemt de maximale fout van de *twee eindcomponenten* op dag 40, niet de maximale fout over de hele baan.

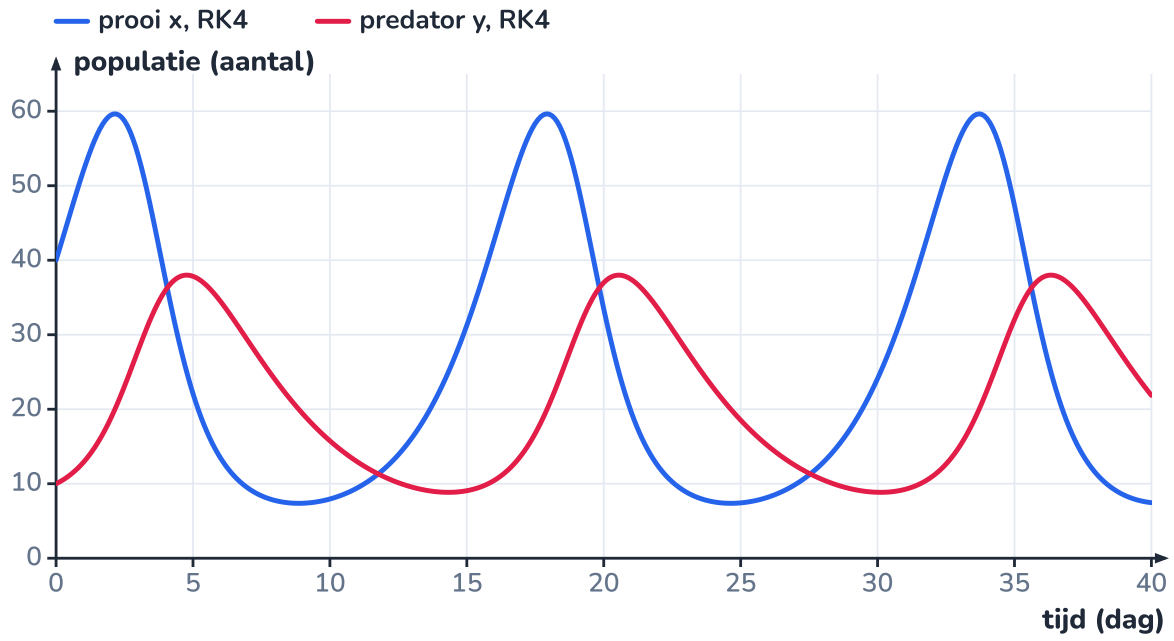
Python **prooi_predator.py** 49 regels

```python
import math
import numpy as np

# Populaties x,y zijn aantallen in een denkbeeldige proef; niet Habitat-data.
r=.60; a=.030; eta=.40; d=.30; cap=100.
xs=d/(eta*a); ys=r/a; ys_cap=r/a*(1-xs/cap)
def f(z,logistisch=False):
    x,y=z
    groei=r*x*(1-x/cap) if logistisch else r*x
    return np.array([groei-a*x*y,eta*a*x*y-d*y])
def integreer(h,eind=40.,methode="Euler",logistisch=False,z0=(40.,10.)):
    n=round(eind/h)
    if not math.isclose(n*h,eind): raise ValueError("niet gehele stapreeks")
    z=np.array(z0,float); zs=[z.copy()]
    for _ in range(n):
        if methode=="Euler": z=z+h*f(z,logistisch)
        elif methode=="RK4":
            k1=f(z,logistisch); k2=f(z+h*k1/2,logistisch)
            k3=f(z+h*k2/2,logistisch); k4=f(z+h*k3,logistisch)
            z=z+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        else: raise ValueError("methode")
        if not np.all(np.isfinite(z)) or np.min(z)<=0:
            raise ValueError("negatieve/niet-eindige populatie; stap verkleinen")
        zs.append(z.copy())
    return np.arange(n+1)*h,np.array(zs)
def invariant(z):
    x,y=np.asarray(z).T
    return eta*a*(x-xs-xs*np.log(x/xs))+a*(y-ys-ys*np.log(y/ys))
J=np.array([[0.,-a*xs],[eta*a*ys,0.]])
Jcap=np.array([[-r*xs/cap,-a*xs],[eta*a*ys_cap,0.]])
print("LV evenwicht",xs,ys,"eigenwaarden",np.linalg.eigvals(J))
print("kleine periode",2*math.pi/math.sqrt(r*d),"dag")
print("logistische prooi",xs,ys_cap,"eigenwaarden",np.linalg.eigvals(Jcap))
ref=integreer(.0025,methode="RK4")
iv0=float(invariant(ref[1][0])); print("referentie invariantdrift",float(np.max(np.abs(invariant(ref[1])-
iv0))))
rows=[]
for h in [.2,.1,.025]:
    t,z=integreer(h); drift=float(invariant(z[-1])-iv0)
    err=float(np.max(np.abs(z[-1]-ref[1][-1])))
    rows.append((h,z[-1,0],z[-1,1],drift,err))
    print("Euler h,x40,y40,Ddrift,max eindfout",*[round(v,6) for v in rows[-1]])
print("RK4 x40,y40",ref[1][-1])
try: integreer(.5)
except ValueError as fout: print("Euler h=0.5 geweigerd:",fout)
else: raise AssertionError("ongeldige grove proef niet geweigerd")
```

```
capref=integreer(.01,eind=80,methode="RK4",logistisch=True)
print("logistisch dag80",capref[1][-1])
assert abs(xs-25)<1e-12 and abs(ys-20)<1e-12
assert np.max(np.abs(invariant(ref[1])-iv0))<1e-8
```

```
LV evenwicht 25.0 20.0 eigenwaarden [0.+0.42426407j 0.-0.42426407j]
kleine periode 14.80960979386122 dag
logistische prooi 25.0 15.0 eigenwaarden [-0.075+0.35968736j -0.075-0.35968736j]
referentie invariantdrift 1.4765966227514582e-14
Euler h,x40,y40,Ddrift,max eindfout 0.2 2.901052 49.219103 0.562309 27.361555
Euler h,x40,y40,Ddrift,max eindfout 0.1 4.169626 28.447696 0.174493 6.590149
Euler h,x40,y40,Ddrift,max eindfout 0.025 6.53545 22.90673 0.031811 1.049182
RK4 x40,y40 [ 7.45528544 21.8575473 ]
Euler h=0.5 geweigerd: negatieve/niet-eindige populatie; stap verkleinen
logistisch dag80 [24.96481507 15.00314314]
```



De aantallen zijn eigen lesparameters, zonder werkelijk gekozen Habitat-soorten. Beide vergelijkingen worden tegelijk uit dezelfde oude toestand berekend. De periode van deze grote cyclus hoeft niet gelijk te zijn aan de gelineariseerde periode.

UITLEG · 32.10

Nulclijnen maken een fasebaan leesbaar

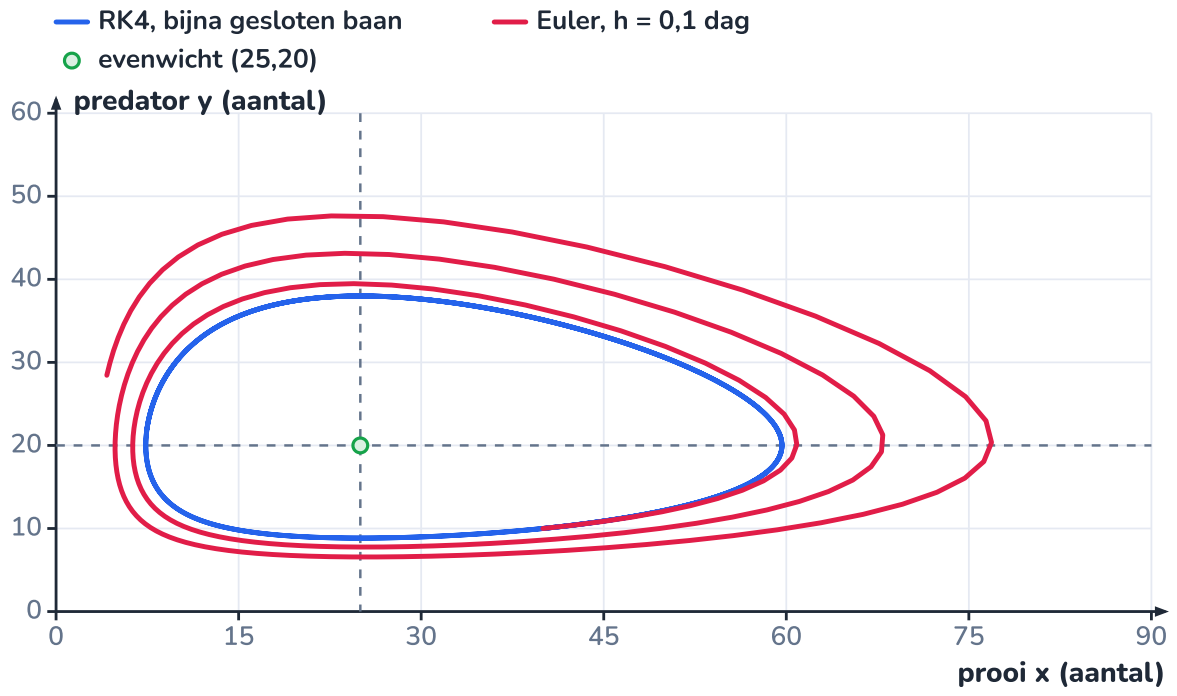
10/22

De niet-triviale nulclijnen snijden in $(25, 20)$. Rechts van $x = 25$ groeit de predator; links ervan daalt hij. Onder $y = 20$ groeit de prooi; erboven daalt zij. Daarom gaat een baan rechtsonder het evenwicht eerst naar rechtsboven en vervolgens naar linksboven: tegen de klok in.

Een tijdgrafiek toont faseverschillen; een fasevlak toont de toestand onafhankelijk van de klok. De vier tekens geven de richting, maar voorspellen nog geen demping. De assen hebben verschillende biologische betekenissen; afstand op papier is geen biologische schade-eenheid.

gebied	prooi	predator
x > 25, y < 20	groeit	groeit

gebied	prooi	predator
$x > 25, y > 20$	daalt	groeit
$x < 25, y > 20$	daalt	daalt
$x < 25, y < 20$	groeit	daalt



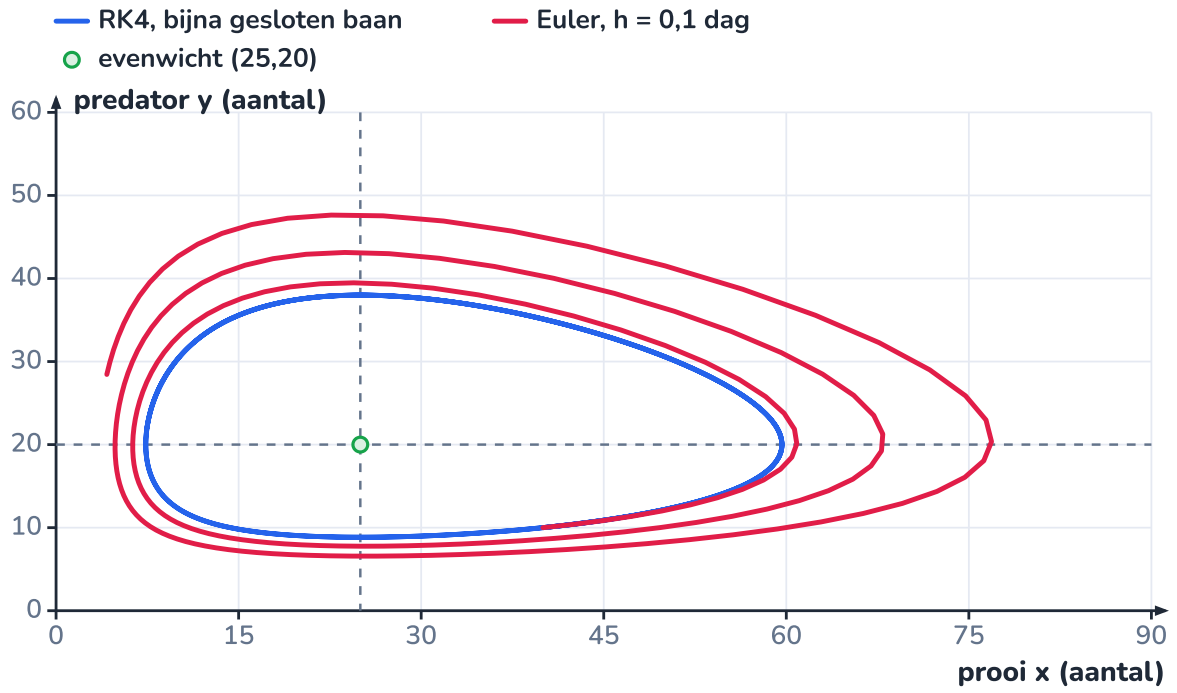
De horizontale nulclijn $y = 20$ maakt de prooigroei nul, de verticale nulclijn $x = 25$ de predatortoename. De exacte behoudsgrootheid D blijft constant; expliciete Euler laat haar langzaam groeien.

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.11

Waarom het basismodel neutraal stabiel is

11/22

Een evenwicht is een constante oplossing; zijn stabiliteit beschrijft de reactie op een kleine verandering.



De horizontale nulclijn y = 20 maakt de prooigroei nul, de verticale nulclijn x = 25 de predatortoename. De exacte behoudsgrootheid D blijft constant; expliciete Euler laat haar langzaam groeien.

GEGEVEN

- $x^* = d/(\eta a)$ en $y^* = r/a$.

GEVRAAGD

- De eigenwaarden en een niet-lineaire controle.

OPLOSSING

1 De Jacobiaan op het evenwicht is $J = \begin{bmatrix} 0 & -ax^* \\ \eta a y^* & 0 \end{bmatrix}$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + rd = 0$.

2 Dus $\lambda = \pm i\sqrt{rd} = \pm 0{,}424264\,i$ per dag. De lineaire kleine periode is $2\pi/\sqrt{rd} = 14{,}809610$ dagen. Zuiver imaginaire eigenwaarden alleen bewijzen in een algemeen niet-lineair stelsel nog geen centrum.

3 Hier bestaat bovendien $D = \eta a[x - x^* - x^* \ln(x/x^*)] + a[y - y^* - y^* \ln(y/y^*)]$. Omdat $\dot{D} = \eta a(1 - x^*/x)\dot{x} + a(1 - y^*/y)\dot{y} = 0$ vallen alle kruistermen weg.

4 Voor positieve x, y is $D \geq 0$, met gelijkheid alleen op het evenwicht. Haar gesloten contouren geven een centrum: nabijgelegen toestanden blijven nabij, maar keren niet asymptotisch naar hetzelfde evenwicht terug.

ANTWOORD

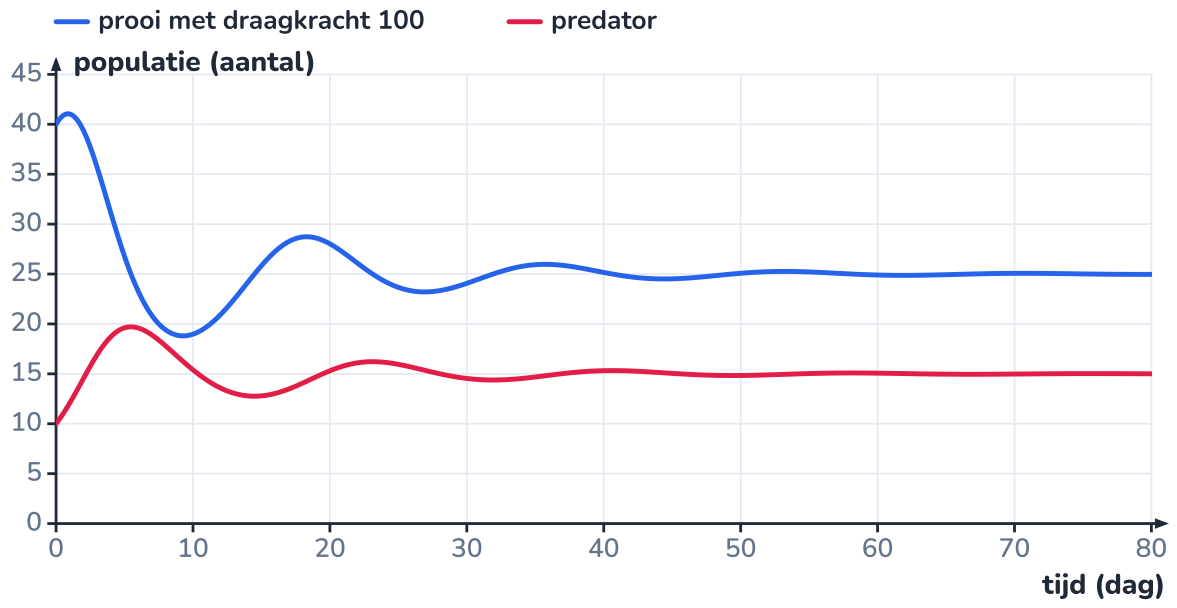
Neutrale stabiliteit is geen betrouwbare herstelreserve. Een verstoring verplaatst het systeem naar een andere contour.

Klopt dit? In de echte uitvoer blijft de RK4-invariant binnen $1{,}5 \cdot 10^{-14}$; dat controleert de berekening, niet de biologische aannamen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.12

Zelfbegrenzing maakt het model anders

Vervang alleen de prooigroei door $rx(1 - x/K_x)$ met $K_x = 100$.



De aangepaste prooivergelijking heeft bij deze parameters een asymptotisch stabiel evenwicht (25,15). De basis-Lotka-Volterra-variant heeft (25,20); deze modellen mogen niet dezelfde evenwichtslijn krijgen.

GEGEVEN

- $\dot{y}$ blijft gelijk.

GEVRAAGD

- Het positieve evenwicht en zijn lokale demping.

OPLOSSING

1 $x^* = 25$ blijft staan; $y^* = (r/a)(1 - x^*/K_x) = 15$. Dit is positief alleen als $K_x > 25$.

2 $J = \begin{bmatrix} -0{,}15 & -0{,}75 \\ 0{,}18 & 0 \end{bmatrix}$. Spoor −0,15 per dag en determinant 0,135 per dag² geven $\lambda = -0{,}075 \pm 0{,}359687i$ per dag.

3 De reële delen zijn negatief: kleine verstoringen worden gedempt. De envelop heeft tijdschaal $1/0{,}075 = 13{,}33$ dagen; het model kan weken nodig hebben om na een verstoring terug te keren.

ANTWOORD

Draagkracht toevoegen verandert de aard van stabiliteit én het evenwicht. Bij $K_x \leq 25$ is een positieve predatorpopulatie niet vol te houden in dit model.

Klopt dit? Op dag 80 geeft RK4 $(24{,}964815; 15{,}003143)$, dicht bij $(25, 15)$.

UITLEG · 32.13

Een numerieke spiraal is geen ecologische instabiliteit

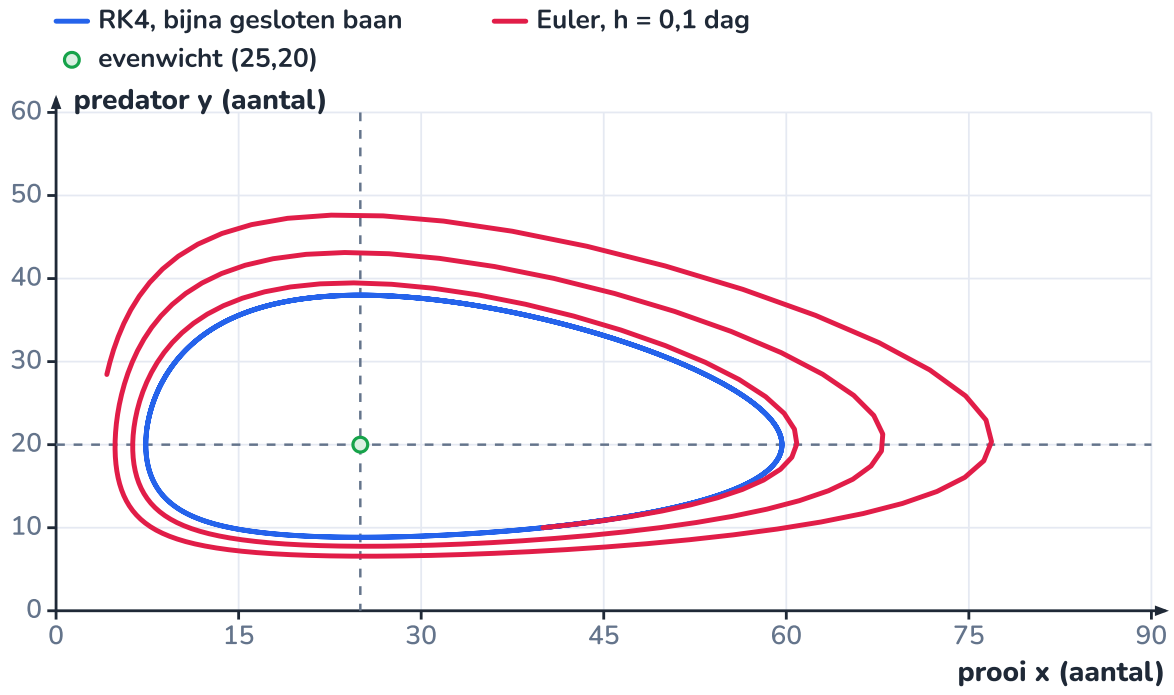
Voor een eigenmode met $\dot{z} = \lambda z$ gebruikt Euler $z_{n+1} = (1 + h\lambda) z_n$. Bij de zuiver imaginaire $\lambda = i\omega$ van het basismodel is $|1 + ih\omega| = \sqrt{1 + h^2\omega^2} > 1$ voor elke positieve stap. Ook een kleine Eulerstap voegt dus geleidelijk amplitude toe.

Voor een gedempte eigenwaarde is de voorwaarde $|1 + h\lambda| < 1$. Kwadrateren levert $1 + 2h\,\mathrm{Re}\,\lambda + h^2|\lambda|^2 < 1$, dus $h < -2\,\mathrm{Re}\,\lambda / |\lambda|^2$. Bij de variant met draagkracht is die grens $1{,}111111$ dagen. Een stap daaronder kan nog onnauwkeurig zijn.

LOKALE EULERSTABILITEIT

$$|1 + h\lambda| < 1$$

Controleer eindfout, baan, positiviteit en invariant. Verklaar een grotere cyclus pas biologisch wanneer zij bij verfijning en een andere integrator blijft bestaan.



De horizontale nulclijn y = 20 maakt de prooigroei nul, de verticale nulclijn x = 25 de predatortoename. De exacte behoudsgrootheid D blijft constant; expliciete Euler laat haar langzaam groeien.

UITLEG · 32.14

Gesloten betekent dat de boekhouding sluit

Lotka–Volterra conserveert geen compleet koolstof-, stikstof- of zuurstofbudget. Een ecologisch voedselweb moet worden gekoppeld aan niet-levende pools: minerale voedingsstof, biomassa, detritus, gas, opgeloste stof en materiaaloppervlakken. Materie kan intern verplaatsen terwijl luchtkwaliteit achteruitgaat.

Gebruik voor een lesmodel stikstofmassa's A in algen, D in detritus en R in mineralen. Opname $U = \mu L R/(K_R + R)\,A$, sterfte mA en mineralisatie kD geven $\dot{A} = U - mA$, $\dot{D} = mA - kD$, $\dot{R} = kD - U$.

Optellen geeft exact $\mathrm{d}(A + D + R)/\mathrm{d}t = 0$.

Een oogst die buiten de gekozen grens gaat is een uitstroom. Tel haar in een exportpool H met $\dot{H} = EA$ en zet $-EA$ in $\dot{A}$. Dan blijft alleen het uitgebreide totaal $A + D + R + H$ behouden. Een geoogste maaltijd die later retour komt vraagt nieuwe vertragingen en omzettingspools.



De gewone simulatie houdt A + D + R = 12 g N constant. In het oogstscenario gaat E A naar een apart bijgehouden exportpool H: A + D + R daalt, maar A + D + R + H blijft constant. Licht levert energie en staat buiten deze stikstofboekhouding.

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.15

Een materiaalbalans heeft een familie van evenwichten

15/22

Het fictieve poolmodel heeft totaal $M = 12$ g N en constant licht $L = 1$.



De gewone simulatie houdt A + D + R = 12 g N constant. In het oogstscenario gaat E A naar een apart bijgehouden exportpool H: A + D + R daalt, maar A + D + R + H blijft constant. Licht levert energie en staat buiten deze stikstofboekhouding.

GEGEVEN

- $\mu = 0{,}80$, $m = 0{,}10$, $k = 0{,}20$ per dag; $K_R = 1$ g N.

GEVRAAGD

- Een positief evenwicht binnen deze vaste totaalvoorraad.

OPLOSSING

1. Voor $A^* > 0$ is $\mu R^*/(K_R + R^*) = m$. Daarom $R^* = mK_R/(\mu - m) = 1/7 = 0{,}142857$ g N.

2. Uit $mA^* = kD^*$ volgt $D^* = 0{,}5A^*$. De som geeft $A^* = (12 - R^*)/1{,}5 = 7{,}904762$ g N en $D^* = 3{,}952381$ g N.

3. Elimineer $D = M - A - R$. Op het evenwicht is de tweedimensionale Jacobiaan $\begin{bmatrix} 0 & 4{,}841667 \\ -0{,}30 & -5{,}041667 \end{bmatrix}$ per dag. De eigenwaarden zijn −0,306765 en −4,734902 per dag: lokaal stabiel binnen dit voorraadvlak.

4. In het volledige driedimensionale stelsel hoort ook een nulrichting bij het veranderen van M. Dat is een ander voorraadvlak; materiaalbehoud dwingt geen terugkeer naar een oorspronkelijk totaal na export.

ANTWOORD

Een gesloten massabalans en een stabiel evenwicht zijn verschillende eigenschappen. Dit voorbeeld heeft beide onder zijn eigen constante aannamen.

Klopt dit? $\mu > m$ en $M > R^*$ zijn vereist voor dit positieve evenwicht; één formule garandeert het niet bij minder licht.

CODE · 32.16

Drie pools, duisternis en geboekte oogst

16/22

De code heeft uitsluitend eigen fictieve g-N-parameters. Licht van dag 10 tot 13 uitzetten en oogsten van dag 10 tot 20 zijn afzonderlijke scenario's. De schakeltijden vallen op stapranden; een RK4-stap gebruikt één geldige instelling over het hele tijdvak. De export wordt als toestand bewaard en telt mee in de onafhankelijke balans.

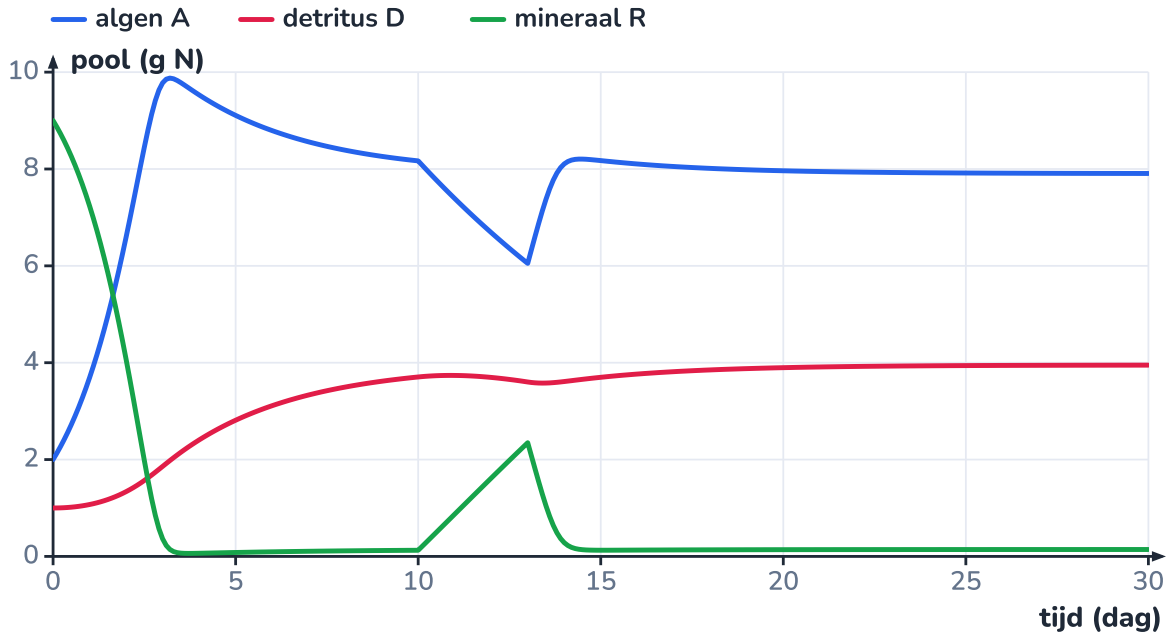
Python **gesloten_stikstof.py** 43 regels

```python
import math
import numpy as np

# g stikstof in drie fictieve pools; geen reactorontwerp of zuurstofgarantie.
mu=.80; kr=1.; m=.10; k=.20; begin=np.array([2.,1.,9.,0.])
def flux(z,licht=1.,E=0.):
    A,D,R,H=z
    U=mu*licht*R/(kr+R)*A
    sterfte=m*A; retour=k*D; oogst=E*A
    return np.array([U-sterfte-oogst,sterfte-retour,retour-U,oogst])
def sim(h=.0025,eind=60.,scenario="licht"):
    n=round(eind/h)
    if not math.isclose(n*h,eind): raise ValueError("niet gehele stapreeks")
    # Alle scenario-overgangen vallen op een staprand.
    if any(not math.isclose(round(v/h)*h,v) for v in [10.,13.,20.]):
        raise ValueError("overgang niet op staprand")
    z=begin.copy(); zs=[z.copy()]
    for j in range(n):
        t=j*h
        licht=0. if scenario=="donker" and 10<=t<13 else 1.
        E=.20 if scenario=="oogst" and 10<=t<20 else 0.
        # Instellingen blijven constant over deze stap; ook bij RK4-eindpunt.
        k1=flux(z,licht,E); k2=flux(z+h*k1/2,licht,E)
        k3=flux(z+h*k2/2,licht,E); k4=flux(z+h*k3,licht,E)
        z=z+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        if min(z)<-1e-10 or not np.all(np.isfinite(z)):
            raise ValueError("niet-fysische pool; geen stilzwijgend afkappen")
        zs.append(z.copy())
```

```
    return np.arange(n+1)*h,np.array(zs)
Rstar=m*kr/(mu-m); Astar=(sum(begin)-Rstar)/(1+m/k); Dstar=m*Astar/k
b=Astar*mu*kr/(kr+Rstar)**2
J=np.array([[0,b],[-k-m,-k-b]])
print("evenwicht A,D,R (g N)",Astar,Dstar,Rstar)
print("gereduceerde eigenwaarden per dag",np.linalg.eigvals(J))
scenarios={}
for s in ["licht","donker","oogst"]:
    t,z=sim(scenario=s); scenarios[s]=(t,z)
    drift=np.max(np.abs(z.sum(axis=1)-sum(begin)))
    print(s,"dag60 A,D,R,H",np.round(z[-1],6),"balansfout",f"{drift:.2e}")
z=scenarios["donker"][1]; i10=round(10/.0025); i13=round(13/.0025)
print("A13/A10 donker",z[i13,0]/z[i10,0],"exact",math.exp(-m*3))
assert all(np.max(np.abs(z.sum(axis=1)-12))<1e-10 for t,z in scenarios.values())
assert abs(z[i13,0]/z[i10,0]-math.exp(-.3))<1e-10
```

```
evenwicht A,D,R (g N) 7.904761904761905 3.9523809523809526 0.14285714285714285
gereduceerde eigenwaarden per dag [-0.30676452 -4.73490214]
licht dag60 A,D,R,H [7.904762 3.952381 0.142857 0.      ] balansfout 9.59e-14
donker dag60 A,D,R,H [7.904762 3.952381 0.142857 0.      ] balansfout 5.33e-14
oogst dag60 A,D,R,H [2.626795 1.313399 0.142857 7.916949] balansfout 4.97e-14
A13/A10 donker 0.7408182206817171 exact 0.7408182206817179
```



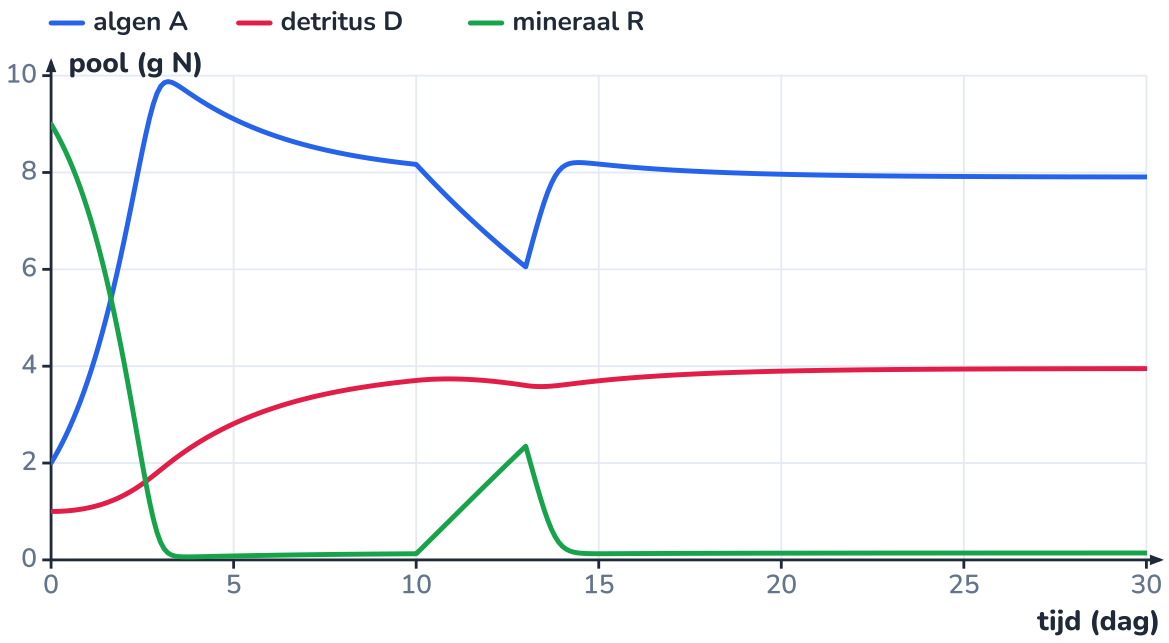
De eigen scenarioverstoring ligt van dag 10 tot dag 13. Lichtverlies vermindert opname; mineralisatie gaat door. Dit model bevat geen luchtzuurstof, bewoners, pathogenen of bewezen reactorcapaciteit.

UITGEWERKT VOORBEELD · 32.17

Herstel en voorraadverlies zijn niet hetzelfde

17/22

Vergelijk de drie poolscenario's uit de code.



De eigen scenarioverstoring ligt van dag 10 tot dag 13. Lichtverlies vermindert opname; mineralisatie gaat door. Dit model bevat geen luchtzuurstof, bewoners, pathogenen of bewezen reactorcapaciteit.

GEGEVEN

- Begin A = 2, D = 1, R = 9 g N; H = 0.

GEVRAAGD

- De verstoring en het eindresultaat.

OPLOSSING

1 Tijdens drie dagen duisternis is $U = 0$: $\dot{A} = -mA$, dus $A(13)/A(10) = \mathrm{e}^{-0{,}3} = 0{,}740818$. De onafhankelijke exacte verhouding stemt met RK4 overeen.

2 Na herstel van licht keert het gesloten scenario tegen dag 60 terug naar 7,904762 / 3,952381 / 0,142857 g N. Voorraad werd tijdens de duisternis verplaatst, niet vernietigd.

3 Na de afzonderlijke oogstproef is 7,916949 g N in H geëxporteerd. De resterende A / D / R zijn 2,626795 / 1,313399 / 0,142857 g N. Terug naar de oorspronkelijke algenmassa kan dit systeem zonder terugvoer niet.

ANTWOORD

Beoordeel weerstand tijdens de storing, hersteltijd daarna en resterende voorraad afzonderlijk. Een lage massabalansfout toont alleen dat alle boekhoudtermen zijn meegenomen.

Klopt dit? De modelbalansfout is kleiner dan 10^{-12} g N. Dat getal is rekentechnische precisie, geen echte weegnauwkeurigheid.

UITLEG · 32.18

De atmosfeer vraagt haar eigen gekoppelde balans

18/22

Fotosynthese, ademhaling en materiaalreacties kunnen gasvoorraden in tegengestelde richting verplaatsen. Als eenvoudige stoichiometrische illustratie kan je $\mathrm{CH_2O + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O}$ gebruiken voor respiratie. Carbonatatie $\mathrm{Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O}$ neemt vervolgens $\mathrm{CO_2}$ uit de lucht. Beton hoeft daarvoor niet rechtstreeks $\mathrm{O_2}$ te verbruiken.

Daarom is een lage of constante CO_2-concentratie geen bewijs dat de O_2-balans klopt. Een volledig model houdt hoeveelheden in mol bij, druk en temperatuur voor de omzetting naar gasfractie, en afzonderlijke termen voor bewoners, planten, bodem, licht, lekkage en materiaal.

Habitat heeft twee bewoners. De i14-rekenwaarde 0,84 kg O_2 per bewoner per dag betekent samen 1,68 kg/dag, terwijl de huidige teelt slechts een kleine bijdrage levert. De woonmodule is geventileerd volgens e14; deze ecologische oefening verklaart haar niet tot een luchtdicht bemand systeem.

voorraad	metingen	verborgen koppeling
lucht-O_2	gasfractie plus druk	microbiële en menselijke respiratie
lucht-CO_2	gasfractie plus ventilatie	opname in planten, water, bouwmateriaal
koolstof in materiaal	inventaris en verandering	niet zichtbaar in één luchtsensor
stikstof in water/biomassa	massa en concentratie	export via oogst en afval

VERHAAL · 32.19

Biosphere 2: een ontbrekende koppeling werd zichtbaar

19/22

Severinghaus en collega's rapporteerden in 1994 dat de zuurstoffractie in Biosphere 2 in de eerste zestien maanden van ongeveer 21 % naar 14 % daalde. Hun onderzoek koppelde dit aan microbiële respiratie van organische bodemstof. De geproduceerde CO_2 werd mede door beton opgenomen. Zo verborg de CO_2-balans een deel van het zuurstofverlies.

Dempster beschreef later een atmosferische uitwisseling van minder dan 10 % per jaar. Een lage lekgraad maakte langzame interne onevenwichten meetbaar; sterk afgesloten betekent dus nog steeds niet perfect lekvrij.

De les voor Habitat is concreet: voeg verborgen voorraden en langzame processen toe, controleer verschillende stoffen en onderscheid biologische kringlopen van ventilatie en externe energie. Deze specifieke proef bewijst geen algemene onmogelijkheid van gesloten ecosystemen en bewijst evenmin dat het station autonoom kan worden.

Primaire bronnen, geraadpleegd 30-09-2026: Oxygen loss in Biosphere 2 en Tightly closed ecological systems reveal atmospheric subtleties.

ÉÉN SENSOR SLUIT GEEN ECOSYSTEEM

$$\text{stabiele } CO_2 \not\Rightarrow \text{stabiele } O_2$$

PROEF · 32.20

Een modelproef vóór een echte kweekproef

20/22

ONDERZOEKSVRAAG

Een gescheiden verificatieproef controleert eerst de rekenmethode en vervolgens de biologische aannamen.

MATERIAAL

De drie downloadbare Pythonprogramma's op de codebladen. | Een register met toestanden, eenheden, systeemgrens en scenario's.



De gewone simulatie houdt A + D + R = 12 g N constant. In het oogstscenario gaat E A naar een apart bijgehouden exportpool H: A + D + R daalt, maar A + D + R + H blijft constant. Licht levert energie en staat buiten deze stikstofboekhouding.

WERKWIJZE

1. Controleer de logistische oplossing met beginwaarde, evenwicht en exact grensmoment.
2. Vergelijk Euler en RK4 met halve stappen en dezelfde eindtijd; vergelijk de invariant voor Lotka–Volterra.
3. Controleer de poolsom bij elke tijdstap, inclusief export. Herhaal met lichtverlies en gewijzigd μ, m of k.
4. Bereid pas daarna een echte meetopzet voor: afzonderlijke monstername voor biomassa/voeding, lichtlog en gesloten massabalans. Gebruik goedgekeurde organismen en het geldende laboratoriumprotocol.

WAARNEMING

De drie eigen controles toetsen verschillende fouten: oplossing, numerieke integratie en ontbrekende boekhouding.

VERKLARING

Een perfecte fit van algenaantal bewijst geen juiste gas- of materiaalbalans. Kalibreer parameters in één proef en valideer op een andere verstoring.

NASLAG · 32.21

Naslag: evenwicht, eigenwaarde, voorraad

21/22

logistische groei

$$\dot{N} = rN(1 - N/K)$$

expliciete Euler, alle componenten tegelijk

$$z_{n+1} = z_n + hf(z_n)$$

basis-prooi–predator

$$\dot{x} = rx - axy, \quad \dot{y} = \eta axy - dy$$

geboekte stikstofgrens

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A + D + R + H) = 0$$

begrip	toets
evenwicht	$f(z^*) = 0$
lokale asymptotische stabiliteit	alle relevante eigenwaarden met negatief reëel deel
neutraal centrum	hier een exact behoud van D; geen demping
numerieke stabiliteit	methodefactor en stapgrootte
veerkracht	verstoring, functieverlies, herstel en voorraad binnen benoemd scenario

primaire bron	wat zij ondersteunt	grens
Lotka, PNAS 6, 410–415 (1920)	Wiskundige periodieke relaties in biologische systemen.	Onze parameters zijn geen schatting uit dit artikel.
Volterra, Nature 118, 558–560 (1926)	Wiskundige interactie van twee populaties.	Twee ideale soorten vervangen geen volledig voedselweb.
Severinghaus et al., Oxygen loss in Biosphere 2 (1994)	Zuurstofverlies, bodemrespiratie en CO_2-opname door beton.	Een specifiek systeem, geen bewijs tegen alle gesloten ecosystemen.
Dempster, Advances in Space Research 42 (2008)	Lage atmosferische uitwisseling maakt trage interne onevenwichten zichtbaar.	Sterk afgesloten betekent niet perfect lekvrij.

HET GEHEEL · 32.22

Het ecosysteem als toetsbaar deel van de digitale tweeling

22/22

Ecologische vergelijkingen voegen levende en niet-levende voorraden toe aan de dynamische modellen van het station. Hetzelfde onderscheid tussen model, sensor en werkelijkheid blijft gelden. Een stabiele simulatie, een gesloten som en een mooi groen vat zijn drie verschillende soorten informatie.

I5 Groei en verval: exponentiële modellen
de eerste groei en de reservoirproef

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
de logistische vergelijking en Euler

E31 Bioprocestechniek
reactorbalansen en werkelijk te identificeren groei

E38 Dynamische systemen modelleren
Jacobiaan, eigenwaarden en gekoppelde toestanden

E14 Gassen en de gaswetten
ventilatie en atmosferische systeemgrens

E49 Integratieproject: het brein van het station
modellen koppelen zonder onbewezen sluiting te claimen

Habitat
De bestaande teelt, twee bewoners en ventilatie blijven gelden. Prooi–predator en stikstofpools zijn didactische scenario's; er worden geen nieuwe soorten, reactorcapaciteit of autonome zuurstofproductie gekozen.

SAMENVATTING

In het kort

- Draagkracht is een parameter onder vaste omstandigheden; nominale maximale oogst kan herstelmarge wegnemen.

- Basis-Lotka–Volterra heeft een neutraal centrum; expliciete Euler kan kunstmatige amplitudegroei toevoegen.
- Nulclijnen, Jacobiaan en een invariant geven verschillende onafhankelijke controles.
- Gesloten massa betekent niet automatisch stabiele lucht of biologische functie; export en materiaalreacties moeten worden geboekt.
- Biosphere 2 leert verborgen processen en meerdere stoffen te meten, geen algemene autonomie te veronderstellen.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

draagkracht
Positief evenwicht van een groeimodel onder benoemde omgevingsvoorwaarden.

nulclijn
Verzameling toestanden waarop één component van de afgeleide nul is.

neutrale stabiliteit
Nabijgelegen toestanden blijven nabij zonder asymptotische terugkeer naar het evenwicht.

materiaalpool
Afzonderlijk bijgehouden hoeveelheid van een stof in een reservoir.

veerkracht
Herstel van een benoemde functie na een benoemde verstoring, binnen gegeven grenzen.

E EXPERT · DEEL E6 · LIFE SCIENCES EN BIO-ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 33

Het lichaam als regelsysteem

Homeostase begrijpen en meetketens beoordelen zonder een lesmodel voor een mens aan te zien

Je lichaam regelt glucose, warmte en andere toestanden met gekoppelde, vertraagde terugkoppelingen. Je bouwt eigen didactische modellen en vergelijkt ECG, optische puls en zuurstofsaturatie als verschillende meetketens. Prothesen, implantaten en de Habitat-monitor maken duidelijk waarom signaalkwaliteit, functie en bewijs afzonderlijk moeten worden beoordeeld.

13× uitleg · 10× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 4× code · ± 18 lestijden

B Leven en systemen · R Regelen en robotica · L Elektriciteit en elektronica



Een demonstratie maakt meetketens zichtbaar; medische betrouwbaarheid vraagt ander bewijs dan een mooie simulatie.

Na dit hoofdstuk

- Je kan negatieve terugkoppeling in homeostase verklaren.
- Je kan een glucose–insuline-lesmodel afleiden en numeriek tegen een exacte oplossing controleren.
- Je kan warmteopslag, warmteverlies en begrensde temperatuurcompensatie modelleren.
- Je kan ECG, PPG en SpO_2 onderscheiden en synthetische artefacten analyseren.
- Je kan prothesen en actieve implantaten als mens–machine-meet- en regellussen beschrijven.
- Je kan een gezondheidsmonitor begrenzen met kwaliteit, privacy en passende validatie.

UITLEG · 33.1

Homeostase is een actief evenwicht

1/31

In i14 zag je het lichaam als een balans van voedsel, gas, water en warmte. Homeostase voegt regeling toe: receptoren, neurale en hormonale verwerking, effectors en vertragingen reageren op verandering.

Een constant getal betekent niet dat alle stromen nul zijn.

Een referentie is geen universeel exact punt. Zij kan met persoon, tijd, activiteit en context veranderen. Ook het gemeten compartiment telt: huidtemperatuur, kerntemperatuur en luchttemperatuur zijn verschillende toestanden.

geregelde toestand	verstoring	mogelijke tegenwerking
glucose	opname en verbruik veranderen	hormonen, lever en weefsels
warmte-inhoud	omgeving en spieractiviteit	warmteproductie, doorbloeding en verdamping
water-/zoutbalans	inname en verlies	hormonale en nierprocessen

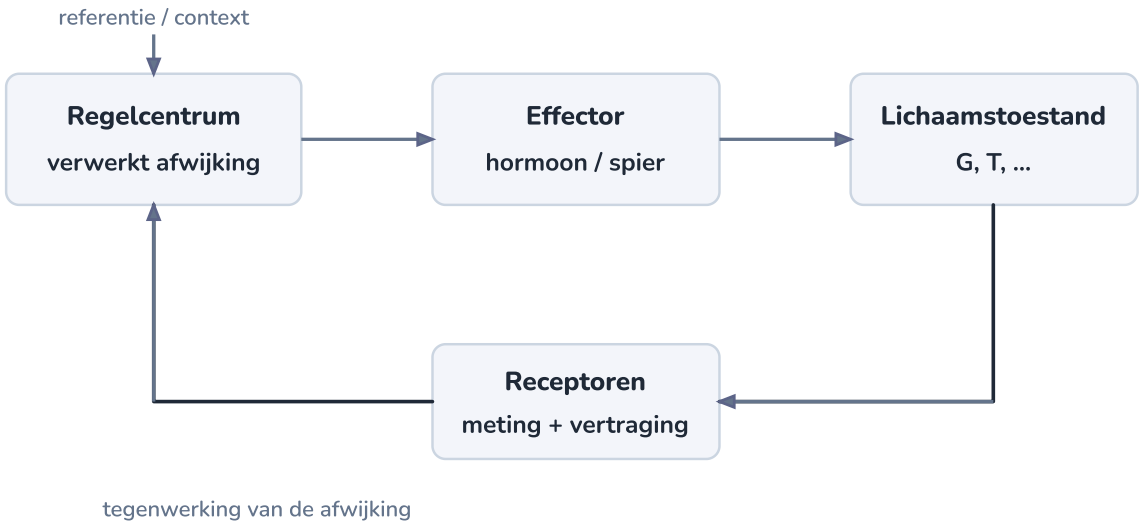
UITLEG · 33.2

Het teken van de hele terugkoppeling

2/31

Negatieve terugkoppeling werkt een verandering tegen. Een stijging van glucose bevordert een insuline-effect; dat werkt de stijging van glucose tegen. Twee positieve pijlen met één negatieve werking geven samen een negatieve lus. Een losse pijl 'hormoon stijgt' bepaalt dat teken niet.

Een vertraagde lus kan overshoot en oscillaties geven. Genoeg negatieve terugkoppeling is daarom geen automatisch bewijs van stabiliteit, zeker bij begrensde effectors, sensorvertraging of veranderende biologische gevoeligheid. De stationregelaar uit e39 helpt de wiskunde begrijpen; hij maakt de mens niet tot één identiek verwarmingsvat.



Negatief gaat over het teken van de volledige lus. Bij stijgende glucose neemt het insuline-effect toe en werkt de glucoseverandering tegen. Bij warmte regelen neurale en hormonale processen meerdere verschillende effectoren.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.3

Een gemiddelde energiestroom is geen opslag

3/31

De i14-rekenwaarde voor voeding van één bewoner is ongeveer 10 MJ per dag.

GEGEVEN

- Eén dag duurt 86 400 s.

GEVRAAGD

- Het gemiddelde vermogen en het verschil met lichaamsopslag.

OPLOSSING

1. $P = E/t = 10 \cdot 10^6/86400 = 115{,}740741\ \mathrm{W}$. Dat verklaart de orde van grootte van de dossierwaarde circa 116 W warmte.
2. Voeding wordt niet op ieder moment volledig als constante warmte afgegeven. Er zijn chemische voorraden, activiteit, mechanisch werk en verliesstromen. De gemiddelde omrekening bepaalt geen lichaamstemperatuur.

ANTWOORD

Homeostase regelt toestanden terwijl aanhoudende stof- en energiestromen door het lichaam gaan.

Klopt dit? Voor twee bewoners is het nominale dagbudget 20 MJ, maar een lichaamssimulatie krijgt niet automatisch alle thermische parameters uit die ene waarde.

UITLEG · 33.4

Glucose en insuline: gekoppelde fysiologische rollen

4/31

Glucose komt uit voeding en uit interne productie en voorraden. De pancreas maakt insuline; dit hormoon helpt cellen glucose gebruiken en beïnvloedt opslag en leverproductie. Glucagon vormt een tegenwerkende hormonale route die glucose kan verhogen. Het echte systeem bevat bovendien meerdere organen, hormonen en tijdschalen.

Een glucoseconcentratie in mmol/L is niet hetzelfde als de totale glucosemassa. Een concentratiestap van 3 mmol/L in een rekenmodel specificeert zonder compartimentvolume en opnamekinetiek geen maaltijd of toegediende hoeveelheid.

Hier behandelen we uitsluitend mechanisme en wiskunde. De code heeft geen insulinedosiseenheid en geen ingang voor behandeling. Zie de primaire institutionele uitleg van NIDDK en zijn overzicht van hormonale terugkoppeling.

EEN MODEL BEGINT BIJ STROMEN

$$\text{netto glucoseverandering} = \text{aanvoer} - \text{opname} - \text{opslag}$$

UITLEG · 33.5

Een eigen klein-signaalmodel met twee toestanden

5/31

Definieer $g = G - G_b$ in mmol/L met een *gekozen* basis $G_b = 5$ mmol/L. De toestand i is een relatief insuline-effect rond zijn basis, met een zelfgekozen dimensieloze schaal. Zij is geen gemeten insulineconcentratie en geen dosis.

EIGEN LINEAIR LESMODEL, TIJD IN MINUTEN

$$\dot{g} = -ag - bi + w, \qquad \dot{i} = cg - di$$

De positieve term cg versterkt de reactie na een glucosestijging; $-bi$ verlaagt g. Basisherstel kost ag; het effect dooft met di. Neem a = 0,020 en d = 0,080 per min, b = 0,050 mmol/(L·min) per relatieve eenheid en c = 0,040 relatieve eenheid·L/(mmol·min).

Voor $w = 0$ is $J = \begin{bmatrix} -a & -b \\ c & -d \end{bmatrix}$. Spoor −(a+d) en determinant ad+bc zijn hier gunstig: beide eigenwaarden hebben negatief reëel deel. Negatieve g of i betekent in deze linearisatie een afwijking beneden de basis, niet negatieve absolute glucose of insuline.

aanneming	grens
kleine afwijkingen rond basis	geen patiëntmodel voor grote verstoringen
twee lineaire toestanden	glucagon en compartimenten niet apart
w in mmol/(L·min)	geen grammen maaltijd of dosis zonder aanvullend model
vaste parameters	geen diagnose uit een gewijzigd getal

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.6

Een vertraagd effect geeft gedempte overshoot

6/31

Begin met g = 3 mmol/L en i = 0; zet w = 0.

GEGEVEN

- De vier lesparameters.

GEVRAAGD

- Eigenwaarden en een exacte onafhankelijke oplossing.

OPLOSSING

1. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad+bc) = 0$. Zij geeft $\lambda = -0{,}050 \pm 0{,}033166i$ per min.
2. Elimineer i: $\ddot{g} + (a+d)\dot{g} + (ad+bc)g = 0$. Met $g(0) = 3$ en $\dot{g}(0) = -3a = -0{,}06$ volgt $g = 3\mathrm{e}^{-0{,}05t}[\cos(\omega t) + (0{,}03/\omega)\sin(\omega t)]$, $\omega = \sqrt{0{,}0011}$ per min.
3. Uit de tweede toestand volgt $i = (0{,}12/\omega)\mathrm{e}^{-0{,}05t}\sin(\omega t)$. Op minuut 20 zijn g = 1,484291 mmol/L en i = 0,819573 relatieve eenheid. Dus G = 6,484291 mmol/L in dit model.

ANTWOORD

De trage reactie maakt een kleine ondershoot mogelijk. Zij toont wiskundige dynamiek, geen grens tussen gezond en ziek.

Klopt dit? Op minuut 120 zijn g = −0,009974 en i = −0,006668: kleine afwijkingen rond de basis. Een fysiologisch model buiten dit lokale gebied moet andere termen bevatten.

CODE · 33.7

Exact en RK4 vergelijken zonder een dosis te berekenen

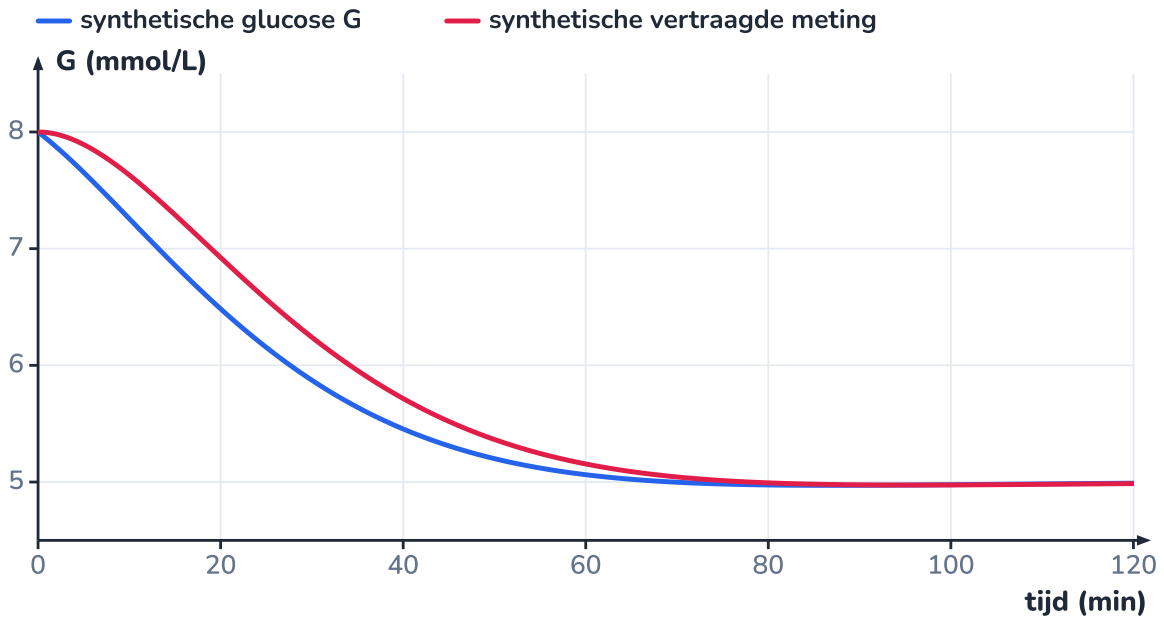
De analytische g/i-oplossing controleert het numerieke programma. Een derde toestand simuleert een *zelfgekozen* meetvertraging van 6 min. Het programma voert geen behandeling, regelactie of lichaamsdiagnose uit. De maximumfout vergelijkt g en i numeriek in hun eigen schalen.

Python **glucose_lesmodel.py** 36 regels

```python
import math
import numpy as np

# Eigen klein-signaalmodel; i is een relatief effect, geen insulinedosis.
a=.020; b=.050; c=.040; d=.080; Gbasis=5.
M=np.array([[-a,-b],[c,-d]]) # minuten als tijdeenheid
omega=math.sqrt(b*c-(d-a)**2/4)
def exact(t):
    g=3*math.exp(-(a+d)*t/2)*(math.cos(omega*t)+(d-a)/(2*omega)*math.sin(omega*t))
    i=3*c/omega*math.exp(-(a+d)*t/2)*math.sin(omega*t)
    return np.array([g,i])
def sim(h=.25,eind=120.,tau=6.,invoer=0.,c_model=c):
    n=round(eind/h)
    if not math.isclose(n*h,eind): raise ValueError("niet gehele stapreeks")
    # g (mmol/L), i (relatieve eenheid), gemeten g (mmol/L).
    z=np.array([3.,0.,3.]); zs=[z.copy()]
    def f(z):
        g,i,gm=z
        return np.array([-a*g-b*i+invoer,c_model*g-d*i,(g-gm)/tau])
    for _ in range(n):
        k1=f(z);k2=f(z+h*k1/2);k3=f(z+h*k2/2);k4=f(z+h*k3)
        z=z+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;zs.append(z.copy())
    return np.arange(n+1)*h,np.array(zs)
t,z=sim(); tabel=[]
for h in [2.,1.,.5,.25]:
    ts,zs=sim(h); err=float(np.max(np.abs(zs[:,:2]-np.array([exact(tt) for tt in ts]))))
    tabel.append((h,err));print("RK4 h,maxfout g/i",h,f"{err:.3e}")
print("eigenwaarden per min",np.linalg.eigvals(M))
for tt in [20.,60.,120.]: print("exact t,g,i",tt,np.round(exact(tt),6))
print("sensor op20 min",z[round(20/.25),2],"werkelijk model-g",exact(20)[0])
const=.06; gs=const/(a+b*c/d); is_=c/d*gs
print("constante invoer g*,i*",gs,is_)
laag=sim(c_model=.010)
print("kleinere c, G op60",Gbasis+laag[1][round(60/.25),0])
assert max(q[1] for q in tabel[2:])<1e-5
assert np.all(Gbasis+z[:,0]>0)
```

```
RK4 h,maxfout g/i 2.0 3.342e-06
RK4 h,maxfout g/i 1.0 2.002e-07
RK4 h,maxfout g/i 0.5 1.224e-08
RK4 h,maxfout g/i 0.25 7.564e-10
eigenwaarden per min [-0.05+0.03316625j -0.05-0.03316625j]
exact t,g,i 20.0 [1.484291 0.819573]
exact t,g,i 60.0 [0.062614 0.164541]
exact t,g,i 120.0 [-0.009974 -0.006668]
sensor op20 min 1.9235854229976608 werkelijk model-g 1.4842911290202487
constante invoer g*,i* 1.3333333333333333 0.6666666666666666
kleinere c, G op60 5.608624148207735
```



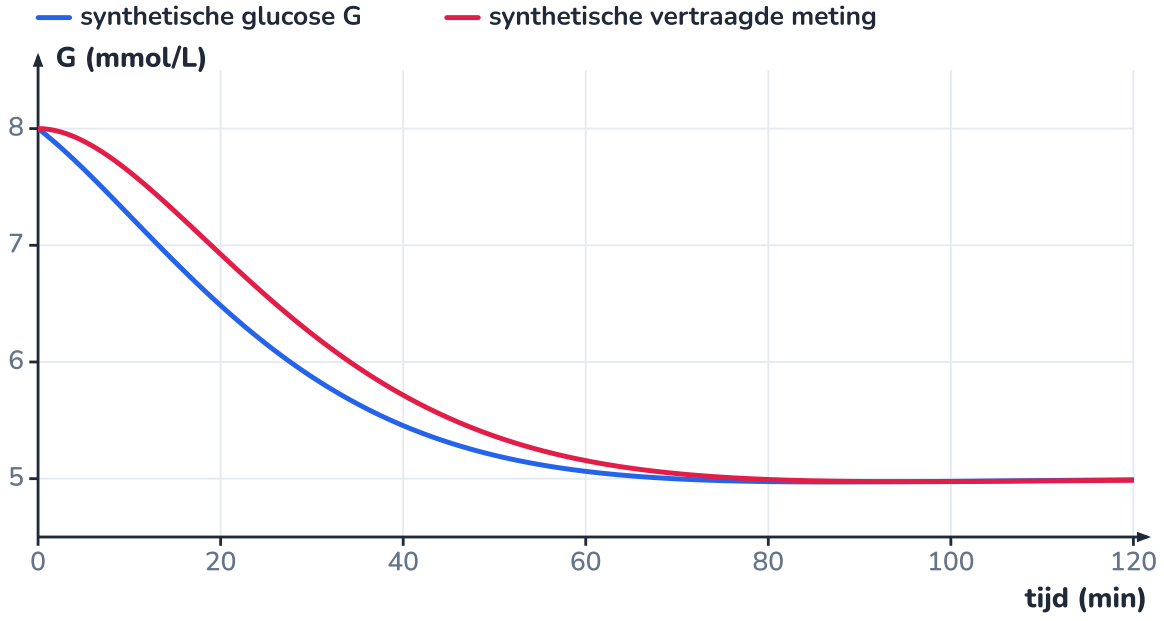
De basiswaarde 5 mmol/L, beginverstoring +3 mmol/L en sensorvertraging 6 min zijn lesparameters. Er is geen echte maaltijd, persoon, dosis of klinische grens mee gekalibreerd. Een kleine ondershoot hoort bij dit beperkte lineaire model.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.8

Een sensor kan een andere fase van het proces tonen

8/31

De synthetische meting volgt $\dot{g}_m = (g - g_m)/6$ met tijd in minuten.



De basiswaarde 5 mmol/L, beginverstoring +3 mmol/L en sensorvertraging 6 min zijn lesparameters. Er is geen echte maaltijd, persoon, dosis of klinische grens mee gekalibreerd. Een kleine ondershoot hoort bij dit beperkte lineaire model.

GEGEVEN

- De g/i-proef en $g_m(0)=3$.

GEVRAAGD

- Een faseverschil en een constant-invoer-evenwicht.

OPLOSSING

1. Op minuut 20 is het werkelijke model-G 6,484291 mmol/L, maar de meting geeft 6,923585. De afwijking +0,439294 komt hier uit vertraging tijdens de daling, niet uit een vaste ijkfout.

2. Bij constant $w = 0{,}06$ geldt $i^* = (c/d)g^*$ en $g^* = w/(a + bc/d) = 1{,}333333$ mmol/L; $i^* = 0{,}666667$. Een pure meetvertraging heeft in een constant eindpunt $g_m^* = g^*$.

3. Een echte sensor kan een ander compartiment meten. De gekozen 6 min is geen universele vertraging voor iedere glucosesensor. Een parameterverandering zonder patiëntdata bewijst geen ziekte of insulineresistentie.

ANTWOORD

Kalibratie, compartiment, tijdstempel en dynamische vertraging moeten apart in een meetcontract staan.

Klopt dit? Een lagere c = 0,010 in de aparte lesvariant geeft G(60)=5,608624 tegenover 5,062614 in de basisvariant; dat toont modelgevoeligheid.

UITLEG · 33.9

Warmte wordt geproduceerd, verplaatst en verloren

9/31

Temperatuurregeling gebruikt informatie uit lichaam en huid, centrale verwerking waaronder hypothalamische circuits, en verschillende effectors. Doorbloeding beïnvloedt warmteafvoer; verdamping kost latente warmte; spieractiviteit en rillen kunnen warmteproductie verhogen. Ook gedrag, kleding en omgeving beïnvloeden de balans.

Een huidprobe meet de plaatselijke huid, geen gegarandeerde kerntemperatuur. Een natte huid, veranderde perfusie en luchtstroming veranderen koppeling en warmteverlies. Straling, convectie, geleiding en verdamping horen daarom niet stilzwijgend allemaal in één constante onder alle omstandigheden.

mechanisme	balansbetekenis
geleiding/convectie	warmtestroom door contact of stromende lucht
straling	uitwisseling met omringende oppervlakken
verdamping	latente warmte bij waterverdamping
spieractiviteit	chemische energie naar werk en warmte
doorbloeding	koppeling tussen kern en huid verandert

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.10

Een warmteoverschot eerst op orde van grootte toetsen

10/31

Gebruik uitsluitend een fictieve uniforme thermische knoop met C = 210 kJ/K.

GEGEVEN

- 50 W extra gedurende 3600 s; H = 8 W/K rond de basis.

GEVRAAGD

- Stijging met en zonder passief extra verlies.

OPLOSSING

1. Zonder extra verlies stijgt de opgeslagen energie met $50 \cdot 3600 = 180\,000\,\mathrm{J}$, dus $\Delta T = E/C = 0{,}857143\,\mathrm{K}$.

2. Met passief verlies en start x = 0 geldt $C\dot{x} = 50 - Hx$. Exact: $x = (50/H)(1 - \mathrm{e}^{-Ht/C})$, na een uur 0,800965 K. De passieve tijdconstante $C/H = 26\,250$ s = 7,291667 h.

3. Een uniform lichaamsmodel negeert kerntemperatuur–huidverschil, lokale warmtebronnen en veranderlijke regeling. Deze eigen C en H zijn dus geen vastgelegde gegevens voor een bewoner.

ANTWOORD

De korte energieraming toetst een simulatie op een grove bovengrens binnen haar eigen aannamen.

Klopt dit? Een temperatuursverschil van 1 K is numeriek 1 °C; warmtecapaciteit en temperatuurverschillen blijven in K.

UITLEG · 33.11

Vertraagde en begrensde thermische feedback

Noem x = T−37 °C, met 37 °C alleen als lesreferentie. De afwijkingsbalans is $C\dot{x} = w - Hx - u$. u is *extra* warmteafvoer ten opzichte van de basis, in W. Een negatieve u staat voor minder verlies of meer productie ten opzichte van die basis; negatieve absolute zweetproductie wordt niet bedoeld.

Een simpele vertraagde effector volgt $\tau\dot{u} = \mathrm{clip}(k_p x, -u_{\max}, u_{\max}) - u$. Kies k_p = 40 W/K, τ = 120 s en u_max = 60 W. Deze waarden en hun symmetrie zijn onderwijskeuzen, geen menselijk regelbereik. De basisproductie en het basisverlies zijn vóór de afwijkingsbalans al tegen elkaar weggestreept.

EEN AFWIJKINGSBALANS MET EEN BEGRENSDE EFFECTOR

$$C\dot{x} = w - Hx - u$$

Zonder verzadiging heeft het stelsel matrix $\begin{bmatrix} -H/C & -1/C \\ k_p/\tau & -1/\tau \end{bmatrix}$. Ook een warme kamer en luchtvochtigheid zouden apart moeten worden gemodelleerd om een echte temperatuurbalans te verklaren.

CODE · 33.12

Een warmteproef met een onafhankelijke controle

De synthetische verstoring van 50 W duurt precies één uur. De overgang valt op een staprand, zodat de integrator geen onbedoelde energie over de rand verdeelt. De passieve variant heeft een exacte oplossing en de geregelde variant wordt met twee stappen vergeleken. De code geeft modelafwijkingen en geen medische waarschuwingen.

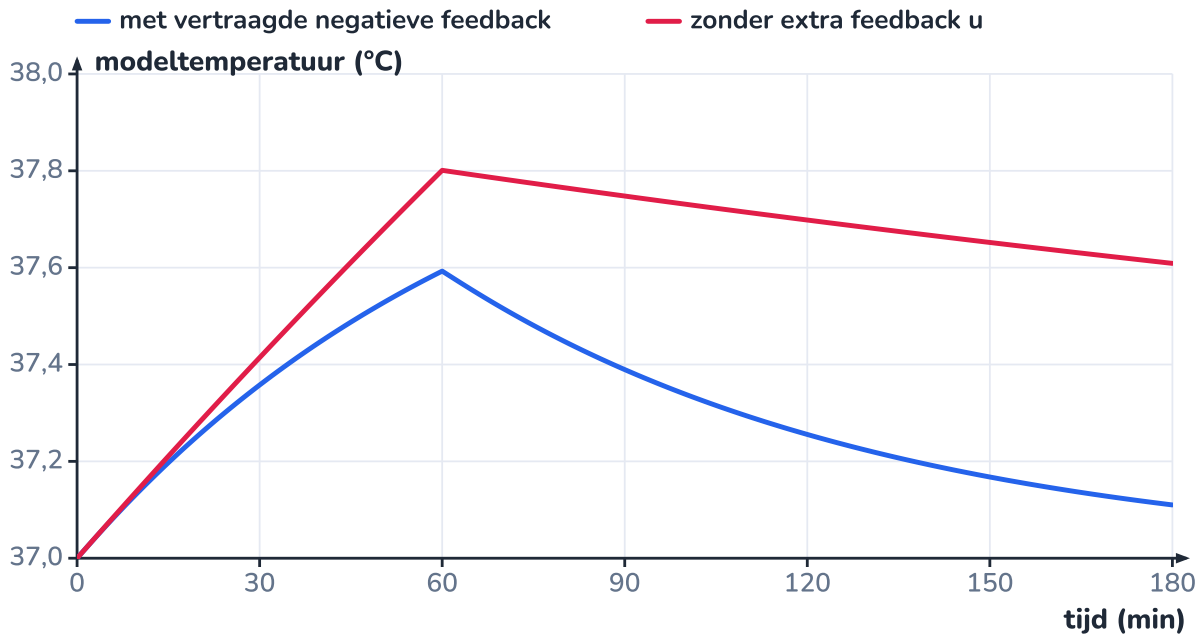
Python `temperatuur_lesmodel.py` 32 regels

```python
import math
import numpy as np

# Fictief eenknoopslichaam; geen voorspeller van echte kern- of huidtemperatuur.
C=210000.; H=8.; kp=40.; tau=120.; grens=60.; basis=37.
# Signed u is extra warmteafvoer t.o.v. de basis; u<0 betekent compensatie.
```

```python
def sim(h=10.,geregeld=True,eind=10800.):
    n=round(eind/h)
    if not math.isclose(n*h,eind) or not math.isclose(round(3600/h)*h,3600):
        raise ValueError("eind of overgang niet op staprand")
    z=np.zeros(2); zs=[z.copy()]
    for j in range(n):
        w=50. if j*h<3600 else 0.
        def f(z):
            x,u=z
            doel=np.clip(kp*x,-grens,grens) if geregeld else 0.
            return np.array([(w-H*x-u)/C,(doel-u)/tau])
        k1=f(z);k2=f(z+h*k1/2);k3=f(z+h*k2/2);k4=f(z+h*k3)
        z=z+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;zs.append(z.copy())
    return np.arange(n+1)*h,np.array(zs)
t,z=sim(); ongeregeld=sim(geregeld=False)
print("50W gedurende60min, x/u na60min",np.round(z[360],6))
print("zonder u x na60min",ongeregeld[1][360,0])
print("x na180min",z[-1,0])
M=np.array([[-H/C,-1/C],[kp/tau,-1/tau]])
print("eigenwaarden per s",np.linalg.eigvals(M))
print("evenwicht bij constant50W x,u",50/(H+kp),kp*50/(H+kp))
print("bij120W en u op60W: x*",(120-60)/H)
print("10MJ/dag gemiddeld W",10e6/86400)
print("stapverschil 10/5s",np.max(np.abs(sim(10)[1]-sim(5)[1][::2])))
assert abs(ongeregeld[1][360,0]-50/H*(1-math.exp(-H/C*3600)))<1e-9
assert np.max(np.abs(sim(10)[1]-sim(5)[1][::2]))<1e-5
```

```
50W gedurende60min, x/u na60min [ 0.592857 23.195444]
zonder u x na60min 0.8009645759113788
x na180min 0.11003809463278004
eigenwaarden per s [-0.00023408 -0.00813735]
evenwicht bij constant50W x,u 1.0416666666666667 41.666666666666664
bij120W en u op60W: x* 7.5
10MJ/dag gemiddeld W 115.74074074074075
stapverschil 10/5s 1.6676236569423963e-07
```



Eén uniforme thermische knoop, vaste H en een begrensde vertraagde compensatie zijn eigen onderwijskeuzen. Beide lijnen blijven modelresultaten; zij voorspellen geen werkelijke kern-, huid- of koortstemperatuur.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.13

Een stabiele lus kan toch onvoldoende bereik hebben

13/31

Houd in hetzelfde lesmodel w = 50 W constant en beschouw daarna w = 120 W.



Eén uniforme thermische knoop, vaste H en een begrensde vertraagde compensatie zijn eigen onderwijskeuzen. Beide lijnen blijven modelresultaten; zij voorspellen geen werkelijke kern-, huid- of koortstemperatuur.

GEGEVEN

- H = 8 W/K, k_p = 40 W/K, effectorgrens 60 W.

GEVRAAGD

- Stationair evenwicht en betekenis van verzadiging.

OPLOSSING

1. Zonder verzadiging is $u = k_p x$, dus $x^* = 50/(H + k_p) = 1{,}041667$ K en $u^* = 41{,}666667$ W. Dit blijft binnen de gekozen grens.

2. Bij 120 W zou de onbegrensde u 100 W zijn. De begrenzing houdt u op 60 W en geeft formeel $x^* = (120 - 60)/8 = 7{,}5$ K.

3. De zeer grote formele uitkomst signaleert dat compensatie in dit lesmodel tekortschiet en dat de lokale linearisatie geen bruikbare menselijke voorspelling meer is. Zij is geen kerntemperatuurprognose of behandelinstructie.

ANTWOORD

Stabiliteit, effectorreserve en geldig modelgebied horen als afzonderlijke eisen in het ontwerp.

Klopt dit? Bij de éénuurproef is x na 60 min 0,592857 K en na 180 min 0,110038 K: stabiel betekent niet direct terug op de basis.

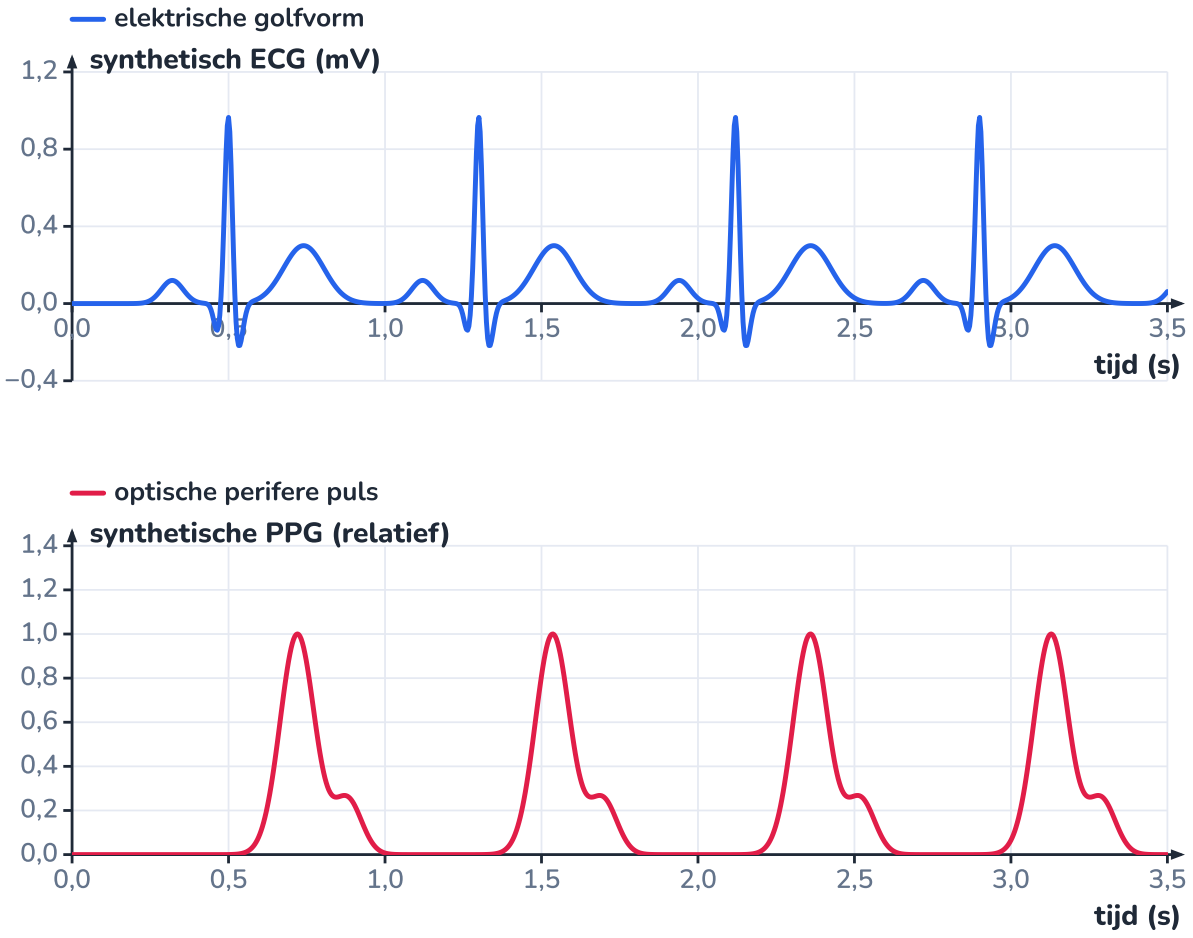
UITLEG · 33.14

ECG registreert elektrische activiteit

De prikkelgeleiding van het hart coördineert spieractivatie. Het ECG registreert potentiaalverschillen via elektroden, geen bloedstroom en geen zuurstofsaturatie. De vorm hangt ook af van de gekozen afleiding.

In de gebruikelijke golfbenaming hoort P bij atriale depolarisatie, QRS bij ventriculaire depolarisatie en T bij ventriculaire repolarisatie. Een R-piek geeft een bruikbaar tijdpunt voor intervalanalyse, maar het verkleinen tot 'pieken tellen' verliest golfvorminformatie. Het synthetische schema hier heeft bewust Gaussvormen; het is geen normale ECG-norm of classificatie van een ritmestoornis.

Volgens NHLBI registreert een ECG sterkte en timing van elektrische activiteit. Een echte meting vraagt daarvoor geschikte medische apparatuur en elektrische isolatie. De cursusproef gebruikt alleen gegenereerde signalen.



Alle golven zijn opgebouwd uit zelfgekozen Gaussfuncties op 250 Hz. De optische vertraging is synthetisch en omvat hier het verschil tussen twee piekdefinities; zij is geen rechtstreeks gemeten vaat- of zenuwparameter.

UITLEG · 33.15

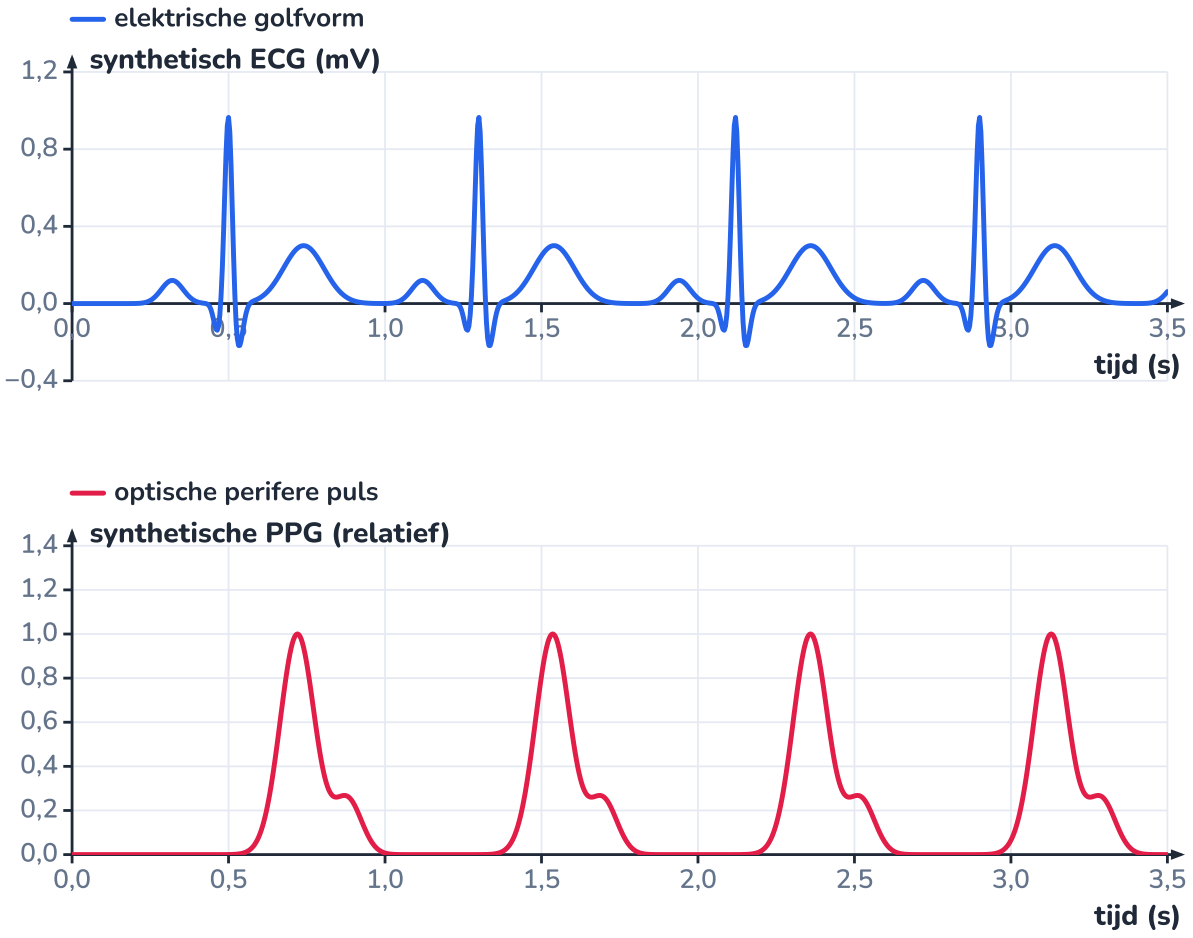
PPG meet de perifere optische puls

15/31

Een led en fotodetector registreren verandering van doorgelaten of teruggekaatst licht. Een pulsgerelateerde verandering in bloedvolume vormt de PPG-golf. Contactdruk, perfusie, licht, huid en beweging beïnvloeden het signaal; de gekozen piek is niet de elektrische R-piek.

De elektrische activiteit gaat vooraf aan de mechanische en perifere respons. Neem als tijdredenering $p_n = r_n + \tau_n$. Dan is $PP_n = RR_n + (\tau_{n+1} - \tau_n)$. Een constante vertraging verdwijnt uit intervallen, een veranderlijke niet. De τ in onze code is een synthetisch verschil tussen piekdefinities, geen geïsoleerde vaattransittijd.

De primaire methodeproef van Vescio et al. (2018) vergeleek ECG en PPG bij twintig gezonde personen zonder ritmestoornis, in rust of gewone activiteit. Dat ondersteunt een begrensde meetvergelijking, geen algemene vervanging van ECG.



Alle golven zijn opgebouwd uit zelfgekozen Gaussfuncties op 250 Hz. De optische vertraging is synthetisch en omvat hier het verschil tussen twee piekdefinities; zij is geen rechtstreeks gemeten vaat- of zenuwparameter.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.16

Frequentie en intervalvariatie zijn twee resultaten

16/31

Vier synthetische RR-intervallen zijn 0,80; 0,82; 0,78; 0,82 s.

GEGEVEN

- De intervallen komen van vijf geselecteerde R-pieken.

GEVRAAGD

- Gemiddelde hartfrequentie en RMSSD.

OPLOSSING

1. De gemiddelde intervalduur is $\overline{RR} = 0{,}805$ s. De tijdsgemiddelde frequentie uit deze intervallen is $60/\overline{RR} = 74{,}534161$ slagen/min.
2. Opeenvolgende verschillen zijn +0,02; −0,04; +0,04 s. $\mathrm{RMSSD} = \sqrt{(0{,}02^2 + 0{,}04^2 + 0{,}04^2)/3} = 0{,}034641$ s = 34,641 ms.
3. Het gemiddelde van vier losse 60/RR-waarden is 74,566135 slagen/min. Dat is een andere weging; vermeld steeds de definitie. Deze RMSSD is een synthetische rekenwaarde, geen stress-, conditie- of gezondheidsdiagnose.

ANTWOORD

Hetzelfde gemiddelde ritme kan andere intervalvariatie hebben. Ook een foutieve extra piek kan het gemiddelde sterk wijzigen.

Klopt dit? De volledige twaalfpiekenreeks in de code heeft 11 intervallen en 10 verschillen; tel die aantallen juist.

CODE · 33.17

Elektrische en optische pieken met één bewegingsartefact

17/31

Het programma genereert alle golven zelf op 250 Hz. De simpele detector en drempels zijn uitsluitend gekozen voor deze golfvormen. Hij telt een extra optische bewegingspiek mee; een afzonderlijke synthetische bewegingsvlag verwijdert die. Na verwijdering blijft de PPG-reeks haar eigen vertraging en intervalvariatie houden.

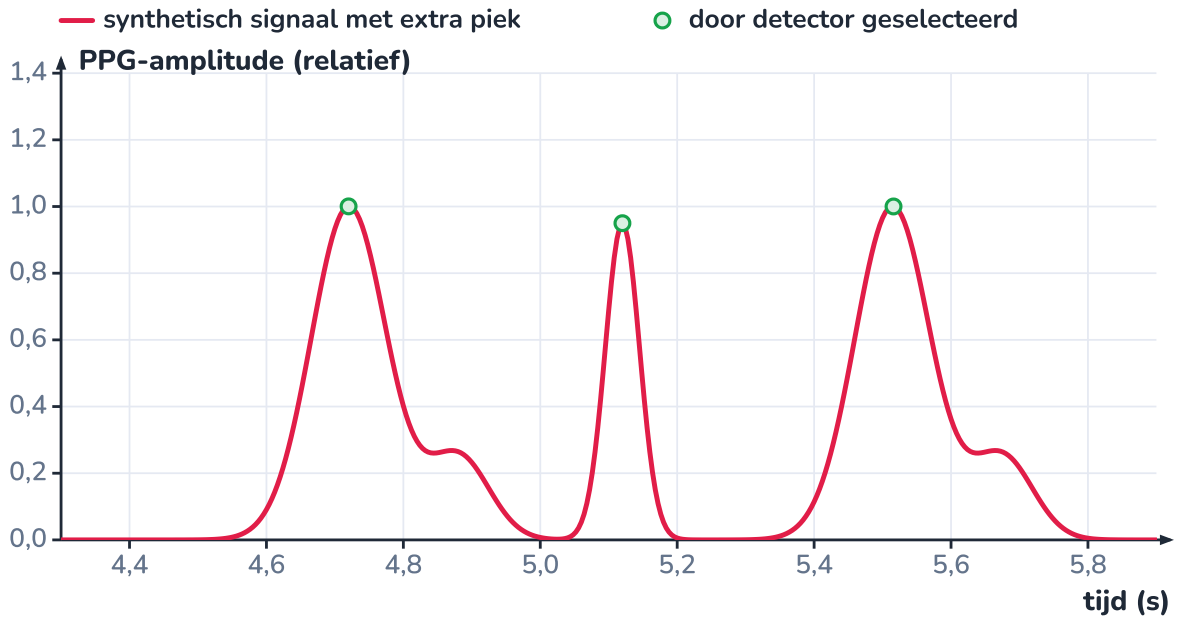
Python **synthetisch_ecg_ppg.py** 36 regels

```python
import numpy as np

# Volledig synthetische spanning/optische amplitude, geen opname van een mens.
fs=250.; t=np.arange(0.,10.,1/fs)
R=np.array([.50,1.30,2.12,2.90,3.72,4.52,5.31,6.14,6.93,7.75,8.55,9.34])
vertraging=.22+.020*np.sin(np.arange(len(R))*.9)
P=R+vertraging
ecg=np.zeros_like(t); ppg=np.zeros_like(t)
def gauss(mu,s): return np.exp(-.5*((t-mu)/s)**2)
for r,p in zip(R,P):
    ecg+=.12*gauss(r-.18,.035)-.15*gauss(r-.035,.012)
    ecg+=gauss(r,.012)-.25*gauss(r+.03,.015)+.30*gauss(r+.24,.065)
    ppg+=gauss(p,.055)+.25*gauss(p+.16,.045)
artefact=ppg+.95*gauss(5.12,.025)
def pieken(x,drempel,afstand=.35):
    # Drempels uitsluitend voor deze ontworpen golfvorm; geen medische detector.
    kandidaten=np.flatnonzero((x[1:-1]>x[:-2])&(x[1:-1]>=x[2:])&(x[1:-1]>drempel))+1
    over=[]
    for j in kandidaten:
        if not over or t[j]-t[over[-1]]>=afstand: over.append(j)
    return np.array(over,int)
ir=pieken(ecg,.60); ip=pieken(ppg,.60); ia=pieken(artefact,.60)
rr=np.diff(t[ir]); pp=np.diff(t[ip])
def cijfers(dt):
    return 60/np.mean(dt),1000*np.sqrt(np.mean(np.diff(dt)**2))
print("synthetische piekaantallen ECG/PPG/artefact",len(ir),len(ip),len(ia))
print("ECG hartfrequentie/RMSSD(ms)",np.round(cijfers(rr),6))
print("PPG pulsfrequentie/RMSSD(ms)",np.round(cijfers(pp),6))
print("artefact gemiddelde pulsfrequentie",cijfers(np.diff(t[ia]))[0])
# Onafhankelijke synthetische bewegingsvlag; niet uit de pulsfrequentie verzonnen.
kwaliteit=~((t>=5.00)&(t<=5.20))
goed=ia[kwaliteit[ia]]
print("na bewegingsvlag pieken",len(goed),"frequentie",cijfers(np.diff(t[goed]))[0])
print("perfecte PP-RR verschil max ms",1000*np.max(np.abs(np.diff(P)-np.diff(R))))
assert len(ir)==12 and len(ip)==12 and len(ia)==13 and len(goed)==12
assert np.allclose(np.diff(P),np.diff(R)+np.diff(vertraging))
```

```
synthetische piekaantallen ECG/PPG/artefact 12 12 13
ECG hartfrequentie/RMSSD(ms) [74.660633 30.828558]
PPG pulsfrequentie/RMSSD(ms) [74.728261 32.471526]
artefact gemiddelde pulsfrequentie 81.5217391304348
```

```
na bewegingsvlag pieken 12 frequentie 74.72826086956523
perfecte PP-RR verschil max ms 17.39800647057388
```



De toegevoegde piek ligt op 5,12 s. Een afzonderlijke synthetische bewegingsvlag markeert 5,00–5,20 s. Dit demonstreert foutdetectie; de vlag is geen gevalideerde methode om alle echte bewegingsartefacten te herkennen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.18

Tijdsresolutie is één bijdrage aan meetkwaliteit

18/31

Een ideale piek ligt tussen monsters van een 250 Hz-signaal.

GEGEVEN

- Monstertijd 1/fs = 4 ms; afronden naar dichtste monster.

GEVRAAGD

- Een ideale interval- en frequentiegrens.

OPLOSSING

1. Alleen de ideale afrondfout is maximaal ±2 ms per tijdstip. Een interval is een verschil van twee tijden: in het ongunstigste geval ±4 ms.
2. Voor $f = 60/T$ is $\mathrm{d}f/\mathrm{d}T = -60/T^2$. Rond $T = 0{,}80$ s geeft 4 ms dus ongeveer $60 \cdot 0{,}004/0{,}8^2 = 0{,}375$ slagen/min fout.
3. Een echte detectorfout kan veel groter zijn door ruis, golfvorm, filtering of een ontbrekende/extra piek. Deze kwantisatieraming is geen totale sensorfout. Een lange gemiddelde reeks lost gedeelde bias of verkeerde piekselectie niet op.

ANTWOORD

Bewaar ruwe tijdstippen, samplefrequentie, kwaliteitsvlaggen en het algoritme bij het resultaat.

Klopt dit? De volledige synthetische PP–RR-afwijking bereikt 17,398 ms door de veranderde optische piekvertraging alleen.

UITLEG · 33.19

SpO_2 is een optische schatting met kalibratie

19/31

Zuurstofsaturatie beschrijft de zuurstofbinding van hemoglobine, niet de gasfractie in de kamer. Twee optische golflengten hebben verschillende gevoeligheid voor geoxygeneerd en gedeoxygeneerd hemoglobine. Een eenvoudige absorptiebenadering is $-\ln(I/I_0) = \ell(\varepsilon_{\mathrm{O}} c_{\mathrm{O}} + \varepsilon_{\mathrm{D}} c_{\mathrm{D}})$.

In echt weefsel spelen verstrooiing, padlengte en niet-pulsatiele absorptie mee. Pulse-oximetrie gebruikt daarom pulsatiele AC en achtergrond-DC bij rood en infrarood. Hun genormaliseerde verhouding $R = (AC_r/DC_r)/(AC_i/DC_i)$ gaat naar een systeemkalibratie $\widehat{S} = f_{\mathrm{kal}}(R)$.

RATIO VAN GENORMALISEERDE OPTISCHE MODULATIES

$$R = \frac{AC_r/DC_r}{AC_i/DC_i}$$

Een losse sensorchip of de ratioformule levert die kalibratie niet vanzelf. SpO_2 is evenmin de arteriële zuurstofdruk of een zelfstandige diagnose. De O_2-sensor van de woonmodule uit e14 meet luchtgas en hoort in een andere meetketen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.20

Een fictieve ratio levert alleen een fictieve schatting

20/31

Gebruik een zelfgekozen demonstratiekalibratie $S_{\mathrm{demo}} = 105 - 15R$.

GEGEVEN

- Rood AC = 0,020, DC = 1,000; IR AC = 0,036, DC = 1,200. Amplituden relatief.

GEVRAAGD

- R en S_demo, daarna een signaalverandering.

OPLOSSING

1. De genormaliseerde modulaties zijn 0,020 en 0,030. Dus $R = 2/3$ en $S_{\text{demo}} = 95{,}0$ %.
2. Als rood AC = 0,024 wordt en IR gelijk blijft, is R = 0,80 en S_demo = 93,0 %. Een verandering van pad, contact of artefact kan dus een veranderd getal geven zonder dat deze lescode bewezen heeft wat in een persoon veranderde.
3. Worden beide AC's twintig keer kleiner, dan blijft de ratio gelijk. Toch is de pulsmodulatie zwakker en kan de signaal-ruisverhouding onvoldoende worden. Een plausibele ratio bewijst geen geldige meting.

ANTWOORD

De berekende 95,0 % is uitsluitend een synthetische demonstratie-uitkomst, geen gemeten SpO_2 en geen beoordelingsgrens voor een bewoner.

Klopt dit? De gekozen 0,005-modulatiegrens op het codeblad is een proefcriterium voor deze signalen, geen universele medische perfusiedrempel.

CODE · 33.21

Kwaliteit vóór een ratio publiceren

21/31

De code weigert niet-eindige, niet-positieve en volgens de eigen proef te zwakke signalen. Bij een bewegingsvlag publiceert zij geen schatting. De overblijvende status heet bewust 'geldig volgens beperkte lescriteria': zij claimt geen complete klinische kwaliteitscontrole. Er is geen medisch alarm of behandelpad.

Python `optische_ratio_demo.py` 23 regels

```python
import math

def demo(ac_rood,dc_rood,ac_ir,dc_ir,beweging=False):
    # Alleen een fictieve ratio-kalibratie; geen echte SpO2 of apparaatkeur.
    xs=(ac_rood,dc_rood,ac_ir,dc_ir)
    if beweging or not all(math.isfinite(x) and x>0 for x in xs):
        return None,"ongeldig signaal"
    # Lescriterium voor deze synthetische signalen, geen klinische perfusiedrempel.
    if min(ac_rood/dc_rood,ac_ir/dc_ir)<.005:
        return None,"te kleine modulatie in deze proef"
    R=(ac_rood/dc_rood)/(ac_ir/dc_ir)
    S=105-15*R # zelfgekozen fictieve kalibratie, geen universele natuurwet
    return (R,S),"geldig volgens beperkte lescriteria"
for naam,args in [
 ("basis",(.020,1.,.036,1.2)),
 ("kleine modulatie",(.001,1.,.0018,1.2)),
 ("niet eindig",(float("nan"),1.,.036,1.2)),
 ("ratioverandering",(.024,1.,.036,1.2))]:
    print(naam,demo(*args))
print("bewegingsvlag",demo(.020,1.,.036,1.2,beweging=True))
assert abs(demo(.02,1,.036,1.2)[0][1]-95)<1e-12
assert demo(.001,1,.0018,1.2)[0] is None
assert demo(float("nan"),1,.036,1.2)[0] is None
```

```
basis ((0.6666666666666667, 95.0), 'geldig volgens beperkte lescriteria')
kleine modulatie (None, 'te kleine modulatie in deze proef')
niet eindig (None, 'ongeldig signaal')
ratioverandering ((0.8, 93.0), 'geldig volgens beperkte lescriteria')
bewegingsvlag (None, 'ongeldig signaal')
```

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.22

Een RMS-specificatie begrenst niet elke fout

22/31

Neem zestien synthetische saturatiefouten in procentpunten: één fout +8 en vijftien fouten 0.

GEGEVEN

- A_rms is de wortel van de gemiddelde kwadratische fout.

GEVRAAGD

- De RMS-fout en een correcte interpretatie.

OPLOSSING

1. $A_{\mathrm{rms}} = \sqrt{(8^2 + 15 \cdot 0^2)/16} = 2$ procentpunten. Het enkele afwijkende resultaat heeft toch 8 procentpunten fout.
2. De FDA-guidance van 2013 noemt typische A_rms-specificaties onder normale omstandigheden over 70–100 % saturatie: ≤3,0 voor transmissie-wrap/clip, ≤3,5 voor oorclip/reflectie. Zij worden getoetst tegen een arteriële referentie. Dat betekent geen harde ±3-grens voor iedere meting.
3. Een validatierapport moet ook bias, spreiding, proefpersonen, conditie en individuele grenzen laten zien. Eén synthetisch RMS-getal of alleen gezonde stille proefpersonen bewijst niet alle omstandigheden.

ANTWOORD

Publiceer het statistische foutbegrip en de toepassingscondities samen.

Klopt dit? Bron: FDA 2013, §4.1.1 en tabel 3; geraadpleegd 30-09-2026.

UITLEG · 33.23

Nauwkeurigheid heeft een bevolking en een omgeving

23/31

De FDA noemt onder meer circulatie, huidpigmentatie, huiddikte en -temperatuur, tabaksgebruik en nagellak als invloeden op pulse-oximeterresultaten. De FDA bespreekt aanhoudende zorgen over nauwkeurigheidsverschillen bij donkerder huidpigmentatie. Een beoordeling gebruikt het getal samen met symptomen en klinische context.

Een toets met één goed verlichte synthetische vinger bevat die variatie niet. Houd training of systeemkalibratie, onafhankelijke validatie, referentiemethode en meetcondities apart. Rapporteer ook ontbrekende of geweigerde resultaten per conditie; alleen overgebleven mooie meetparen kunnen een gunstig beeld geven.

Stand op 30-09-2026: de FDA-pagina noemt de op 7 januari 2025 uitgegeven nieuwe guidance nog een *draft*, die de 2013-guidance pas vervangt wanneer definitief. Dat is geen Belgische

installatiegoedkeuring voor een lesmodule.

meetketen	grootheid	waar zit een belangrijke grens?
ECG-elektroden	elektrische potentiaalverschillen, tijd en golfvorm	contact, beweging, verstoring, afleiding en elektrische isolatie
PPG-led/fotodiode	optische perifere puls	perfusie, beweging, licht, huid en piekdefinitie
pulse-oximeter	SpO_2-schatting uit optische signalen	systeemkalibratie, geometrie en klinische validatie
temperatuurprobe	temperatuur op de gekozen plaats	huid is niet automatisch kern; tijdconstante en contact
glucosesensor	glucose in het gemeten compartiment	compartiment, vertraging en sensorvalidatie

UITLEG · 33.24

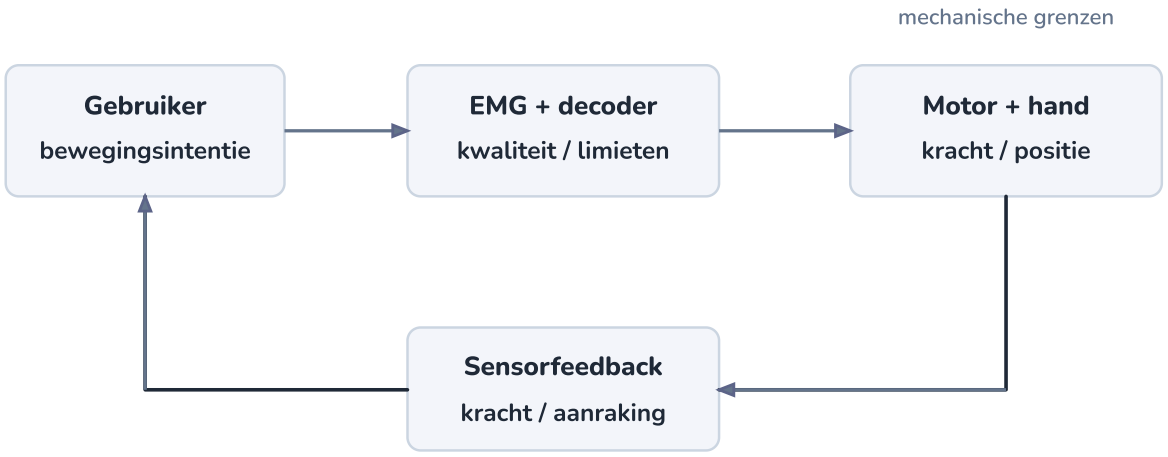
Prothesen maken de mens onderdeel van de lus

24/31

Een prothese vervangt een functie of lichaamsdeel. Een passieve mechanische prothese en een motorisch aangedreven hand hebben andere eisen. In een myo-elektrische hand kan spieractiviteit via EMG een bewegingsintentie leveren. Dat signaal is geen rechtstreekse grijpkracht: contact, spierconditie en decoder beïnvloeden de opdracht.

De machine kan positie of kracht lokaal regelen. De gebruiker krijgt daarnaast informatie via zicht, geluid, contact of een ontworpen zintuiglijke route. Een correct motorcommando zonder goede feedback kan nog onhandige objectmanipulatie geven.

Interface-eisen omvatten pasvorm, drukverdeling, massa, draagcomfort, onderhoud, stroomvoorziening, faalgedrag en gebruikstaken. Een medische functie wordt beoordeeld met de betreffende gebruiker en professionals; een tabel met motorkoppel bewijst niet het geheel.



EMG is elektrische spieractiviteit, geen ECG. Deze architectuur toont een mogelijke terugkoppeling; zij specificeert geen implantatie, stimulatieparameter of voor een persoon veilige grijpkracht. Ook zicht kan een feedbackroute vormen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 33.25

Een mechanische proef berekent slechts één eis

25/31

Een fictief handprototype houdt een massa van 0,150 kg met een hefboomarm van 0,060 m.

GEGEVEN

- g = 9,81 m/s²; statische ideale situatie.

GEVRAAGD

- Het lastkoppel en ontbrekende ontwerpvoorwaarden.

OPLOSSING

1. Kracht $F = mg = 1{,}4715\,\mathrm{N}$. Het statische koppel is $M = F\ell = 0{,}08829\,\mathrm{N\,m}$.
2. Overbrenging, wrijving, versnelling, massa van de hand, vingergeometrie en contact veranderen het benodigde motorkoppel. Contactkracht en huiddruk zijn andere eisen dan dit lastkoppel.
3. Toets op een bankopstelling met een bekende massa, kracht/positie-sensoren, begrensde aandrijving en sensoruitvalscenario. Deze selectieproef specificeert geen voor een persoon veilige grijpkracht.

ANTWOORD

Een meetbare mechanische eis helpt, zolang zij niet als algemene medische bruikbaarheid wordt gepresenteerd.

Klopt dit? Een prothese die een zwaarder object houdt kan tegelijk slechter passen of te veel druk uitoefenen; functies zijn meervoudig.

UITLEG · 33.26

Implantaten hebben verschillende functies

26/31

Een implantaat kan een passief mechanisch onderdeel zijn, een sensor of een actief hulpmiddel. Een pacemaker bevat sensing en elektrische pacing voor hartactiviteit; een cochleair implantaat verwerkt geluid en zet dit om in elektrische prikkeling nabij de gehoorzenuw. Het laatste geeft geen identieke kopie van normaal horen.

Er zijn minimaal drie grenzen: mechanische/weefselinterface, signaal-/energietransfer en klinische functie. Biocompatibiliteit, integriteit, energie, warmte, storingsgedrag en langdurige prestaties vragen passend bewijs. De Raspberry Pi van Habitat mag niet het snelle of klinische regellusgezag van een implantaat overnemen.

hulpmiddel	signaalpad	bewijs blijft specifiek
passieve gewrichtsprothese	mechanische belasting naar interface	materiaal, geometrie, slijtage, pasvorm
pacemaker	elektrische sensing → beoordeling → pacing	apparaat en patiënttoepassing
cochleair implantaat	geluid → verwerking → zenuwstimulatie	perceptie en klinische uitkomst
sensorimplantaat	lokale toestand → signaal buiten lichaam	compartiment, drift, meetkwaliteit

Institutionele primaire bronnen: NHLBI en FDA.

VERHAAL · 33.27

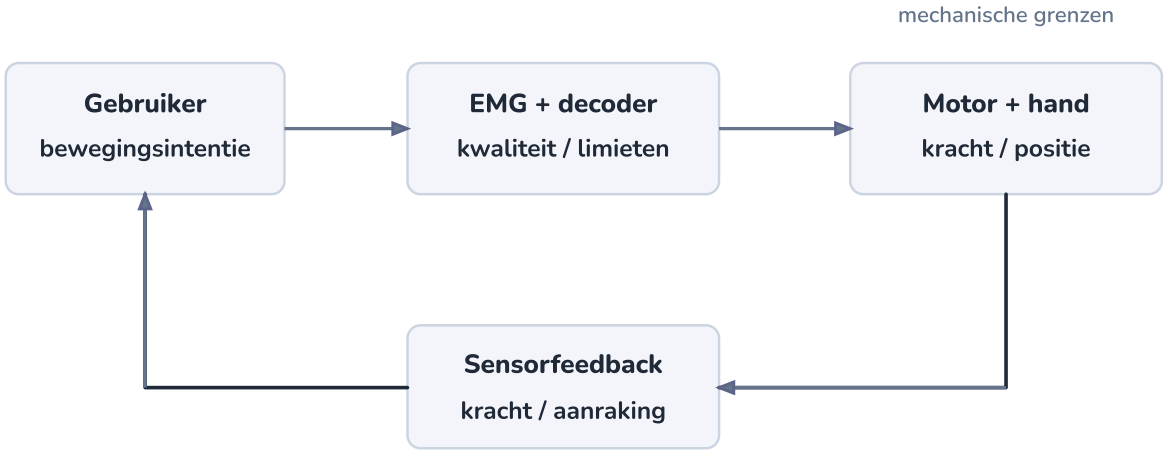
Voelen verbeteren is een taakspecifieke claim

27/31

Schiefer en collega's beschreven een protheseonderzoek waarin twee personen met armverlies tactiele informatie kregen via perifere zenuwstimulatie. Sensoren in de hand leverden informatie over contactkracht. De onderzoekers vergeleken concrete taken met en zonder feedback, waaronder objectdetectie en objectmanipulatie.

Feedback verbeterde bepaalde prestaties en het ervaren gebruik. De volledige SHAP-resultaten vragen een precieze lezing: de functiescore steeg bij S1 van 58 naar 71, statistisch significant, en bij S2 van 51 naar 55, niet significant. De SHAP-proef met feedback volgde steeds op die zonder feedback; leren kan dus aan de verbetering hebben bijgedragen. De auteurs vragen meer deelnemers en een gerandomiseerde volgorde voor sterker bewijs. Twee verschillende deelnemeruitkomsten en deze proefvolgorde ondersteunen geen algemene gelijkwaardigheid met een natuurlijke hand.

De les voor techniek is dat mens en machine samen worden beoordeeld. Kies vooraf taak, referentie, uitkomstmaat en proefconditie; onderzoek welke feedback nuttig is. Publiceer populatie en beperkingen. Bron: J. Neural Engineering 13, 016001 (2016), geraadpleegd 30-09-2026.



EMG is elektrische spieractiviteit, geen ECG. Deze architectuur toont een mogelijke terugkoppeling; zij specificeert geen implantatie, stimulatieparameter of voor een persoon veilige grijpkracht. Ook zicht kan een feedbackroute vormen.

UITLEG · 33.28

Habitat-monitor: context, kwaliteit en menselijke beoordeling

28/31

De bewonersmonitor voegt tijdgebonden meetinformatie toe aan het stationsbeeld. Hij houdt lichaamsmetingen gescheiden van lucht-O_2, CO_2 en klimaat. Elke waarde draagt persoon/pseudoniem, apparaat, meetplaats, tijdzone UTC+1, sample- of aggregatieperiode, eenheid, algoritmeversie en kwaliteitsstatus.

Een ongeldige of ontbrekende meting wordt zichtbaar als zodanig; de laatst bekende waarde wordt niet als actuele gezonde toestand herhaald. Toegang, bewaartermijn, doel en toestemming worden met de bewoners afgesproken. Een centrale Pi verwerkt een trend of vrijwillige observatie en krijgt geen behandeling- of implantaatbesturingstaak.

Er zijn geen universele medische alarmdrempels in deze cursus gekozen. Eventuele echte medische opvolging gebruikt daarvoor bedoelde apparatuur en een passend professioneel protocol; het lesmodel levert mechanistische uitleg en foutscenario's.

testscenario	verwacht informatiegedrag
PPG-beweging	ongeldig venster plus oorzaak zichtbaar
verouderd pakket	leeftijd zichtbaar, geen actuele herpublicatie
sensor/compartiment gewijzigd	nieuwe metadata en herbeoordeling
persoon verwisseld	identiteit controleren vóór trendkoppeling
netwerk uit	lokale apparatuur behoudt haar eigen functie

PROEF · 33.29

Een fantoom- en softwareproef zonder menselijke opname

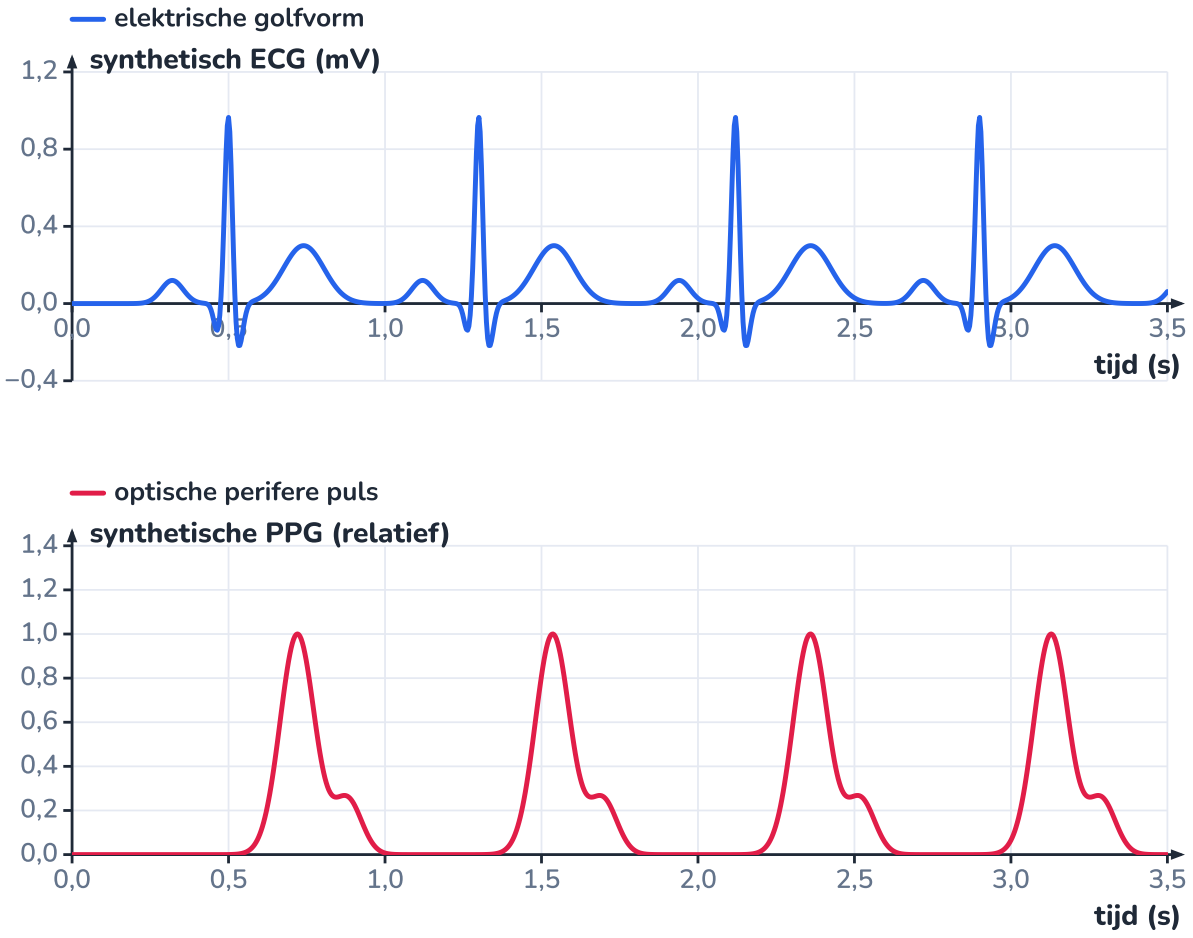
29/31

ONDERZOEKSVRAAG

De klas controleert signaalverwerking met bekende gegenereerde golven; medische nauwkeurigheid is een andere validatiestap.

MATERIAAL

- De vier Pythonprogramma's en hun parameters.
- Optioneel een elektrische signaalsimulator of optisch fantoom zonder aansluiting op een persoon.
- Versie-, samplefrequentie- en kwaliteitsregister.



Alle golven zijn opgebouwd uit zelfgekozen Gaussfuncties op 250 Hz. De optische vertraging is synthetisch en omvat hier het verschil tussen twee piekdefinities; zij is geen rechtstreeks gemeten vaat- of zenuwparameter.

WERKWIJZE

1. Reproduceer de exacte g/i-oplossing en twee warmte-integreerstappen; vergelijk met de gedocumenteerde referentie.
2. Genereer ECG/PPG en tel geselecteerde pieken. Voeg één artefact, één ontbrekende piek en een veranderde vertraging toe als afzonderlijke scenario's.
3. Voer de ratio-demo uit met normale, zwakke, NaN- en bewegingssignalen. Controleer dat ongeldige vensters geen nieuwe schatting publiceren.
4. Bewaar mislukte gevallen en alle gekozen drempels naast geslaagde resultaten.

WAARNEMING

Een bekende synthetische waarheid maakt afzonderlijke algoritmefouten zichtbaar.

VERKLARING

De proef valideert code en meetcontracten binnen haar scenario's. Zij bevat geen biologische variatie, arteriële referentie of menselijk ECG en bewijst daarom geen medische apparaatnauwkeurigheid.

Naslag: toestand, signaal en bewijs

eigen klein-signaalvoorbeeld

$$\dot{g} = -ag - bi + w, \quad \dot{i} = cg - di$$

eigen warmteafwijkingsmodel

$$C\dot{x} = w - Hx - u$$

hartfrequentie in slagen/min bij RR in s

$$f = 60/\overline{RR}$$

verschillende intervallen bij veranderlijke vertraging

$$PP_n = RR_n + \tau_{n+1} - \tau_n$$

optische ratio vóór systeemkalibratie

$$R = (AC_r/DC_r)/(AC_i/DC_i)$$

meetketen	grootheid	waar zit een belangrijke grens?
ECG-elektroden	elektrische potentiaalverschillen, tijd en golfvorm	contact, beweging, verstoring, afleiding en elektrische isolatie
PPG-led/fotodiode	optische perifere puls	perfusie, beweging, licht, huid en piekdefinitie
pulse-oximeter	SpO_2-schatting uit optische signalen	systeemkalibratie, geometrie en klinische validatie
temperatuurprobe	temperatuur op de gekozen plaats	huid is niet automatisch kern; tijdconstante en contact
glucosesensor	glucose in het gemeten compartiment	compartiment, vertraging en sensorvalidatie

bron, geraadpleegd 30-09-2026	ondersteunde inhoud	grens
NIDDK: What is diabetes?	Insuline uit de pancreas helpt glucosegebruik; hormonale regeling.	Geen diagnose of behandeldoel uit ons lineaire model.
Bergman et al. (1979)	Origineel glucose-identificatieonderzoek met gemeten insuline-invoer.	Ons g/i-stelsel is een ander, zelfgekozen lesmodel.
Tan et al., Cell (2016)	Warmtegevoelige hypothalamische neuronen en meerdere effectorroutes.	Primaire muizenstudie; geen menselijke parameterkalibratie.
NHLBI: Heart tests	ECG registreert elektrische hartactiviteit.	De synthetische golf is geen werkelijk patiënt-ECG.
Vescio et al., Sensors 18, 844 (2018)	Vergelijking ECG-RR en optische pulsintervallen.	Twintig gezonde personen zonder ritmestoornis; niet alle toepassingen bewezen.
FDA: Pulse oximeters	Meetbeperkingen en actuele status nieuwe guidance.	Een optisch modulegetal is geen medische nauwkeurigheidsclaim.
FDA-guidance 2013, §4.1.1	Arteriële referentie, A_rms en toepassingscondities.	RMS is geen harde individuele foutgrens.
Schiefer et al., J. Neural Engineering 13 (2016)	Tactiele feedback via perifere zenuwen in twee proefpersonen.	Taakspecifieke kleine studie, geen algemene prothese-garantie.
NHLBI: Pacemakers	Elektrische sensing en pacing als actief implantaat.	Geen eigen stimulatie- of implantatieontwerp.

bron, geraadpleegd 30-09-2026	ondersteunde inhoud	grens
FDA: Cochlear implants	Akoestische verwerking gevolgd door elektrische zenuwstimulatie.	Geen gelijkstelling met normaal horen.

HET GEHEEL · 33.31

De bewoner blijft meer dan een modeltoestand

31/31

Dezelfde wiskunde beschrijft vertraagde terugkoppeling in glucose, warmte en stationtechniek. Meetfusie vereist daarnaast dezelfde toestand, passende timing en passende kwaliteit. Het gedrag van een prothese laat zien dat ook zintuiglijke feedback en gebruiksfunctie tellen.

I14 Reacties en stoichiometrie
stof- en energiestromen van de bewoner

E6 Statistiek en meetonzekerheid
tijdresolutie, bias en onzekerheidsbegrip

E21 Filters en signaalverwerking
samplefrequentie, signaal en filtervertraging

E38 Dynamische systemen modelleren
toestanden, eigenwaarden en begrensde terugkoppeling

E40 Sensorfusie en schatten
zelfde toestand en kwaliteit vóór combineren

E45 Systems engineering en het V-model
meetcontract, testscenario en traceerbaar bewijs

E49 Integratieproject: het brein van het station
monitorinformatie binnen een menselijke systeemgrens

Habitat
De twee bestaande bewoners krijgen een begrensd informatievoorstel, geen medische diagnose-/behandelautomaat. Geen persoonlijke fysiologische parameter, klinische sensorgrens of nieuw implantaat wordt in het stationsdossier vastgelegd.

SAMENVATTING

In het kort

- Homeostase gebruikt negatieve, vertraagde en begrensde lussen; een referentie en een meetplaats blijven contextafhankelijk.
- De g/i- en warmteprogramma's zijn eigen onderwijsmodellen met onafhankelijke rekentoetsen, zonder medische dosis of diagnose.
- ECG meet elektrische activiteit, PPG een perifere optische puls; veranderlijke vertraging en artefacten wijzigen intervalmetingen.
- SpO_2 vraagt optische systeemkalibratie en passende validatie; een ratio of RMS-specificatie is geen individuele

medische garantie.

- Prothesen en implantaten worden op specifieke functies, mens–machine-interface en bewijs beoordeeld.
- Habitat bewaart meetkwaliteit, timing en menselijke beoordeling; ongeldige of oude data mogen geen actuele gezondheidsclaim worden.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

homeostase
Dynamische regeling van interne omstandigheden rond contextafhankelijke referenties.

PPG
Optische registratie van perifere pulsgerelateerde bloedvolumeverandering.

ECG
Registratie van elektrische hartactiviteit via potentiaalverschillen.

SpO_2
Optische schatting van de arteriële hemoglobinezuurstofsaturatie.

prothese
Hulpmiddel dat een verloren lichaamsfunctie of lichaamsdeel vervangt.

actief implantaat
Ingebracht hulpmiddel met een actieve meet-, verwerkings- of stimulatiefunctie.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 34

Algoritmen en complexiteit

Een correct programma wordt pas bruikbaar als zijn werk binnen het budget past

De inspectierobot moet een meetpunt bereiken voordat zijn batterij leeg raakt. De Pi moet miljoenen logregels verwerken terwijl de regeling doorloopt. Je onderzoekt welke algoritmen hetzelfde antwoord leveren, hoeveel werk ze vragen en welke aannamen hun correctheid dragen.

8× uitleg · 3× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 10 lestijden

P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



De snelste route op een kaart is alleen bruikbaar als elke verbinding werkelijk berijdbaar is.

Na dit hoofdstuk

- Je kan lineair en binair zoeken uitvoeren en hun voorwaarden verklaren.
- Je kan sorteeralgoritmen vergelijken met een bewerkingsmodel en O-notatie.
- Je kan recursieve functies volgen en een basisgeval en voortgang bewijzen.
- Je kan Dijkstra uitvoeren en een pad reconstrueren.
- Je kan een algoritme kiezen op basis van tijd, geheugen en worst-case eisen.

UITLEG · 34.1

Van recept naar bewijs

1/16

Een algoritme beschrijft eindige, ondubbelzinnige stappen voor een klasse problemen. De **specificatie** legt invoer, uitvoer en uitzonderingen vast. ‘Zoek een temperatuur’ is onvolledig: zoek je een exact tijdstip, de eerste overschrijding of de dichtstbijzijnde waarde? Een correcte implementatie kan toch de verkeerde specificatie uitvoeren.

Drie bewijsstukken horen bij het ontwerp: een **preconditie**, een invariant tijdens de uitvoering en een postconditie. Lineair zoeken bewaart: alle eerder bekeken posities bevatten de gezochte sleutel niet. Wanneer een overeenkomst verschijnt, is de gevonden index juist; wanneer de lijst eindigt, is de sleutel afwezig. De lus eindigt omdat het aantal ongecontroleerde elementen telkens afneemt.

contract	voorbeeld
invoer	lijst met tijdstempels, sleutel t
uitvoer	index of None
foutgeval	dubbele tijdstempels: eerste index
budget	hoogstens n vergelijkingen

UITLEG · 34.2

Zoeken: elke rij of telkens de helft

2/16

Lineair zoeken vraagt in het slechtste geval n vergelijkingen. Binair zoeken vereist een **gesorteerde** reeks en snelle toegang tot het middelste element. Na een vergelijking blijft alleen een interval over: links als de sleutel kleiner is, rechts als hij groter is. Invariant: als de sleutel bestaat, ligt hij in het overblijvende interval.

Werk met een halfopen interval $[l, r)$: begin met $l = 0$, $r = n$. Kies $m = (l + r)//2$. Bij een kleinere sleutel wordt $r = m$, bij een grotere $l = m + 1$. Voor $l = r$ is het interval leeg. De verminderende intervalbreedte bewijst beëindiging, ook bij een lege lijst. Na k halveringen blijven hoogstens $n/2^k$ elementen over: de groei is logaritmisch. Een gekoppelde lijst kent geen goedkope middentoegang; daar verdwijnt dit voordeel.

BINAIR ZOEKEN IN EEN GESORTEERDE ARRAY

$$T(n) = O(\log n)$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 34.3

Een jaarlog doorzoeken

3/16

Een logger bewaart elke minuut een meting. Het jaar telt in dit rekenvoorbeeld 365 dagen.

GEGEVEN

- 525 600 records
- één sleutelvergelijking kost in het model 0,2 µs

GEVRAAGD

- Worst-case zoektijd bij lineair en binair zoeken

OPLOSSING

1. Het aantal records is $365 \cdot 24 \cdot 60 = 525\,600$.
2. Lineair: $525\,600 \cdot 0{,}2\,\mu\text{s} = 0{,}10512\,\text{s}$.

3 Omdat $2^{19} = 524\,288$ en $2^{20} = 1\,048\,576$, volstaan ten hoogste 20 sleutelvergelijkingen: 4 µs in dit model.

ANTWOORD

Het verschil is ruim vier ordes van grootte, als de records al geordend zijn.

Klopt dit? De 0,2 µs is een rekenaanname; schijf-I/O, Python-overhead en netwerkvertraging zijn niet inbegrepen.

UITLEG · 34.4

Sorteren: wat kost orde maken?

4/16

Invoegsorteren houdt links een gesorteerd prefix bij. Elk nieuw element schuift naar zijn plaats. Bij omgekeerde invoer zijn er $1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2$ verschuivingen: $O(n^2)$. Bij reeds gesorteerde invoer is het lineair. Het algoritme kan **stabiel** zijn: records met dezelfde sleutel behouden hun volgorde.

Mergesort splitst de lijst in tweeën, sorteert beide helften en voegt ze samen. Samenvoegen kost $O(n)$; op elke van ongeveer $\log_2 n$ niveaus wordt in totaal n werk gedaan. Dus $T(n) = 2T(n/2) + O(n) = O(n \log n)$. Een gewone arrayimplementatie gebruikt tijdelijk $O(n)$ geheugen. Quicksort verdeelt rond een pivot: gemiddeld $O(n \log n)$, maar $O(n^2)$ bij slechte verdelingen. Een bibliotheeksortering is gewoonlijk verstandiger dan een eigen sorteerroutine, tenzij een meetbaar geheugen- of real-time contract anders vereist.

algoritme	slechtste tijd	extra geheugen
invoegsorteren	O(n²)	O(1)
mergesort arrays	O(n log n)	O(n)
quicksort, basisvorm	O(n²)	O(n) recursiestapel in slechtste geval

CODE · 34.5

Zoeken, sorteren en recursie echt uitvoeren

5/16

De uitvoer telt drie verschillende soorten werk expliciet. Invoegsorteren geeft bij omgekeerde data 28, 120 en 496 verschuivingen. Mergesort geeft voor deze invoervorm 12, 32 en 80 sleutelvergelijkingen; dit is niet het slechtste geval. Naïeve Fibonacci doet voor n=10 precies 177 aanroepen; memoïsatie berekent slechts 11 verschillende deelproblemen. De uitvoer van zoeken toont elk interval en middenpunt, inclusief de afwezige sleutel.

Python `zoek_sorteer_recursie.py` 56 regels

```python
from functools import cache

def zoek(a, sleutel):
    l,r = 0,len(a)
    spoor = []
    while l < r:
        m = (l+r)//2
        spoor.append((l,r,m,a[m]))
        if a[m] == sleutel: return m,spoor
        if a[m] < sleutel: l=m+1
```

```
        else: r=m
    return None,spoor

def invoeg(a):
    a = list(a)
    verschuivingen = 0
    for i in range(1,len(a)):
        sleutel = a[i]
        j = i
        while j>0 and a[j-1]>sleutel:
            a[j]=a[j-1]; j-=1; verschuivingen+=1
        a[j]=sleutel
    return a,verschuivingen

def merge(a):
    if len(a)<2: return list(a),0
    m=len(a)//2
    links,nl=merge(a[:m]); rechts,nr=merge(a[m:])
    i=j=0; resultaat=[]; vergelijkingen=nl+nr
    while i<len(links) and j<len(rechts):
        vergelijkingen+=1
        if links[i]<=rechts[j]: resultaat.append(links[i]); i+=1
        else: resultaat.append(rechts[j]); j+=1
    return resultaat+links[i:]+rechts[j:],vergelijkingen

for sleutel in (13,8):
    print("zoeken",sleutel,zoek([2,4,7,9,13,18,25,31],sleutel))
for n in (8,16,32):
    data=list(range(n,0,-1))
    a,ni=invoeg(data); b,nm=merge(data)
    assert a==b==sorted(data)
    print("n",n,"verschuivingen",ni,"mergevergelijkingen",nm)

aanroepen=0
def fib(n):
    global aanroepen
    aanroepen+=1
    return n if n<2 else fib(n-1)+fib(n-2)
print("fib(10)",fib(10),"aanroepen",aanroepen)
aanroepen=0
@cache
def fib_geheugen(n):
    global aanroepen
    aanroepen+=1
    return n if n<2 else fib_geheugen(n-1)+fib_geheugen(n-2)
print("fib memo",fib_geheugen(10),"berekende deelproblemen",aanroepen)
```

```
zoeken 13 (4, [(0, 8, 4, 13)])
zoeken 8 (None, [(0, 8, 4, 13), (0, 4, 2, 7), (3, 4, 3, 9)])
n 8 verschuivingen 28 mergevergelijkingen 12
n 16 verschuivingen 120 mergevergelijkingen 32
n 32 verschuivingen 496 mergevergelijkingen 80
fib(10) 55 aanroepen 177
fib memo 55 berekende deelproblemen 11
```

UITLEG · 34.6

O is een bovengrens, geen stopwatch

6/16

$f(n) = O(g(n))$ betekent: er bestaan $c > 0$ en n_0 zodat $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ voor alle $n \geq n_0$. Constanten en lagere machten verdwijnen uit de groeiklasse: $3n^2 + 20n + 7 = O(n^2)$. Met $\Theta(n^2)$ zeg je ook dat de orde van onderen begrensd is. Een $O(n^2)$ algoritme is formeel tevens $O(n^3)$; daarom vermeld je de scherpste nuttige grens.

Een werkmodel moet benoemen wat telt: vergelijkingen, vermenigvuldigingen, bytes of berichten. Op de Mega kan geheugengebruik de doorslag geven; op de Pi kan netwerk-I/O belangrijker zijn dan rekenen. Dezelfde asymptotische klasse kan een factor honderd verschillen. Meet met herhalingen, geef invoergrootte en omstandigheden en gebruik de mediaan; een kleine proef bewijst geen worst-case grens.



Bij n = 64 telt het kwadratische model 4096 bewerkingen; het n $\log_2$ n-model 384.

UITGEWERKT VOORBEELD · 34.7

Wanneer het kwadratische model vastloopt

7/16

Een controle vergelijkt elk record met elk ander record.

GEGEVEN

- Modeltijd T = 0,5 µs · n²
- tijdlimiet 1 s

GEVRAAGD

- Grootste n binnen het modelbudget

OPLOSSING

1. Los $0{,}5 \cdot 10^{-6} n^2 \leq 1$ op: $n \leq \sqrt{2 \cdot 10^6} = 1414{,}21$.
2. Een geheel aantal records geeft n ≤ 1414; n = 1415 overschrijdt het budget.
3. Een gesorteerde controle van opeenvolgende sleutels vraagt slechts n−1 vergelijkingen na het sorteren.

ANTWOORD

Ongeveer 1400 records: een jaarlog is vele malen te groot.

Klopt dit? De grens betreft dit werkmodel; een echt systeem moet ook I/O en piekbelasting meten.

UITLEG · 34.8

Recursie: een kleinere kopie van het probleem

8/16

Recursie heeft een **basisgeval** en een stap die aantoonbaar dichterbij dat geval komt. Voor faculteit: $0! = 1$ en $n! = n(n-1)!$ voor geheel $n \geq 1$. De invoer moet gevalideerd worden; een negatieve n bereikt 0 nooit. Elke actieve aanroep bewaart een frame: bij faculteit zijn tijd en stapel beide $O(n)$. Een iteratieve lus gebruikt $O(1)$ extra geheugen.

De naïeve Fibonacci-recursie $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ herberekent dezelfde deelproblemen. De aanroepboom groeit exponentieel. **Memoïsatie** bewaart elk resultaat eenmaal; dan worden tijd en geheugen $O(n)$. Een iteratieve oplossing bewaart alleen de vorige twee waarden. Deel-en-heers zoals mergesort is nuttige recursie, omdat de deelproblemen zonder deze explosieve overlap ontstaan.

OVERLAPPENDE FIBONACCI-DEELPROBLEMEN

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$$

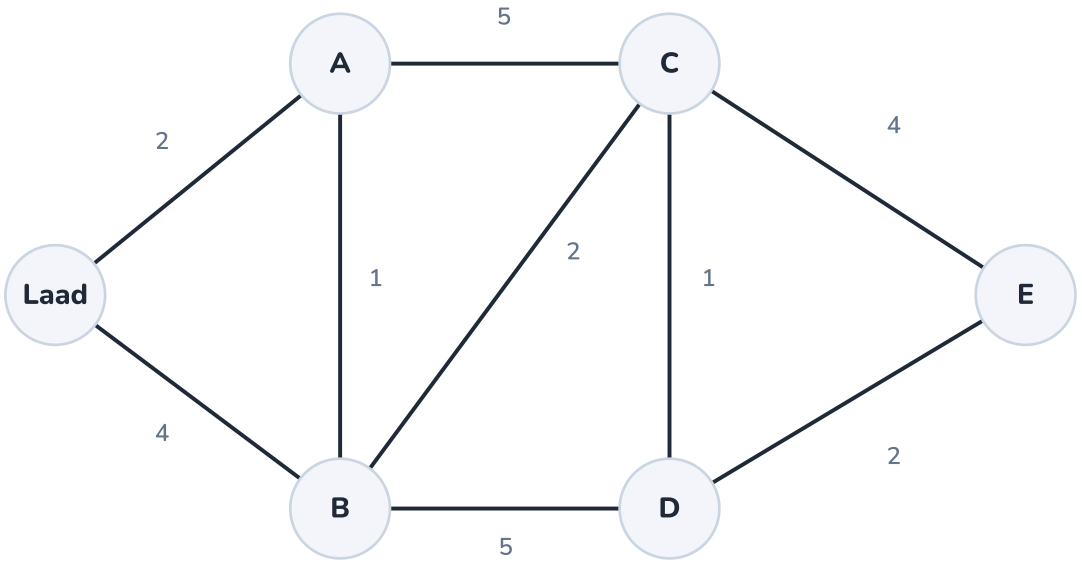
UITLEG · 34.9

De gang wordt een graaf

9/16

Een kruising of meetplaats is een knoop; een berijdbare verbinding is een kant. De afstand is een gewicht. Eenrichtingsverkeer vraagt gerichte kanten. Verboden doorgangen haal je uit de graaf; een grote straf is ongeschikt als de route echt verboden is. Bij vaste snelheid is afstand een bruikbare doelfunctie; bij draaien, wachten en hellingen modelleer je reistijd of energie.

Een **adjacentielijst** bewaart per knoop de buren: $O(V + E)$ geheugen. Een adjacentiematrix kost $O(V^2)$ en biedt directe kantopzoeking. Niet elk paar knopen is verbonden; onbereikbaarheid hoort als oneindige afstand in de uitvoer. Het voorbeeld breidt de lusrobot van i33 uit met keuzeroutes, zonder de eerdere ganggeometrie als echte stationskaart te presenteren.



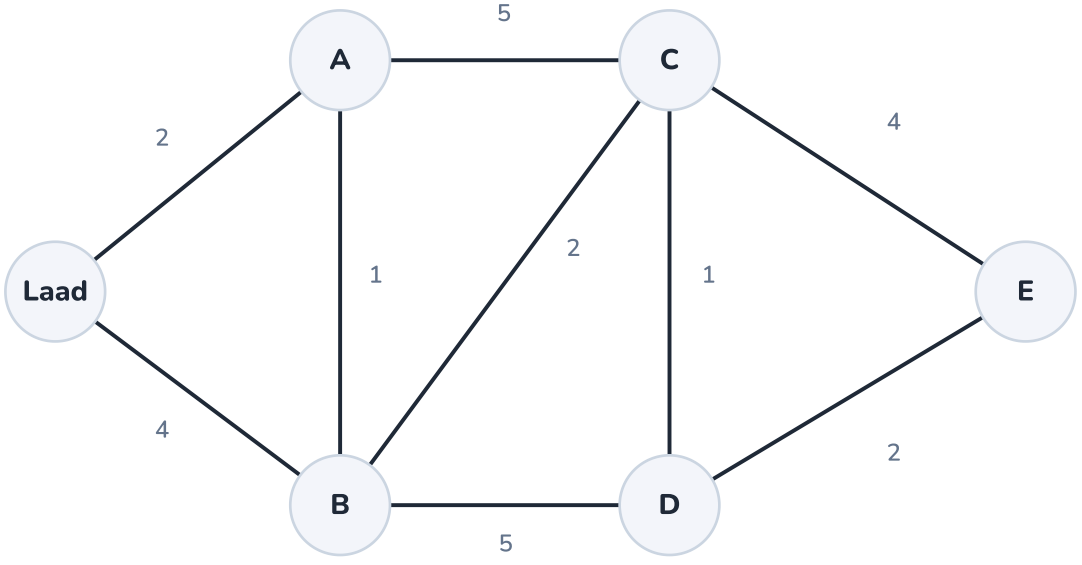
Kanten zijn berijdbare verbindingen; getallen zijn modelafstanden in meter, geen schaaltekening van de gang.

UITGEWERKT VOORBEELD · 34.10

Voorlopig is nog niet definitief

10/16

Dijkstra begint bij Laad en houdt een wachtrij met kandidaatparen (afstand,knoop) bij.



Kanten zijn berijdbare verbindingen; getallen zijn modelafstanden in meter, geen schaaltekening van de gang.

GEGEVEN

- Alle kantgewichten staan in de voorbeeldgraaf

GEVRAAGD

- De eerste drie extracties en relaxaties

OPLOSSING

1. Laad met 0 wordt definitief. Relaxaties leveren A=2 en B=4; wachtrij (2,A),(4,B).
2. A met 2 wordt genomen. B verbetert van 4 naar 3 via A; C krijgt 7 via A. De heap bevat (3,B),(4,B),(7,C).
3. B met 3 wordt genomen. C verbetert naar 5 en D krijgt 8. De oude (4,B) wordt later verworpen, omdat afstand[B] inmiddels 3 is. De invariant betreft de beste afstand per knoop, niet elke heapentry.

ANTWOORD

Definitief: Laad 0, A 2, B 3. Kandidaten C 5 en D 8.

Klopt dit? B=4 was ooit plausibel maar nooit definitief; voorganger[B] moet bij de verbetering ook veranderen.

UITLEG · 34.11

Dijkstra: waarom de kleinste kandidaat definitief is

11/16

Begin met afstand 0 bij de bron en oneindig elders. Neem telkens de kleinste voorlopige afstand uit de prioriteitswachtrij. Relaxeer alle uitgaande kanten: $d(v) \leftarrow \min(d(v), d(u) + w(u, v))$. Bewaar bij een verbetering de voorganger. Het pad lees je achterwaarts terug.

Het correctheidsargument gebruikt niet-negatieve gewichten: een omweg door nog onbekende knopen kan een reeds kleinste afstand niet verkleinen. Met een negatieve kant breekt dat argument. Een heap biedt $O(\log V)$ per extractie of invoeging; met een gebruikelijke efficiënte implementatie is de tijd $O((V + E) \log V)$. Deze lescode laat oude heapkandidaten staan: bij verwerking worden ze verworpen. De heap kan dan $O(E)$ entries bewaren, met tijd $O((V + E) \log E)$; voor eenvoudige grafen is dit dezelfde gebruikelijke logaritmische orde.

definitief	afstand (m)	voorganger
Laad	0	—
A	2	Laad
B	3	A
C	5	B
D	6	C
E	8	D

CODE · 34.12

Kortste pad en een kleine meetronde

12/16

De uitvoer wordt bij het bouwen opnieuw berekend. De meetronde bezoekt A, C en E en keert terug; we testen voor slechts drie meetpunten alle zes volgordes. Dijkstra berekent de afstanden tussen meetpunten, maar kiest zelf geen optimale rondreis.

Python **robot_route.py** 46 regels

```python
from heapq import heappush, heappop
from itertools import permutations

G = {k: {} for k in ("Laad", "A", "B", "C", "D", "E")}
for a, b, w in [("Laad","A",2), ("Laad","B",4), ("A","B",1),
                ("A","C",5), ("B","C",2), ("B","D",5),
                ("C","D",1), ("C","E",4), ("D","E",2)]:
    G[a][b] = G[b][a] = w

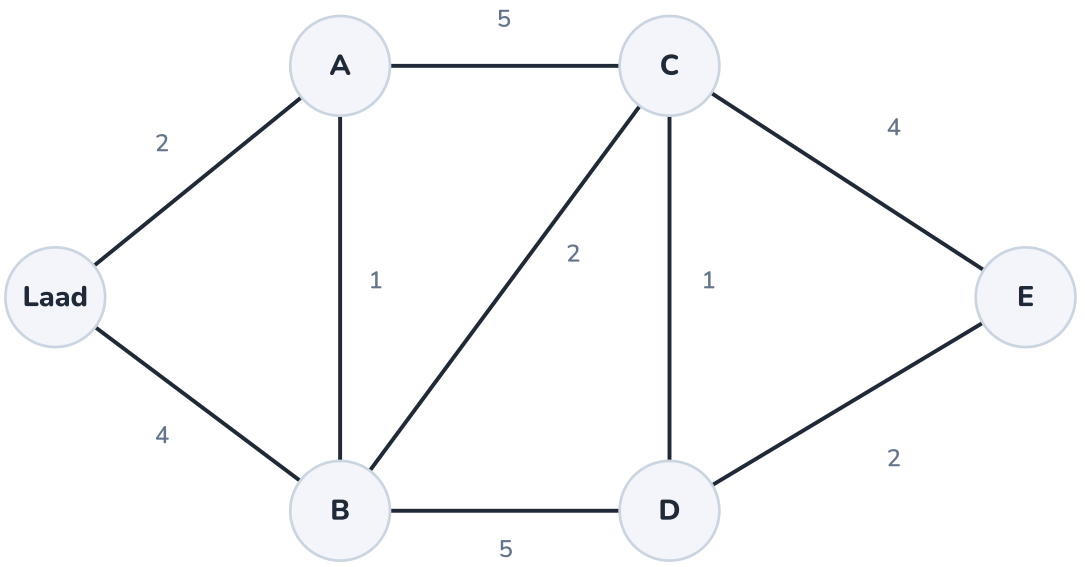
def dijkstra(g, start):
    afstand = {v: float("inf") for v in g}
    vorig = {}
    afstand[start] = 0
    wachtrij = [(0, start)]
    while wachtrij:
        d, v = heappop(wachtrij)
        if d != afstand[v]:  # oude kandidaat na een betere route
            continue
        for buur, w in g[v].items():
            if w < 0:
                raise ValueError("Dijkstra vereist niet-negatieve gewichten")
            nieuw = d + w
            if nieuw < afstand[buur]:
                afstand[buur] = nieuw
                vorig[buur] = v
                heappush(wachtrij, (nieuw, buur))
    return afstand, vorig

def pad(vorig, doel):
    route = [doel]
    while route[-1] in vorig:
        route.append(vorig[route[-1]])
    return route[::-1]

d, v = dijkstra(G, "Laad")
print("afstanden", d)
print("route", " -> ".join(pad(v, "E")))
print("rijtijd", d["E"] / 0.20, "s")
stations = ("A", "C", "E")
alle = {k: dijkstra(G, k)[0] for k in ("Laad",)+stations}
def rondelengte(volgorde):
    p = ("Laad",)+volgorde+("Laad",)
    return sum(alle[a][b] for a,b in zip(p,p[1:]))
best = min(permutations(stations), key=rondelengte)
print("meetronde", best, rondelengte(best), "m")
assert d["E"] == 8 and rondelengte(best) == 16
```

```
afstanden {'Laad': 0, 'A': 2, 'B': 3, 'C': 5, 'D': 6, 'E': 8}
route Laad -> A -> B -> C -> D -> E
```

```
rijtijd 40.0 s
meetronde ('A', 'C', 'E') 16 m
```



Kanten zijn berijdbare verbindingen; getallen zijn modelafstanden in meter, geen schaaltekening van de gang.

UITLEG · 34.13

Eén bestemming verschilt van alle bezoeken

13/16

Een kortste pad tussen twee knopen is een ander probleem dan een rondreis die alle inspectiepunten bezoekt. Het handelsreizigersprobleem heeft in een brute-force aanpak $n!$ volgordes; symmetrie kan dat aantal verkleinen, maar de groei blijft explosief. Voor drie punten zijn zes volgordes klein, voor twintig zijn het circa $2{,}43 \cdot 10^{18}$.

Een heuristiek zoals telkens de dichtstbijzijnde onbezochte plek geeft snel een route, zonder garantie op het optimum. A* gebruikt een ondergrens op de resterende afstand: met een geschikte admissibele heuristiek blijft een optimale oplossing mogelijk. Bij veranderende obstakels moet de robot opnieuw plannen. Lokale obstakeldetectie en de noodstop blijven afzonderlijke functies: een optimale kaart mag nooit een actuele blokkade overrulen.

BRUTE FORCE GROEIT SNELLER DAN DE ROBOT KAN WACHTEN

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$$

VERHAAL · 34.14

Een echte softwareles: bibliotheken hebben voorwaarden

14/16

De Python-documentatie beschrijft `bisect` als invoegposities zoeken in een gesorteerde lijst. De zoekstap is logaritmisch, maar invoegen in een array verschuift elementen en kost lineaire tijd. Een naam

zoals ‘binaire invoeging’ maakt dus de volledige bewerking niet logaritmisch. Voor de stationslogger, die bijna altijd in tijdsvolgorde schrijft, is achteraan toevoegen eenvoudiger.

De documentatie van `heapq` beschrijft de min-heap: het kleinste element ligt bovenaan, terwijl de overige lijst niet volledig gesorteerd is. Een heap en een geordende lijst hebben verschillende invarianten. Bron: Python bisect en heapq, geraadpleegd 30-09-2026.

structuur	snel	voorwaarde
bisect	positie zoeken	lijst blijft gesorteerd
heap	minimum verwijderen	heapinvariant
hash-tabel	sleutel opzoeken, gemiddeld	hash en gelijkheid correct

NASLAG · 34.15

Algoritmen kiezen met een contract

15/16

invoegsorteren, omgekeerde invoer

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

symbool	betekenis	eenheid
n	aantal records	—

situatie	keuze	controle
één sleutel, ongesorteerd	lineair	eerste/laatste/afwezig
veel sleutels, geordend	binair	dubbele sleutels en intervalgrenzen
niet-negatieve routekosten	Dijkstra	onbereikbaar, nullen, duplicaten
harde deadline	begrensd algoritme	worst-case geheugen en uitvoering

HET GEHEEL · 34.16

Rekenen, bewegen en plannen

16/16

Een algoritme verplaatst geen robot zonder correcte kaart, eenheidsafspraken en een actuatorlaag. De routeplanner produceert een lijst van knopen; de bestaande lijnvolger voert de verbindingen uit. Het meetbudget omvat rijden, stilstand, controleren en terugkeren.

I33 Een mobiele robot

De bestaande robot voert de route uit.

E35 Objectgericht programmeren en softwareontwerp

Planner en bestuurder worden aparte modules.

E37 Embedded systemen en IoT

Een deadline vraagt een begrensde uitvoering.

E48 Technisch communiceren en projectmanagement

Een afhankelijkheidsgraaf geeft ook een kritisch pad.

Habitat

Habitat krijgt een routeplanner op de Pi; de microcontroller behoudt afstandsbewaking en stoppen. De gewogen graaf is een expliciet voorbeeldmodel, te vervangen door een opgemeten kaart.

SAMENVATTING

In het kort

- Correctheid vraagt een contract en invariant; snelheid vraagt een bewerkingsmodel.
- Binair zoeken gebruikt orde; sorteren kan duurder zijn dan één zoekopdracht.
- Recursie moet eindigen en kan herhaald werk veroorzaken.
- Dijkstra lost niet-negatieve kortste paden op; een bezoekronde is een ander probleem.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

tijdscomplexiteit
De groei van het aantal elementaire bewerkingen als functie van de invoergrootte.

invariant
Een eigenschap die vóór en na elke lusiteratie waar blijft.

recursie
Een functie die kleinere exemplaren van hetzelfde probleem oplost door zichzelf aan te roepen.

graaf
Een verzameling knopen met verbindingen, eventueel met richting en gewicht.

relaxatie
Een voorlopige padafstand vervangen wanneer een kortere route wordt gevonden.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 35

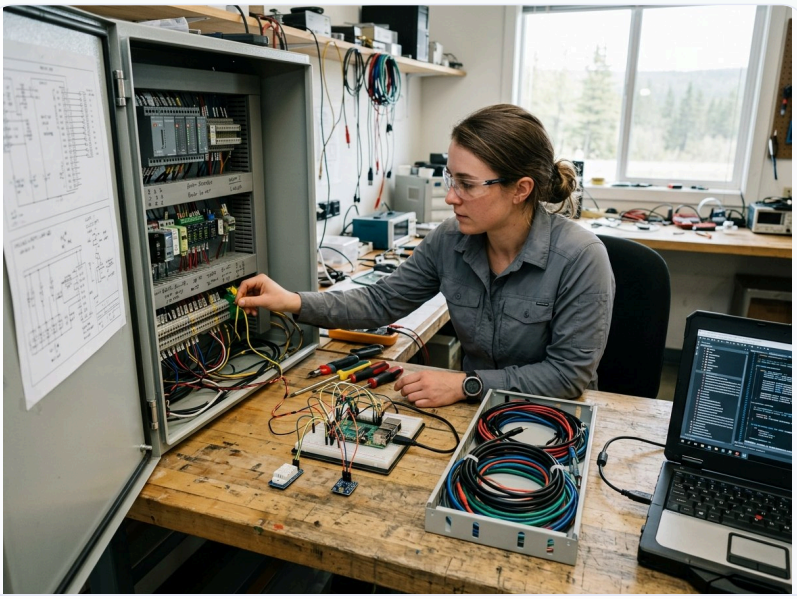
Objectgericht programmeren en softwareontwerp

Software groeit door duidelijke contracten, vervangbare onderdelen en aantoonbaar gedrag

In klimaat.ino v5 werken meten, pompen, dimmen en alarmen al samen. De Pi voegt modellen en voorspellingen toe. Je verdeelt die software in objecten die hun toestand bewaken, test hun grenzen en maakt elke wijziging terugvindbaar.

10× uitleg · 4× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 3× code · ± 11 lestijden

P Programmeren en computationeel denken · D Ontwerpen en maken



Een softwaregrens maakt een sensor verwisselbaar zonder de regelwet te herschrijven.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een klasse met eigen objecttoestand en methoden ontwerpen.
- Je kan samenstelling en overerving afwegen met een interfacecontract.
- Je kan meetdata, hardware en beslislogica modulair scheiden.
- Je kan unit tests voor normale waarden, grenzen en fouten schrijven.
- Je kan met git een wijziging, review en reproduceerbare versie beschrijven.

UITLEG · 35.1

Een object bezit samenhangende toestand

1/20

Een losse variabele `temperatuur` kan uit elke taak overschreven worden. Een sensorobject bewaart zijn kalibratie, laatste geldige meting en tijdstip samen. De klasse legt vast welke methoden die toestand mogen veranderen. Twee instanties van dezelfde klasse kunnen andere adressen en kalibraties hebben: hun identiteit en toestand zijn verschillend, hun gedrag volgt dezelfde definitie.

Een **attribuut** is opgeslagen informatie; een **methode** is een functie die via `self` de instantie kent. De constructor `__init__` maakt een geldige begintoestand. Een invariant zoals ‘het maximaal vermogen is positief’ hoort na de constructor en na elke toegestane wijziging waar te blijven. Objectgericht ontwerpen draait om zulke invarianten en verantwoordelijkheden, niet om elk zelfstandig naamwoord in een klasse te veranderen.

object	toestand	gedrag
Sensor S1	adres, offset, tijd	lees, kalibreer
Regelaar kamer	Kp, Ki, integraal	stap, reset
Energiebeheer	SoC, grenzen, modus	plan, begrens

UITLEG · 35.2

Een gedeelde lijst kan alle sensoren besmetten

2/20

Een klasseattribuut wordt door instanties gedeeld. `class Sensor: fouten=[]` geeft alle sensoren dezelfde mutable lijst. Voeg je bij S1 een fout toe, dan ziet S2 die ook. Maak een eigen lijst in `__init__`: `self.fouten=[]`. Ook een standaardargument `fouten=[]` wordt eenmaal aangemaakt; gebruik `None` en maak binnen de functie een nieuwe lijst.

Python kent geen harde private attribuutgrens. Een voorloopunderscore betekent ‘intern, gebruik het contract’. Properties kunnen validatie afdwingen. Een onveranderlijke `dataclass(frozen=True)` is geschikt voor een meetrecord: tijd, waarde, eenheid en kwaliteit blijven bij elkaar. De dataclass garandeert niet automatisch fysieke geldigheid; die toets je expliciet.

keuze	gevolg
self.offset	per instantie
klasse constante MAX_W	bewust gedeeld
klasse lijst fouten	gedeelde wijzigbare toestand
frozen meetrecord	velden niet gewoon opnieuw toewijzen

UITGEWERKT VOORBEELD · 35.3

Een objectwissel zonder regelwetwissel

3/20

Twee temperatuuradapters leveren 18,0 °C met een geldig tijdstip.

GEGEVEN

- De ene adapter gebruikt SHT31, de andere een testreeks
- het contract is identiek

GEVRAAGD

- Wat hoort gelijk te blijven en wat mag verschillen?

OPLOSSING

1. De regelaar ontvangt hetzelfde meetrecord en produceert dezelfde warmtevraag: bij r=20 en Kp=200 is dat 400 W.

2 De adapter mag verschillen in buscode, adres en interne kalibratie, zolang bereik, eenheid, leeftijd en foutgedrag blijven passen.

3 De integratietest controleert naast het unit-resultaat ook dat de echte adapter een geldig record levert en niet blokkeert.

ANTWOORD

Vervangbaarheid wordt aan gedrag en timing getoetst, niet aan de klassenaam.

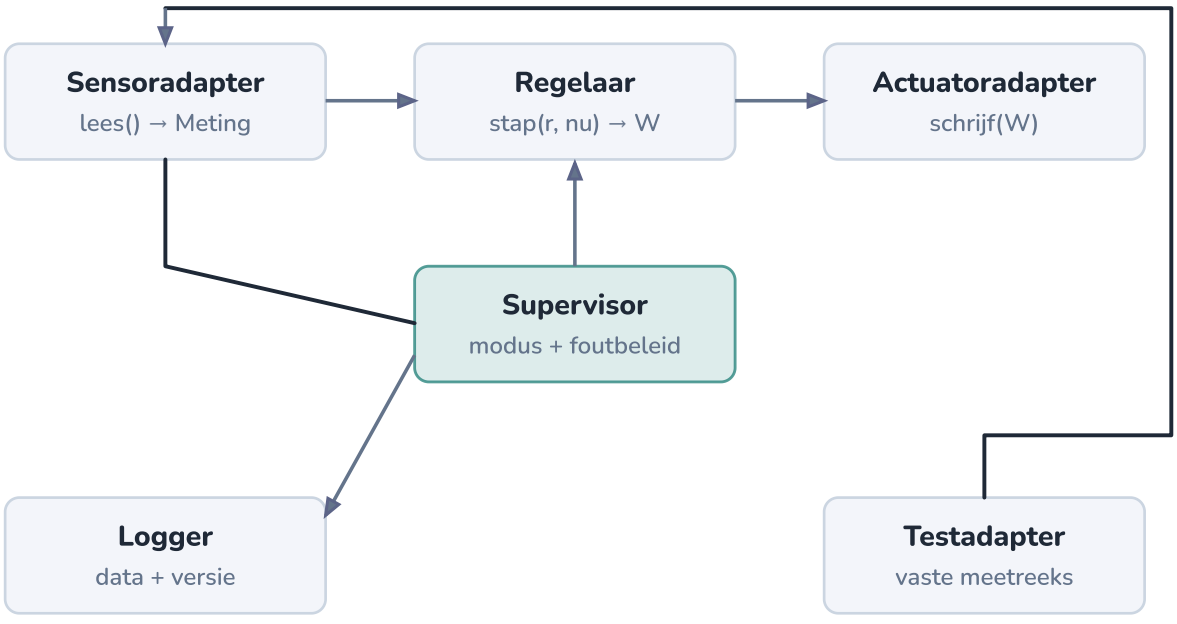
UITLEG · 35.4

Interfaces dragen betekenis, geen stekkervorm

4/20

Twee sensoren met een methode `lees()` zijn pas verwisselbaar als hun resultaten dezelfde betekenis hebben. Een contract benoemt eenheid, bereik, tijdreferentie, maximale leeftijd en foutgedrag. Een kelvinsensor die een gewoon getal teruggeeft kan syntactisch passen maar de verwarming onmiddellijk laten uitschakelen.

De les gebruikt `Meting(waarde, tijd_s, eenheid)`. Een `Protocol` beschrijft voor typecontrole de verwachte methode; Python controleert deze typehint niet vanzelf tijdens uitvoering. De regelaar voert daarom runtimecontroles uit. In echte stationslogs is `tijd_s` een monotone leeftijdsklok binnen een sessie; de logger bewaart daarnaast een kalenderstempel in UTC+1. Een herstart-ID voorkomt dat twee monotone tijdlijnen worden verward.



Een sensor levert data; de supervisor beslist wat een sensorfout voor de bedrijfsmodus betekent.

UITLEG · 35.5

Samenstelling: een regelaar heeft een sensor

5/20

Een regelaar **heeft** een sensor en een actuator. Hij **is** geen sensor. Samenstelling past daarbij: de constructeur krijgt een sensorobject en gebruikt zijn interface. Dit heet dependency injection. De test kan een ProefSensor leveren en de installatie een SHT31-adapter zonder de regelwet te wijzigen.

Elke verantwoordelijkheid heeft één eigenaar. In i40 werd het pompconflict opgelost door één taak de pomp te laten sturen. Maak op de Pi geen tweede schrijver die rechtstreeks hetzelfde relais bestuurt. De Pi stuurt begrensde setpoints of voorstellen; de Mega blijft eigenaar van lokale actuatoren en veiligheidsmodi. Een interface die een voorstel accepteert, moet ook weigering, timeout en huidige modus terugmelden.

laag	verantwoordelijkheid	mag niet
hardwareadapter	uitlezen en omzetten	bedrijfsbeleid verzinnen
regelaar	regelfout naar vraag	netwerk opnieuw verbinden
supervisor	modus en fallback	noodstop omzeilen
logger	bewijs bewaren	de pomp aanzetten

UITGEWERKT VOORBEELD · 35.6

Een dubbele pompschrijver opsporen

6/20

De klimaatregeling en AI-taak willen beide relais POMP aansturen.

GEGEVEN

- Regeling: reservoir te laag → pomp uit
- AI: planten slap → extra pompbeurt

GEVRAAGD

- Een architectuur die beide bedoelingen correct verwerkt

OPLOSSING

1. Twee schrijvers geven racegedrag: de laatste write wint, ook als het reservoir leeg is.
2. Maak één lokale pompcontroller. De AI levert alleen een verzoek met duur en vervaltijd; de controller controleert niveau, modus en bestaande cyclus.
3. Een laag-niveauvoorwaarde weigert het verzoek. De weigering wordt met reden en request-ID gelogd, zodat de AI haar actie niet als uitgevoerd telt.

ANTWOORD

Één eigenaar met expliciete verzoeken vervangt twee concurrerende relaiswriters.

UITLEG · 35.7

Overerving: een afgeleid object moet zijn belofte houden

7/20

Overerving is passend als een afgeleid type overal bruikbaar blijft waar het basistype beloofd is. Een temperatuuradapter kan van een algemene sensoradapter erven als lezen, tijdstempels en fouten hetzelfde contract behouden. De subklasse mag geen extra preconditie toevoegen die oude gebruikers niet kennen.

Een basisklasse `Actuator.schrijf(vermogen_W)` vervangen door een subklasse die procenten verwacht schendt het contract. Ook een blokkerende netwerkvariant schendt een contract van maximaal 5 ms, al heeft ze dezelfde methodenaam. Vermijd diepe ervingsbomen. Een kleine interface met samenstelling maakt variaties in sensor, opslag en communicatietransport vaak eenvoudiger.

Overerving bespaart altijd code

Hergebruik zonder substitueerbaarheid koppelt wijzigingen aan onverwachte plaatsen. Kies een gedeelde helper of samenstelling als de betekenis van het gedrag verschilt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 35.8

Een contract maakt een fout zichtbaar

8/20

De P-regelaar gebruikt Kp = 200 W/K, setpoint 20 °C en vermogen 0–2000 W.

GEGEVEN

- meting 18 °C op t = 10 s
- nu = 11 s
- maximale leeftijd 5 s

GEVRAAGD

- Gevraagd vermogen en gedrag bij t = 16 s

OPLOSSING

1. De leeftijd is 1 s: binnen het contract. De fout is 2 K en de vraag is 400 W.
2. Op t = 16 s is dezelfde meting 6 s oud. De regelaar weigert haar; de supervisor kiest de vooraf ontworpen gedegradeerde modus.
3. Een fout teruggeven verschilt van 0 W bevelen: 0 W zou de kamer zonder beoordeling laten afkoelen.

ANTWOORD

400 W bij verse data; expliciete fout bij veroudering.

Klopt dit? De 5 s-grens is het lescontract voor de snelle regelinput, niet de MQTT-telemetrieperiode.

CODE · 35.9

Vervangbare meting, echte grensgevallen

9/20

Deze module draait zeven unit tests met extra subtests voor niet-eindige instellingen tijdens het bouwen. Het is een P-regelaar om de softwaregrenzen zichtbaar te maken; e39 levert de PI(D)-regelwet. De supervisor staat buiten deze unit en bepaalt de fallback. De constructor weigert ook NaN en oneindig; het setpoint en de klok krijgen hun eigen contractcontrole.

Python **regelaar_contract.py** 73 regels

```python
from dataclasses import dataclass
from math import isfinite
from typing import Protocol
import unittest
import io

@dataclass(frozen=True)
class Meting:
    waarde: float
    tijd_s: float
    eenheid: str = "degC"

class Sensor(Protocol):
    def lees(self) -> Meting: ...

class ProefSensor:
    def __init__(self, waarde, tijd_s):
        self.waarde, self.tijd_s = waarde, tijd_s
    def lees(self):
        return Meting(self.waarde, self.tijd_s)

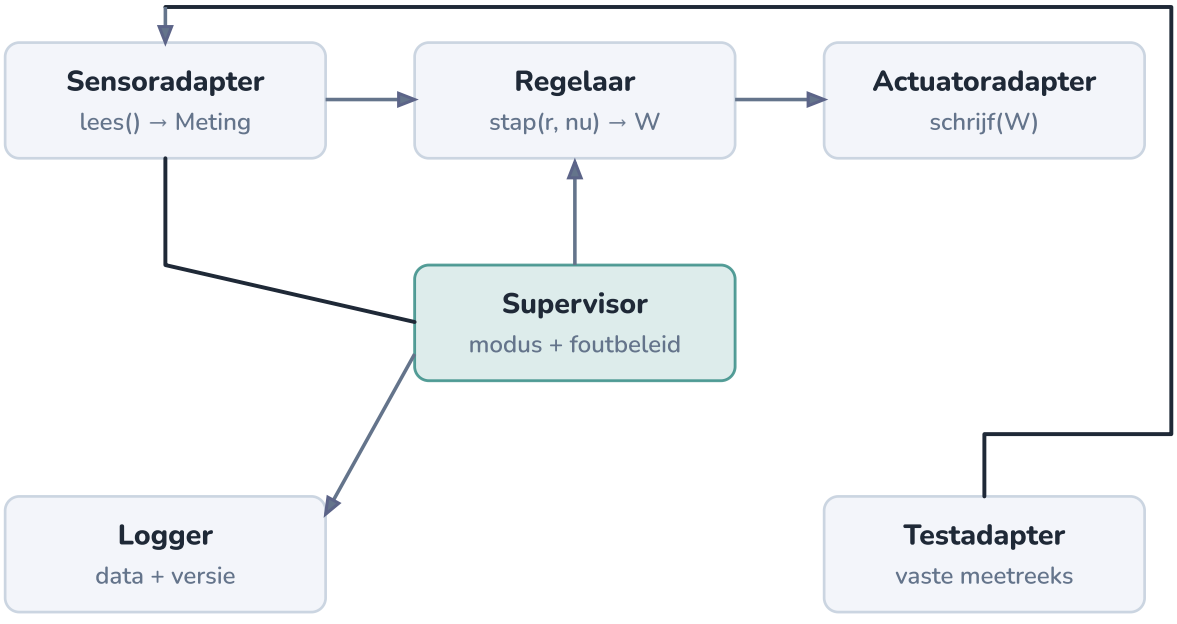
class Regelaar:
    def __init__(self, sensor, kp=200.0, grens=2000.0, max_leeftijd=5.0):
        if (not all(isfinite(x) for x in (kp, grens, max_leeftijd))
                or kp < 0 or grens <= 0 or max_leeftijd <= 0):
            raise ValueError("ongeldige instelling")
        self.sensor = sensor            # samenstelling, geen Sensor-subklasse
        self.kp, self.grens = kp, grens
        self.max_leeftijd = max_leeftijd
    def stap(self, setpoint, nu):
        if not isfinite(setpoint) or not -30 <= setpoint <= 60 or not isfinite(nu):
            raise ValueError("ongeldig setpoint of tijdstip")
        m = self.sensor.lees()
        if (m.eenheid != "degC" or not isfinite(m.waarde) or not isfinite(m.tijd_s)
                or not -30 <= m.waarde <= 60
                or not 0 <= nu - m.tijd_s <= self.max_leeftijd):
            raise ValueError("meting onbruikbaar; supervisor kiest veilige modus")
        return min(self.grens, max(0.0, self.kp * (setpoint - m.waarde)))

class TestRegelaar(unittest.TestCase):
    def test_normaal(self):
        self.assertEqual(Regelaar(ProefSensor(18,10)).stap(20,11), 400)
    def test_begrenzing(self):
        self.assertEqual(Regelaar(ProefSensor(0,10)).stap(20,11), 2000)
        self.assertEqual(Regelaar(ProefSensor(23,10)).stap(20,11), 0)
    def test_oud(self):
        with self.assertRaises(ValueError):
            Regelaar(ProefSensor(18,10)).stap(20,16)
    def test_nan(self):
        with self.assertRaises(ValueError):
            Regelaar(ProefSensor(float("nan"),10)).stap(20,11)
```

```
    def test_eenheid(self):
        class Kelvin:
            def lees(self): return Meting(291.15,10,"K")
        with self.assertRaises(ValueError):
            Regelaar(Kelvin()).stap(20,11)
    def test_instellingen(self):
        for naam in ("kp", "grens", "max_leeftijd"):
            for waarde in (float("nan"), float("inf"), -float("inf")):
                with self.subTest(naam=naam, waarde=waarde), self.assertRaises(ValueError):
                    Regelaar(ProefSensor(18,10), **{naam:waarde})
    def test_invoer(self):
        for r,nu in [(float("nan"),11),(float("inf"),11),(20,float("nan")),(61,11)]:
            with self.subTest(r=r,nu=nu), self.assertRaises(ValueError):
                Regelaar(ProefSensor(18,10)).stap(r,nu)

log = io.StringIO()
suite = unittest.defaultTestLoader.loadTestsFromTestCase(TestRegelaar)
resultaat = unittest.TextTestRunner(stream=log).run(suite)
print("tests", resultaat.testsRun, "fouten", len(resultaat.errors),
      "mislukt", len(resultaat.failures))
print("warmtevraag", Regelaar(ProefSensor(18,10)).stap(20,11), "W")
assert resultaat.wasSuccessful()
```

```
tests 7 fouten 0 mislukt 0
warmtevraag 400.0 W
```



Een sensor levert data; de supervisor beslist wat een sensorfout voor de bedrijfsmodus betekent.

CODE · 35.10

Overerving uitvoeren, samenstelling behouden

10/20

De gekalibreerde sensor erft alleen het passende sensorcontract: waarde in °C met hetzelfde meettijdstip. Hij roept de basisconstructor en de basismethode via super() aan, voegt de offset toe en behoudt eenheid en leeftijd. De Regelaar blijft door samenstelling dezelfde sensorinterface gebruiken. Het verschil van 60 W tussen ruw en geijkt volgt uit 0,3 K × 200 W/K; overerving verandert de regelwet niet.

Python **sensor_overerving.py** 54 regels

```python
from dataclasses import dataclass
from math import isfinite
from typing import Protocol
import unittest
import io

@dataclass(frozen=True)
class Meting:
    waarde: float
    tijd_s: float
    eenheid: str = "degC"

class Sensor(Protocol):
    def lees(self) -> Meting: ...

class ProefSensor:
    def __init__(self, waarde, tijd_s):
        self.waarde, self.tijd_s = waarde, tijd_s
    def lees(self):
        return Meting(self.waarde, self.tijd_s)

class Regelaar:
    def __init__(self, sensor, kp=200.0, grens=2000.0, max_leeftijd=5.0):
        if (not all(isfinite(x) for x in (kp, grens, max_leeftijd))
                or kp < 0 or grens <= 0 or max_leeftijd <= 0):
            raise ValueError("ongeldige instelling")
        self.sensor = sensor            # samenstelling, geen Sensor-subklasse
        self.kp, self.grens = kp, grens
        self.max_leeftijd = max_leeftijd
    def stap(self, setpoint, nu):
        if not isfinite(setpoint) or not -30 <= setpoint <= 60 or not isfinite(nu):
            raise ValueError("ongeldig setpoint of tijdstip")
        m = self.sensor.lees()
        if (m.eenheid != "degC" or not isfinite(m.waarde) or not isfinite(m.tijd_s)
                or not -30 <= m.waarde <= 60
                or not 0 <= nu - m.tijd_s <= self.max_leeftijd):
            raise ValueError("meting onbruikbaar; supervisor kiest veilige modus")
        return min(self.grens, max(0.0, self.kp * (setpoint - m.waarde)))


class GekalibreerdeProefSensor(ProefSensor):
    def __init__(self, waarde, tijd_s, offset):
        super().__init__(waarde, tijd_s)
        if not isfinite(offset): raise ValueError("offset niet eindig")
        self.offset = offset
    def lees(self):
        m = super().lees()
        return Meting(m.waarde+self.offset, m.tijd_s, m.eenheid)

ruw = ProefSensor(18.3,10)
geijkt = GekalibreerdeProefSensor(18.3,10,-0.3)
for sensor in (ruw, geijkt):
    print(type(sensor).__name__, Regelaar(sensor).stap(20,11), "W")
assert abs(Regelaar(geijkt).stap(20,11)-400)<1e-10
```

```
ProefSensor 339.9999999999999 W
GekalibreerdeProefSensor 400.0 W
```

UITLEG · 35.11

Refactoren naar bestanden met gerichte imports

11/20

In een echte projectmap staat `hab_meet.py` met het immutable record, `hab_vraag.py` met de zuivere regelkern, `adapters/sht31.py` met I²C en `app.py` als samensteller. De regelkern importeert de meetdefinitie, nooit omgekeerd. Hardwareadapters importeren het contract; het contract importeert geen hardwarebibliotheek. Zo ontstaan geen cirkelimports.

Bij refactoring bewaar je eerst het bestaande gedrag in tests, verplaats je één verantwoordelijkheid en pas je de imports aan. Daarna draai je dezelfde tests. Wijzig tijdens die stap geen regelinstellingen: een verplaatsing en een gedragswijziging in één diff maken de oorzaak van een regressie onduidelijk. De onderstaande uitvoering gebruikt echte Python-imports tussen in-geheugenmodules; dezelfde bron wordt als bijlage getoond voor fysieke bestanden.

bestand	importeert	doel
hab_meet.py	dataclasses	datacontract
hab_vraag.py	hab_meet	zuivere kern
adapters/sht31.py	hab_meet + hardwarelibrary	apparaatgrens
app.py	kern en adapters	samenstelling

CODE · 35.12

Een modulegrens werkelijk uitvoeren

12/20

Het demo-laadmechanisme registreert twee modules tijdelijk en herstelt de importomgeving achteraf. De gewone installatie gebruikt dezelfde imports uit bestanden. De uitvoer toont 400 W. Dit minimale voorbeeld demonstreert afhankelijkheidsrichting; de uitgebreide finite- en leeftijdscontroles blijven in regelaar_contract.py.

Python `module_demo.py` 22 regels

```python
# In een echte map staan de eerste twee bronnen in aparte .py-bestanden.
# Hier worden dezelfde modules in geheugen geladen voor reproduceerbare uitvoer.
import sys
import types
import importlib

bronnen = {
    "hab_meet": "from dataclasses import dataclass\n@dataclass(frozen=True)\nclass Meting:\n    waarde: float\n    tijd_s: float\n",
    "hab_vraag": "from hab_meet import Meting\ndef vraag(m: Meting, r=20.0):\n    return max(0.0,min(2000.0,200.0*(r-m.waarde)))\n"}
oud = {naam:sys.modules.get(naam) for naam in bronnen}
try:
    for naam,bron in bronnen.items():
        module = types.ModuleType(naam)
        sys.modules[naam] = module
        exec(bron,module.__dict__)
    meten = importlib.import_module("hab_meet")
    regelen = importlib.import_module("hab_vraag")
    print("module-invoer", regelen.vraag(meten.Meting(18.0,10)), "W")
finally:
    for naam,vorige in oud.items():
        if vorige is None: sys.modules.pop(naam,None)
```

```
        else: sys.modules[naam] = vorige
```

```
module-invoer 400.0 W
```

UITLEG · 35.13

Unit tests: bewijs van gevallen, geen bewijs van alles

13/20

Een goede test maakt een fout zichtbaar en vertelt welk contract faalt. Normale invoer alleen is zwak: test minimum, maximum, net erbuiten, oude tijd, toekomsttijd, NaN, ontbrekende eenheid en sensoruitzondering. Een grens van leeftijd ≤ 5 s vraagt tests op 5 en net boven 5 s. NaN is bijzonder: gewone vergelijkingen leveren geen betrouwbare bereiktoets; `isfinite` maakt de bedoeling expliciet.

Een testdouble levert vaste invoer; een fake benadert een echte afhankelijkheid, een mock controleert interacties. Test bij voorkeur waarneembaar gedrag, niet private velden. Een unit test bewijst geen bedrading, timing of realistisch procesgedrag: integratietests verbinden onderdelen, systeemtests toetsen eisen en validatie toont bruikbaarheid voor bewoners.

test	detecteert	mist mogelijk
unit	foute begrenzing	kapotte SSR
integratie	verkeerde eenheid adapter	reële deadline
hardware-in-lus	timer en signaalpad	langzame veroudering
bewonerproef	bedieningsprobleem	zeldzame faalwijze

UITLEG · 35.14

Testbaarheid verandert het ontwerp

14/20

Een regelaar die zelf de klok leest, een sensor opent en een netwerkbericht stuurt, is moeilijk reproduceerbaar. Geef tijd en meting via interfaces. Een simulatieklok kan precies een timeoutgrens aanbieden. Maak de kern zo veel mogelijk deterministisch: dezelfde invoer en toestand geven dezelfde uitvoer.

Bewaar de PID-integraal in het regelaarobject; log de overgang die hem reset. Beperk toegang tot gedeelde toestand en bepaal wie waarden schrijft. Bij gelijktijdige processen op Linux kan een meetrecord halverwege veranderd worden. Een onveranderlijk record of expliciete wachtrij maakt het overdrachtsmoment zichtbaar. Een test die uitsluitend dezelfde formule kopieert in het verwachte resultaat kan dezelfde fout herhalen; gebruik onafhankelijke handberekende gevallen.

EEN OBSERVEERBAAR CONTRACT MET FYSISCHE GRENZEN

$$u = \min(u_{\max}, \max(0, K_p(r - y)))$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 35.15

Een staged wijziging reconstrueren

15/20

Een bestand heeft eerst versie A. Je wijzigt naar B, doet git add en wijzigt daarna naar C.

GEGEVEN

- HEAD: A
- index: B
- werkmap: C

GEVRAAGD

- Betekenis van beide diffs en de volgende commit

OPLOSSING

1. git diff vergelijkt C met B en toont alleen de laatste werkmapwijziging.
2. git diff --staged vergelijkt B met A en toont de geselecteerde commitwijziging.
3. git commit legt B vast; C blijft als lokale wijziging aanwezig. Voor C als bedoelde release moet je opnieuw selecteren en toetsen.

ANTWOORD

Werkmap, index en geschiedenis zijn drie afzonderlijke momenten.

UITLEG · 35.16

Git: drie plaatsen, één gecontroleerde wijziging

16/20

Git onderscheidt de werkmap, de index (staging area) en de commitgeschiedenis. `git diff` toont werkmap tegenover index; `git diff --staged` toont wat in de volgende commit komt. `git add` selecteert een momentopname: latere edits zitten niet automatisch in die selectie. `git commit` legt de geselecteerde inhoud met een toelichting vast.

Een branch is een verplaatsbare verwijzing naar een commit. Maak een tak voor een verandering, toets het gedrag en laat een tweede lezer het diff beoordelen. Bij een conflict vergelijkt de integrator de bedoelingen en runt hij opnieuw tests; conflictmarkers verwijderen bewijst geen correcte integratie. Gebruik voor een gedeelde fout een nieuwe herstelcommit (`git revert`), zodat de geschiedenis terugvindbaar blijft.

stap	voorbeeldcommando
inspecteer	git status; git diff
maak werktak	git switch -c sensor-leeftijd
selecteer	git add regelaar.py tests/test_regelaar.py
review selectie	git diff --staged
toets	python -m unittest discover
leg vast	git commit -m 'Weiger verouderde temperatuurmetingen'
controle geschiedenis	git log --oneline

UITLEG · 35.17

Een versie is meer dan alleen de broncode

17/20

Een reproduceerbare stationsrelease benoemt commit-ID, configuratie, kalibratieversie, modelbestand, dataselectie en testverslag. Een broncodecommit zegt niets over een later overschreven modelbestand. Geef elk model een checksum en beschrijf welke sensor- en softwareversies ermee compatibel zijn.

Geheime sleutels horen niet in git. Een genegeerd bestand dat vroeger al gevolgd werd, blijft gevolgd; `.gitignore` maakt een gelekt geheim niet ongedaan. Trek een gelekte sleutel in en herstel de toegang. Een release op de Pi krijgt een terugrolpad naar een geteste vorige versie; lokale veiligheid blijft tijdens update bij de microcontroller. Een rollback van software kan ongeschikt zijn als het databankformaat al gewijzigd is: test de migratie en terugweg samen.

manifestveld	voorbeeld
code	commit-ID
kalibratie	S1-versie 3
model	warmte-v2 + SHA-256
configuratie	vermogen 2000 W, grenzen
bewijs	unit-, integratie- en systeemtestverslag

VERHAAL · 35.18

Softwaregeschiedenis: Simula maakte objecten een ontwerpmiddel

18/20

Het Noorse Computing Center beschrijft Simula als een taal ontwikkeld door Ole-Johan Dahl en Kristen Nygaard voor simulaties en als een grondslag van objectgericht programmeren. Een simulatie bevat vele gelijktijdig gedachte entiteiten met eigen toestand: dat helpt begrijpen waarom objecten meer zijn dan een nieuwe syntaxis rond functies.

De stationssoftware profiteert van hetzelfde idee: een buffervat, sensor en regelaar hebben andere toestand en verschillende levensduur. Hun grenzen moeten wel aan de echte afhankelijkheden beantwoorden. Bron: Norwegian Computing Center: geschiedenis; taalgedrag gecontroleerd in Python: classes, tests in unittest, versiebeheer in Pro Git, geraadpleegd 30-09-2026.

simulatieobject	eigen toestand
buffervat	energie en temperatuur
sensor	offset en laatste record
regelaar	integraal en vorige meting

NASLAG · 35.19

Ontwerpbeslissingen zichtbaar houden

19/20

vraag bij review	bewijs
Wie schrijft elke actuator?	één eigenaar in architectuur
Welke eenheid levert de adapter?	contract en test
Welke fout gaat naar welke modus?	supervisortabel
Welke versie draaide?	manifest en log
Kan hardware vervangen worden?	testdouble via hetzelfde contract

HET GEHEEL · 35.20

De software sluit het V-model

20/20

Goede klassen verbinden het procesmodel, meetcontract en testbewijs. Een systeemgrens die helder is in software moet ook terugkomen in interfaces, eisen en storingsanalyse.

I40 Integratieproject: de klimaatmodule

v5 is de eindversie van de lokale module.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Een modelobject rekent zonder hardwaretoegang.

E37 Embedded systemen en IoT

Transport is een adapter met foutcontract.

E45 Systems engineering en het V-model

Eisen verwijzen naar tests en versiebeheer.

Habitat

De Pi krijgt adapters, een modelkern, predictor, planner, supervisor en logger. De Mega houdt exclusieve eigendom van lokale actuatoren. Nieuwe code wordt als manifest met toetsbewijs aangeboden.

SAMENVATTING

In het kort

- Klassen bewaken samenhangende toestand en duidelijke invarianten.
- Samenstelling past bij ‘heeft’; overerving vraagt substitueerbaarheid.
- Interfaces beschrijven eenheid, tijd en foutgedrag.
- Unit tests behandelen grensgevallen; git en een manifest maken wijzigingen herleidbaar.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

klasse
Een type dat toestand en bijbehorende bewerkingen bundelt.

object
Een concrete instantie met eigen toestand en identiteit.

samenstelling
Een object gebruikt andere objecten als onderdelen.

interfacecontract
De afgesproken invoer, uitvoer, fouten en betekenis van een bewerking.

unit test
Een herhaalbare toets van een afgebakend softwareonderdeel met gecontroleerde afhankelijkheden.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 36

Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Een getal is pas een resultaat als je ook zijn fout en gevoeligheid kent

De digitale tweeling bevat onbekende parameters en differentiaalvergelijkingen. Je gebruikt arrays, nulpuntsmethoden en gecontroleerde integratie om uit data een model te maken. Je onderscheidt afronding, discretisatie, meetruis en een ontoereikend model.

9× uitleg | 3× uitgewerkt voorbeeld | 1× verhaal | 1× het geheel | 1× code | ± 12 lestijden

P Programmeren en computationeel denken | W Wiskundig modelleren



Twee gemeten temperaturen helpen de snelle lucht en trage buffer van elkaar onderscheiden.

Na dit hoofdstuk

- Je kan NumPy-arrays vectoriseren met bewuste vormen en eenheden.
- Je kan bisectie en Newton afleiden en hun convergentievoorwaarden toetsen.
- Je kan een parameterfit opzetten met residuen, grenzen en validatiedata.
- Je kan Euler en RK4 vergelijken op foutorde en stabiliteit.
- Je kan numerieke en fysische onzekerheid onderscheiden.

UITLEG · 36.1

Arrays zijn meer dan kortere lussen

1/15

Een NumPy-array heeft een vaste `dtype`, vorm (`shape`) en geheugenindeling. `t=np.arange(0,3601,60)` geeft 61 tijdstippen in seconde. `T=5+20*np.exp(-t/10800)` evalueert dezelfde formule over alle punten. NumPy voert veel elementbewerkingen in gecompileerde code uit; de uitdrukking maakt ook zichtbaar dat alle samples dezelfde regel volgen.

Een tabel met n tijden en twee temperaturen heeft vorm (n,2). De vector met twee capaciteiten heeft vorm (2,); broadcasting deelt elke kolom door de bijbehorende capaciteit. Vorm (n,1) naast (n,) kan

onbedoeld een (n, n)-array maken. Controleer vormen, eenheden en assen voordat een snelle berekening een groot verkeerd resultaat produceert. Gebruik `@` voor matrixproducten, `*` voor elementgewijze producten.

uitdrukking	betekenis
y[:,0]	luchtkolom
y.mean(axis=0)	gemiddelde per sensor
A @ x	matrix-vectorproduct
np.isfinite(y)	masker van eindige waarden

UITLEG · 36.2

Een wortel insluiten: bisectie

2/15

Een nulpunt voldoet aan $f(x) = 0$. Als f continu is en $f(a)f(b) < 0$, ligt minstens één nulpunt tussen a en b. Bereken het midden en behoud de helft met tekenwisseling. De invariant is dus een continu interval met een ingesloten wortel. Bij een sprong kan tekenwisseling zonder nulpunt bestaan; continuïteit is essentieel.

Na k stappen is de intervalbreedte $(b-a)/2^k$. Geef je het midden terug, dan is de fout hoogstens $(b-a)/2^{k+1}$. Dit levert een echte garantie zonder afgeleide. Stop zowel op een absolute als relatieve breedte in praktische code; een kleine functiewaarde alleen is onvoldoende bij een vlakke functie.

AANTAL HALVERINGEN VOOR MIDDENFOUT E

$$k \geq \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon} \right\rceil$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 36.3

Een tolerantie plannen

3/15

Voor $x^2 - 2 = 0$ is het startinterval [1,2].

GEGEVEN

- vereiste fout ≤ 10^{-6}

GEVRAAGD

- Minimum aantal bisectiestappen

OPLOSSING

1. $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ en f is continu.
2. $1/2^{k+1} \leq 10^{-6}$ geeft $k \geq 19$.
3. Na 19 halveringen is de middenfout maximaal $9{,}537 \cdot 10^{-7}$.

ANTWOORD

19 stappen zijn genoeg voor deze absolute foutgarantie.

Klopt dit? De werkelijke fout kan kleiner zijn; de intervalgrens is een bovengrens.

UITLEG · 36.4

Newton: de raaklijn voorspelt de wortel

4/15

Linearieer bij x_k: $f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$. Zet dit gelijk aan nul:

NEWTON-RAPHSON

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Bij een eenvoudige wortel, gladde f en een goede start is de convergentie lokaal kwadratisch: het aantal goede cijfers kan ongeveer verdubbelen. De methode heeft geen algemene globale garantie. Een kleine afgeleide geeft een enorme sprong; een slecht startpunt kan naar een andere wortel leiden of blijven slingeren. Voor $f = x^3 - 2x + 2$ gaat start 0 naar 1 en weer naar 0.

Een safeguarded methode bewaart een betrouwbaar bracket en aanvaardt Newton alleen als de stap daarbinnen ligt en voldoende voortgang maakt; anders volgt bisectie. In meerdere dimensies wordt de afgeleide een Jacobiaan en los je een lineair stelsel op. Dat vraagt goed geschaalde variabelen en een controle op singulariteit.

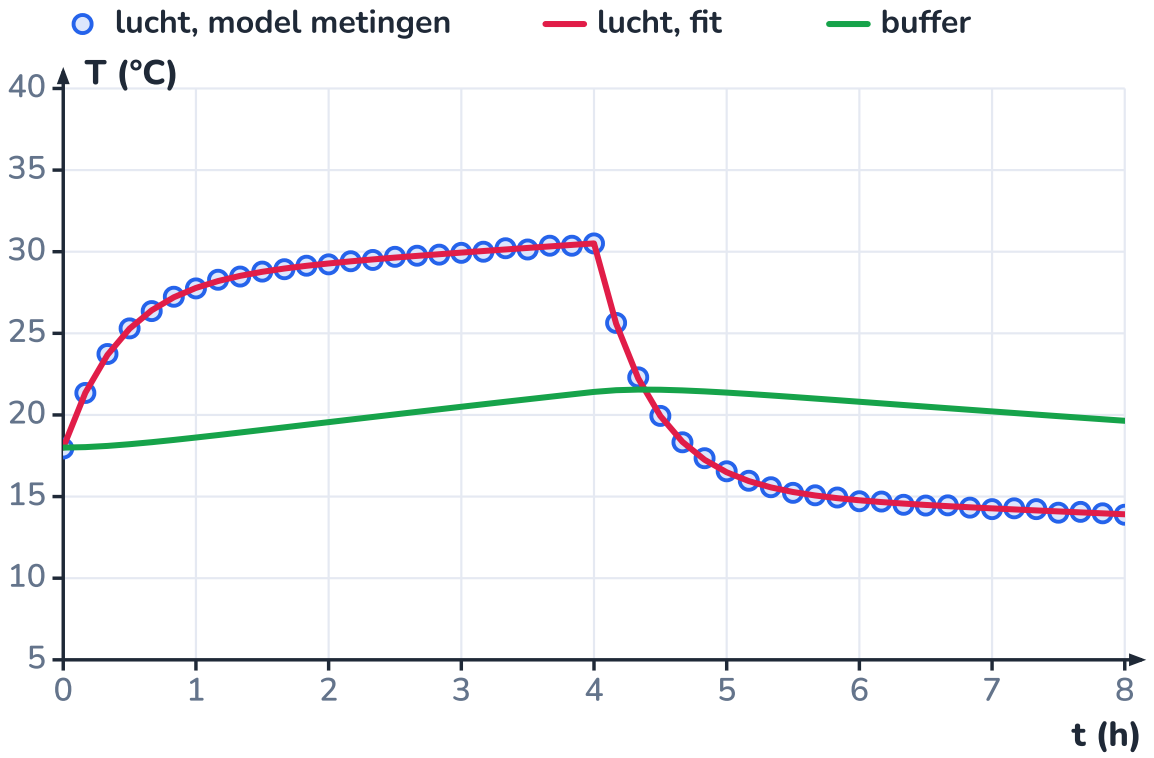
UITLEG · 36.5

Fitten: parameters moeten de proef verklaren

5/15

Het model voorspelt $\hat{y}_i(\theta)$; de data geven y_i. Kleinste kwadraten kiest parameters die $J(\theta) = \sum_i [(\hat{y}_i - y_i)/\sigma_i]^2$ minimaliseren. Gewichten passen bij de meetonzekerheid. Ze maken een grof instrument niet belangrijker doordat het veel samples levert. Gecorreleerde samples vragen een covariantiemodel of passende subsampling.

Een warmteproef moet input en beginvoorwaarden kennen. De proef hier gebruikt de modulecapaciteiten $C_a = 80\,\mathrm{kJ/K}$, $C_b = 1{,}10\,\mathrm{MJ/K}$, buiten 5 °C, koppeling 30 W/K en verlies 20,2 W/K. De capaciteiten worden vastgehouden; de fit schat alleen verlies UA en koppeling H. Twee sensoren en opwarm- én afkoelfase maken die parameters beter onderscheidbaar. Dit model hoort bij de module; de 540 kJ/K van e39 is een afzonderlijke snelle stationsknoop.



Synthetische proef vanaf 08:00 UTC+1: vier uur 800 W, daarna vier uur afkoelen; elke tien minuten beide temperaturen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 36.6

Het begin van de warmteproef

6/15

Lucht en buffer starten beide op 18 °C, buiten 5 °C; het vermogen is 800 W.

GEGEVEN

- Ca=80000 J/K, UA=20,2 W/K
- Ta=Tb=18 °C

GEVRAAGD

- De beginhellingen van beide knopen

OPLOSSING

1. De lucht-bufferstroom is 30×(18−18)=0 W.
2. Buitenverlies is 20,2×(18−5)=262,6 W; netto naar de lucht 537,4 W.
3. dTa/dt=537,4/80000=0,0067175 K/s=24,183 K/h. De bufferhelling is op dit eerste ogenblik nul; zodra de lucht warmer is, begint de buffer te volgen.

ANTWOORD

Een snelle beginhelling bewijst niet dat de hele module 24 K per uur blijft opwarmen.

Klopt dit? De evenwichtshelling wordt nul; de stijging vertraagt door buitenverlies en bufferopname.

UITLEG · 36.7

De balans wordt een numerieke functie

7/15

De lucht ontvangt vermogen P, verliest warmte naar buiten en wisselt warmte uit met de buffer. De buffer ontvangt precies die laatste stroom. Daarom:

SNELLE KNOOP

$$C_a\dot{T}_a = P - UA(T_a - T_o) - H(T_a - T_b)$$

TRAGE KNOOP

$$C_b\dot{T}_b = H(T_a - T_b)$$

Optellen schrapt de interne uitwisseling: $C_a\dot{T}_a + C_b\dot{T}_b = P - UA(T_a - T_o)$. Dat is een controle op energiebewaring. Een fout in het teken van H zou bij twee gelijke temperaturen onzichtbaar kunnen blijven maar later energie creëren. Integratie en residuen worden met dezelfde modelroutine berekend, zodat grafiek en fit niet uiteenlopen.

UITLEG · 36.8

Euler en RK4 afleiden

8/15

Euler gebruikt de helling aan het begin: $y_{k+1} = y_k + hf(y_k, t_k)$. De lokale fout per stap is $O(h^2)$, de globale fout over een vaste tijd $O(h)$. RK4 gebruikt hellingen aan begin, twee middenpunten en einde: $k_1 = f(y, t)$, $k_2 = f(y + hk_1/2, t + h/2)$, $k_3 = f(y + hk_2/2, t + h/2)$, $k_4 = f(y + hk_3, t + h)$. De combinatie is:

KLASSIEKE RUNGE-KUTTA VAN ORDE VIER

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

De gewichten vallen niet uit een gemiddelde-intuïtie alleen af te leiden; ze zijn gekozen om de Taylorontwikkeling tot en met h^4 te laten overeenkomen. De globale fout is bij voldoende gladheid $O(h^4)$. Bij een inputschakelaar is het proces niet glad over de stap: laat de integrator precies op het schakelmoment eindigen. Adaptieve methoden schatten de fout en verkleinen de stap waar nodig.

CODE · 36.9

Fit en integratie uit één modelroutine

9/15

Alle model metingen zijn synthetisch: startwaarde 36 geeft reproduceerbare Gaussruis met σ = 0,05 K. De least_squares-fit werkt op logparameters en positieve grenzen. De getoonde rms is trainingsresidu, geen onafhankelijke voorspellingsfout.

Python `warmte_fit.py` 59 regels

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import least_squares

def bisectie(f, a, b, tol=1e-8):
```

```
    fa, fb = f(a), f(b)
    if fa == 0: return a
    if fb == 0: return b
    if fa * fb > 0: raise ValueError("geen tekenwisseling")
    while (b-a)/2 > tol:
        m = (a+b)/2
        fm = f(m)
        if fm == 0: return m
        if fa*fm < 0: b = m
        else: a, fa = m, fm
    return (a+b)/2

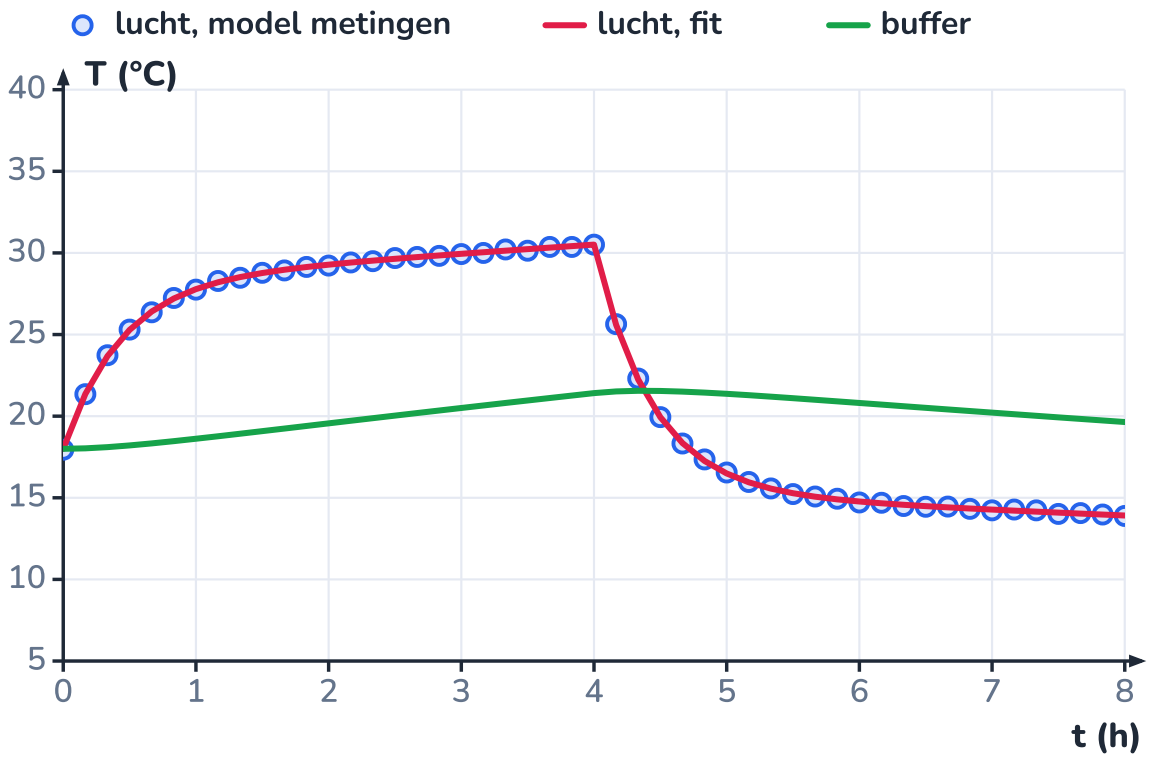
def rk4(f, y, h):
    k1 = f(y)
    k2 = f(y+h*k1/2)
    k3 = f(y+h*k2/2)
    k4 = f(y+h*k3)
    return y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6

# Twee knopen, dezelfde rekenwaarden als i31/e17. Tijd in seconde.
C = np.array([80000.0, 1100000.0])
t = np.arange(0, 8*3600+1, 600)
def model(logp):
    ua, koppeling = np.exp(logp)  # positieve W/K, schaalbaar fitten
    y = np.array([18.0,18.0])
    waarden = [y.copy()]
    for links,rechts in zip(t,t[1:]):
        vermogen = 800.0 if links < 4*3600 else 0.0
        def f(z):
            lucht, buffer = z
            q = koppeling*(lucht-buffer)
            return np.array([vermogen-ua*(lucht-5)-q,q])/C
        for _ in range(10): y = rk4(f,y,60.0)
        waarden.append(y.copy())
    return np.array(waarden)

rng = np.random.default_rng(36)
waar = model(np.log([20.2,30.0]))
metingen = waar + rng.normal(0,0.05,waar.shape)
fit = least_squares(lambda p: (model(p)-metingen).ravel()/0.05,
                    np.log([18,26]), bounds=(np.log([5,5]),np.log([80,100])))
ua, koppeling = np.exp(fit.x)
print("UA, H", *(f"{v:.3f}" for v in (ua,koppeling)), "W/K")
print("residu rms", f"{np.sqrt(np.mean((model(fit.x)-metingen)**2)):.4f}", "K")
print("nulpunt x^2-2", f"{bisectie(lambda x:x*x-2,1,2):.8f}")
for h in (1800,900,450):
    euler = 20.0
    r = 20.0
    for _ in range(int(10800/h)):
        euler += h*(-euler/10800)
        r = rk4(lambda z:-z/10800,r,h)
    exact = 20*np.exp(-1)
    print("stap", h, "Eulerfout", f"{abs(euler-exact):.6f}",
          "RK4-fout", f"{abs(r-exact):.6f}")
assert abs(ua-20.2)<0.2 and abs(koppeling-30)<0.5
```

```
UA, H 20.179 30.036 W/K
residu rms 0.0441 K
nulpunt x^2-2 1.41421356
stap 1800 Eulerfout 0.659629 RK4-fout 0.000054
```

```
stap 900 Eulerfout 0.317676 RK4-fout 0.000003
stap 450 Eulerfout 0.156001 RK4-fout 0.000000
```



Synthetische proef vanaf 08:00 UTC+1: vier uur 800 W, daarna vier uur afkoelen; elke tien minuten beide temperaturen.

UITLEG · 36.10

Stabiliteit is een ander criterium dan nauwkeurigheid

10/15

Voor $\dot{y} = \lambda y$ geeft Euler $y_{k+1} = (1 + h\lambda)y_k$. Een werkelijk uitdovend systeem blijft alleen numeriek uitdoven als $|1 + h\lambda| < 1$. Bij $\lambda = -1/\tau$ betekent dit $0 < h < 2\tau$. Als $h > \tau$ wisselt de numerieke oplossing van teken, hoewel echte afkoeling dat niet doet. Voor monotone afkoeling is h≤τ noodzakelijk in deze test; voor nauwkeurigheid kies je veel kleiner.

In het tweeknoopsmodel bepalen beide eigenwaarden van de systeemmatrix de stapgrens. De snelle lucht kan een stap klein maken terwijl de buffer urenlang verandert: een stijve situatie. RK4 heeft een groter maar eindig stabiliteitsgebied. Een impliciete methode kan helpen, maar verplaatst het werk naar stelseloplossingen. Onvoorwaardelijke stabiliteit betekent evenmin automatisch nauwkeurigheid.

EULER-STABILITEIT VOOR DE LINEAIRE TESTVERGELIJKING

$$|1 + h\lambda| < 1$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 36.11

Een stabiel systeem numeriek laten ontploffen

11/15

De echte afkoeling heeft τ=10800 s; Euler krijgt h=30000 s.

GEGEVEN

- y0=20 K

GEVRAAGD

- De eerste twee Eulerwaarden en de conclusie

OPLOSSING

1. De factor is 1−30000/10800=−1,77778, met modulus groter dan 1.
2. y1=−35,5556 K; y2=63,2099 K. De tekenwisseling en groei komen uit de integrator, niet uit de warmtebalans.
3. Een kleinere stap moet eerst de stabiliteitsgrens halen en daarna voldoende nauwkeurig zijn. De fysieke parameters aanpassen om de numerieke explosie weg te werken zou de fout verbergen.

ANTWOORD

Euler divergeert hoewel het echte systeem naar nul gaat.

UITLEG · 36.12

Afronding, subtractie en conditionering

12/15

Float 64 bewaart ongeveer 16 significante decimale cijfers. Ronding ontstaat bij elke niet exact representeerbare operatie. $0{,}1 + 0{,}2$ hoeft binair niet exact 0,3 te zijn. Gebruik een tolerantie die uit de toepassing volgt; willekeurig ‘meer decimalen’ tonen is geen onzekerheidsanalyse.

Bij subtractie van bijna gelijke getallen verdwijnt relatieve informatie. $1 - \cos x$ is voor klein x nauwkeuriger als $2\sin^2(x/2)$. Voor exponentiële kleine veranderingen helpt `np.expm 1(x)`. Numeriek differentiëren $(y(t+h) - y(t))/h$ verlaagt truncatiefout bij kleiner h, maar versterkt meetruis en afronding door 1/h. Een goede stap is dus een afweging. Conditionering betreft het probleem; stabiliteit betreft het algoritme dat het oplost.

foutbron	controle
afronding	stabiele algebra, geschikte dtype
tijdstap	h halveren en verschil meten
meetruis	onzekerheidsmodel en replicatie
modeltekort	residuen tegen tijd/input plotten

UITLEG · 36.13

Een fit beoordelen en weigeren

13/15

Een klein residu kan ontstaan door te veel vrije parameters. Fit niet alle warmtecapaciteiten, koppelingen en sensorvertragingen tegelijk op één korte luchtmeting. Plot residuen tegen tijd, temperatuur en input; een langdurig tekenpatroon wijst op vertraging of een ontbrekende knoop. Valideer op een andere vermogenscyclus en buitenconditie.

Bereken gevoeligheden numeriek: verander één parameter licht en bekijk de verandering van de voorspelling. Bij bijna parallelle gevoeligheidskolommen zijn parameters onderling uitwisselbaar. Een

covariance uit lokale linearizatie is dan instabiel. Rapporteer de vastgehouden parameters, grenzen, meetruis, validatiefout en geldigheidsgebied. Een ‘fit’ op synthetische data controleert het programma; ze toont nog niet dat Habitat werkelijk dit model volgt.

acceptatiebewijs	afwijzingssignaal
onafhankelijke proef	zelfde data voor fit en test
stabiele parameters bij herhaling	fit raakt grens
residuen zonder structuur	fasefout na iedere schakelaar
voldoende gevoeligheid	sterk gecorreleerde parameters

VERHAAL · 36.14

Wetenschappelijk rekenen wordt reproduceerbaar

14/15

De NumPy-documentatie beschrijft broadcasting als vormcompatibiliteit vanaf de laatste dimensie: maten zijn gelijk of één. SciPy onderscheidt lokale least-squares-optimalisatie van integratie met fouttoleranties. Deze API-contracten zijn onderdeel van het experiment, naast de fysische vergelijkingen.

Bronnen: NumPy broadcasting, SciPy least_squares en solve_ivp, geraadpleegd 30-09-2026. Een logboek bewaart pakketversies, startwaarde, proefdata, codecommit en fitinstellingen. Dat laat een ander dezelfde uitkomst narekenen en een modelkeuze tegenspreken.

bestand	inhoud
data.csv	tijd, input, beide sensoren, kwaliteit
model.py	balans en integrator
manifest.json	versies, grenzen, startwaarde
resultaat	parameters, residuen en testfout

HET GEHEEL · 36.15

Van proef naar digitale tweeling

15/15

Het model moet fysica, code en statistiek tegelijk verdragen. De fit levert een onderbouwde parametercombinatie; systeemidentificatie beoordeelt de dynamiek en sensorfusie bewaakt de metingen.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief
Warmtebalansen en knoopwaarden.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
Euler en eerste dynamische modellen.

E38 Dynamische systemen modelleren
Eigenwaarden en staprespons.

E41 Van data naar model: regressie
Validatie en residuen van voorspelmodellen.

Habitat

Habitat fit UA en H op een afzonderlijke warmteproef, met vaste capaciteiten als eerste identificatiestap. Een nieuwe fit mag de stationsdossierwaarden pas vervangen nadat echte data en een onafhankelijke validatie beschikbaar zijn.

SAMENVATTING

In het kort

- Arrayvormen en eenheden horen bij de berekening.
- Bisectie geeft een bracketgarantie; Newton vraagt een goede start en bruikbare afgeleide.
- Euler en RK4 verschillen in foutorde en stabiliteitsgebied.
- Een parameterfit vraagt identificeerbaarheid, residuenanalyse en onafhankelijke validatie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

vectoriseren
Een bewerking over een array uitdrukken in arrayoperaties in plaats van een Python-lus.

residu
Het verschil tussen waarneming en modelwaarde.

conditionering
Hoe gevoelig de exacte oplossing is voor een kleine wijziging van de invoer.

discretisatiefout
Afwijking door een continue vergelijking met eindige stappen te benaderen.

identificeerbaarheid
De mogelijkheid om parameters afzonderlijk uit de beschikbare proef te bepalen.

E EXPERT · DEEL E7 · INFORMATICA

HANDBOEK · HOOFDSTUK 37

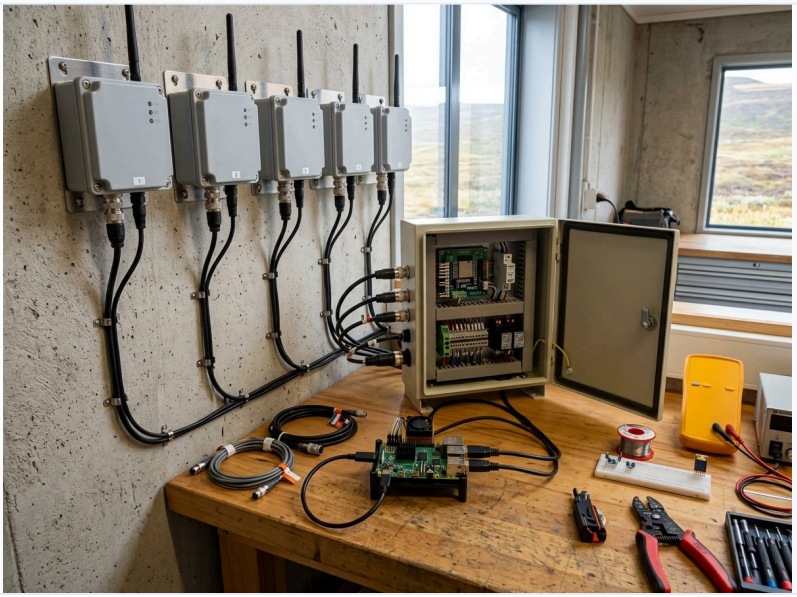
Embedded systemen en IoT

Een verbonden sensor moet ook op tijd, zuinig en veilig blijven werken

De microcontroller moet een korte puls zien terwijl de Pi een netwerkverbinding herstelt. Je scheidt snelle lokale taken van vertraagbare telemetrie. Het ontwerp verbindt interrupts, bussen, MQTT, energie en toegangsbeheer in één controleerbaar netwerk.

9× uitleg | 4× uitgewerkt voorbeeld | 1× verhaal | 1× het geheel | 2× code | ± 12 lestijden

P Programmeren en computationeel denken | L Elektriciteit en elektronica | R Regelen en robotica



Een draadloos netwerk verbindt onderdelen met verschillende timing- en energiebehoeften.

Na dit hoofdstuk

- Je kan interrupt- en timerwerk begrenzen en gedeelde data atomair lezen.
- Je kan een real-time deadline toetsen en slaapstanden tegen energie en verbinding afwegen.
- Je kan UART, I²C en SPI kiezen met elektrische en protocolvoorwaarden.
- Je kan MQTT-topics, Qo S, sequence en verval als een applicatiecontract ontwerpen.
- Je kan het sensornet beveiligen en het gedrag bij uitval toetsen.

UITLEG · 37.1

Interrupt of polling: wat kan je missen?

1/17

Polling ziet een ingang alleen wanneer de lus haar leest. Een puls van 1 ms kan volledig tussen twee reads van 50 ms vallen. Een interrupt legt de gebeurtenis meteen vast, maar stopt tijdelijk de gewone taak. De handler moet kort blijven: tel of zet een vlag; loggen, wifi, wachten en complexe berekeningen horen in de voorgrond.

`volatile` vertelt de compiler dat een waarde buiten de gewone control flow kan veranderen. Het maakt een 32-bit read op een 8-bit AVR niet atomair. De interrupt kan tussen twee byte-reads vallen; je krijgt een samengestelde waarde die nooit bestaan heeft. Kopieer in een korte kritieke sectie en herstel de eerdere interruptstatus in algemene librarycode. De eenvoudige lescode roept de sectie alleen vanuit de voorgrond aan waar interrupts vooraf actief zijn.

taak	plaats
puls tellen	ISR, enkele instructies
toerental berekenen	voorgrond
MQTT publiceren	gatewaytaak
hardware-noodstop	onafhankelijk elektrisch pad

UITLEG · 37.2

Timers en een vaste tijdschaal

2/17

Een hardwaretimer telt klokpulsen. Met 16 MHz en prescaler 64 wordt één tick 4 µs. Een 16-bit teller loopt dan na 65536 ticks, dus 262,144 ms, rond. Voor een compare-interval van 1 ms zijn 250 ticks nodig; bij tellen van 0 tot en met comparewaarde is het register 249. De timerconfiguratie hangt af van het bord en conflicteert soms met PWM of bibliotheken.

`millis()` geeft een modulo 32-tijd. Gebruik `uint 32_t dt=nu-laatst`, niet `nu> laatst+periode`. Unsigned aftrekken werkt over één rollover zolang de bedoelde tijdspanne korter is dan de tellercyclus. Een kalenderklok is voor logs, een monotone klok voor deadlines; NTP-correcties mogen geen actuatorvenster vooruit of achteruit springen.

TIMERRESOLUTIE

$$t_{\text{tick}} = \frac{N_{\text{prescaler}}}{f_{\text{klok}}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 37.3

Turbinetoerental uit flanken

3/17

De generator heeft acht poolparen; één stijgende flank per elektrische periode wordt geteld.

GEGEVEN

- 200 flanken in 5,000 s
- n = 7,5 f (e19)

GEVRAAGD

- Toerental en telresolutie

OPLOSSING

1. f=200/5=40 Hz. Toerental n=7,5×40=300 tpm.
2. Eén flank verandert f met 1/5=0,2 Hz en n met 1,5 tpm. Het telkwantisatie-effect wordt kleiner met een langer venster.

3 Een 5 s-gemiddelde reageert traag op overtoeren. De lokale rembeveiliging gebruikt een apart snel, hardwarematig of getest periodemeetpad.

ANTWOORD

300 tpm; één-countresolutie 1,5 tpm.

Klopt dit? De telling is alleen correct na veilig laagspanningsconditioneren; de 59–223 V generatorlijn mag nooit op een ingang.

CODE · 37.4

Een korte interrupt en een rollovervaste teller

4/17

De schets draait op een afzonderlijke turbinemonitor en hergebruikt geen bezette klimaatpin. De bron wordt tegen de gedeelde Arduino-stub gecompileerd. De stub controleert flanktelling en rollover, geen fysieke ISR-latentie.

C++ (Arduino) **turbine_teller.ino** 27 regels

```cpp
// Afzonderlijke turbinemonitor, niet de bestaande klimaatpin2 hergebruiken.
#include <Arduino.h>
#include <stdint.h>
volatile uint32_t flanken = 0;
uint32_t laatst = 0;
void puls() { ++flanken; }
void setup() {
  pinMode(2, INPUT);
  attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(2), puls, RISING);
  Serial.begin(115200);
  laatst = millis();
}
void loop() {
  uint32_t nu = millis();
  uint32_t dt = nu - laatst;     // modulo32, robuust tegen millis-overloop
  if (dt >= 5000UL) {
    // Alleen voorgrond met interrupts vooraf aan; houd deze sectie kort.
    noInterrupts();
    uint32_t aantal = flanken;
    flanken = 0;
    interrupts();
    laatst = nu;
    float f = aantal * 1000.0f / dt;
    Serial.print("pulsen="); Serial.print(aantal);
    Serial.print(",tpm="); Serial.println(7.5f*f, 1);
  }
}
```

Getest scenario: 200 stijgende flanken gedurende 5 s geven `pulsen=200, tpm=300.0`; dezelfde telling over een millis-rollover geeft dezelfde uitvoer. De gemeten werkelijke dt, niet blind 5 s, staat in de deler.

UITLEG · 37.5

Real-time is een deadline, geen snelle gemiddelde laptop

5/17

Een hard real-time eis faalt zodra de deadline gemist wordt; een soft real-time eis tolereert aantoonbaar beperkte vertraging. Een noodstop mag niet van een gemiddelde MQTT-respons afhangen. De lokale regeltaak draait met vaste periode; de logger mag een korte achterstand bufferen, met een expliciete grens en meldgedrag.

Maak een taakbudget met worst-case uitvoeringstijd C, periode T en maximale blokkeertijd. $U = \sum C_i/T_i$ kleiner dan 1 is noodzakelijk voor één CPU, maar bewijst niet dat een willekeurige scheduler alle deadlines haalt. Prioriteit, interrupts, niet-preëmptieve stukken en I/O blokkeren ook. In i40 duurde de langste gesimuleerde loop 48,8 ms; dat is bewijs voor dat scenario, geen universele worst-case grens.

voorbeeldtaak	C model	T	bijdrage
regelstap	2 ms	1000 ms	0,002
sensorinlezen	3 ms	2000 ms	0,0015
logbuffer	5 ms	1000 ms	0,005

De modelbenutting is 0,0085 = 0,85 %. Een blokkerende wifi-connect van 2 s kan ondanks dit lage getal een 1 s-deadline missen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 37.6

Een UART-frame in het tijdsbudget

6/17

Een 8N1-UART verstuurt startbit, acht databits en stopbit.

GEGEVEN

- 115 200 bit/s
- bericht 120 bytes

GEVRAAGD

- Minimale serialisatietijd

OPLOSSING

1. Elk byte vraagt 10 bits; 120 bytes vragen 1200 bits.
2. 1200/115200=0,0104167 s = 10,42 ms.
3. Dit is alleen draadserialisatie. Een softwarebuffer kan eerst kopiëren, maar de fysieke uitvoer loopt door; een volle buffer kan alsnog blokkeren.

ANTWOORD

10,42 ms vóór parsing, scheduling of hertransmissie.

Klopt dit? Baudrate is een lijnsnelheid, niet de snelheid waarmee de toepassing sensorrecords verwerkt.

UITLEG · 37.7

UART: twee richtingen, één elektrisch contract

7/17

UART is asynchroon: beide kanten stemmen baudrate en frame af. TX gaat naar RX en er is een gemeenschappelijke referentie, tenzij een geïsoleerde interface gebruikt wordt. Een Mega-uitgang van 5 V is niet automatisch veilig voor een 3,3 V-gateway. Gebruik geschikte niveauaanpassing; TTL-UART is geen RS-232 of RS-485.

Een eigen frame bevat versie, lengte, payload en checksum of CRC. Een regel met newline kan eenvoudiger zijn, maar krijgt een maximale lengte en parse-timeout. Negeer onbekende versies, meld beschadigde frames en resynchroniseer. Een CRC detecteert transmissiefouten; een aanvaller kan ook de CRC herberekenen, dus het is geen authenticatie. De bridge laat de bestaande lokale logger en regeling werken als zij uitvalt.

veld	doel
versie/lengte	begrensd parsen
boot/seq	herstart en duplicaten
meetmoment/kwaliteit	leeftijd bepalen
CRC	toevallige transportfout

UITLEG · 37.8

I²C blijft een lokale bus

8/17

I²C gebruikt SDA en SCL met open-drain uitgangen en pull-ups. De stijgtijd groeit met buscapaciteit: ruwweg $t_r \approx 0{,}8473RC$ tussen 30 en 70 % van de voedingsspanning. De NXP-specificatie geeft voor Standard-mode 100 kbit/s een stijgtijdgrens van 1000 ns. Lange kabels, parallelle pull-ups en verschillende spanningen moeten samen getoetst worden.

Behoud i30: SHT31 0x44, DS3231 0x68, INA226 0x40/0x41; e14 heeft ADS1115 0x48 en BME280 0x76 op zijn eigen luchtknoop. Twee sensoren met hetzelfde adres vragen een tweede bus, alternatief adres of multiplexer. Wifi vergroot het netwerkbereik zonder alle stationskabelcapaciteit aan één I²C-bus toe te voegen.

RC-STIJGTIJD VAN EEN OPEN-DRAIN BUS

$$t_r \approx 0{,}8473 R_p C_b$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 37.9

Pull-up en kabelcapaciteit

9/17

De effectieve pull-up is 1,8 kΩ en de gemeten buscapaciteit 400 p F.

GEGEVEN

- Standard-mode grens $t_r \leq 1000$ ns

GEVRAAGD

- Stijgtijd en ontwerpreserve

OPLOSSING

1. $t_r \approx 0{,}8473 \times 1800 \times 400 \times 10^{-12} = 610$ ns.

2. Dat ligt 390 ns onder de grens. Bij 700 p F wordt het 1068 ns en faalt dezelfde berekening.

3. Ook de sinkstroom bij laag niveau en de werkelijk gemeten golfvorm moeten passen; een RC-schatting vervangt de oscilloscoopcontrole niet.

ANTWOORD

610 ns bij 400 p F; lange stationsverbindingen krijgen een gateway in plaats van een onbegrensde I²C-verlenging.

UITLEG · 37.10

SPI: snelle lokale selectie

10/17

SPI gebruikt een klok, MOSI, MISO en per slave een selectielijn. Snelheid, clock polarity/phase en woordlengte worden per apparaat afgesproken. Er is geen algemeen ingebouwd adres- of afleverprotocol. Een deselected slave moet MISO vrijgeven; anders vechten twee uitgangen. Een SD-kaart kan tijdens schrijven lang bezig zijn, ook als de SPI-klok snel is.

Behoud de SD-interface van i30 op de Mega, met CS53. Schrijf eerst een begrensde RAM-buffer en plan flush/close; bij stroomuitval is wat alleen in RAM of de kaartcache zit niet gegarandeerd bewaard. Een vlotteralarm mag geen SD-write afwachten. Pas de buffer aan het 8 k B SRAM-budget van de Mega aan en leg verliesgedrag bij vol geheugen vast.

bus	sterkte	beperking
UART	eenvoudige puntverbinding	frame en levels zelf afspreken
I²C	veel lokale adressen	RC en adresconflicten
SPI	hoge lokale transfersnelheid	selectielijnen en apparaatbusy

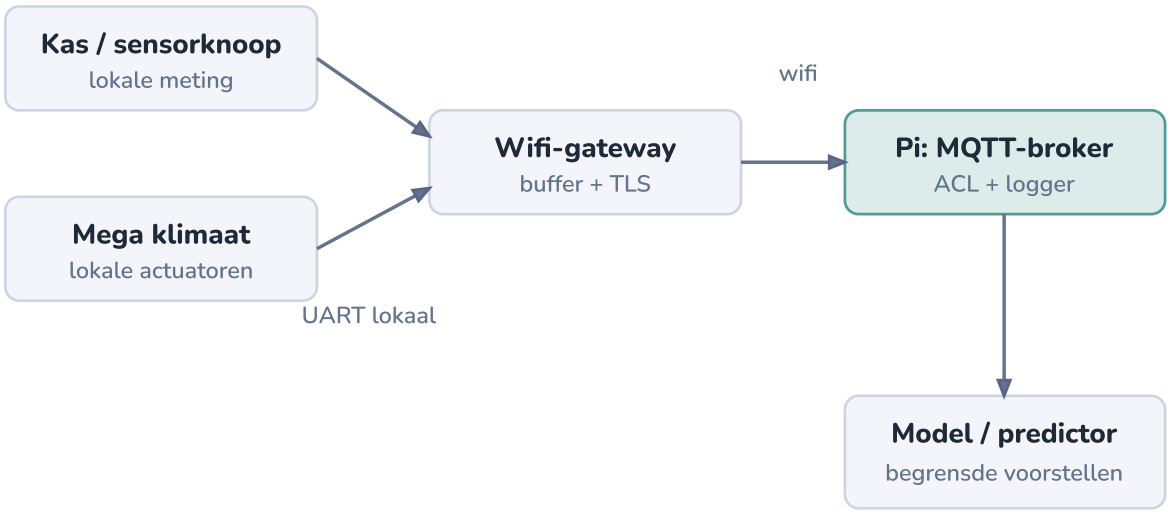
UITLEG · 37.11

Wifi en MQTT: transport plus betekenis

11/17

Wifi geeft een lokaal IP-netwerk; MQTT verbindt publishers en subscribers via een broker. De Pi host de lokale broker. Een topic als `habitat/kas/telemetrie` benoemt een stroom; `habitat/module/setpoint` benoemt een gecontroleerd voorstel. Een node krijgt alleen toegang tot eigen publicaties en toegestane commando's.

Qo S0 is hoogstens eenmaal; Qo S1 minstens eenmaal en dus mogelijk dubbel; Qo S2 levert eenmaal binnen het protocolpad met meer overhead. Geen niveau bewijst dat een fysieke pompbeurt precies eenmaal is uitgevoerd. Gebruik request-ID en applicatiebevestiging met aanvaard/weigering/voltooid. Retained bewaart de laatste payload voor latere subscribers: geschikt voor status mét leeftijd, gevaarlijk voor een oud startbevel. Commando's zijn hier niet retained en hebben een vervaltijd.



Telemetrie gebruikt het netwerk; noodstop en lokale regeling hebben geen broker nodig.

CODE · 37.12

Berichtcontract en energiebudget toetsen

12/17

De validator is een offline applicatietest, geen volledige MQTT-client. Geauthenticeerde transportidentiteit, boot-ID, schema, volgnummer, bereik en leeftijd werken samen. Een nieuwe boot mag sequence 0 gebruiken; de broker moet de identiteit en sessie al hebben geauthenticeerd.

Python `bericht_contract.py` 28 regels

```python
import math

class Ontvanger:
    def __init__(self): self.volgnummer = {}
    def verwerk(self, bericht, nu):
        verplicht = {"node","boot","seq","tijd_s","temperatuur_C"}
        if not verplicht <= bericht.keys(): return "schemafout"
        if type(bericht["seq"]) is not int or bericht["seq"] < 0: return "sequencefout"
        t,T = bericht["tijd_s"],bericht["temperatuur_C"]
        if not all(type(x) in (int,float) and math.isfinite(x) for x in (t,T,nu)):
            return "getalfout"
        if not -30 <= T <= 60 or not 0 <= nu-t <= 90: return "oud/bereik"
        sleutel=(bericht["node"],bericht["boot"])
        if bericht["seq"] <= self.volgnummer.get(sleutel,-1): return "duplicaat/volgorde"
        self.volgnummer[sleutel]=bericht["seq"]
        return "aanvaard"

r=Ontvanger()
b={"node":"kas","boot":"sessie-a","seq":12,"tijd_s":100,"temperatuur_C":21.1}
for bericht,nu in [(b,101),(b,102),(dict(b,seq=13),200),
                   (dict(b,boot="sessie-b",seq=0,tijd_s=201),202)]:
    print(r.verwerk(bericht,nu))
actief=120.0  # mA, gemeten ontwerpaanname voor hele knoop
rust=0.05    # mA, inclusief regelaar en lekstromen in rekenmodel
I=(actief*2+rust*58)/60
```

```
print("gemiddelde",round(I,3),"mA")
print("2000mAh, 80pct bruikbaar",round(1600/I/24,1),"dagen")
assert abs(I-4.048333333)<1e-7
```

```
aanvaard
duplicaat/volgorde
oud/bereik
aanvaard
gemiddelde 4.048 mA
2000mAh, 80pct bruikbaar 16.5 dagen
```

UITLEG · 37.13

Slaap kost ook tijd en verbinding

13/17

Een telemetrieknoop kan 2 s actief zijn en 58 s slapen. Met de expliciete rekenwaarden 120 m A actief en 0,05 m A rust is gemiddeld 4,048 m A. Een batterij van 2000 m Ah met 80 % bruikbaar houdt in dat model 16,47 dagen, vóór zelfontlading, kou en regelaarverlies. Gebruik stroommetingen van het hele bord: een powerled of USB-omzetter kan de chipwinst tenietdoen.

Bij deep sleep van de ESP32 wordt veel toestand uitgezet en blijft wifi niet gewoon verbonden. Ontwaken, DHCP, TLS en publiceren kosten tijd en energie. Reken per cyclus de werkelijke herverbinding mee. Een vaste veiligheidssensor met snelle deadline mag daarom niet dezelfde slaapstrategie gebruiken als een buitenweerlogger. Voed alarm- en regelknopen vast; slaap alleen waar gemiste tussenmetingen verantwoord zijn.

ENERGIE PER MEETCYCLUS

$$I_{\text{gem}} = \frac{I_a t_a + I_s t_s}{t_a + t_s}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 37.14

Buffer bij een netwerkgat

14/17

Een knoop maakt elke minuut een record van 96 bytes. Wifi kan 2 h wegvallen.

GEGEVEN

- 120 records
- 20 % reserve

GEVRAAGD

- Buffer en terughaalgedrag

OPLOSSING

1. 120×96=11520 bytes payload. Met 20% reserve is 13 824 bytes nodig, zonder object- en bestands overhead.
2. Dit past niet in 8 k B SRAM van de Mega. De gateway bewaart lokaal op flash of kaart en houdt de Mega-interface klein.

3 Na reconnect stuur je oude records naar archief mét oude tijd, niet als verse regelmeting. Begrens replay zodat actuele meldingen niet verdrongen worden.

ANTWOORD

Minimaal 13,8 k B als rekenbudget; kies een gatewaybuffer met apart metadata- en slijtagebudget.

UITLEG · 37.15

Beveiliging begint bij bevoegdheden

15/17

TLS beschermt transport vertrouwelijkheid en integriteit en controleert het certificaat van de peer. Certificaatcontrole uitzetten om een klokfout te omzeilen verwijdert een kernbescherming. Geef elke knoop een eigen credential, beperkte ACL en een intrekbaar updatepad. Een gedeeld wachtwoord op alle nodes maakt één verloren sensor een stationsincident.

Minimale toegang, veilige updates, inventaris, logbare wijzigingen en herstel horen bij het ontwerp. Firmware-updates worden ondertekend of anders aantoonbaar geauthenticeerd; test een mislukte update en terugrol. Een MQTT-payload is onbetrouwbare invoer: stel maximale grootte, vaste schema's en bereik in, voer er geen code uit. Koppel het sensornet van gastenwifi; toegang tot een topic is geen recht om de hardware-noodstop te wijzigen.

dreiging	maatregel	test
spoof sensor	eigen credential + ACL	vreemde node publiceert geweigerd
replay commando	ID+verval+ack	oud bevel geweigerd
malformed payload	schema/limieten	NaN en oversize testen
updatefout	authenticatie+rollback	stroomuitval tijdens update

VERHAAL · 37.16

Een protocolstandaard is een bruikbaar verhaal

16/17

OASIS definieert MQTT als publish/subscribe-berichtprotocol en benoemt de drie Qo S-niveaus en retained-gedrag. De standaard beschrijft aflevering, niet de veiligheid van een klimaatregeling. Espressif beschrijft slaapmodi en de gevolgen voor wifi. Juist die grenzen maken standaarden bruikbaar: ze vertellen wat je wel uit het transport mag afleiden en welk deel van het contract nog jouw verantwoordelijkheid blijft.

Primaire bronnen, geraadpleegd 30-09-2026: OASIS MQTT5, NXP UM10204, Microchip ATmega 2560, ESP32 slaapmodi en ESP-MQTT.

standaard	applicatie blijft ontwerpen
MQTT	actie-ID en procesveiligheid
I²C	kabelbudget en adressen
MCU	deadline en taakbudget

HET GEHEEL · 37.17

Het netwerk ondersteunt het lokale brein

17/17

De elektronische bus, softwareinterface en systeemarchitectuur moeten dezelfde tijd- en foutafspraken gebruiken. Sensorfusie krijgt kwaliteit en leeftijd; AI krijgt historische data; veiligheid krijgt een zelfstandig pad.

I30 Datalogging en communicatie

Bussen, adressen en UTC+1-logs blijven behouden.

E19 Elektrische en magnetische velden, inductie

Toerental uit generatorfrequentie.

E35 Objectgericht programmeren en softwareontwerp

Adapters met een tijd- en foutcontract.

E40 Sensorfusie en schatten

Data veroudert en kan uitvallen.

Habitat

Voor Habitat: lokale MQTT-broker op Pi, wifi-gateways, MQTT5 waar ondersteund, telemetrie elke 60 s met leeftijdgrens 90 s voor de centrale monitor. Dit vervangt geen snelle lokale regeling. Qo S1 met boot/seq; commando's niet retained, voorzien van ID en verval. Alarm- en regelknopen blijven vast gevoed; turbinefrequentie wordt met 5 s-vensters gelogd, met aparte snelle beveiliging.

SAMENVATTING

In het kort

- Interrupts leggen korte gebeurtenissen vast; volatile vervangt atomair kopiëren niet.
- Deadline, blokkeertijd en uitvalgedrag bepalen de architectuur.
- UART/I²C/SPI zijn lokale elektrische contracten; wifi en MQTT vragen een applicatiecontract.
- Slaap, TLS, identiteit, updates en buffering moeten samen getoetst worden.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

interrupt
Een gebeurtenis die de processor een korte handler laat uitvoeren buiten de gewone programmalus.

deadline
Het laatste tijdstip waarop een resultaat nog aan zijn eis voldoet.

Qo S
De afgesproken MQTT-afleverwijze voor een bericht.

idempotent
Een bewerking waarvan herhaling niet nogmaals hetzelfde effect veroorzaakt.

ACL
Regels die bepalen welke identiteit op welke topics mag lezen of schrijven.

E EXPERT · DEEL E8 · REGELTECHNIEK

HANDBOEK · HOOFDSTUK 38

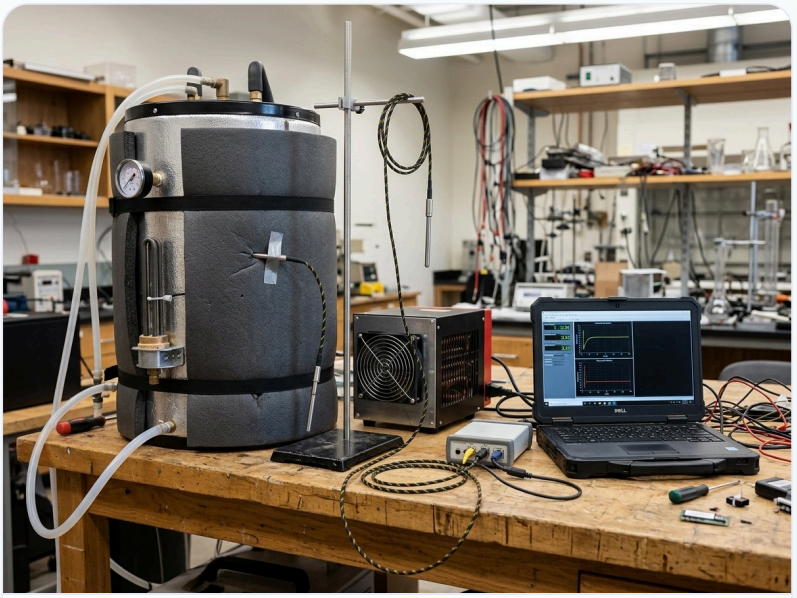
Dynamische systemen modelleren

Toestanden en tijdschalen verklaren waarom een station nog beweegt nadat de knop omgaat

Een vermogeninstelling werkt niet onmiddellijk door in temperatuur. De snelle lucht, trage buffer en sensor hebben elk geheugen. Je leidt eerste- en tweedeordemodellen af, leest hun staprespons en onderzoekt welke parameters een proef werkelijk kan bepalen.

8× uitleg · 3× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 11 lestijden

R Regelen en robotica · W Wiskundig modelleren · E Energie



Dezelfde input voedt toestanden die op minuten en uren reageren.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een warmtebalans naar een eersteordemodel en staprespons omzetten.
- Je kan tweedeorde-respons, demping en doorschot kwantitatief beschrijven.
- Je kan blokken verbinden en een overdrachtsfunctie met haar voorwaarden lezen.
- Je kan toestanden, polen en stabiliteit van het tweeknoopsmodel bepalen.
- Je kan een identificatieproef ontwerpen en een te eenvoudig model herkennen.

UITLEG · 38.1

Een dynamisch systeem bewaart het verleden

1/15

Een weerstand zet een spanning direct om in stroom volgens $I = U/R$, zolang opwarming buiten het model blijft. Een condensator bewaart lading en een buffervat bewaart warmte: hun huidige toestand hangt van eerdere invoer af. Een dynamisch model beschrijft hoe die toestand verandert. Bij een station

is niet alleen de huidige luchttemperatuur genoeg: een koude vloer veroorzaakt straks extra warmtevraag.

Kies systeemgrens, input, output en toestanden expliciet. Input kan vermogen zijn, output luchttemperatuur, toestand lucht- en buffertemperatuur. Storingen zoals buitenweer horen als aparte input. Een model met dezelfde vergelijking maar andere systeemgrens kan niet zomaar naast het eerste worden opgeteld: het éénknoopsmodel van e39 en het modulemodel van e17 zijn twee vereenvoudigingen van beschreven grenzen.

element	input	opgeslagen toestand
RC-kring	stroom of spanning	condensatorspanning
warmtemodule	vermogen, buitenweer	lucht en buffer
mechanisch systeem	kracht	positie en snelheid

UITLEG · 38.2

Eerste orde uit de warmtebalans

2/15

Voor één knoop geldt $C\dot{T} = P - H(T - T_o)$. Kies $y = T - T_o$ en houd buiten constant. Dan $\tau\dot{y} + y = KP$ met $\tau = C/H$ en $K = 1/H$. C heeft eenheid J/K, H W/K, dus τ is seconde en K K/W. Bij inputstap ΔP en start in het oorspronkelijke evenwicht:

EERSTEORDE-STAPRESPONS

$$\Delta y(t) = K\Delta P(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

Na τ is 63,2% van de totale verandering bereikt; na 3τ 95,0%; na 5τ 99,3%. Tijdconstante is geen wachttijd waarna de reactie begint. De beginhelling is ΔP/C. Een grotere C verlaagt de beginhelling; een grotere H verlaagt vooral de uiteindelijke stijging en verkort τ.

UITGEWERKT VOORBEELD · 38.3

Een stationsstap lezen

3/15

Het vereenvoudigde station krijgt 750 W extra bij constant buiten.

GEGEVEN

- C=540 kJ/K, H=50 W/K

GEVRAAGD

- Eindstijging, beginhelling, t90 en 2%-insteltijd

OPLOSSING

1. K=0,020 K/W;Δy∞=15 K;τ=540000/50=10800 s=3 h.
2. Beginhelling 750/540000=0,00138889 K/s=5 K/h.
3. $0{,}9 = 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$ geeft $t_{90} = \tau \ln 10 = 6{,}908\,\mathrm{h}$.

4 Voor 2% restfout: $t_s = -\tau \ln 0{,}02 = 11{,}736\,\text{h}$.

ANTWOORD

De kamer reageert direct, maar blijft uren bewegen.

Klopt dit? Het extra vermogen en de extra temperatuur zijn stappen ten opzichte van een evenwicht; absolute setpoints zijn niet automatisch gelijk aan 15 °C.

UITLEG · 38.4

Sensorvertraging en dode tijd verschillen

4/15

Een sensor met tijdconstante 60 s is een dynamische eersteordeblok: hij reageert direct maar vertraagd. Een pure dode tijd L geeft vóór L helemaal geen nieuwe uitvoer. Een lang transportkanaal kan beide effecten hebben. Een proces met sensorvertraging kan een vroege warmtecapaciteit te groot doen lijken.

Bij twee achtereenvolgende eersteordeblokken ontstaat een tweedeordemodel. De respons begint vlakker dan bij één knoop. Een vertraging op de uitgang is niet hetzelfde als een lagere procesversterking: de evenwichtsuitvoer kan gelijk blijven. Kalibratie en plaatsing horen daarom bij identificatie. De sensorkast 60 s blijft een aparte toestand of bekende meetketen; zij is geen extra warmtebuffer voor het hele station.

effect	directe reactie	evenwichtsversterking
capaciteit	ja, geleidelijk	ongewijzigd bij zelfde H
dode tijd	pas na L	ongewijzigd
extra verlies	ja	kleiner

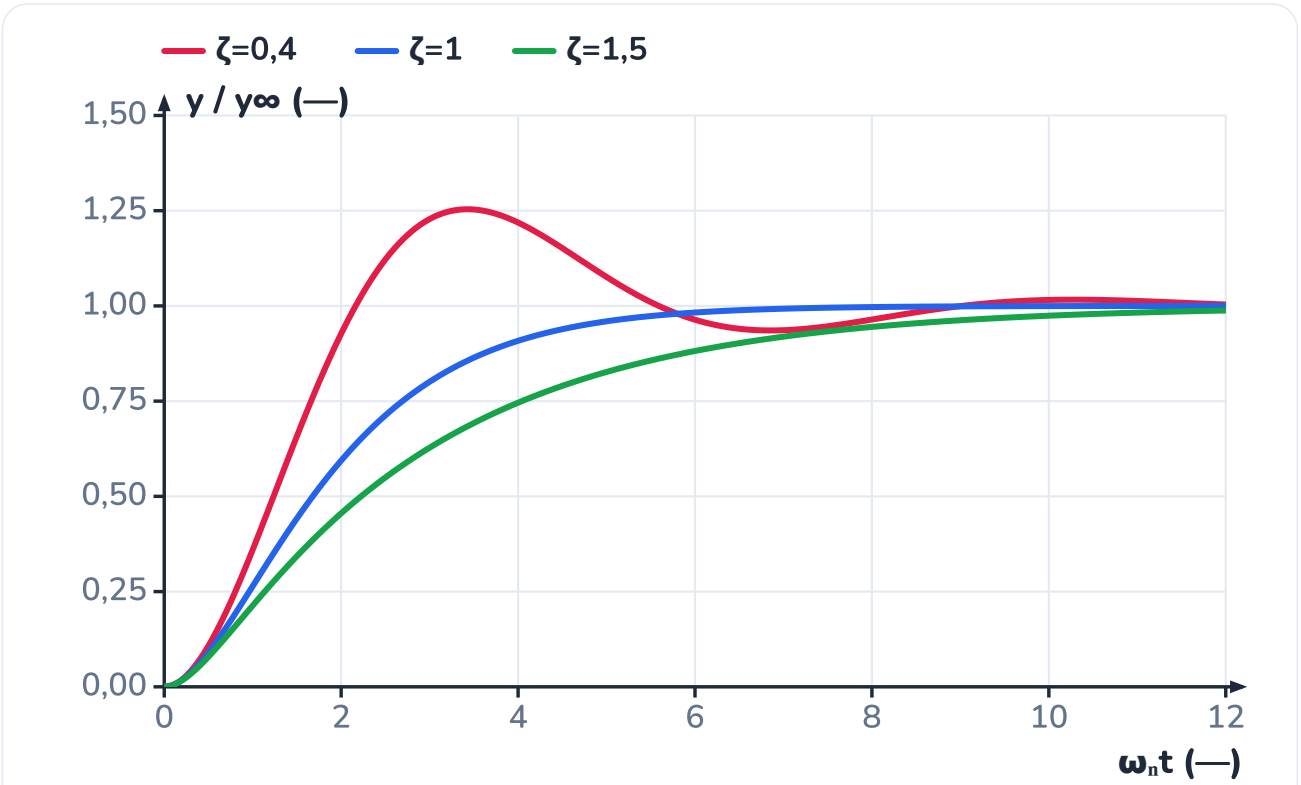
UITLEG · 38.5

Tweede orde: twee toestanden

5/15

Een massa-veer-demper voldoet aan $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$. Deel door m: $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = (1/m)F$, met $\omega_n = \sqrt{k/m}$ en $\zeta = b/(2\sqrt{km})$. Twee beginvoorwaarden zijn nodig: positie en snelheid.

De standaard overdracht met versterking K is $K\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$. Bij 0<ζ<1 is de respons ondergedempt; bij ζ=1 kritisch gedempt; bij ζ>1 overgedempt. Een thermisch passief tweeknoopsysteem heeft doorgaans twee reële vervalmodes en hoeft niet te oscilleren. Een regelaar kan wel complexe gesloten-luspolen veroorzaken. ‘Tweede orde’ betekent dus niet automatisch slingeren.



Dezelfde eigenfrequentie geeft afhankelijk van demping doorschot, kritisch snelle monotone of tragere monotone respons.

UITGEWERKT VOORBEELD · 38.6

Doorschot uit demping

6/15

Een genormaliseerd tweedeordesysteem heeft ζ=0,4 en ω_n=0,01 rad/s.

GEGEVEN

- stapuitvoer uiteindelijk 1

GEVRAAGD

- Relatief doorschot, piektijd en benaderde 2%-insteltijd

OPLOSSING

1. $M_p = \mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}25383$, dus 25,38%.
2. $t_p = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) = 342{,}78\,\mathrm{s}$.
3. De gebruikelijke benadering $t_s \approx 4/(\zeta\omega_n) = 1000\,\mathrm{s}$ geldt als ordeschatting voor voldoende gedempte ondergedempte respons; toets de werkelijke 2%-band in de simulatie.

ANTWOORD

Piek 1,2538 na 5,71 min; instellen circa 16,7 min.

Klopt dit? Bij ζ→0 wordt de insteltijd onbegrensd; bij ζ≥1 geldt deze doorschotformule niet.

UITLEG · 38.7

Blokdiagrammen rekenen met dezelfde signalen

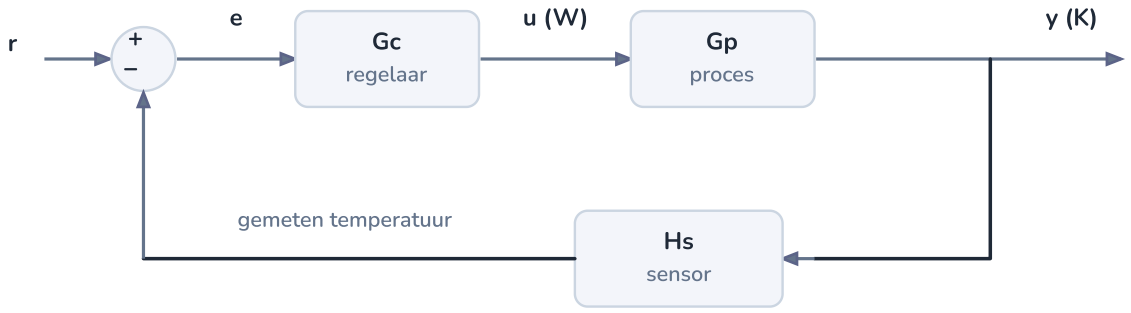
7/15

Een serieverbinding heeft $G = G_1 G_2$; parallel optellen geeft $G = G_1 + G_2$, mits inputs en outputs dezelfde betekenis hebben. Bij negatieve terugkoppeling geldt $y = G(r - H_s y)$; daaruit $y/r = G/(1 + GH_s)$. Het teken in de somknoop is een fysische keuze, geen decoratie.

Een blokschema toont signaalstromen, geen volledige energiestromen. De regelaaruitgang W gaat naar de actuator; een temperatuursensor levert°C. Het product van blokken moet dimensioneel kloppen. Verzadiging, pompschakelen en hysterese zijn niet-lineair: een eenvoudige overdrachtsfunctie beschrijft ze alleen lokaal of buiten de begrenzing. De Bode-analyse geldt dus niet onverkort tijdens volle 2 kW noodverwarming.

NEGATIEVE TERUGKOPPELING

$$G_{\text{gesloten}} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p H_s}$$



r en y zijn temperatuurafwijkingen. De regelaar zet fout e om in vermogen u; Hs beschrijft de meetketen. De onderste pijl eindigt bij de min-ingang van de somknoop.

UITLEG · 38.8

Overdrachtsfunctie zonder toverwoord

8/15

In de Laplacetransformatie wordt afleiden bij nul beginvoorwaarden vermenigvuldigen met s. Zo wordt $\tau\dot{y} + y = Ku$ algebraïsch $(\tau s + 1)Y = KU$. Daarom $G(s) = Y/U = K/(\tau s + 1)$. De pool $s = -1/\tau$ bepaalt het verval. De nulfrequentieversterking $G(0) = K$ bepaalt het evenwicht.

Een pool met negatief reëel deel sterft uit; positief reëel deel groeit; op de imaginaire as kunnen ongedempte modes blijven bestaan. Dit criterium betreft het continue lineaire model. Een numerieke integrator kan toch divergeren, zoals e36 toont. Niet-nul beginvoorwaarden leveren een extra term: de overdracht alleen beschrijft de vrije respons door opgeslagen beginenergie niet.

LINEAIR TIJDINVARIANT EERSTEORDEBLOK

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

CODE · 38.9

Polen en twee warmteknopen berekenen

9/15

De matrixexponentiële expm geeft hier een onafhankelijke exacte lineaire referentie voor de RK4-code van e36/e17. Beide knopen zijn moduletoestanden; de snelle stationsknoop wordt er niet bij opgeteld. De tweedeorderoutine gebruikt analytische responsen voor drie dempingen.

Python **dynamica.py** 34 regels

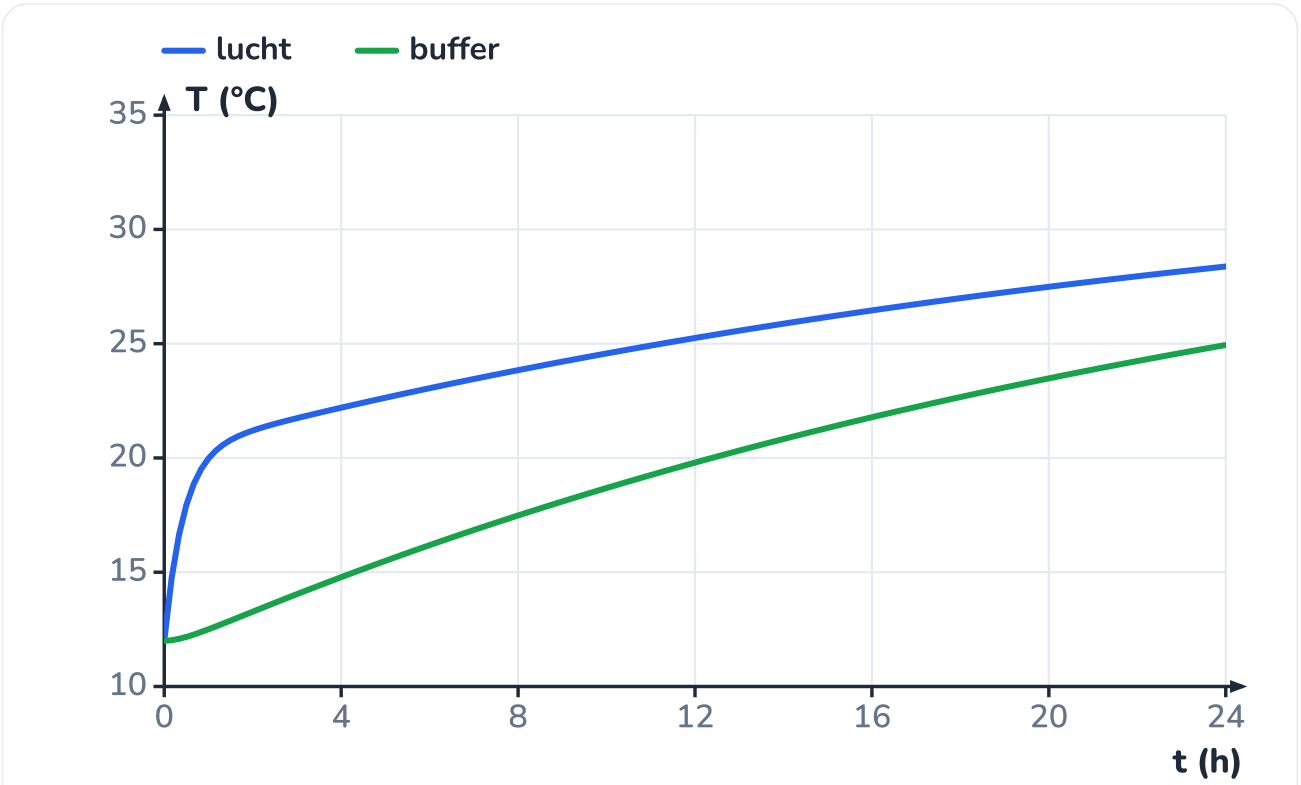
```python
import numpy as np
from scipy.linalg import expm

C_a,C_b,H,G = 80000.0,1100000.0,20.2,30.0
A=np.array([[-(H+G)/C_a,G/C_a],[G/C_b,-G/C_b]])
B=np.array([1/C_a,0.0])
evenwicht=np.linalg.solve(-A,B*600)+4
t=np.linspace(0,24*3600,145)
temp=np.array([evenwicht+expm(A*s)@(np.array([12.,12.])-evenwicht) for s in t])
polen=np.linalg.eigvals(A)
print("tijdschalen h",sorted(-1/polen/3600))
print("na24h",*(f"{v:.6f}" for v in temp[-1]))
print("evenwicht",evenwicht)

def stap2(t,zeta,wn=1.0):
    t=np.asarray(t)
    if zeta<1:
        wd=wn*np.sqrt(1-zeta*zeta)
        return 1-np.exp(-zeta*wn*t)*(np.cos(wd*t)+zeta*wn/wd*np.sin(wd*t))
    if zeta==1: return 1-(1+wn*t)*np.exp(-wn*t)
    p1=-wn*(zeta-np.sqrt(zeta*zeta-1))
    p2=-wn*(zeta+np.sqrt(zeta*zeta-1))
    return 1+(p2*np.exp(p1*t)-p1*np.exp(p2*t))/(p1-p2)

zeta=0.4
mp=np.exp(-np.pi*zeta/np.sqrt(1-zeta*zeta))
tp=np.pi/np.sqrt(1-zeta*zeta)
print("zeta0.4 overshootpct",100*mp,"piekbij",tp)
assert abs(temp[-1,0]-28.375973)<1e-6
# Identificatie zonder ruis: bekende15K-evenwichtsverhoging.
ti=np.array([1,2,3,4,5])*3600
yi=15*(1-np.exp(-ti/10800))
helling=np.polyfit(ti,np.log(1-yi/15),1)[0]
print("geidentificeerde tau",-1/helling,"s")
```

```
tijdschalen h [np.float64(0.43127773520059204), np.float64(25.98053011225082)]
na24h 28.375973 24.941009
evenwicht [33.7029703 33.7029703]
zeta0.4 overshootpct 25.38267219801087 piekbij 3.4277586042362875
geidentificeerde tau 10799.999999999996 s
```



Rekenproef e17: start 12 °C, buiten 4 °C, 600 W; na 24 h is de buffer nog niet in het uiteindelijke evenwicht.

UITLEG · 38.10

De tweeknoops-overdracht afleiden

10/15

Voor afwijkingen ten opzichte van constant buiten is $C_a\dot{T}_a = P - HT_a - G(T_a - T_b)$ en $C_b\dot{T}_b = G(T_a - T_b)$. Transformeer en elimineer T_b:$(C_bs + G)T_b = GT_a$. Vermenigvuldigen levert:

MODULE-OVERDRACHT

$$\frac{T_a(s)}{P(s)} = \frac{C_bs + G}{C_aC_bs^2 + [C_aG + C_b(H + G)]s + HG}$$

Bij s=0 is de versterking 1/H. De nul op –G/Cb beïnvloedt de zichtbaarheid van de trage mode, maar maakt de buffer niet overbodig. De matrixpolen geven tijdschalen 0,4313 h en 25,9805 h. De snelle mode bepaalt de vroege luchtrespons; de trage mode beheerst langetermijnopslag. Na 24 h in de rekenproef is de lucht 28,375973 °C en de buffer 24,941009 °C; uiteindelijk gaan beide naar 33,702970 °C.

UITGEWERKT VOORBEELD · 38.11

Een éénknoopfit uit een stap

11/15

Een gekalibreerde extra 750 W-stap geeft een uiteindelijke 15 K-stijging. Na 3 h is de stijging 9,4818 K.

GEGEVEN

- start in evenwicht
- sensorvertraging apart bepaald

GEVRAAGD

- H,τ en C schatten

OPLOSSING

1. H=ΔP/Δy∞=750/15=50 W/K.
2. $\ln(1 - 9{,}4818/15) \approx -1$; dus τ≈3 h=10800 s.
3. C=Hτ=540 kJ/K. Controleer de hele respons; niet enkel één 63,2%-punt.

ANTWOORD

De oorspronkelijke e39-rekenwaarden worden in deze ruisvrije identificatie teruggevonden.

Klopt dit? Bij een module met trage buffer kan een kort experiment een andere effectieve C geven. De juiste conclusie is dan een ontbrekende tijdschaal, geen vervanging van alle systeemgrenzen.

UITLEG · 38.12

Identificatie heeft een proefontwerp nodig

12/15

Een stap moet groot genoeg zijn tegenover ruis en klein genoeg om geen grenzen, ventilatieschakeling of veranderlijke COP te activeren. Leg het werkelijk afgegeven warmtevermogen vast: een elektrisch warmtepompverbruik is geen constant thermisch P. Meet buiten, buffertemperatuur en relevante verstoringen. Kies een lang genoeg experiment om de langzaamste mode te zien.

Een dode-tijd/τ-fit op het eerste stijgende deel kan handig zijn voor afregelen, maar geeft geen fysische unieke warmtecapaciteit. De modelorde hoort bij het doel. Voor snelle regeling kan een eenvoudiger lokaal model bruikbaar zijn; voor nachtelijke energieplanning is de trage buffer essentieel. Reserveer een andere inputproef voor validatie en rapporteer de band waarin de voorspelling voldoet.

doel	relevante tijd	bewijs
lokale PID	seconden tot uren	sensorvertraging, actuatorgrens
nachtplanning	uren tot dagen	bufferstaat en buitenweer
jaarbalans	seizoenen	bronnen, verliezen, gemiddeld klimaat

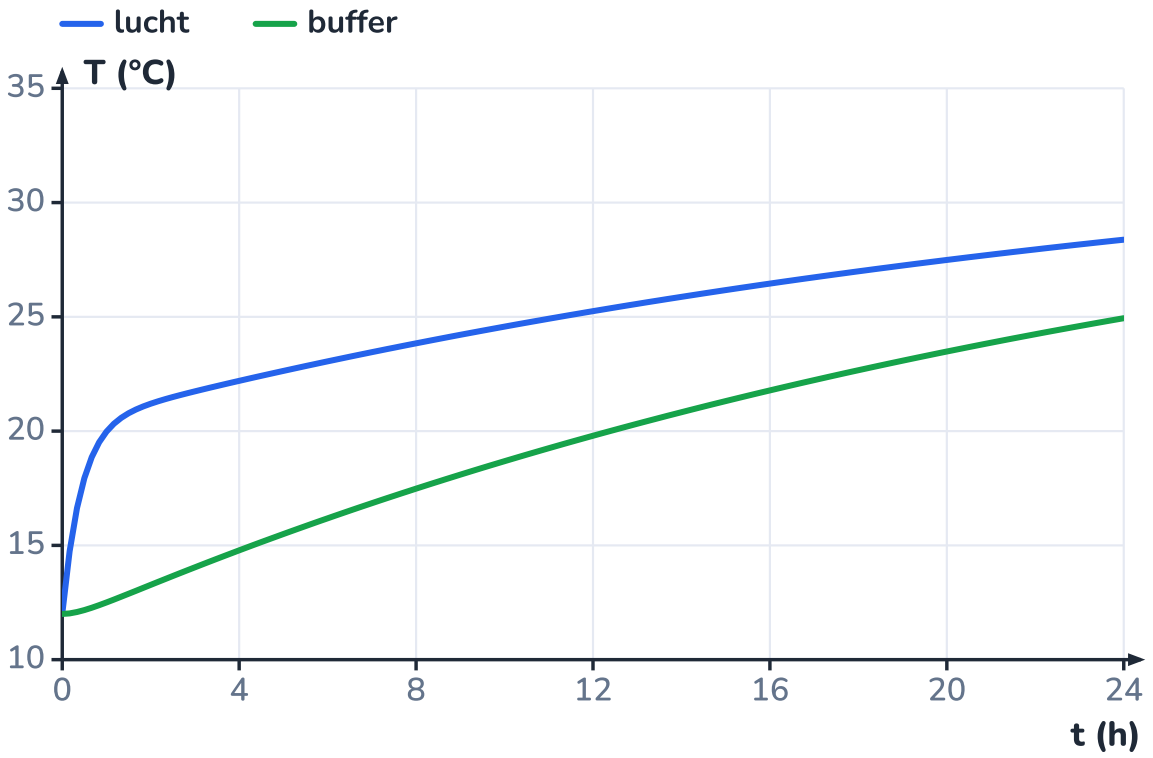
VERHAAL · 38.13

Een gebouw reageert met meerdere herinneringen

13/15

In de e17-rekenproef warmt lucht snel op, terwijl de buffer een dag later nog achterloopt. Dat is de ontwerples voor een technisch operator: een fijne luchttemperatuurgrafiek aan het einde van de middag bewijst geen opgeladen warmtebuffer voor de nacht. Een model dat alleen de kamer ziet kan energie te vroeg wegplannen.

De berekende warmteproef is hier een fictief stationsscenario met exacte balans, geen gemeten gebouwrapport. Een echte proef vergelijkt beide sensorsignalen en de warmte-input. Juist het verschil tussen snelle bediening en trage opslag maakt een tweeling nuttig: zij bewaart toestanden die een dashboard met losse laatste waarden niet laat zien.



Rekenproef e17: start 12 °C, buiten 4 °C, 600 W; na 24 h is de buffer nog niet in het uiteindelijke evenwicht.

NASLAG · 38.14

Stapresponsen in één naslag

14/15

ondergedempte tweede orde-doorschot, 0 < ζ < 1

$$M_p = \mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

symbool	betekenis	eenheid
M_p	fractie doorschot	—
ζ	dempingsverhouding	—

piektijd

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

symbool	betekenis	eenheid
ω_n	ongedempte hoekfrequentie	rad/s

model	kenmerk	beperking
eerste orde	τ, statische K	één zichtbare opslagmode
tweede orde ondergedempt	ζ,ωn, piek	geen grote saturatie
passief twee warmteknopen	twee reële polen	parameters bij bekende grens

HET GEHEEL · 38.15

Van dynamiek naar regeling

15/15

De regelwet verandert de gesloten-lusdynamiek. Goede afstelling begint daarom bij een model met duidelijke grens en bekende meetketen.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief

De modulebalans en vaste knopen.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen

Fitten en integreren met foutcontrole.

E39 PID-regeling

De PI-regelaar verandert de polen.

E40 Sensorfusie en schatten

Meetkwaliteit en modelvoorspelling combineren.

Habitat

De tweeling bewaart lucht en buffer als afzonderlijke toestanden. Het e39-éénknoopsmodel blijft expliciet een regelvereenvoudiging, geen extra kamer naast de module.

SAMENVATTING

In het kort

- Toestand is opgeslagen informatie; een staprespons maakt tijdschalen zichtbaar.
- Een eersteordeproces bereikt 63,2% na τ en reageert zonder dode tijd.
- Tweedeorde kan monotoon of oscillerend zijn; polen en demping bepalen dit.
- Overdrachtsfuncties vragen lineariteit, tijdinvariantie en afgesproken beginvoorwaarden.
- Identificatie vraagt bekende input, geijkte meetketen en een onafhankelijke proef.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

toestand

Informatie die met de toekomstige invoer voldoende is om de toekomstige systeemuitvoer te bepalen.

pool

Een karakteristieke waarde die groei, verval of oscillatie van een lineair systeem bepaalt.

statische versterking

De verhouding tussen verandering van evenwichtsuitvoer en een constante inputverandering.

doorschot

De relatieve piek boven de uiteindelijke stapwaarde.

overdrachtsfunctie

De verhouding van getransformeerde uitgang en ingang van een lineair tijdinvariant systeem bij nul beginvoorwaarden.

E EXPERT · DEEL E8 · REGELTECHNIEK

HANDBOEK · HOOFDSTUK 39

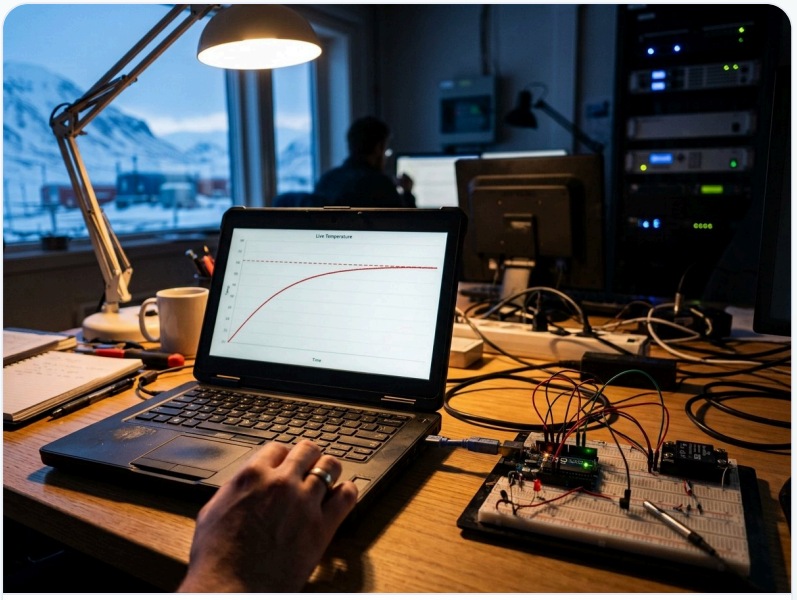
PID-regeling

Drie getallen die van een verwarming, een drone of een insulinepomp een regelaar maken

Een aan/uit-thermostaat schommelt, een P-regelaar komt er nooit helemaal, en een slecht afgestelde regelaar slingert of schiet ver door. De PID-regelaar lost dat op met drie acties: reageren op de fout, op hoe lang ze al duurt, en op hoe snel ze verandert. Je leidt af waarom elke actie doet wat ze doet, simuleert de temperatuurregeling van het station, en schrijft een regelaar die op een microcontroller draait.

5× uitleg · 2× uitgewerkt voorbeeld · 1× ontleed · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 10 lestijden

R Regelen en robotica · P Programmeren en computationeel denken · W Wiskundig modelleren



Regelen is meten, vergelijken en bijsturen, elke seconde opnieuw.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een gesloten regelkring tekenen als blokschema en de begrippen setpoint, fout, stuurgrootheid, storing en meting gebruiken.
- Je kan voor een eerstegraadsproces met P-regeling de gesloten-lusvergelijking afleiden en er de blijvende afwijking en de tijdconstante uit halen.
- Je kan verklaren waarom een I-actie de blijvende afwijking wegwerkt en een D-actie demping geeft, en wat de nadelen van elk zijn.
- Je kan uit een staprespons stijgtijd, doorschot, piektijd, insteltijd en blijvende afwijking bepalen.
- Je kan een discrete PID-regelaar programmeren met een vaste bemonsteringstijd, D op de meting en anti-windup.
- Je kan een regelaar afstellen met de methode van Ziegler-Nichols en de uitkomst kritisch bijsturen.
- Je kan een regeling ontwerpen tegen eisen (nauwkeurigheid, snelheid, begrenzing van de actuator) en je keuzes verantwoorden.

VERHAAL · 39.1

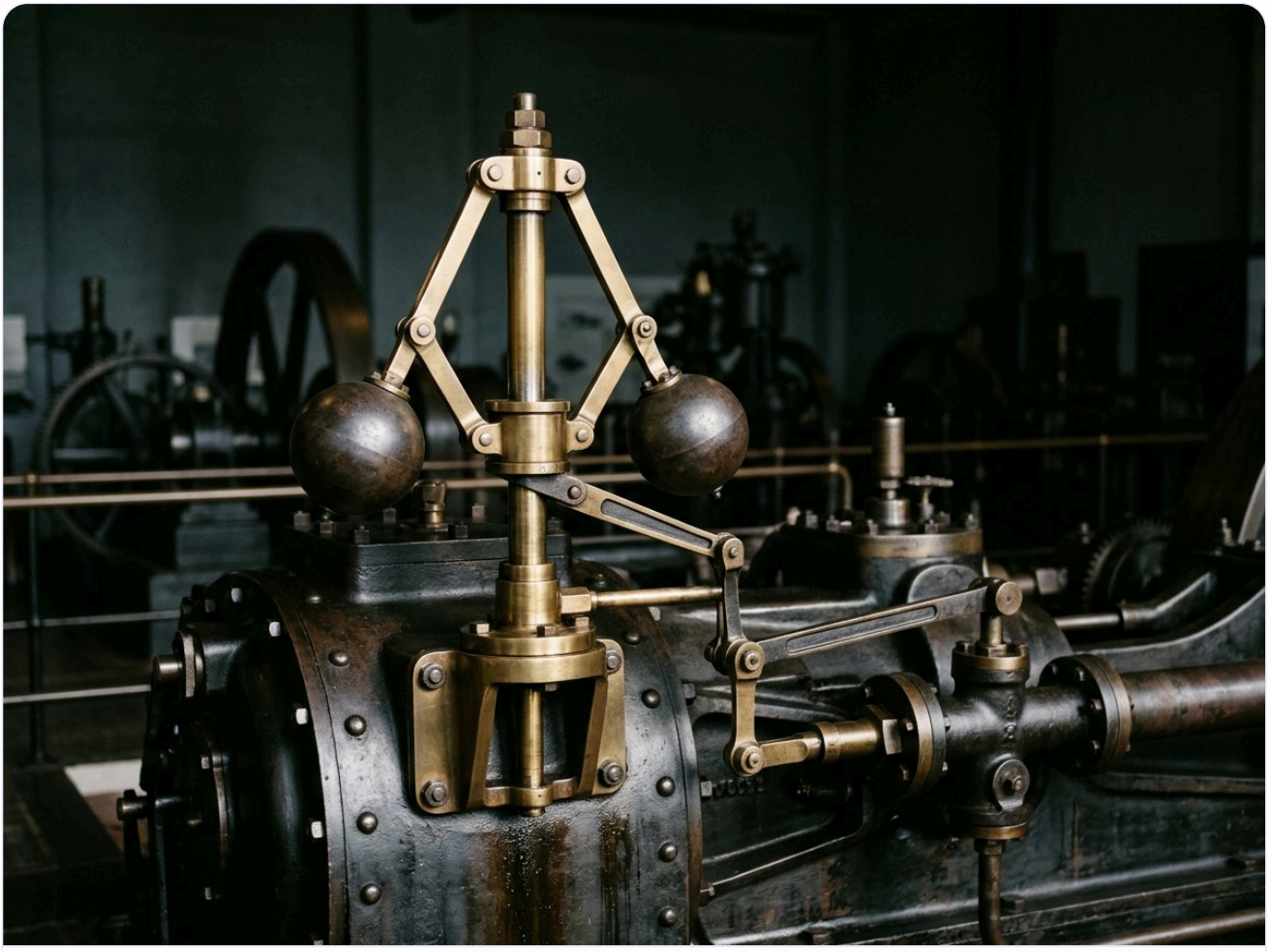
Een stuurman in drie reflexen

In 1922 publiceerde de Russisch-Amerikaanse ingenieur Nicolas Minorsky een artikel over het automatisch sturen van schepen. Hij had bekeken hoe een ervaren stuurman werkt, en zag drie reflexen. Hij draait aan het roer **in verhouding tot** hoe ver het schip van koers is. Hij draait **harder bij** als het schip al lang aan dezelfde kant uit de koers ligt, bijvoorbeeld door een zijwind. En hij remt zijn eigen correctie af **als hij ziet dat het schip al snel terugdraait**, zodat het niet voorbij de koers zwaait.

Die drie reflexen schreef Minorsky als één formule: een term evenredig met de fout, een term evenredig met de opgestapelde fout, en een term evenredig met de verandering van de fout. Dat is de **PID-regelaar**: proportioneel, integrerend, differentiërend. Een eeuw later zit hij in thermostaten, cruisecontrols, drones, 3D-printers, chemische fabrieken en insulinepompen. Het idee van automatisch terugkoppelen is nog ouder: de centrifugaalregulateur die James Watt rond 1788 op zijn stoommachines zette, was al een proportionele regelaar van het toerental.

Waarom dit hoofdstuk ertoe doet

In Intermediate regelde je met aan/uit en hysterese (hoofdstuk 31). Dat werkt, maar de temperatuur schommelt altijd. Het brein van het station moet de binnentemperatuur, de vochtigheid en de waterdruk strak houden, met zo weinig mogelijk energie. Daarvoor heb je PID nodig, en het model van het station uit hoofdstuk 38.



De regulateur van Watt: draait de machine te snel, dan zwaaien de bollen naar buiten en knijpen ze de stoomtoevoer dicht.

UITLEG · 39.2

De regelkring: symbolen en afspraken

Elke regeling heeft dezelfde bouw. Een **proces** (het station met zijn warmtecapaciteit en warmteverlies) wordt gestuurd door een **actuator** (de verwarming). Een **sensor** meet de **geregelde grootheid** y. De **regelaar** vergelijkt de meting met het **setpoint** r, berekent de **fout** $e = r - y$ en stuurt daaruit de **stuurgrootheid** u. Van buitenaf werken **storingen** d in: een deur die opengaat, wind, een ploeg die binnenkomt.

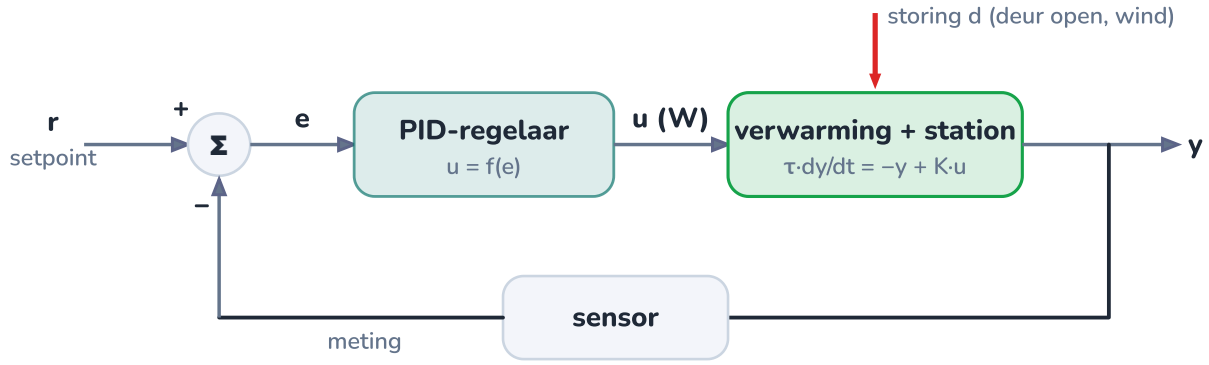
Het procesmodel komt uit hoofdstuk 38. Kies als geregelde grootheid de temperatuurstijging y boven de buitentemperatuur (in °C). Een warmtebalans geeft een eerstegraadsvergelijking:

PROCESMODEL VAN HET STATION

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + K\,u - d$$

$\tau = 10\,800\,\mathrm{s}$ (3 uur) is de tijdconstante, $K = 0{,}020\,^\circ\mathrm{C/W}$ de statische versterking: 1000 W houdt het station op den duur 20 °C warmer dan buiten, of: het station verliest $1/K = 50\,\mathrm{W}$ per graad verschil. Samen geven ze de warmtecapaciteit $C = \tau/K = 540\,\mathrm{kJ/K}$: de *snelle* massa (lucht, binnenwanden en inrichting die binnen enkele uren meewarmen). De verwarming levert $0 \le u \le 2000\,\mathrm{W}$. We rekenen het station hier als één ruimte op één temperatuur; in werkelijkheid heeft de klimaatmodule haar eigen, lagere setpoint (hoofdstuk 31 van Intermediate), en hoofdstuk 17 splitst het model in knopen.

Met u constant en $d = 0$ gaat y exponentieel naar $K\,u$, met tijdconstante τ (hoofdstuk 4). Regelen betekent: u zo kiezen, op elk ogenblik, dat y snel en zonder slingeren bij r komt en er blijft, ook als d verandert.



De sensor koppelt terug: de regelaar ziet niet het proces zelf, alleen de meting ervan.

UITLEG · 39.3

De P-actie: evenredig met de fout

De eenvoudigste regelaar maakt u evenredig met de fout: $u = K_p\,e$. Is het 5 °C te koud en $K_p = 100\,\mathrm{W}/^\circ\mathrm{C}$, dan stuurt hij 500 W. Vul die regelwet in het procesmodel in (zonder storing, en zolang u tussen 0 en 2000 W blijft):

$$\tau\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + KK_p(r-y)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\tau}{1+KK_p}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + \frac{KK_p}{1+KK_p}\,r$$

De gesloten lus is weer een eerstegraadssysteem, met twee eigenschappen die je er meteen uit leest:

P-REGELING VAN EEN EERSTEGRAADSPROCES

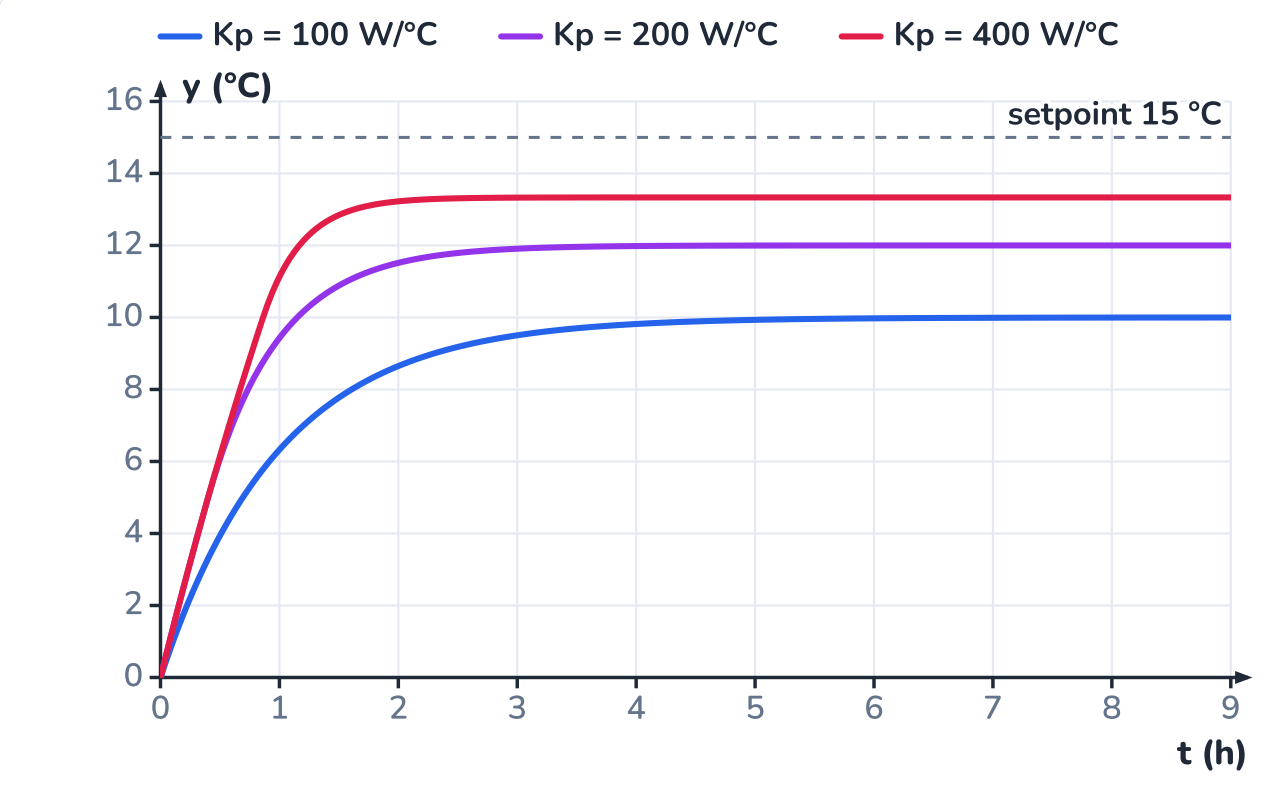
$$\tau_{\text{gesloten}} = \frac{\tau}{1+KK_p} \qquad e_\infty = \frac{r}{1+KK_p}$$

Het product KK_p (de *lusversterking*, zonder eenheid) bepaalt alles: hoe groter, hoe sneller, en hoe kleiner de blijvende afwijking. Maar nooit nul.

Waarom blijft er een fout? Omdat de P-regelaar alleen vermogen levert *als er een fout is*. Het station verliest continu warmte; om 12 °C boven buiten te blijven, is $600\,\mathrm{W}$ nodig, en een P-regelaar met $K_p = 200$ levert die 600 W alleen bij een fout van 3 °C. Evenwicht betekent dus: precies zoveel fout dat het vermogen het verlies dekt.

⚠ Een grote Kp is geen oplossing

In dit ideale model mag K_p onbeperkt groeien. In werkelijkheid botst je op de grens van de actuator (de curve voor $K_p = 400$ start met 2000 W, niet met 6000 W), op ruis die versterkt naar de actuator gaat, en op vertragingen in sensor en proces die de lus bij hoge versterking laten slingeren.



Drie P-regelaars: hoe groter Kp, hoe sneller en hoe dichter bij 15 °C, maar geen enkele komt er.

UITGEWERKT VOORBEELD · 39.4

P-regeling van het station doorrekenen

Het station staat op buitentemperatuur ($y = 0$). Het setpoint springt naar $r = 15\,^\circ\mathrm{C}$ boven buiten. De regelaar is een P-regelaar met $K_p = 100\,\mathrm{W}/^\circ\mathrm{C}$. Bereken de eindtemperatuur, het eindvermogen, de blijvende afwijking en de tijd tot 95 % van de eindwaarde. Controleer of de verwarming ergens aan haar grens komt.

GEGEVEN

- $\tau = 10\,800\,\mathrm{s}$, $K = 0{,}020\,^\circ\mathrm{C}/\mathrm{W}$
- $K_p = 100\,\mathrm{W}/^\circ\mathrm{C}$, $r = 15\,^\circ\mathrm{C}$
- $0 \le u \le 2000\,\mathrm{W}$

GEVRAAGD

- y_∞, u_∞, e_∞
- t_{95}

OPLOSSING

1. Lusversterking: $KK_p = 0{,}020 \cdot 100 = 2{,}0$ (eenheden: °C/W · W/°C, dus zonder eenheid).
2. Blijvende afwijking: $e_\infty = \dfrac{r}{1 + KK_p} = \dfrac{15}{3{,}0} = 5{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, dus $y_\infty = 10{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.
3. Eindvermogen: $u_\infty = K_p\, e_\infty = 100 \cdot 5{,}0 = 500\,\mathrm{W}$. Controle met het proces: $K u_\infty = 0{,}020 \cdot 500 = 10\,^\circ\mathrm{C}$. Klopt.
4. Begrenzing: het grootste vermogen is er bij de start, $u(0) = K_p \cdot 15 = 1500\,\mathrm{W} < 2000\,\mathrm{W}$. De verwarming raakt haar grens niet, dus het lineaire model geldt.
5. Tijdconstante van de gesloten lus: $\tau_\mathrm{g} = \dfrac{10\,800}{3{,}0} = 3600\,\mathrm{s}$, precies één uur.
6. Een eerstegraadssysteem bereikt 95 % na $3\,\tau_\mathrm{g}$ (want $1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}95$): $t_{95} = 3\,\mathrm{h}$.

ANTWOORD

$y_\infty = 10{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, $u_\infty = 500\,\mathrm{W}$, $e_\infty = 5{,}0\,^\circ\mathrm{C}$**, en na 3 uur zit het station op 95 % daarvan (9,5 °C). Een derde van de gevraagde stap blijft ontbreken.**

Klopt dit? De simulatie in de grafiek hiervoor geeft voor $K_p = 100$ na negen uur 10,00 °C: dezelfde uitkomst als de formule. Zonder regeling zou 500 W het station óók op 10 °C brengen, maar pas na $3\tau = 9$ uur: de regelaar maakt het drie keer sneller.

UITLEG · 39.5

De I-actie: het geheugen van de regelaar

Voeg een term toe die de fout **optelt over de tijd**:

PI-REGELAAR

$$u(t) = K_p\, e(t) + K_i \int_0^t e(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

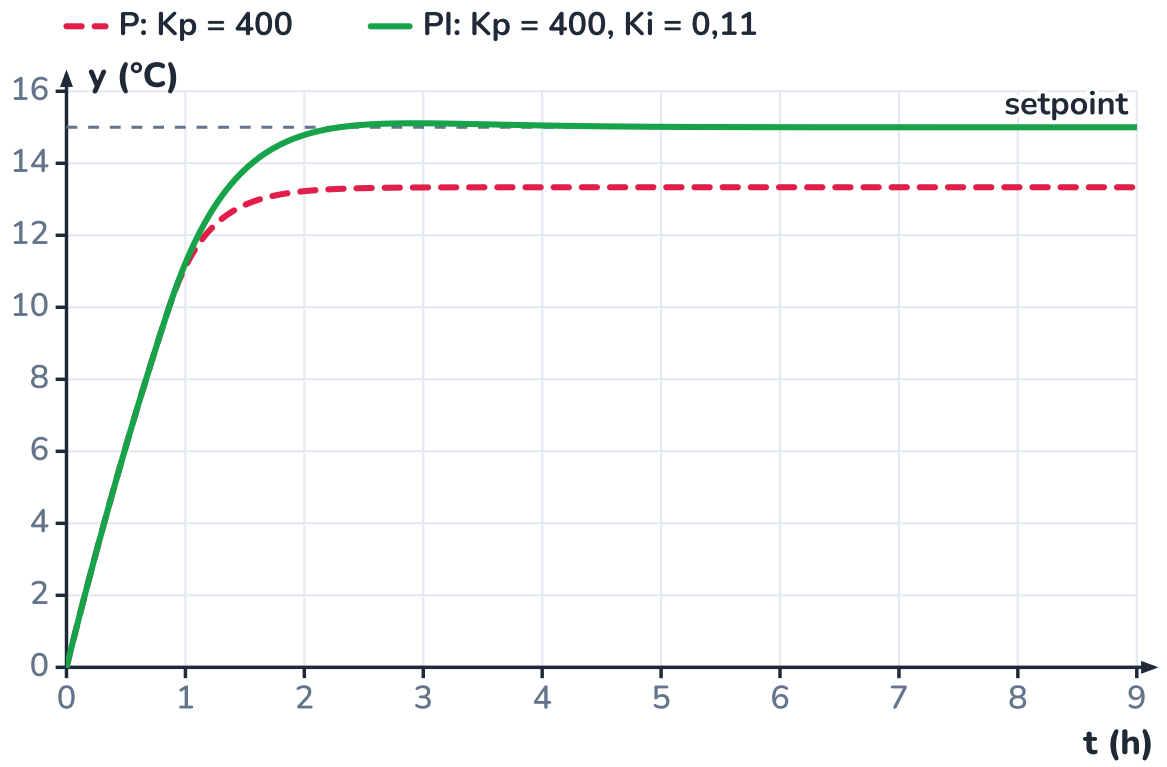
K_i in W/(°C·s). Zolang er een fout is, groeit de integraal en dus u.

Het argument waarom de blijvende afwijking verdwijnt, is kort en krachtig. Stel dat de lus tot rust komt: alles is constant, ook u. Dan is ook de integraal constant, dus haar afgeleide is nul. Maar die afgeleide *is* de fout: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t e\,\mathrm{d}\theta = e(t)$. In een rusttoestand is de fout dus **precies nul**, welke storing er ook werkt. De I-term levert dan in zijn eentje de 750 W die nodig zijn om 15 °C boven buiten te blijven.

De prijs: de integraal reageert pas nadat er fout *opgestapeld* is, en ze blijft reageren nadat de fout al van teken gewisseld is. Daardoor kan de temperatuur voorbij het setpoint schieten. Wiskundig voegt de I-actie een orde toe: de gesloten lus wordt een tweedegraadssysteem, dat kan slingeren (hoofdstuk 38).

Eenheden als controle

$K_p e$ moet watt zijn, dus K_p in W/°C. $\int e\,\mathrm{d}t$ heeft als eenheid °C·s, dus K_i in W/(°C·s). Vaak schrijft men $K_i = K_p/T_i$ met een *integratietijd* T_i in seconden: na T_i seconden constante fout heeft de I-term evenveel bijgedragen als de P-term.



PI (0,7 % doorschot) haalt het setpoint; P met dezelfde Kp blijft 1,7 °C te laag.

UITLEG · 39.6

De D-actie: vooruitkijken

6/13

De derde term reageert op de **snelheid** waarmee de fout verandert:

PID-REGELAAR

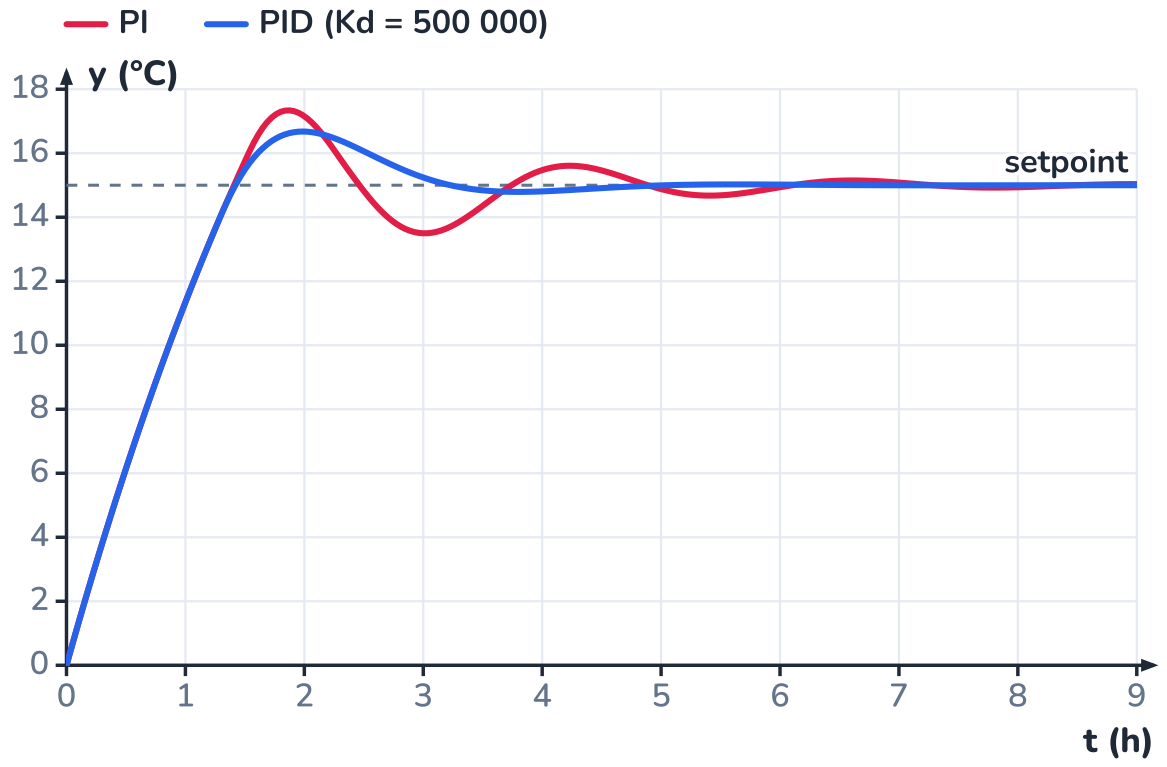
$$u(t) = K_p\,e + K_i\int_0^t e\,\mathrm{d}\theta + K_d\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

K_d in W·s/°C. Of met afgeleide tijd T_d: $K_d = K_p\,T_d$.

Stijgt de temperatuur snel naar het setpoint, dan daalt de fout snel: $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ is negatief en de D-term *neemt vermogen terug* nog voor het setpoint bereikt is. Dat is demping: de regelaar remt af voor de bocht. Het effect is het grootst waar er vertraging in de lus zit, zoals een trage sensor: zonder D reageert de regelaar op een meting die achterloopt.

Twee praktische regels maken de D-actie bruikbaar:

- **D op de meting, niet op de fout.** Als het setpoint springt, springt e ook, en $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ wordt één ogenblik oneindig groot: een schok naar de actuator (*derivative kick*). Omdat $e = r - y$ en r tussen twee sprongen constant is, geldt $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Neem dus de afgeleide van de meting, met een min.
- **Filter de D-term.** Afleiden versterkt ruis: een meting die 0,1 °C op en neer springt tussen twee samples van 1 s, geeft met $K_d = 60\,000$ sprongen van 6000 W. Filter de meting eerst (hoofdstuk 21), of laat de D-actie weg. Veel industriële regelaars zijn gewoon PI.



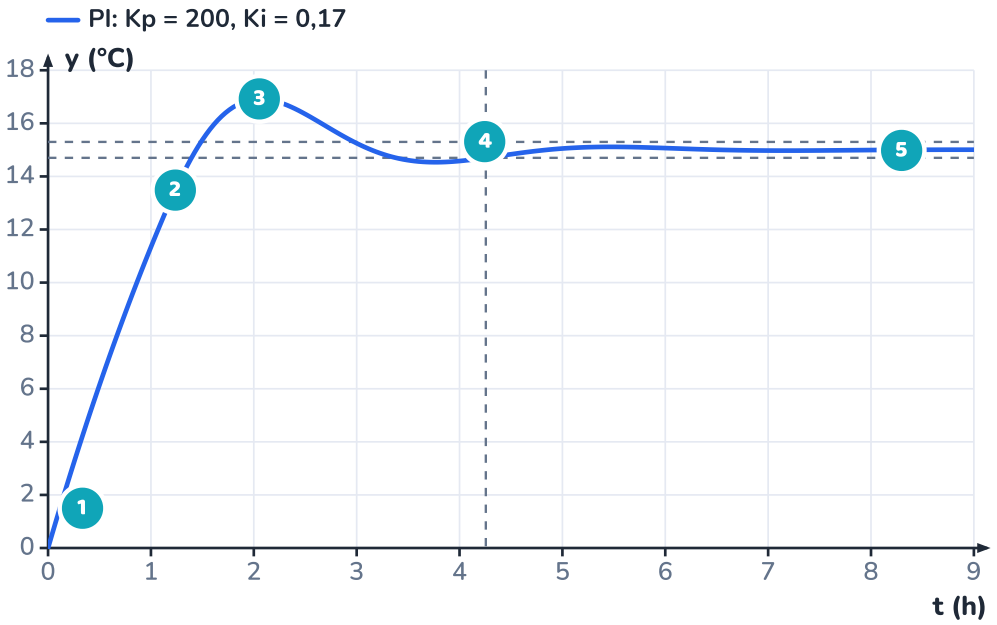
Met een meting die een halfuur achterloopt (de warmte moet zich eerst door het station verspreiden): de D-actie verlaagt het doorschot van 15,6 naar 11,2 % en de insteltijd van 5,6 naar 3,0 uur.

ONTLEED · 39.7

Een staprespons lezen

7/13

Om regelaars te vergelijken, geef je een stap op het setpoint en meet je vijf kenmerken. Hier: de PI-regelaar met $K_p = 200$ en $K_i = 0{,}17$, met anti-windup, van 0 naar 15 °C.



De stippellijnen bij 14,7 en 15,3 °C zijn de band van ±2 %; de verticale lijn is de insteltijd.

1 Stijgtijd
Tijd van 10 % naar 90 % van de stap: hier 67 minuten (van 7 tot 74 min). Maat voor snelheid.

2 Verzadiging
Het eerste stuk loopt de verwarming op haar maximum van 2000 W (40,7 minuten). Sneller kan niet, hoe je ook afstelt.

3 Doorschot en piektijd
Piek 16,91 °C na 2,1 uur: 12,8 % doorschot. Een verwarming mag wat doorschieten; een chemische reactor of een robotarm vaak niet.

4 Insteltijd
Vanaf 4,3 uur blijft de temperatuur binnen ±2 % (±0,3 °C) van het setpoint.

5 Blijvende afwijking
Na negen uur 15,01 °C: praktisch nul, dankzij de I-actie.

NASLAG · 39.8

Formules, vuistregels en afstelling

8/13

PID, parallelvorm

$$u = K_p\, e + K_i \int e\,\mathrm{d}t + K_d \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

symbool	betekenis	eenheid
e	fout r − y	°C
K_p	proportionele versterking	W/°C
K_i	integrerende versterking	W/(°C·s)
K_d	differentiërende versterking	W·s/°C

PID, standaardvorm

$$u = K_p \left(e + \frac{1}{T_i} \int e\,\mathrm{d}t + T_d \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \right)$$

symbool	betekenis	eenheid
T_i	integratietijd	s
T_d	differentiatietijd	s

discrete PID (D op de meting)

$$u_k = K_p e_k + K_i \Delta t \sum_{j=0}^{k} e_j - K_d \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t}$$

symbool	betekenis	eenheid
Δt	bemonsteringstijd	s
k	nummer van het sample	–

parameter omhoog	stijgtijd	doorschot	insteltijd	blijvende afwijking
K_p	korter	groter	weinig effect	kleiner
K_i	korter	groter	langer	verdwijnt
K_d	weinig effect	kleiner	korter	geen effect

Vuistregels, geen wetten: bij een proces met veel vertraging of bij verzadiging kan een parameter het omgekeerde doen.

Ziegler-Nichols (gesloten lus)	K_p	T_i	T_d
P	$0{,}5\,K_u$	–	–
PI	$0{,}45\,K_u$	$T_u/1{,}2$	–
PID	$0{,}6\,K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

K_u: de P-versterking waarbij de lus net aanhoudend slingert; T_u: de periode van die slingering.

CODE · 39.9

De regeling simuleren

9/13

Een simulatie laat je regelaars uitproberen zonder het station te laten bevriezen. De procesvergelijking wordt stap per stap vooruit gerekend met de methode van Euler (hoofdstuk 4): elke seconde meten, u berekenen, begrenzen, en y een stapje verder zetten. Alle grafieken van dit hoofdstuk zijn met deze code gemaakt.

Python **pid_station.py** 30 regels

```python
# PI(D)-regeling van de stationtemperatuur: simulatie met de methode van Euler
TAU = 10800.0     # tijdconstante van het station (s): 3 uur
K = 0.02          # statische versterking (graden Celsius per watt)
U_MAX = 2000.0    # vermogen van de verwarming (W)


def simuleer(Kp, Ki, Kd=0.0, r=15.0, T=32400, dt=10.0, anti_windup=True):
    y = 0.0               # temperatuurstijging boven de buitentemperatuur (graden Celsius)
    integraal = 0.0
    vorige = y
    tijden, temps = [], []
    for k in range(int(T / dt) + 1):
        e = r - y
        afgeleide = -(y - vorige) / dt          # D op de meting: geen sprong bij een nieuw setpoint
        u_vrij = Kp * e + Ki * integraal + Kd * afgeleide
        u = min(max(u_vrij, 0.0), U_MAX)         # de verwarming kan enkel 0 tot 2000 W leveren
        verzadigd = u != u_vrij
        if not (anti_windup and verzadigd and (u_vrij > 0) == (e > 0)):
            integraal += e * dt                  # anti-windup: niet verder integreren tegen de grens
        vorige = y
```

```
        y += dt * (-y + K * u) / TAU            # Euler-stap van tau * dy/dt = -y + K * u
        tijden.append(k * dt)
        temps.append(y)
    return tijden, temps


t, y = simuleer(Kp=200, Ki=0.17)
print("met anti-windup:   maximum %.2f, na negen uur %.2f" % (max(y), y[-1]))
t, y = simuleer(Kp=200, Ki=0.17, anti_windup=False)
print("zonder anti-windup: maximum %.2f, na negen uur %.2f" % (max(y), y[-1]))
```

Uitvoer:

```
met anti-windup:   maximum 16.91, na negen uur 15.01
zonder anti-windup: maximum 22.85, na negen uur 14.95
```

Let op drie details. De begrenzing `min(max(...))` is geen detail: elke echte actuator heeft grenzen. De integraal telt $e \cdot \Delta t$ op, dus de eenheid klopt. En de stapgrootte van 10 s is klein tegenover $\tau = 10\,800$ s: de Euler-fout is verwaarloosbaar (probeer $\Delta t = 2000$ s en kijk wat er gebeurt).

UITLEG · 39.10

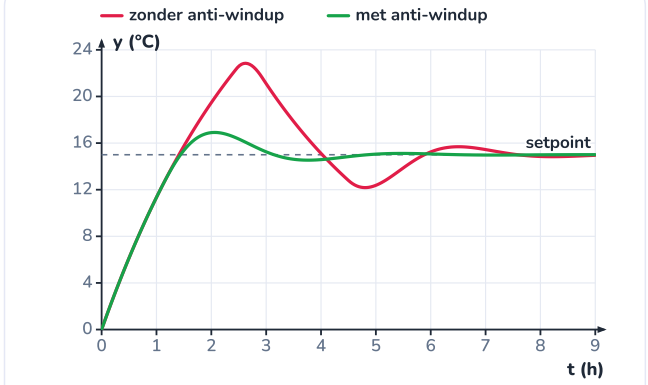
Integrator-windup en anti-windup

10/13

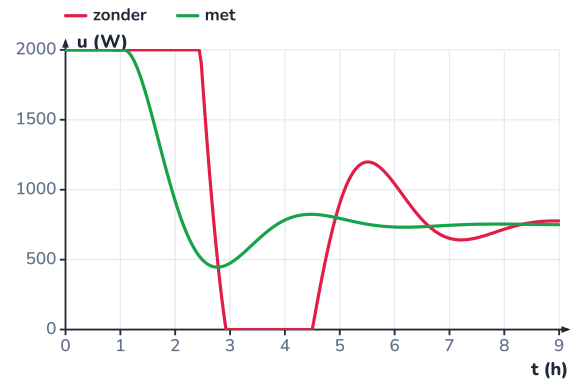
Bij de start is de fout 15 °C. De regelaar vraagt meer dan 2000 W, maar de verwarming kan niet meer. Zolang dat duurt, is het station trager dan de regelaar 'denkt', en de integraal blijft **oplopen** met een fout die niet sneller kleiner kan worden. Tegen dat het setpoint bereikt is, zit er zoveel opgestapelde fout in de integraal dat de regelaar nog lang vol blijft stoken: de temperatuur schiet ver door. Dat heet **integrator-windup**.

De remedie is eenvoudig: **stop met integreren zolang de actuator aan zijn grens zit en de fout hem verder die grens in zou duwen**. In de code is dat één voorwaarde. Het resultaat in cijfers: zonder anti-windup 22,8 °C piek (52 % doorschot), met anti-windup 16,9 °C (13 %). De verwarming staat zonder anti-windup 147,7 minuten op vol vermogen, met anti-windup 40,7 minuten.

> **"Windup is een programmeerfout"**
>
> Windup gebeurt ook in een perfect geprogrammeerde PID. Het is een wisselwerking tussen de I-actie en de begrenzing van de actuator, die in de formule van de PID niet voorkomt. Daarom moet je die begrenzing expliciet in je regelaar inbouwen.



Temperatuur: zelfde Kp en Ki, alleen de anti-windup verschilt.



Vermogen: zonder anti-windup blijft de verwarming te lang op 2000 W staan.

UITGEWERKT VOORBEELD · 39.11

Afstellen met Ziegler-Nichols

11/13

Op het echte station (met een trage sensor en wat dode tijd) zet een technicus de I- en D-actie uit en verhoogt ze K_p tot de temperatuur net blijvend slingert. Dat gebeurt bij $K_u = 900\,\mathrm{W/°C}$; de slingering heeft een periode $T_u = 4320\,\mathrm{s}$ (72 minuten). Bereken de instellingen voor een PI- en een PID-regelaar, in de parallelvorm (K_p, K_i, K_d).

GEGEVEN

- $K_u = 900\,\mathrm{W/°C}$
- $T_u = 4320\,\mathrm{s}$

GEVRAAGD

- PI: K_p, K_i
- PID: K_p, K_i, K_d

OPLOSSING

1. PI volgens de tabel: $K_p = 0{,}45 \cdot 900 = 405\,\mathrm{W/°C}$ en $T_i = 4320/1{,}2 = 3600\,\mathrm{s}$.
2. Omrekenen naar de parallelvorm: $K_i = K_p/T_i = 405/3600 \approx 0{,}11\,\mathrm{W/(°C \cdot s)}$.
3. PID: $K_p = 0{,}6 \cdot 900 = 540\,\mathrm{W/°C}$, $T_i = 4320/2 = 2160\,\mathrm{s}$, $T_d = 4320/8 = 540\,\mathrm{s}$.
4. Parallelvorm: $K_i = 540/2160 = 0{,}25\,\mathrm{W/(°C \cdot s)}$ en $K_d = K_p T_d = 540 \cdot 540 = 291\,600\,\mathrm{W \cdot s/°C}$.

ANTWOORD

PI: $K_p = 405$, $K_i \approx 0{,}11$. PID: $K_p = 540$, $K_i = 0{,}25$, $K_d = 291\,600$ (eenheden zoals hierboven).

Klopt dit? Ziegler-Nichols mikt op een respons die per slingering tot een kwart uitdooft: snel, maar met flink doorschot. Zie het als startpunt. Voor een verwarming verlaag je daarna meestal Kp en Ki met 20 à 40 % en meet je opnieuw. Een zuiver eerstegraadsproces zonder vertraging slingert trouwens nooit: daar bestaat geen Ku.

CODE · 39.12

De regelaar op een microcontroller

Op het station draait de regelaar op een microcontroller. Drie verschillen met de simulatie: de bemonsteringstijd wordt bewaakt met `millis()` (hoofdstuk 29 van Intermediate), de temperatuur komt van een echte sensor, en een verwarming van 2 kW stuur je niet met PWM van 490 Hz aan maar met een **solid-state relais** (SSR) dat per venster van 5 s een deel van de tijd aanstaat (tijdproportionele sturing).

C++ (Arduino) **pid_station.ino** 54 regels

```cpp
// Discrete PI(D)-regelaar voor de stationtemperatuur (Arduino)
// Sensor: TMP36 op A0 (10 mV per graad, 0,5 V bij 0 graden). Actuator: SSR met tijdproportionele sturing.
const float KP = 200.0;                 // W per graad
const float KI = 0.17;                  // W per (graad * s)
const float KD = 0.0;                   // W * s per graad
const float U_MAX = 2000.0;             // W
const unsigned long DT_MS = 1000;       // bemonsteringstijd: 1 s
const unsigned long VENSTER_MS = 5000;  // tijdvenster van het SSR: 5 s
const int SSR_PIN = 8;

float setpoint = 20.0;                  // gewenste binnentemperatuur (graden Celsius)
float integraal = 0.0;
float vorigeMeting = 0.0;
float u = 0.0;                          // gevraagd vermogen (W)
unsigned long vorigeRegeling = 0;
unsigned long vensterStart = 0;

float leesTemperatuur() {
  float spanning = analogRead(A0) * 5.0 / 1023.0;
  return (spanning - 0.5) * 100.0;
}

void setup() {
  pinMode(SSR_PIN, OUTPUT);
  Serial.begin(115200);
  vorigeMeting = leesTemperatuur();
}

void loop() {
  unsigned long nu = millis();
  if (nu - vorigeRegeling >= DT_MS) {   // elke seconde: meten en regelen
    vorigeRegeling += DT_MS;
    float dt = DT_MS / 1000.0;
    float meting = leesTemperatuur();
    float e = setpoint - meting;
    float afgeleide = -(meting - vorigeMeting) / dt;   // D op de meting
    vorigeMeting = meting;
    float uVrij = KP * e + KI * integraal + KD * afgeleide;
    u = constrain(uVrij, 0.0, U_MAX);
    bool verzadigd = (u != uVrij);
    if (!(verzadigd && ((uVrij > 0) == (e > 0)))) {
      integraal += e * dt;              // anti-windup
    }
    Serial.print(meting);
    Serial.print(',');
    Serial.println(u);
  }
  // tijdproportioneel: het SSR staat u / U_MAX van elk venster van 5 s aan
  if (nu - vensterStart >= VENSTER_MS) {
    vensterStart += VENSTER_MS;
  }
```

```
  unsigned long aanTijd = (unsigned long)(u / U_MAX * VENSTER_MS);
  digitalWrite(SSR_PIN, (nu - vensterStart) < aanTijd ? HIGH : LOW);
}
```

Het venster van 5 s is kort tegenover de tijdconstante van 3 uur: het station 'ziet' alleen het gemiddelde vermogen. De TMP36 geeft 10 mV per graad met 0,5 V bij 0 °C; met de 10-bits ADC van een Uno op 5 V is één stap ongeveer 0,49 °C. Dat is grof voor een D-actie, en precies waarom KD hier op nul staat.

230 V is geen oefenmateriaal

Een SSR schakelt netspanning. In de klas werk je met een vermogensweerstand of een lamp op 12 V en een MOSFET (hoofdstuk 23 van Intermediate). Het principe en de code zijn dezelfde.

HET GEHEEL · 39.13

Waar PID vandaan komt en waar het heen gaat

13/13

PID is het punt waar bijna alle leerlijnen samenkomen: het procesmodel is energie (E) en wiskunde (W), de meting is onderzoeken en elektronica (O, L), de uitvoering is programmeren (P), en het geheel is regelen (R). Ook de natuur regelt zo: je lichaam houdt je temperatuur en je bloedsuiker constant met terugkoppeling.

F25 Sensoren en automatisch regelen
De eerste regeling: aan/uit met een drempelwaarde.

I31 Regelsystemen
Open en gesloten lus, blokschema's, hysterese: de taal van dit hoofdstuk.

E1 Afgeleiden: verandering meten
De D-actie is een afgeleide; numeriek afleiden versterkt ruis.

E3 Integralen: ophopen
De I-actie is een integraal, numeriek een som.

E4 Differentiaalvergelijkingen en simulatie
Het procesmodel en de methode van Euler waarmee je simuleert.

E38 Dynamische systemen modelleren
Tijdconstante, tweedegraadssystemen en doorschot: waarom een PI-lus kan slingeren.

E40 Sensorfusie en schatten
Een regelaar is zo goed als zijn meting: filteren en schatten.

E33 Het lichaam als regelsysteem
Glucose en insuline: een biologische regelkring, en de insulinepomp als technische.

Habitat
Het brein van het station regelt temperatuur, luchtvochtigheid en waterdruk met PID-lussen. Opdracht 39.10 is het ontwerp van de temperatuurregeling; in het integratieproject (hoofdstuk 49) koppel je die aan de digitale tweeling en aan het energiebeheer.

SAMENVATTING

In het kort

- Een gesloten regelkring meet y, vergelijkt met het setpoint r en stuurt u uit de fout $e = r - y$.

- P-regeling van een eerstegraadsproces: $\tau_g = \tau/(1 + KK_p)$ en een blijvende afwijking $r/(1 + KK_p)$ die nooit nul is.
- De I-actie maakt de fout in rust precies nul, omdat de integraal anders niet constant kan zijn; ze kan doorschot geven.
- De D-actie dempt door op de verandering te reageren; neem ze op de meting en filter ze, want ze versterkt ruis.
- Elke actuator is begrensd: zonder anti-windup geeft de I-actie groot doorschot na verzadiging.
- Discreet: $u_k = K_p e_k + K_i \Delta t \sum e_j - K_d(y_k - y_{k-1})/\Delta t$, met een vaste bemonsteringstijd.
- Ziegler-Nichols geeft een snel startpunt uit K_u en T_u; bijregelen op de gemeten staprespons blijft nodig.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

setpoint (gewenste waarde)
De waarde r die de regeling moet bereiken, bv. 20 °C binnentemperatuur.

regelfout
Het verschil $e = r - y$ tussen setpoint en gemeten waarde.

stuurgrootheid
Wat de regelaar naar de actuator stuurt, u (hier: verwarmingsvermogen in W).

blijvende regelafwijking
De fout die overblijft als alles tot rust gekomen is; bij zuivere P-regeling niet nul.

doorschot
Hoeveel de gemeten waarde voorbij het setpoint gaat, in procent van de stap.

insteltijd
De tijd tot de waarde binnen een band (hier ±2 %) rond het setpoint blijft.

integrator-windup
Het oplopen van de I-term terwijl de actuator aan zijn grens zit, met groot doorschot als gevolg.

anti-windup
Maatregel die de I-term niet verder laat groeien zolang de actuator verzadigd is.

Ziegler-Nichols
Afstelmethode die de regelaar instelt vanuit de kritische versterking K_u en de periode T_u van een aanhoudende slingering.

E EXPERT · DEEL E8 · REGELTECHNIEK

HANDBOEK · HOOFDSTUK 40

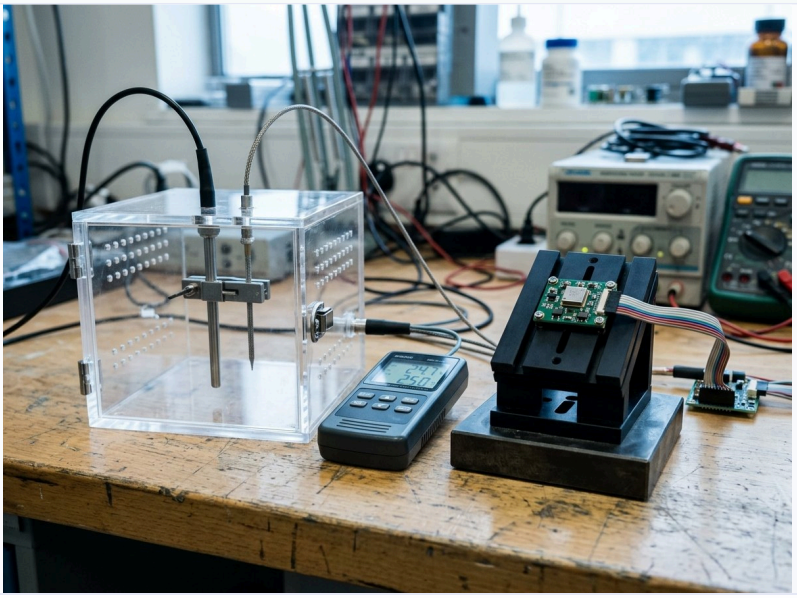
Sensorfusie en schatten

Een schatting vertelt zowel wat je weet als hoe onzeker dat weten is

Eén sensor kan ruisen, achterlopen of uitvallen. Twee sensoren zijn alleen sterker als ze dezelfde toestand op een bekende manier meten. Je combineert voorspellen en meten, leidt een eendimensionaal Kalman-filter af en bewaakt de aannamen waarop de zekerheid berust.

9× uitleg · 3× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

R Regelen en robotica · A Data en AI · W Wiskundig modelleren



Co-located sensoren kunnen dezelfde toestand toetsen; een water- en luchtsensor meten verschillende toestanden.

Na dit hoofdstuk

- Je kan ruis, bias, vertraging en meetonzekerheid onderscheiden.
- Je kan onafhankelijke metingen met variantiegewichten combineren.
- Je kan een complementair hoekfilter programmeren en de zwaartekrachtaanname toetsen.
- Je kan voorspelling, gain, innovatie en covariantie van een 1D-Kalman-filter afleiden.
- Je kan kalibratie, sensoruitval en foutdetectie als apart beleid ontwerpen.

UITLEG · 40.1

Meer getallen betekenen niet meer zekerheid

1/17

Ruis is een variërende fout; bias is een systematische verschuiving. Meetvertraging is dynamiek. Een schaalfout verandert de helling van de sensoroverdracht. Middelen verlaagt alleen de spreiding van

voldoende onafhankelijke ruis; een gedeelde kalibratiefout blijft. De NTC uit e06 heeft ongeveer 0,10 K sample-ruis, maar ook een kalibratie-onzekerheid die middelen niet verwijdert.

Fusie vraagt een gemeenschappelijke toestand. Een NTC in het reservoir en een SHT31 in de lucht mogen niet eenvoudig gemiddeld worden: water en lucht kunnen werkelijk verschillen. Dit hoofdstuk gebruikt twee co-located temperatuurprobes in een geijkte kamer als expliciet rekenmodel. Het NTC-ruisbudget dient als voorbeeld, geen nieuwe plaatsing van de bestaande reservoirsensor.

afwijking	herkennen	middel helpt
witte ruis	snelle spreiding	ja, bij kansmodel
bias	blijvend verschil tegen referentie	nee
vertraging	verschil na een temperatuurstap	niet zonder dynamisch model
echte temperatuurgradiënt	plaatsafhankelijk verschil	nee, andere toestand

UITLEG · 40.2

Twee onafhankelijke metingen wegen

2/17

Neem $x_1 = x + v_1$ en $x_2 = x + v_2$ met nulgemiddelde onafhankelijke ruis en varianties R_1, R_2. Een lineaire onvertekende schatting is $\hat{x} = wx_1 + (1-w)x_2$. De foutvariantie is $w^2R_1 + (1-w)^2R_2$. Afleiden naar w en gelijkstellen aan nul geeft:

WEGEN MET PRECISIE, HET OMGEKEERDE VAN VARIANTIE

$$\hat{x} = \frac{x_1/R_1 + x_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2}$$

VARIANTIE VAN ONAFHANKELIJKE STATISCHE FUSIE

$$P = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2}$$

Bij gedeelde foutcovariantie ontstaat een kruisterm. Twee sensoren met dezelfde referentie zijn niet automatisch onafhankelijk. De uitkomstvariantie onder een onjuist onafhankelijkheidsmodel kan te optimistisch worden. Een gedeelde bias kan als extra toestand worden geschat met een onafhankelijke referentie, of als onzekerheidsvloer behouden blijven.

UITGEWERKT VOORBEELD · 40.3

De nauwkeurigste sensor krijgt meer gewicht

3/17

Twee co-located probes geven 20,10 °C en 19,80 °C.

GEGEVEN

- ruis σ1=0,10 K,σ2=0,20 K
- bias apart geijkt

GEVRAAGD

- Gewogen schatting en standaardafwijking

OPLOSSING

1. R1=0,01 K² en R2=0,04 K². Gewichten zijn 0,8 en 0,2.

2. Schatting 0,8×20,10+0,2×19,80=20,04 °C.

3. P=1/(100+25)=0,008 K²;σ=√P=0,08944 K. Een gemeenschappelijke kalibratie u=0,07 K geeft gecombineerd √(0,008+0,0049)=0,11358 K.

ANTWOORD

20,04 °C met 0,089 K ruis; inclusief die gedeelde ijking circa 0,114 K standaardonzekerheid.

Klopt dit? De fabrikantnauwkeurigheid van een SHT31 is geen automatisch Gaussische σ; de gebruikteσ2 is een expliciete rekenwaarde.

UITLEG · 40.4

Filteren is informatie over tijd gebruiken

4/17

Het voortschrijdend gemiddelde vermindert witte ruis, maar voegt vertraging toe. Een exponentieel filter $\hat{x}_k = \alpha\hat{x}_{k-1} + (1-\alpha)z_k$ heeft een vaste verhouding tussen oude schatting en nieuwe meting. Voor een gekozen continue tijdconstante is $\alpha = \mathrm{e}^{-\Delta t/\tau_f}$ een nuttige exacte vrije-vervalkeuze.

E21 gebruikt voor de NTC een voorgestelde tijdconstante van 5 s bij 1 Hz en noemt het gewicht van de **nieuwe** meting α=0,181269. In de formule hier heet het gewicht van de **oude** schatting α: dat is 0,818731. Beide notaties beschrijven dezelfde update. De voorspelde witte-ruisspreiding is 0,03157 K; de ijkonzekerheid en sensorkastvertraging van 60 s blijven apart.

Bij onregelmatige samples is Δt de echte tijdstap. Sla ontbrekende data niet als nul op en herhaal een oude meting niet alsof die nieuw is: dat maakt onzekerheid kunstmatig klein. De fusieparameters hier zijn expliciete voorbeelden. Het analoge A3-filter uit e21 heeft 64,144 Hz als berekende kantelfrequentie; het bestaande ±10 mV-signaal uit e07 is al gefilterd en wordt niet nog eens met dezelfde demping vermenigvuldigd.

HIER: GEWICHT VAN DE OUDE SCHATTING

$$\alpha = \mathrm{e}^{-\Delta t/\tau_f}$$

UITLEG · 40.5

Een hoek uit twee verschillende principes

5/17

Een gyroscoop meet hoeksnelheid. Integreren geeft hoek, maar een kleine bias stapelt op:0,20 °/s geeft 12° drift per minuut. Een accelerometer meet specifieke kracht. In quasistatische omstandigheden kan de richting van zwaartekracht de hellingshoek geven; bij de afgesproken assen $\theta_a = \operatorname{atan2}(a_x, a_z)$. Tijdens versnellen of trillen is die interpretatie niet volledig geldig.

De gyroscoop is sterk op snelle beweging, de accelerometer corrigeert langzame drift. Het complementaire filter combineert:

ÉÉNASSIGE COMPLEMENTAIRE SCHATTING

$$\hat{\theta}_k = \alpha[\hat{\theta}_{k-1} + \Delta t(\omega_k - b)] + (1-\alpha)\theta_{a,k}$$

Gebruik in een fysische berekening radianen; de code toont graden zodat drift leesbaar is. De éénassige demonstratie is geen volledige 3D-oriëntatie-estimator. Nulpuntskalibratie van de gyro gebeurt bij aantoonbare stilstand.

CODE · 40.6

Complementaire schatting met een echte verstoring

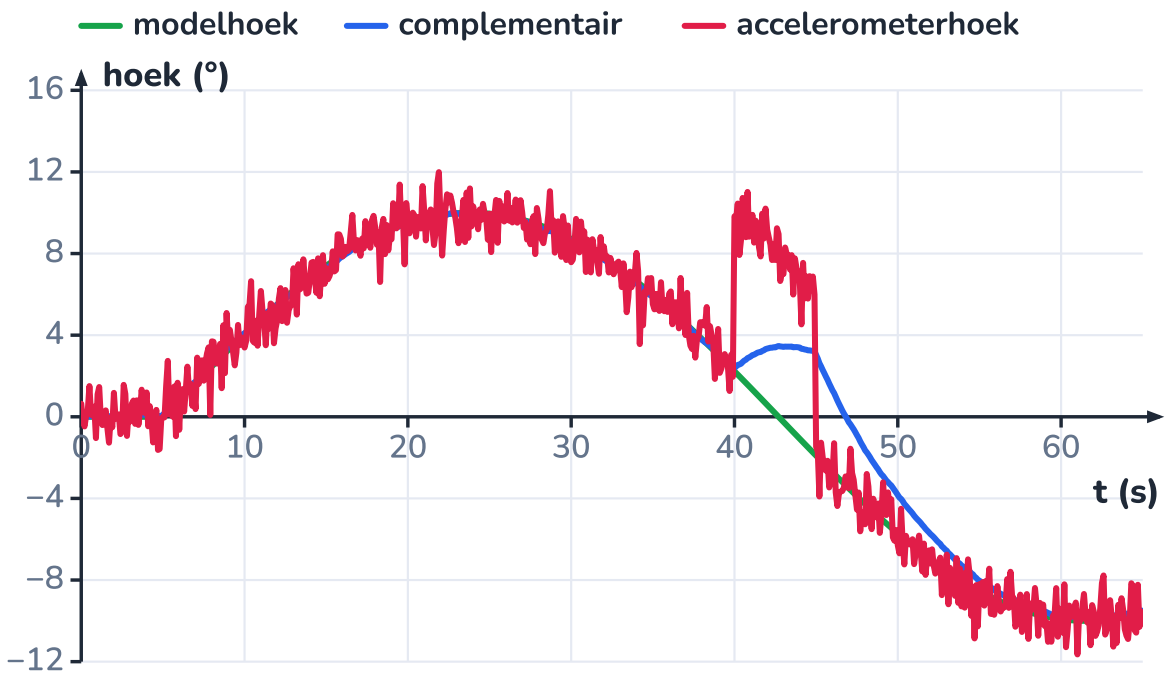
6/17

De modelhoek is de eerste 5 s nul voor ijking. Daarna volgt een sinus. Bij 40–45 s treedt een extra accelerometerhoek op door een translatieverstoring. De demonstratie laat zien waarom een filter een foutmodel nodig heeft en waarom vertrouwen tijdelijk moet worden aangepast.

Python **complementair.py** 20 regels

```python
import numpy as np
rng=np.random.default_rng(41)
dt=0.1; t=np.arange(0,65,dt)
theta=np.where(t<5,0,10*np.sin((t-5)/12))  # graden voor leesbare uitvoer
omega=np.where(t<5,0,10/12*np.cos((t-5)/12))
gyro=omega+0.20+rng.normal(0,0.05,len(t))
acc=theta+rng.normal(0,0.8,len(t))
acc[(t>=40)&(t<45)]+=8  # translatie: zwaartekrachtmodel tijdelijk fout
bias=gyro[t<5].mean()   # stilstaande ijkfase
alpha=np.exp(-dt/5.0)
g=0.;c=0.;integraal=[];complement=[]
for w,a in zip(gyro,acc):
    g+=dt*(w-bias)
    c=alpha*(c+dt*(w-bias))+(1-alpha)*a
    integraal.append(g);complement.append(c)
print("gyro-bias",round(bias,4),"graden/s")
print("alpha",round(alpha,6))
mask=(t>=5)&~((t>=40)&(t<50))
print("rms complement buiten translatie",
      round(np.sqrt(np.mean((np.array(complement)[mask]-theta[mask])**2)),4),"graden")
```

```
gyro-bias 0.203 graden/s
alpha 0.980199
rms complement buiten translatie 0.4101 graden
```



Een translatieverstoring maakt de accelerometerhoek tijdelijk onjuist; het filter vermindert die invloed maar herkent de oorzaak niet vanzelf.

UITLEG · 40.7

Kalman begint met een toestand en een onzekerheid

7/17

Een 1D-toestandsmodel is $x_k = ax_{k-1} + bu_{k-1} + w_k$. De meting is $z_k = hx_k + v_k$. Procesruis w heeft variantie Q; meetruis v variantie R. In het eenvoudige temperatuurvoorbeeld zijn a=h=1 en b=0: de temperatuur volgt een random walk. De toestandsvoorspelling en variantie worden:

VOORSPELSTAP

$$\hat{x}_k^- = a\hat{x}_{k-1} + bu_{k-1}, \qquad P_k^- = a^2 P_{k-1} + Q$$

De variantie groeit als het model zonder meting doorloopt. Q=0 zou verklaren dat het model perfect is; een ontbrekende verwarming, deurbeweging of ander echt proces kan dan nauwelijks gecorrigeerd worden. Q heeft eenheid K² per stap en hoort dus bij Δt; een diffusie-intensiteit q in K²/s geeft Q=qΔt.

UITLEG · 40.8

De gain volgt uit minimaal verwachte kwadratische fout

8/17

Voor h=1 corrigeer je $\hat{x} = \hat{x}^- + K(z - \hat{x}^-)$. Voorspellings- en meetfout zijn onafhankelijk in het model. De nieuwe variantie is $(1-K)^2P^- + K^2R$. Afleiden geeft $-2(1-K)P^- + 2KR = 0$. Daarom:

CORRECTIE MET INNOVATIE

$$K = \frac{P^-}{P^- + R}, \quad \hat{x} = \hat{x}^- + K\nu, \quad \nu = z - \hat{x}^-$$

Veel meetruis geeft weinig correctie; een onzekere voorspelling krijgt juist een groot meetgewicht. Dit is hetzelfde precisieprincipe als statische fusie, maar de modelvoorspelling levert één van de twee schattingen. Voor h≠1 is $K = P^{-}h/(h^2P^{-} + R)$. Een Kalman-filter is optimaal onder het passende lineaire Gaussmodel; bij bias, verkeerde dynamiek of nietlineaire metingen is die garantie niet zomaar geldig.

UITGEWERKT VOORBEELD · 40.9

Een volledige Kalmanstap

9/17

De voorspelde temperatuur is 20,00 °C met P−=0,04 K². De nieuwe meting is 20,30 °C met R=0,01 K².

GEGEVEN

- h=1

GEVRAAGD

- Gain, innovatie, schatting en nieuweσ

OPLOSSING

1. S=P−+R=0,05 K²; K=0,04/0,05=0,8.
2. ν=0,30 K; correctie 0,24 K; schatting 20,24 °C.
3. P=(1−0,8)²×0,04+0,8²×0,01=0,008 K²;σ=0,08944 K. Equivalent: P=(1−K)P−.

ANTWOORD

20,24 °C met σ=0,0894 K binnen het aangenomen model.

Klopt dit? De innovatie is maar 1,342 standaardafwijkingen omdat √S=0,2236 K; niet verdacht in dit rekenmodel.

UITLEG · 40.10

Foutdetectie gebruikt de innovatie

10/17

De innovatievariantie is $S = h^2P^{-} + R$. De genormaliseerde kwadratische innovatieν^2/S vergelijkt afwijking met verwachte onzekerheid. De lescode weigert bij h=1 waarden groter dan 9, een 3σ-regel voor één meting onder het model. Dit is een detector, niet de standaard Kalman-update zelf. Normale ruis kan soms ook afgewezen worden.

Een bruikbaar beleid houdt counters, hysterese en herstelvoorwaarden bij. Een afgekeurde sensor krijgt een foutstatus; een enkele sprong hoeft nog geen permanent defect te zijn. Bij twee sensoren die onderling verschillen weet je zonder onafhankelijke referentie niet zeker welke faalt. Het model kan zelf fout zitten. Temperatuurgradiënten, leveringstijd en kalibratie worden daarom apart gecontroleerd.

SCALAR INNOVATIEPOORT

$$d^2 = \frac{\nu^2}{S}$$

CODE · 40.11

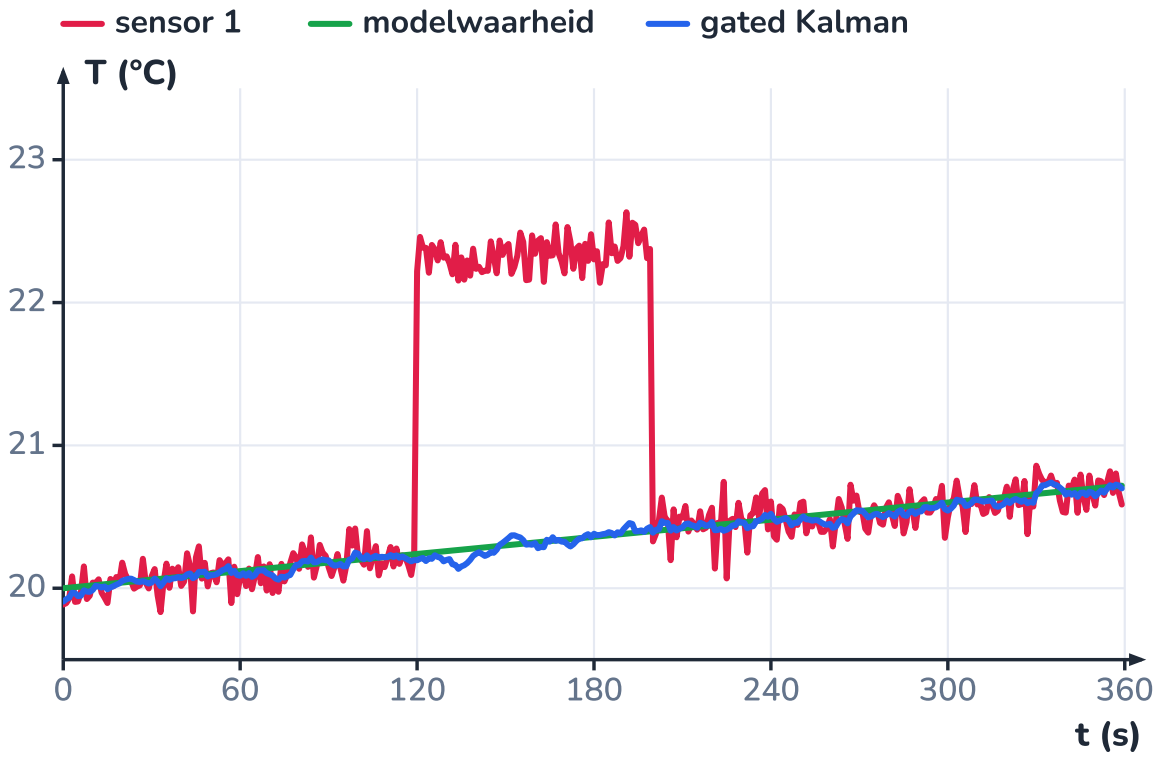
Temperatuur volgen terwijl een sensor faalt

De tweeσ-waarden zijn modelruis. Sensor 1 krijgt een 2 K-bias en sensor 2 ontbreekt later 31 samples. Sequentiële updates zijn hier alleen gerechtvaardigd doordat de gebruikte ruistermen onafhankelijk gegenereerd zijn. Er zit geen gedeelde kalibratiebias in de simulatie; die moet in echt onzekerheidsbudget nog worden toegevoegd.

Python **kalman1d.py** 28 regels

```python
import numpy as np
rng=np.random.default_rng(40)
n=360
t=np.arange(n,dtype=float)  # elke seconde, start08:00 UTC+1
waar=20+0.002*t
z1=waar+rng.normal(0,0.10,n)
z2=waar+rng.normal(0,0.20,n)
z1[120:200]+=2.0  # defect met bias, geen normale ruis
z2[250:281]=np.nan
x=20.0; P=0.25; Q=0.0004
schat=[]; onzeker=[]; afkeur=[0,0]
for k in range(n):
    P+=Q                  # random-walkvoorspelling
    for j,(z,R) in enumerate(((z1[k],0.10**2),(z2[k],0.20**2))):
        if not np.isfinite(z): continue
        innovatie=z-x; S=P+R
        if innovatie**2/S>9:
            afkeur[j]+=1; continue
        K=P/S
        x+=K*innovatie
        P=(1-K)**2*P+K*K*R   # Joseph-vorm, scalar
    schat.append(x); onzeker.append(np.sqrt(P))
schat=np.array(schat)
print("rms sensor1",f"{np.sqrt(np.mean((z1-waar)**2)):.4f}")
print("rms schatting",f"{np.sqrt(np.mean((schat-waar)**2)):.4f}")
print("afgekeurd",afkeur)
print("laatste sigma",f"{onzeker[-1]:.4f}","K")
assert np.sqrt(np.mean((schat-waar)**2))<0.12
```

```
rms sensor1 0.9585
rms schatting 0.0376
afgekeurd [82, 0]
laatste sigma 0.0400 K
```



Voorbeeld vanaf 08:00 UTC+1: sensor 1 krijgt 120–199 s een 2 K-bias; sensor 2 ontbreekt 250–280 s.

UITLEG · 40.12

Kalibratie en voorspellen hebben verschillende taken

12/17

Kalibratie legt het verband vast tussen aanwijzing en referentiewaarde. Gebruik twee of meer gekende temperaturen voor offset én helling, laat probes thermisch uitmiddelen en registreer referentie-onzekerheid. Een filter kan een foute ijklijn niet betrouwbaar wegmiddelen. Kalibreer de meetketen inclusief montage, ADC en voedingsreferentie.

Synchroniseer meettijdstip, niet enkel ontvangsttijd. Een snelle probe en een 60 s-sensorkast lopen tijdens opwarming werkelijk uiteen; corrigeer of modelleer die dynamiek vóór fusie. Bewaar ruwe data, kalibratieversie en kwaliteit naast de schatting. Dat maakt later zichtbaar of de fout uit meetketen, model of beslissing kwam.

logveld	reden
raw en eenheid	herberekenen
meet- en ontvangsttijd	vertraging aantonen
kalibratieversie	bias herleiden
P, innovatie, gating	zekerheid toetsen
modus/fout	besluit reconstrueren

UITGEWERKT VOORBEELD · 40.13

Een ijklijn herstellen

Een probe geeft −0,3 °C bij 0 °C en 39,3 °C bij 40 °C.

GEGEVEN

- lineair model z=ax+b
- referenties worden als exact rekenvoorbeeld behandeld

GEVRAAGD

- a, b en omzetting van z=19,5 °C

OPLOSSING

1. b=−0,3; a=(39,3+0,3)/40=0,99.
2. Werkelijke T=(z+0,3)/0,99. Bij z=19,5 volgt T=20,0 °C.
3. Een onafhankelijke derde temperatuur controleert lineariteit; referentie-onzekerheid wordt daarna gepropageerd in de ijkparameters.

ANTWOORD

Offset én schaal zijn nodig; alleen +0,3 corrigeren geeft 19,8 °C en blijft 0,2 K fout.

UITLEG · 40.14

Ontbrekende data vergroten de onzekerheid

Zonder nieuwe meting doe je alleen de voorspelstap. Bij random walk groeit P na m ontbrekende stappen met mQ. De uitkomst mag nog een voorspelling zijn, maar moet dat herkenbaar tonen. Een alarmkanaal dat alleen de schatting ziet kan anders een modelvoorspelling als veilige waarneming behandelen.

De supervisor kiest een gedegradeerde modus op basis van leeftijd, kwaliteit en voorspelonzekerheid. Absolute O_2- en CO_2-gevaren blijven op het onafhankelijke lokale meet-/alarmpad; ze worden niet weggefilterd omdat het model een normale waarde verwacht. Fusie ondersteunt betrouwbaarheid, maar vervangt geen hazardanalyse of hardwarebeveiliging.

RANDOM-WALKONZEKERHEID ZONDER METINGEN

$$P_{k+m} = P_k + mQ$$

VERHAAL · 40.15

Kalman maakte voorspelling en fout samen recursief

R. E. Kalman publiceerde in 1960 een nieuwe benadering van lineaire filtering en voorspelling met toestanden en hun foutcovariantie. Het centrale idee past op deze les: de beste huidige toestand én de onzekerheid worden telkens vooruitgebracht, waarna een nieuwe meting ze corrigeert. Je hoeft niet alle oude metingen elke stap opnieuw te verwerken.

Primaire bron:Kalman, 1960, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Voor de bredere 3D-oriëntatiecontext:Mahony, Hamel en Pflimlin, 2008, Nonlinear Complementary Filters. De les gebruikt de veel eenvoudigere 1D- en éénassige vorm; zij beweert niet die volledige 3D-filterimplementatie te leveren. Geraadpleegd 30-09-2026.

recursief bewaard	niet beweerd
x en P	volledige waarheid
innovatie	zekere oorzaak van een storing
modelaannamen	alle sensoren onafhankelijk

NASLAG · 40.16

Eenheden en stappen

16/17

scalar Kalman-gain

$$K = \frac{P^{-}h}{h^2P^{-} + R}$$

symbool	betekenis	eenheid
P	toestandsfoutvariantie	K²
R	meetruisvariantie	K²
Q	procesruis per stap	K²

stap	handeling
kalibreer	corrigeer offset/schaal, leg onzekerheid vast
synchroniseer	meetmoment en vertraging
voorspel	x–, P–
toets	bereik, leeftijd, innovatie
corrigeer	geldige onafhankelijke meting
beslis	supervisor kiest modus

HET GEHEEL · 40.17

Metingen krijgen een geschiedenis en een geldigheidsgebied

17/17

Filters, procesmodellen en foutdetectie voegen verschillende kennis toe. Een centrale logger bewaart de reden van elke sensorweigering, zodat de stationsoperator de schatting kan beoordelen.

E6 Statistiek en meetonzekerheid

Ruisspreiding en ijkonzekerheid.

E21 Filters en signaalverwerking

Filtervertraging en bemonstering.

E37 Embedded systemen en IoT

Tijd, kwaliteit en oude berichten.

E38 **Dynamische systemen modelleren**

Modeltoestand en sensorvertraging.

Habitat

Habitat voert fusie alleen uit voor sensoren die dezelfde toestand meten. De Pi bewaart x, P, innovaties en sensorstatus; lokale alarmen blijven onafhankelijk. Het 1 s/Q/R/3σ-model is een lesvoorbeeld en wordt alleen na kalibratie en proefvalidatie als productieconfiguratie gekozen.

SAMENVATTING

In het kort

- Middelen verwijdert onafhankelijke ruis, geen gedeelde bias of echte gradiënt.
- Complementaire fusie combineert snelle gyro-informatie met langzame zwaartekrachtreferentie.
- Kalman voorspelt toestand en covariantie en corrigeert met een gain uit varianties.
- Innovatiegating en supervisorbeleid behandelen fouten en ontbreken apart.
- Schattingen blijven gebonden aan model, ijking, tijd en systeemgrens.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

bias

Een systematische afwijking die niet verdwijnt door alleen veel samples te middelen.

innovatie

Het verschil tussen een nieuwe meting en de voorspelde meetwaarde.

Kalman-gain

Het gewicht waarmee een innovatie de voorspelling corrigeert.

procesruis

Onzekerheid in de voorspelling van een toestandstap.

complementair filter

Een combinatie van frequentiegebieden die elkaar aanvullen tot de geschatte toestand.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

HANDBOEK · HOOFDSTUK 41

Van data naar model: regressie

Een energievoorspelling vraagt een eerlijke toekomsttest en een verklaring voor haar fouten

Het station wil morgen voldoende energie reserveren. Temperatuur alleen verklaart niet alles: verlichting, bewoning en beheer veranderen mee. Je leidt kleinste kwadraten af, bouwt een meervoudige regressie en toetst of die buiten de trainingsperiode nog helpt.

9× uitleg · 3× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 12 lestijden

A Data en AI · W Wiskundig modelleren · O Onderzoeken en meten



Een plan gebruikt alleen informatie die bij het besluit al bekend kan zijn.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een kleinste-kwadratenfit afleiden en met NumPy berekenen.
- Je kan meerdere features, eenheden en identificeerbaarheid interpreteren.
- Je kan overfitting en regularisatie met gescheiden data beoordelen.
- Je kan temporele kruisvalidatie zonder toekomstlek ontwerpen.
- Je kan residuen en foutkosten gebruiken om een voorspeller te accepteren.

UITLEG · 41.1

Een voorspelling is een beslisinput

1/16

Regressie voorspelt een kwantitatieve doelwaarde, bijvoorbeeld het elektrische verbruik van morgen in kWh. Kalenderdagen lopen hier op de vaste klok UTC+1; het plan wordt de avond voordien gemaakt. De

gemiddelde temperatuur van morgen mag daarom alleen als weerprognose worden ingevoerd. De morgen gemeten temperatuur is bij het plannen nog onbekend. Dat verschil hoort ook in de test.

Begin met een basislijn: gisteren, vergelijkbare dagen of het fysische warmtemodel. Een complexer model helpt pas als het relevante fouten verlaagt. Een onderschatting kan energiereserves uitputten; een overschatting kan productie onnodig beperken. De puntvoorspelling vraagt dus een onzekerheids- en reservebeleid.

keuze	contract
doel	elektrisch dagverbruik, kWh
besluit	20:00 UTC+1 voor morgen
invoer	weerprognose, planning, bekende toestand
basislijn	laatste zeven geldige vergelijkbare dagen
grens	lokale beveiliging blijft leidend

UITLEG · 41.2

Kleinste kwadraten uit de foutfunctie

2/16

Voor één feature is $\hat{y}_i = a + bx_i$. Minimaliseer $S = \sum_i (y_i - a - bx_i)^2$. Afleiden naar a geeft $\sum(y_i - a - bx_i) = 0$, dus $a = \bar{y} - b\bar{x}$. Invullen en afleiden naar b levert:

LINEAIRE KLEINSTE-KWADRATENFIT

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

De noemer moet positief zijn. Bij een constante x kun je geen helling bepalen. De berekening vindt een verband, geen oorzakelijk effect. Kou kan tegelijk met lampuren en bewoning veranderen. Coëfficiënten interpreteren vraagt daarom het proef- of waarnemingsontwerp.

UITGEWERKT VOORBEELD · 41.3

Een volledige handfit

3/16

Data (x,y): (0,1), (1,2), (2,2).

GEGEVEN

- dimensieloze rekenwaarden

GEVRAAGD

- helling, intercept, voorspellingen en residuen

OPLOSSING

1. $\bar{x} = 1$ en $\bar{y} = 5/3$. De kruissom is 1 en de x-kwadratensom 2, dus b=0,5.
2. a=5/3−0,5=7/6. De voorspellingen zijn 7/6, 5/3 en 13/6.

3 Residuen data−model: −1/6, 1/3, −1/6. De kwadratensom SSE is 1/6. De residusom is nul omdat een vrij intercept aanwezig is.

ANTWOORD

ŷ=7/6+0,5x en SSE=0,1667.

Klopt dit? Zonder intercept hoeft de residusom niet nul te zijn.

UITLEG · 41.4

Meerdere features worden een matrix

4/16

Schrijf $\hat{y} = X\beta$. Een eerste kolom enen modelleert het intercept. De verliesfunctie $\|y - X\beta\|^2$ heeft gradiënt $-2X^T(y - X\beta)$. In een stationair punt geldt $X^T X\beta = X^T y$. Een expliciete inverse is meestal een slechte rekenroute; zij lost slechte conditionering niet op.

`np.linalg.lstsq` levert ook rang en singuliere waarden. Bij collineariteit geven meerdere coëfficiëntcombinaties bijna dezelfde voorspelling. Een hoge R² maakt individuele coëfficiënten dan niet betrouwbaar. Schaal features wanneer hun ordes sterk verschillen en bewaar de scaler die uitsluitend op training is geleerd.

NORMAALVERGELIJKING BIJ VOLLE KOLOMRANG

$$X^T X\beta = X^T y$$

UITLEG · 41.5

Features volgen fysica en beschikbaarheid

5/16

Het stationsmodel verliest 50 W/K en heeft gemiddeld 533 W interne winst in het rekenjaar. De verwarmingsdrempel is $20 - 533/50 = 9{,}34$ °C. Een feature is $k = \max(0, 9{,}34 - T_o)$. Bij de model-COP 3,15 kost één extra graaddag $50 \cdot 24/(1000 \cdot 3{,}15) = 0{,}381$ kWh elektrisch.

Het echte e16-model gebruikt veranderlijke COP en beheer. De helling 0,38 is hier een expliciete leswaarde. Donkere uren helpen verlichting beschrijven. Afgeknepen PV-uitgang is geen zuivere weerfeature: de batterijtoestand bepaalt mede hoeveel zon toegelaten werd. Beschikbare zon en uitgevoerde opbrengst horen afzonderlijk in de log.

feature	eenheid	beschikbaar
koufeature	K	weerprognose bij het plan
donkere lampuren	h	planning en prognose
begin-SoC	%	laatste geldige meting
morgen gemeten energie	kWh	pas later: doelwaarde

UITGEWERKT VOORBEELD · 41.6

Coëfficiënten lezen zonder causaliteit

6/16

E=8+0,38k+0,20h.

GEGEVEN

- k=6 K
- h=8 donkere uren

GEVRAAGD

- dagvoorspelling en interpretatie

OPLOSSING

1. E=8+0,38×6+0,20×8=11,88 kWh/dag.
2. De kouhelling heeft eenheid kWh/(dag·K); de urenhelling kWh/(dag·h), met h als aantal uren in die dag.
3. Het intercept 8 kWh/dag is geen apart gemeten basisverbruik. Een verandering van bewoning die met kou samenvalt kan de helling beïnvloeden.

ANTWOORD

11,88 kWh voor deze modeldag; de relatie is conditioneel op andere features en het domein.

UITLEG · 41.7

Overfitting begint bij modelkeuze

7/16

Een hoge polynoomgraad kan trainingspunten exact treffen en ertussen slingeren. Trainingsfout daalt bij toenemende flexibiliteit; toekomstfout kan stijgen. Een te eenvoudig model mist structuur, terwijl een te flexibel model toevallige details leert.

Ridge voegt $\lambda \sum_{j>0} \beta_j^2$ toe en laat het intercept vrij. Dan geldt $(X^T X + \lambda D)\beta = X^T y$, met een diagonale strafmatrix D die voor het intercept nul is. Standaardisatie maakt de straf vergelijkbaar tussen features. Kies λ op validatie, niet op de eindtest. Lasso gebruikt een absolute-waardestraf en kan coëfficiënten exact nul maken, maar vraagt een andere optimalisatie.

RIDGE MET VRIJ INTERCEPT

$$J = \|y - X\beta\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2$$

UITLEG · 41.8

Train, validatie en test hebben eigen rollen

8/16

Training leert parameters en preprocessing. Validatie kiest features, λ en modelvorm. Test beoordeelt eenmaal de vastgelegde keuze. Een testset waarop je het model blijft aanpassen is een validatieset geworden. Leg het modelmanifest vast voordat je de eindtest bekijkt.

Splits een tijdreeks in de tijd: vroeg training, daarna validatie, laatst test. Een willekeurige split kan bijna gelijke buururen mengen en seizoenstoekomst laten lekken. Scaler, imputatie en featureselectie worden uitsluitend op training geleerd. Ook plant- of batchgroepen moeten gescheiden blijven als je prestaties op nieuwe groepen wilt kennen.

deel	gebruik
training	parameters, scaler, imputatie
validatie	keuze van λ en model
test	laatste onafhankelijke beoordeling

Een goede score kan uit toekomstinformatie komen

Informatie die bij het echte besluit nog onbekend is, kan een voorspeller in de test kunstmatig verbeteren.

CODE · 41.9

Een reproduceerbare conditionele energieschatting

9/16

De dataset bevat 180 synthetische dagen: 110 training, 35 validatie en 35 eindtest. Alleen training bepaalt de scaler. De code meldt λ, testfout, basislijn en rollende folds.

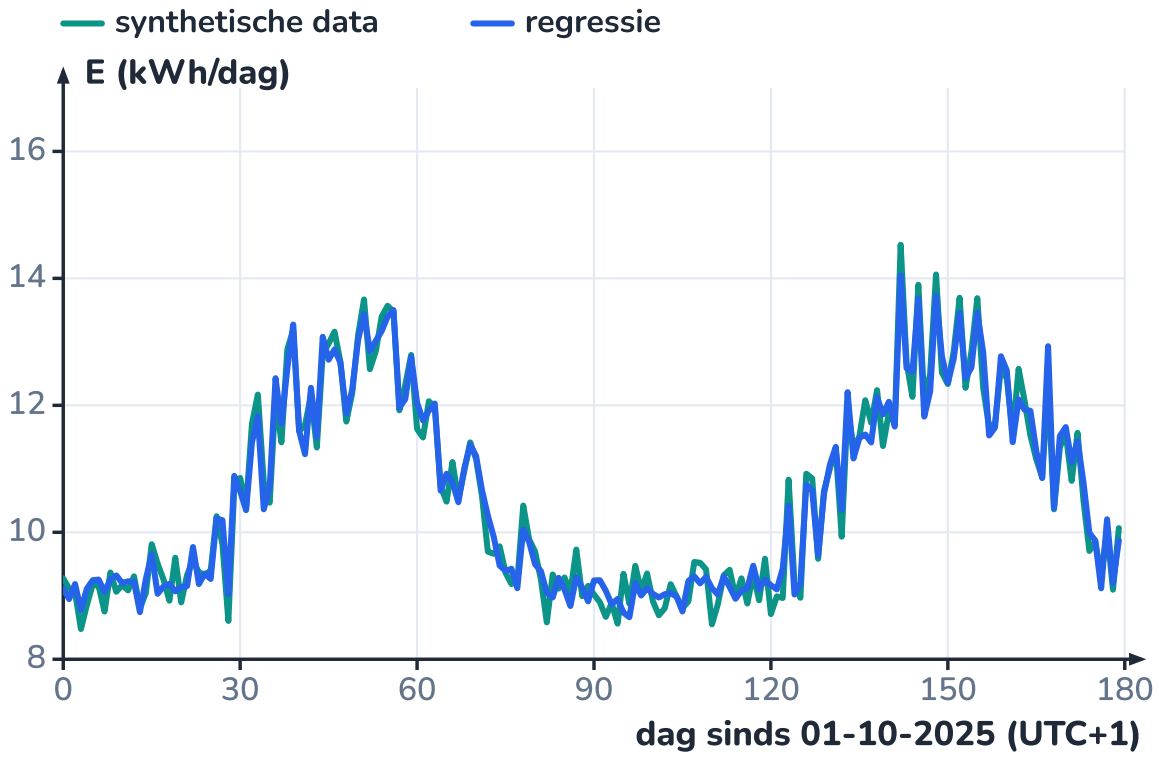
De features bevatten het gerealiseerde modelweer van dezelfde dag. De RMSE van 0,2494 kWh/dag is daarom een conditionele demonstratiefout als dat weer al bekend is. Zij is geen operationele dag-vooruitvoorspelfout: er zijn geen gearchiveerde prognoses of prognosefouten toegevoegd. Een productieproef archiveert juist de weerprognoses op 20:00 UTC+1 en beoordeelt de volledige keten tot het werkelijke verbruik.

Python **energie_regressie.py** 35 regels

```python
import numpy as np
rng=np.random.default_rng(41)
d=np.arange(180)
# Synthetische dagreeks vanaf 01-10-2025, klok UTC+1.
temperatuur=8+7*np.cos(2*np.pi*d/100)+rng.normal(0,1.5,len(d))
kou=np.maximum(0,9.34-temperatuur)
donker=np.clip(8-0.2*temperatuur+rng.normal(0,1,len(d)),3,12)
energie=8+0.38*kou+0.20*donker+rng.normal(0,0.25,len(d))
X=np.column_stack((np.ones(len(d)),kou,donker))
train=slice(0,110); val=slice(110,145); test=slice(145,180)
gem=X[train,1:].mean(axis=0); sd=X[train,1:].std(axis=0)
Z=np.column_stack((np.ones(len(d)),(X[:,1:]-gem)/sd))
def ridge(Z,y,lam):
    # Intercept wordt niet bestraft; solve in plaats van inverse.
    straf=np.diag([0.,lam,lam])
    return np.linalg.solve(Z.T@Z+straf,Z.T@y)
def rmse(y,p): return np.sqrt(np.mean((y-p)**2))
kandidaten=[]
for lam in (0.,0.1,1.,10.,100.):
    b=ridge(Z[train],energie[train],lam)
    kandidaten.append((rmse(energie[val],Z[val]@b),lam,b))
fout,lam,b=min(kandidaten,key=lambda r:r[0])
p=Z@b
print("lambda",lam,"validatieRMSE",round(fout,4))
print("testRMSE",round(rmse(energie[test],p[test]),4),"kWh/dag")
print("basislijn testRMSE",round(rmse(energie[test],np.full(35,energie[train].mean())),4))
fysiek=b[1:]/sd
```

```
intercept=b[0]-gem@fysiek
print("coefficienten",round(intercept,4),*[round(x,4) for x in fysiek])
# Kleine rolling-origin CV; schaal alleen op elke trainingsfold.
for eind in (60,80,100):
    a=X[:eind]; y=energie[:eind]
    coef=np.linalg.lstsq(a,y,rcond=None)[0]
    print("fold",eind,"RMSE",round(rmse(energie[eind:eind+20],X[eind:eind+20]@coef),4))
assert rmse(energie[test],p[test])<0.5
```

```
lambda 0.0 validatieRMSE 0.2822
testRMSE 0.2494 kWh/dag
basislijn testRMSE 1.9121
coefficienten 8.1283 0.3867 0.1781
fold 60 RMSE 0.2552
fold 80 RMSE 0.3182
fold 100 RMSE 0.2367
```



Dit is een conditionele fit met gerealiseerd modelweer, geen operationele dag-vooruittoets. Het testdeel is niet voor modelkeuze gebruikt; echte prognosefouten ontbreken hier.

UITLEG · 41.10

Kruisvalidatie die vooruit kijkt

10/16

Rolling-origin-validatie traint op een groeiend verleden en toetst het volgende blok. Daardoor beoordeel je herhaaldelijk de echte richting van tijd. Willekeurige k-fold of leave-one-out is niet vanzelf geschikt voor sterk gecorreleerde logs. Een tussenruimte kan nodig zijn wanneer feature- of doelvensters een foldgrens overschrijden.

Vergelijk modellen op dezelfde folds en basislijnen. Alle preprocessing en modelkeuze blijven binnen de trainingsfold. De code gebruikt een vaste regressie in drie folds; een uitgebreidere pipeline zoekt λ

daarbinnen opnieuw. Een aparte eindtest beperkt het optimisme door herhaalde selectie.

fold	trainingsdagen	beoordeling
1	0–59	60–79
2	0–79	80–99
3	0–99	100–119

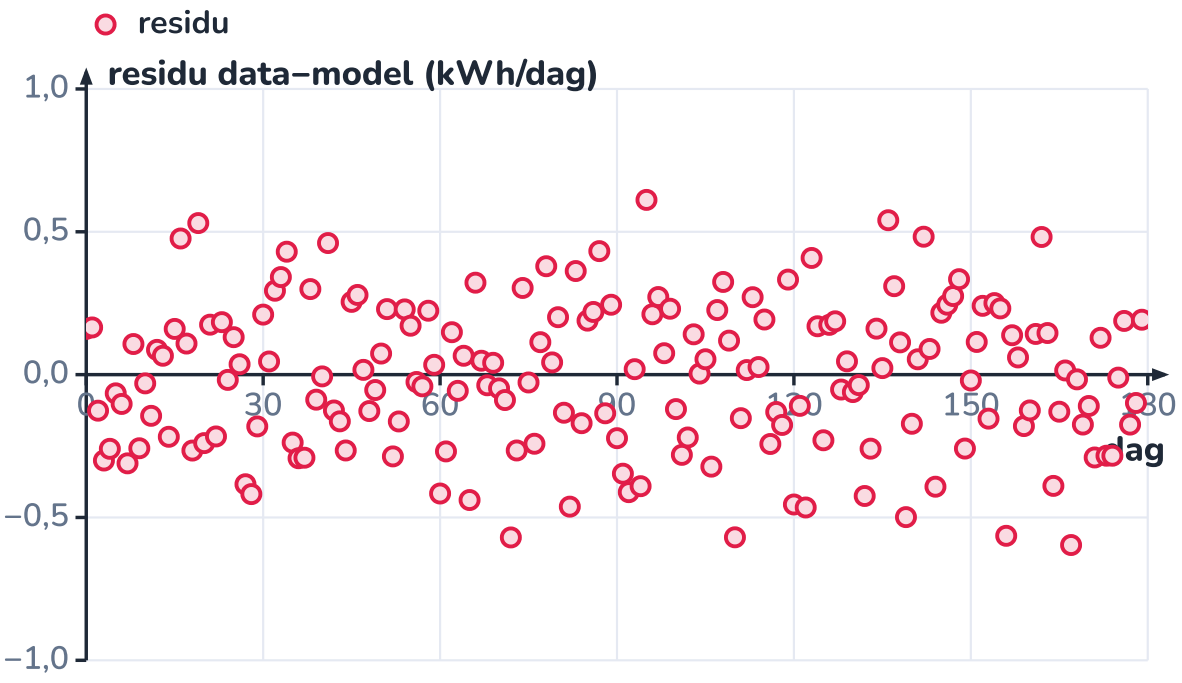
UITLEG · 41.11

Residuen vertellen welke fout je mist

11/16

Het residu is $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Plot het tegen tijd, voorspelling en belangrijke features. Een trend wijst op drift of ontbrekende dynamiek; kromming op ontbrekende niet-lineariteit; een waaier op veranderlijke foutspreiding; clusters op ontbrekende groepen. Een lagplot toont autocorrelatie: de fouten zijn dan geen onafhankelijke herhalingen.

RMSE straft grote fouten sterk; MAE is minder gevoelig voor uitschieters. Rapporteer ook bias en de relevante staart, zoals ernstige onderschattingen tijdens koude dagen. Een gemiddelde fout van 0,3 kWh kan verbergen dat juist de koudegolf mislukt. Kijk per regime en behandel ongeldige data met een expliciet kwaliteitsbeleid.



Een kleine rms alleen sluit trend, heteroscedasticiteit, autocorrelatie of fouten op zeldzame dagen niet uit.

UITGEWERKT VOORBEELD · 41.12

Een foutscore is een keuze

12/16

Residuen: −1, 0, +1, +4 kWh.

GEGEVEN

- vier modeldagen

GEVRAAGD

- MAE, RMSE en bias

OPLOSSING

1. MAE=(1+0+1+4)/4=1,5 kWh.
2. RMSE=√[(1+0+1+16)/4]=√4,5=2,1213 kWh.
3. Bias=(−1+0+1+4)/4=1 kWh. Met residu data−model betekent dit gemiddeld 1 kWh onderschatting.

ANTWOORD

RMSE weegt de grote fout sterk; bias onthult de richting.

UITLEG · 41.13

Onzekerheid en extrapolatie blijven zichtbaar

13/16

Een interval rond de geschatte gemiddelde relatie is smaller dan een voorspelinterval voor een nieuwe dag: dat laatste bevat ook nieuwe procesvariatie. Een klassiek lineair interval veronderstelt een passend foutmodel. Het is niet vanzelf geldig in een weersregime dat ontbreekt in training.

Markeer invoer buiten het geleerde domein en gebruik daar een conservatieve basisstrategie. Een koudegolf van −15 °C mag niet stil een nauwkeurig label krijgen. Kies reserve uit foutkosten en onafhankelijke validatie. De supervisor begrenst vermogens en behoudt de lokale regeling wanneer de predictor ontbreekt.

uitvoer	bewijs
puntvoorspelling	kWh en horizon
interval	dekking op apart datadeel
status	geldig regime of extrapolatie
versie	data, model, scaler en commit

VERHAAL · 41.14

Voorspellen verandert het meetproces

14/16

Als een planner op voorspellingen reageert, verandert hij het latere verbruik. Een model dat daarna op beheerde data leert, kan een omgekeerd verband vinden: hoge voorspelde vraag gaat samen met weinig

verbruik omdat juist dan lasten zijn afgeschakeld. Na een nieuw beheerbeleid kan dat verband opnieuw veranderen.

Log aangeboden en uitgevoerde setpoints, afschakelingen, comfort en beschikbare bronenergie. De fictieve simulatie houdt het beleid vast. Een nieuwe implementatie draait eerst in schaduwmodus, met beoordeling van zowel voorspelfout als beslisresultaat. De primaire softwarebron is NumPy lstsq, geraadpleegd 30-09-2026.

log apart	reden
onbegrensde vraag	comfortbehoefte
uitgevoerde vraag	beheeractie
afgeknepen zon	weer en SoC onderscheiden
modelmanifest	feedback herleiden

NASLAG · 41.15

Regressie beoordelen

15/16

kwadratische foutmaat

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum e_i^2}$$

symbool	betekenis	eenheid
e_i	data–voorspelling	kWh

probleem	eerste controle
hoge testfout	basislijn, lek en regime
instabiele coëfficiënten	rang, schaal en collineariteit
mooie trainingsfout	flexibiliteit en selectie
trend in residu	drift of ontbrekende toestand

HET GEHEEL · 41.16

Een model dient een besliscontract

16/16

Regressie verbindt energiefysica, dataherkomst en beheer. De voorspeller krijgt een meetbare rol en begrensde bevoegdheid.

I28 Functies, lijsten en data in Python
Logdata en dagtotalen.

I30 Datalogging en communicatie
Tijd en herkomst.

E36 Numerieke methoden en wetenschappelijk rekenen
Fysisch model als basislijn.

E44 AI verantwoord inzetten
Afweging van voorspelgebruik.

E45 Systems engineering en het V-model

Acceptatie-eisen.

Habitat

Habitat archiveert weerprognoses op het planmoment, toetst temporeel en logt beheeringrepen. De coëfficiënten 8, 0,38 en 0,20 zijn synthetische leswaarden en vormen geen nieuwe werkelijke verbruiksnorm.

SAMENVATTING

In het kort

- Kleinste kwadraten minimaliseert een foutfunctie en bewijst geen causaliteit.
- Features moeten bij het besluit beschikbaar zijn.
- Regularisatie en preprocessing blijven binnen de trainingsgrens.
- Tijdreeksen vragen vooruitgerichte validatie en een onaangeraakte test.
- Residuen, regimes en foutkosten bepalen of de predictor helpt.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

feature
Een invoerkenmerk dat bij het voorspellen beschikbaar is.

overfitting
Details leren die buiten de trainingsdata slecht generaliseren.

regularisatie
Een beperking of straf die gevoeligheid voor trainingsdetails verlaagt.

kruisvalidatie
Herhaalde beoordeling op gescheiden datadelen voor modelkeuze.

datalek
Onterecht leren uit test, validatie of toekomstinformatie.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

HANDBOEK · HOOFDSTUK 42

Classificatie en clustering

Labels voorspellen, groepen ontdekken en de kosten van verkeerde besluiten meten

Een droge plant kan dezelfde warme bladeren hebben als een zieke plant. Je leert sensorkenmerken naar een label omzetten en ongeëtiketteerde patronen groeperen. De centrale vraag blijft welk bewijs een voorspelling werkelijk levert en welke fout het station kan dragen.

8× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 13 lestijden

A Data en AI · W Wiskundig modelleren · P Programmeren en computationeel denken



Een sensorpatroon en een diagnose hebben verschillende bewijslast.

Na dit hoofdstuk

- Je kan logistische regressie afleiden uit sigmoid en kruis-entropie.
- Je kan KNN en een beslisboom uitvoeren en hun grenzen vergelijken.
- Je kan k-means met echte iteraties bouwen en interpreteren.
- Je kan confusiematrix, precisie, recall en actiedrempel berekenen.
- Je kan klasse-onbalans en plantgroepen eerlijk evalueren.

UITLEG · 42.1

Eerst het labelcontract

1/19

Een label ‘ziek’ vraagt een definitie: welke ziekte, volgens welke referentie, op welk moment? Een stresslabel uit bladtemperatuur is geen betrouwbare ziektediagnose zonder aanvullend bewijs. Droogte, hitte, licht en infectie kunnen overlappende patronen veroorzaken. De voorbeelden hier gebruiken synthetische labels om de algoritmen te leren.

Bewaar plant-ID, batch, meetplaats, tijd UTC+1, meetkwaliteit en labelherkomst. Meerdere beelden van dezelfde plant mogen niet over training en test worden verdeeld als je prestaties op nieuwe planten wilt kennen. Een referentiemeting wordt onafhankelijk van de modelsuggestie vastgesteld; anders bevestigt de annotator onbedoeld het model.

vraag	vastleggen
positief	expliciet gedefinieerd probleem
referentie	controle door deskundige of passende proef
horizon	nu of toekomstige aantasting
actie	inspectievoorstel, geen directe diagnose

UITLEG · 42.2

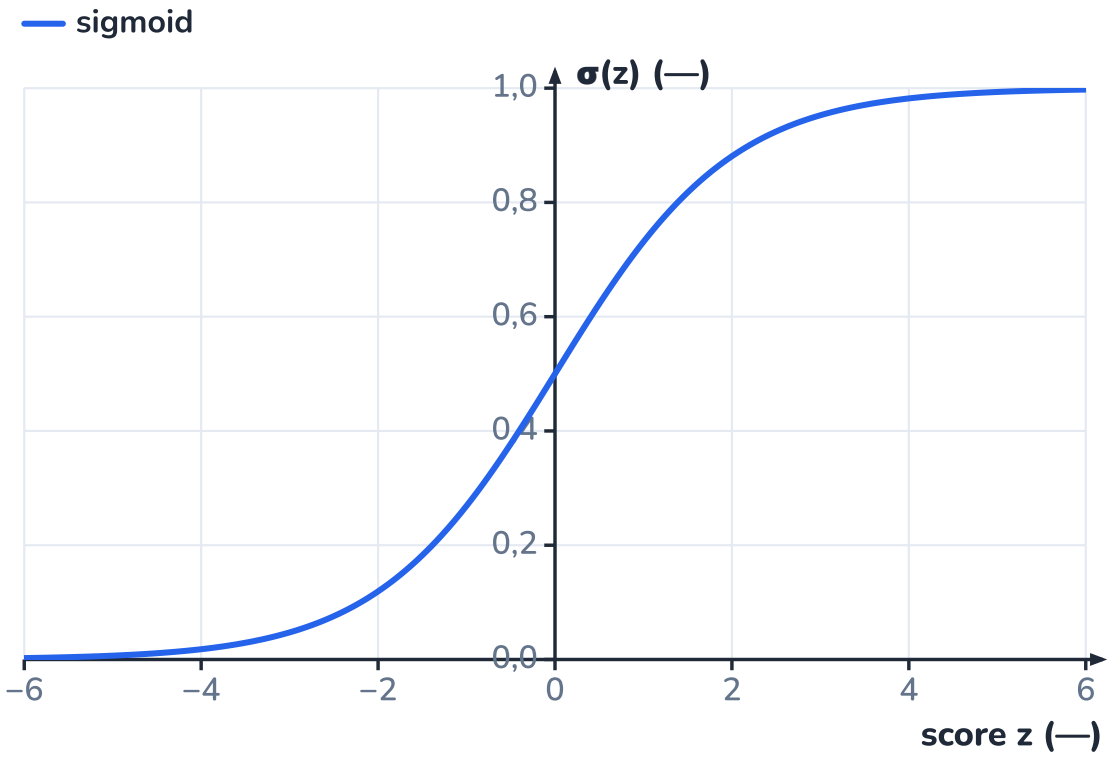
Logistische regressie voorspelt een labelkans

Neem een score $z = b + w^T x$ en $p = \sigma(z) = 1/(1 + \mathrm{e}^{-z})$. De log-odds is $\ln[p/(1-p)] = z$. Een lineaire score krijgt zo een waarde tussen nul en één. De grens p=0,5 is z=0: een rechte lijn bij twee features. De naam regressie verwijst naar het passen van parameters; het doel is hier classificatie.

Minimaliseer de gemiddelde binaire kruis-entropie. Met $\sigma'(z) = p(1-p)$ wordt de afgeleide naar z precies p−y. De gradiënt naar de gewichten is dus het gemiddelde van $x(p-y)$, plus een gekozen regularisatiestraf. Dit is een concrete verbinding met gradiëntafdaling uit e02.

BINAIRE KRUIS-ENTROPIE

$$L = -\frac{1}{n}\sum_{i}[y_i \ln p_i + (1-y_i)\ln(1-p_i)]$$



De drempel voor een actie wordt apart gekozen. Een scorekans is pas als risico interpreteerbaar na controle van kalibratie en populatie.

UITGEWERKT VOORBEELD · 42.3

Een kans en één trainingsstap

3/19

Een plant heeft geschaalde x=(1,−1); b=−1 en w=(0,8;−0,6).

GEGEVEN

- label y=1
- leersnelheid η=0,1; geen regularisatie

GEVRAAGD

- p en nieuwe parameters

OPLOSSING

1. z=−1+0,8×1+(−0,6)×(−1)=0,4; p=0,598688.
2. Afgeleide p−y=−0,401312. Gradiënten voor b,w1,w2: −0,401312; −0,401312; +0,401312.
3. Aftrekken van η maal gradiënt geeft bnieuw=−0,959869; wnieuw=(0,840131;−0,640131). De positieve waarneming verhoogt zo haar score.

ANTWOORD

Eén stap beweegt in de richting van het label; een goede testscore volgt daar nog niet uit.

UITLEG · 42.4

K-dichtstbijzijnde buren gebruikt lokale voorbeelden

KNN bewaart de trainingswaarnemingen. Bereken de afstand tot een nieuwe plant, kies k buren en stem op hun labels. Met k=1 is de grens grillig; een grotere k verlaagt gevoeligheid voor lokale ruis maar kan kleine probleemgroepen overschreeuwen. Kies k op validatie.

Afstand vraagt betekenisvolle schaal. Een vochtpercentage met bereik 0–100 kan een temperatuurverschil van enkele kelvin domineren. Standaardiseer op training of kies een fysisch onderbouwde afstand. KNN extrapoleert niet betrouwbaar ver buiten bekende voorbeelden. Ontbrekende features mogen niet als nul worden toegevoegd. Bewaar ook de burenafstand als aanwijzing voor invoer buiten het domein.

AFSTAND MET TRAININGSSCHAAL

$$d^2(x, x_i) = \sum_j \left(\frac{x_j - x_{ij}}{s_j} \right)^2$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 42.5

Buren werkelijk tellen

Query (0,0); training: A(0,1) gezond, B(1,0) ziek, C(1,1) ziek, D(3,0) gezond.

GEGEVEN

- features al gelijk geschaald
- k=3

GEVRAAGD

- buren en label

OPLOSSING

1. Kwadratische afstanden: A=1, B=1, C=2, D=9.
2. De drie buren zijn A,B,C; twee van drie zijn ziek. De meerderheidsvoorspelling is ziek; de stemmenfractie is 2/3.
3. Die fractie is geen automatisch gekalibreerde kans. A en B zijn even ver; bij een grens op die afstand is een vaste tie-regel nodig.

ANTWOORD

k=3 geeft ziek; k=1 kan bij deze gelijke afstand van een implementatiedetail afhangen.

UITLEG · 42.6

Een beslisboom verdeelt met expliciete regels

Een boom kiest splitsingen zoals ΔT>1,5 K en daarna vocht<45%. Een blad bevat een klasse of trainingsfractie. De Gini-onzuiverheid voor een binaire fractie p is $2p(1-p)$: nul bij een zuiver blad, 0,5 bij een helft-helftverdeling.

Een split wordt beoordeeld met de naar omvang gewogen onzuiverheid van de kinderen. Herhaalde greedy splits vinden een bruikbare lokale keuze, geen gegarandeerd globaal beste boom. Een diepe boom kan iedere trainingsplant memoriseren. Beperk diepte en minimumbladomvang en toets die instellingen onafhankelijk. De regels zijn leesbaar, maar worden pas oorzakelijk als het onderzoeksontwerp dat draagt.

instelling	gevolg
grotere diepte	meer lokale details
groter minimumblad	minder kleine uitzonderingsregels
Gini-criterium	vermindert gemengde labels
validatie	kiest bruikbare complexiteit

UITGEWERKT VOORBEELD · 42.7

Een splitsing narekenen

7/19

Tien planten: vier ziek en zes gezond. Links vijf: vier ziek, één gezond; rechts vijf: allemaal gezond.

GEGEVEN

- binaire labels

GEVRAAGD

- Gini voor en na splitsing

OPLOSSING

1. Ouder: $2\times0{,}4\times0{,}6=0{,}48$.
2. Links: $2\times0{,}8\times0{,}2=0{,}32$; rechts 0. Gewogen resultaat$=(5/10)\times0{,}32=0{,}16$.
3. Afname is $0{,}48-0{,}16=0{,}32$. Dat is een verbetering op training; de vijf rechterplanten bewijzen nog geen perfecte regel buiten deze steekproef.

ANTWOORD

De split maakt labels zuiverder, maar heeft nog onafhankelijke toetsing nodig.

CODE · 42.8

Drie classifiers op hetzelfde plantcontract

8/19

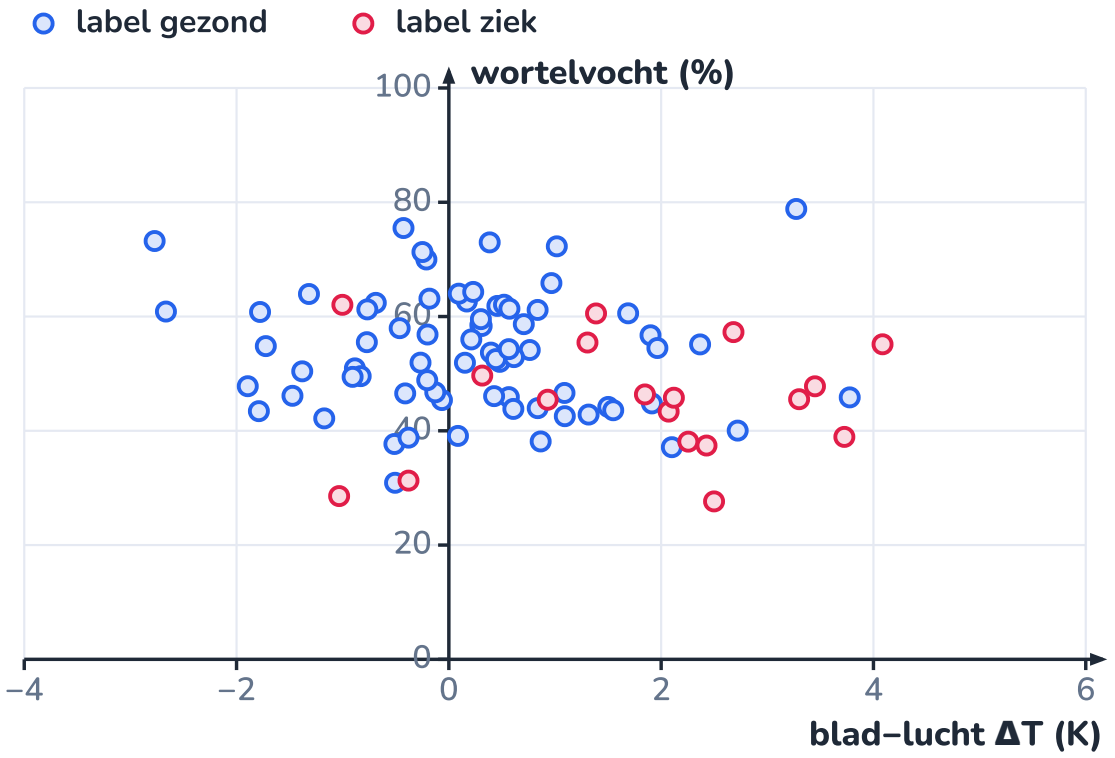
De code traint logistieke regressie met gradiëntafdaling, KNN en een echte recursieve beslisboom in NumPy. Stratificatie bewaart de synthetische 20% positieve prevalentie. Eén onafhankelijke waarneming per plant vermijdt herhaalde-plantenlekken. De validatieset kiest alleen de logistieke actiedrempel bij kosten vijf voor missen en één voor vals alarm; de eindtest blijft apart.

Python `plant_classificatie.py` 66 regels

```python
import numpy as np
rng=np.random.default_rng(42)
# Eén onafhankelijke modelwaarneming per plant; geen echte ziektegegevens.
y=np.r_[np.zeros(360,dtype=int),np.ones(90,dtype=int)]
```

```
deltaT=rng.normal(0.0+2.0*y,1.3,len(y))
vocht=np.clip(rng.normal(55-12*y,10,len(y)),5,95)
X=np.column_stack((deltaT,vocht))
delen=[[],[],[]]
for c in (0,1):
    ids=rng.permutation(np.flatnonzero(y==c))
    for j,a in enumerate(np.split(ids,[int(.6*len(ids)),int(.8*len(ids))])):
        delen[j].extend(a)
tr,va,te=[np.array(a) for a in delen]
gem=X[tr].mean(axis=0); sd=X[tr].std(axis=0)
Z=np.column_stack((np.ones(len(X)),(X-gem)/sd))
def sigmoid(a): return 1/(1+np.exp(-np.clip(a,-40,40)))
b=np.zeros(3)
for stap in range(3000):
    p=sigmoid(Z[tr]@b)
    grad=Z[tr].T@(p-y[tr])/len(tr)+.01*np.r_[0,b[1:]]
    b-=.1*grad
p=sigmoid(Z@b)
rooster=np.arange(.05,.96,.05)
def kosten(ids,q,drempel):
    pred=q>=drempel
    return int(5*np.sum((y[ids]==1)&~pred)+np.sum((y[ids]==0)&pred))
drempel=min(rooster,key=lambda t:kosten(va,p[va],t))
def maat(waar,pred):
    tn=np.sum((waar==0)&(pred==0)); fp=np.sum((waar==0)&(pred==1))
    fn=np.sum((waar==1)&(pred==0)); tp=np.sum((waar==1)&(pred==1))
    return [int(tn),int(fp),int(fn),int(tp)], tp/max(tp+fp,1),tp/max(tp+fn,1)
print("drempel validatie",round(drempel,2),"kosten",kosten(va,p[va],drempel))
for naam,q in (("logistiek0.5",p[te]>=.5),("logistiekgekozen",p[te]>=drempel)):
    cm,pr,re=maat(y[te],q)
    print(naam,"TN FP FN TP",cm,"precisie",round(pr,3),"recall",round(re,3))
# KNN: afstanden in de met training gestandaardiseerde ruimte.
afstand=((Z[te,None,1:]-Z[None,tr,1:])**2).sum(axis=2)
ids=np.argsort(afstand,axis=1)[:,:7]
knn=(y[tr][ids].mean(axis=1)>=.5)
print("KNN7",maat(y[te],knn))
# Kleine echte beslisboom: gewogen Gini, diepte3, minimaal12 per blad.
def gini(a):
    q=a.mean(); return 2*q*(1-q)
def boom(ids,diepte=0):
    blad=float(y[ids].mean())
    if diepte==3 or len(ids)<24 or blad in (0.,1.): return blad
    beste=(len(ids)*gini(y[ids]),None,None,None,None)
    for j in range(2):
        v=np.unique(X[ids,j]); grenzen=(v[:-1]+v[1:])/2
        for t in grenzen:
            links=ids[X[ids,j]<=t]; rechts=ids[X[ids,j]>t]
            if min(len(links),len(rechts))<12: continue
            verlies=len(links)*gini(y[links])+len(rechts)*gini(y[rechts])
            if verlies<beste[0]: beste=(verlies,j,t,links,rechts)
    if beste[1] is None: return blad
    _,j,t,l,r=beste
    return (j,float(t),boom(l,diepte+1),boom(r,diepte+1))
def boomkans(knoop,x):
    if isinstance(knoop,float): return knoop
    j,t,l,r=knoop; return boomkans(l if x[j]<=t else r,x)
tree=boom(tr)
pt=np.array([boomkans(tree,x) for x in X[te]])
print("boom3",maat(y[te],pt>=.5))
print("boomwortel feature/grens",tree[:2])
print("meerderheidsbasislijn accuracy",round(np.mean(y[te]==0),3))
assert len(set(tr)&set(te))==0
```

```
drempel validatie 0.25 kosten 21
logistiek0.5 TN FP FN TP [68, 4, 9, 9] precisie 0.692 recall 0.5
logistiekgekozen TN FP FN TP [58, 14, 5, 13] precisie 0.481 recall 0.722
KNN7 ([64, 8, 8, 10], np.float64(0.5555555555555556), np.float64(0.5555555555555556))
boom3 ([66, 6, 9, 9], np.float64(0.6), np.float64(0.5))
boomwortel feature/grens (0, 1.4779002283226077)
meerderheidsbasislijn accuracy 0.8
```



Ziektelabels zijn synthetisch. Droogte, plaats en meetfout kunnen vergelijkbare sensorkenmerken veroorzaken; de figuur is geen diagnostische norm.

UITGEWERKT VOORBEELD · 42.9

De werkelijke testuitvoer beoordelen

9/19

De gekozen logistieke drempel is 0,25.

GEGEVEN

- 90 testplanten: 18 positief, 72 negatief
- gekozen matrix TN=58, FP=14, FN=5, TP=13

GEVRAAGD

- foutkosten en inzetbesluit

OPLOSSING

1. De gekozen drempel geeft precisie 13/27=48,15% en recall 13/18=72,22%. Foutkosten=5×5+14=39.
2. Bij drempel 0,5 waren FN=9 en FP=4: kosten=49. Altijd gezond kost 5×18=90. De gekozen actie helpt in dit voorbeeld, terwijl accuracy 71/90=78,89% lager is dan de 80%-meerderheidsbasislijn.

3 Een voorstel voor 90% recall wordt nog niet gehaald. Met slechts 18 positieve testplanten is de onzekerheid bovendien aanzienlijk. Gebruik de lesuitkomst niet als bewezen kasdiagnose.

ANTWOORD

De kostenverbetering en een onhaalbare acceptatie-eis kunnen tegelijk waar zijn.

UITLEG · 42.10

Confusiematrix legt de foutsoorten bloot

10/19

Kies ‘ziek’ als positieve klasse. TP is een juist ziektevoorstel, FP een onterechte inspectie, FN een gemiste zieke plant en TN een correct gezond voorstel. Zet vooraf vast of rijen de waarheid of de voorspelling voorstellen. De code print TN,FP,FN,TP expliciet om verwisseling te voorkomen.

Precisie=TP/(TP+FP) beantwoordt hoeveel meldingen terecht zijn. Recall=TP/(TP+FN) vertelt hoeveel zieken gevonden zijn. Accuracy=(TP+TN)/N kan goed lijken wanneer ziekte zeldzaam is. Geef aantallen naast percentages: recall 100% op één zieke plant is weinig bewijs. Bij geen positieve voorspellingen is precisie niet informatief; documenteer hoe je die lege noemer rapporteert.

werkelijkheid / voorspelling	gezond	ziek
gezond	TN	FP
ziek	FN	TP

UITGEWERKT VOORBEELD · 42.11

Een goede accuracy kan veel missen

11/19

Van 100 planten zijn 10 ziek. Het model meldt 8: 6 terecht en 2 onterecht.

GEGEVEN

- positief is ziek

GEVRAAGD

- matrix, accuracy, precisie, recall en F1

OPLOSSING

1 TP=6, FP=2, FN=4, TN=88.

2 Accuracy=94/100=94%; precisie=6/8=75%; recall=6/10=60%.

3 F1=2TP/(2TP+FP+FN)=12/18=66,67%. Een altijd-gezondbasislijn heeft al 90% accuracy, maar recall nul.

ANTWOORD

Het model mist vier van de tien zieken ondanks 94% accuracy.

UITLEG · 42.12

Drempels volgen foutkosten en kalibratie

12/19

Een lagere drempel meldt meer planten: doorgaans stijgt recall en daalt precisie. Kies de drempel op validatie vanuit inspectiecapaciteit en foutkosten. Als p een goed gekalibreerde ziekte-kans is, kost inspecteren $C_{FP}(1-p)$ en missen $C_{FN}p$. Inspecteren wint als $p > C_{FP}/(C_{FP}+C_{FN})$. Bij kosten 1 en 5 is dat 1/6.

Deze afleiding veronderstelt die kosten en kalibratie. De code kiest empirisch een grens uit een rooster, zodat dezelfde vereenvoudigingen niet als gemeten klinische of biologische waarheid worden gepresenteerd. Controleer op test de gekozen actie, scorekalibratie en prestaties per batch of omgeving. Een modelscore is een voorstel aan de inspecteur.

GRENS BIJ PASSENDE KANSEN EN TWEE FOUTKOSTEN

$$p_{\text{actie}} > \frac{C_{FP}}{C_{FP}+C_{FN}}$$

UITLEG · 42.13

Onevenwichtige data veranderen wat je ziet

13/19

Bij 1% positieve planten kan een model dat nooit ziek zegt 99% accuracy bereiken. Rapporteer daarom prevalentie, recall, precisie, foutaantallen en een precision-recallcurve over drempels. Vergelijk prestaties op dezelfde beoogde populatie; precisie verandert wanneer ziekte zeldzamer wordt.

Klassegewichten en oversampling kunnen training helpen, maar veranderen de verliesfunctie of trainingsverdeling. Een gewogen logistieke score is niet vanzelf de oorspronkelijke populatiekans. Corrigeer of kalibreer op representatieve onafhankelijke data. Resampling gebeurt uitsluitend binnen training. Houd alle herhalingen van een plant en synthetische afgeleiden in dezelfde fold. Maak het testdeel representatief voor de echte inzet.

ingreep	controle
klassegewichten	kosten en scorekalibratie
oversampling	geen kopieën in test
stratificatie	voldoende positieve voorbeelden
groep-split	nieuwe planten echt nieuw

UITGEWERKT VOORBEELD · 42.14

Een gewogen score is een andere kans

14/19

Training weegt positieve voorbeelden negenmaal zo zwaar.

GEGEVEN

- populatiekans p

GEVRAAGD

- de oorspronkelijke kans bij q=0,75

- ideaal passende gewogen score q=9p/(9p+1−p)

OPLOSSING

1. Herschikken van q=9p/(1+8p) geeft p=q/(9−8q).
2. Bij q=0,75 is p=0,75/(9−6)=0,25. Een gewogen score van 75% kan dus overeenkomen met 25% onder het oorspronkelijke populatiemodel.
3. Deze rekenrelatie veronderstelt een ideaal passend model en precies die gewichten. Controleer werkelijke scorekalibratie op representatieve onafhankelijke data.

ANTWOORD

Klassegewichten veranderen de verliesfunctie; drempel en interpretatie moeten daarbij passen.

UITLEG · 42.15

Clustering vraagt geen ziektelabels

15/19

K-means zoekt k centra en minimaliseert de som van kwadratische afstanden: $J = \sum_i \|x_i - c_{a_i}\|^2$. Wissel twee stappen af: wijs ieder punt toe aan het dichtste centrum; vervang ieder centrum door het gemiddelde van zijn toegewezen punten. Het gemiddelde minimaliseert de kwadratensom bij vaste toewijzing.

Elke gewone stap verhoogt J niet, maar de oplossing kan een lokaal minimum zijn. Begin meerdere keren en behoud de laagste J. Lege clusters vragen een expliciete herstartregel. Schaal kenmerken voordat je afstand vergelijkt. Groepen met verschillende dichtheid, langgerekte vorm of uitschieters passen niet altijd bij deze geometrie.

CENTRUM BIJ VASTE CLUSTERLEDEN

$$c_j = \frac{1}{|C_j|} \sum_{i \in C_j} x_i$$

CODE · 42.16

K-means met meerdere starts

16/19

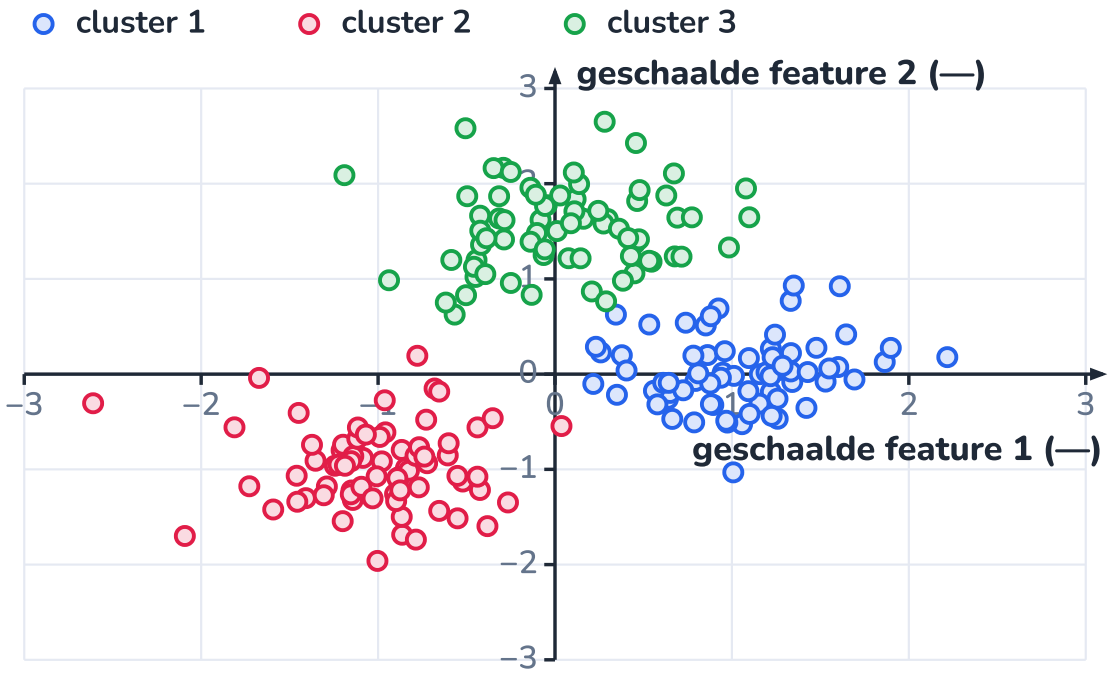
De ongeëtiketteerde dataset bevat 210 geschaalde modelwaarnemingen. Acht starts beperken toevallige slechte initialisatie. De code toont centra, omvang, iteraties en J voor verschillende k. Er wordt geen ziektelabel gebruikt. Een lagere J bij meer centra is op zichzelf geen bewijs voor het juiste aantal biologische groepen.

Python `plant_clusters.py` 21 regels

```python
import numpy as np
rng=np.random.default_rng(420)
# Ongeëtiketteerde, gestandaardiseerde modelsamples.
X=np.vstack([rng.normal(c,.45,(70,2)) for c in [(-1,-1),(1,0),(0,1.5)]])
def kmeans(X,k,seed):
    r=np.random.default_rng(seed)
    c=X[r.choice(len(X),k,replace=False)].copy()
```

```
    for it in range(100):
        lab=((X[:,None,:]-c[None,:,:])**2).sum(axis=2).argmin(axis=1)
        nieuw=np.array([X[lab==j].mean(axis=0) if np.any(lab==j)
                        else X[r.integers(len(X))] for j in range(k)])
        if np.max(np.abs(nieuw-c))<1e-8: c=nieuw; break
        c=nieuw
    lab=((X[:,None,:]-c[None,:,:])**2).sum(axis=2).argmin(axis=1)
    sse=np.sum((X-c[lab])**2)
    return sse,c,lab,it+1
sse,c,lab,it=min([kmeans(X,3,s) for s in range(8)],key=lambda v:v[0])
print("k3 SSE",round(sse,3),"iteraties",it)
print("clusteromvang",np.bincount(lab).tolist())
print("centra",np.round(c,3))
print("SSE per k",[(k,round(min(kmeans(X,k,s)[0] for s in range(8)),2)) for k in (1,2,3,4)])
```

```
k3 SSE 75.519 iteraties 6
clusteromvang [69, 70, 71]
centra [[ 1.037  0.022]
 [-0.998 -0.974]
 [ 0.046  1.53 ]]
SSE per k [(1, np.float64(443.84)), (2, np.float64(189.5)), (3, np.float64(75.52)), (4,
np.float64(65.22))]
```



Cluster-ID's zijn willekeurig. De algoritmische groepen leveren zonder externe beoordeling geen naam of oorzaak van plantproblemen.

VERHAAL · 42.17

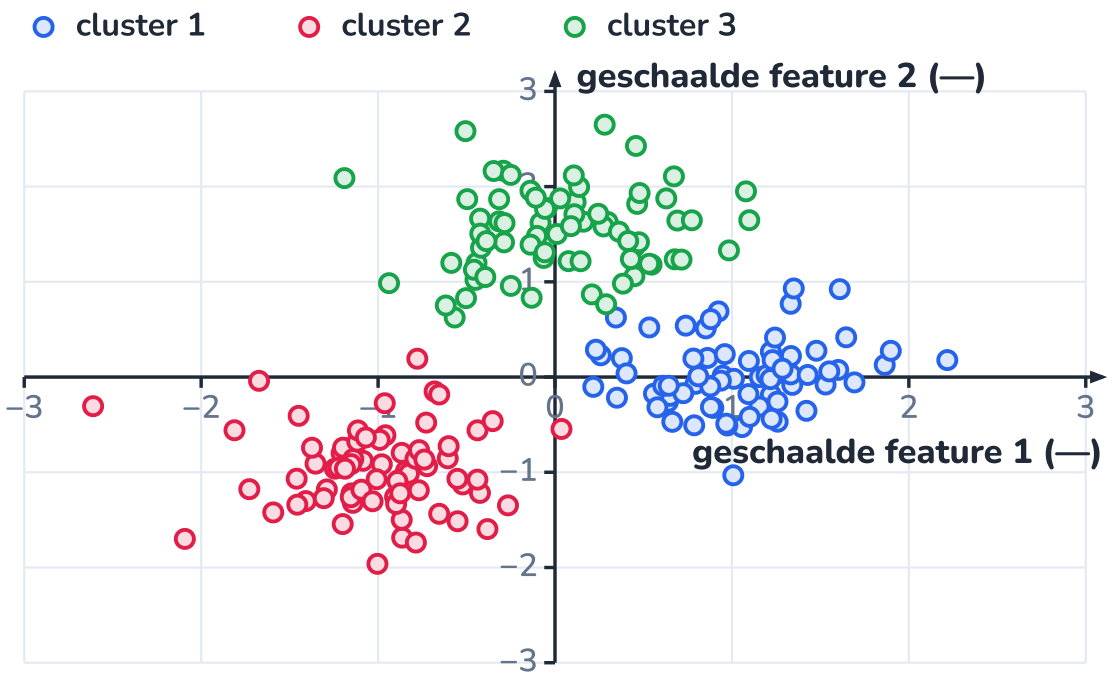
Een cluster krijgt betekenis door een nieuwe vraag

17/19

Een operator kan clusters gebruiken om representatieve planten voor inspectie te selecteren. Vergelijk per cluster licht, batch, cultivar en referentiediagnose. Een cluster kan een hoek van de kas of

sensormontage herkennen in plaats van ziekte. Veranderde clusteromvang kan daarom een meetprobleem of veranderde omgeving zijn.

De primaire algoritmedocumentatie staat bij logistische regressie, beslisbomen en k-means van scikit-learn, geraadpleegd 30-09-2026. De lescode gebruikt NumPy zodat de update en splitsing zichtbaar blijven. Clusters worden pas als probleemgroepen benoemd na externe beoordeling.



Cluster-ID's zijn willekeurig. De algoritmische groepen leveren zonder externe beoordeling geen naam of oorzaak van plantproblemen.

NASLAG · 42.18

De evaluatie op één blad

18/19

twee verschillende foutvragen

$$\text{precisie} = \frac{TP}{TP + FP}, \quad \text{recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

symbool	betekenis	eenheid
TP	juist positieve voorspellingen	—
FP	vals positief	—
FN	vals negatief	—

methode	vraagt
logistiek	lineaire score, goede features en kalibratie
KNN	schaal en representatieve buren
boom	complexiteitsgrens en onafhankelijke test

methode	vraagt
k-means	k, afstand en externe interpretatie

HET GEHEEL · 42.19

Van plantdata naar begrensde inspectie

19/19

Een classifier brengt referentielabels, statistiek en beheer samen. Een cluster helpt zoeken. Het station bewaart waarom een plant is voorgesteld en wie het voorstel bevestigde.

E6 Statistiek en meetonzekerheid
Onzekerheid in sensorkenmerken.

E41 Van data naar model: regressie
Eerlijke splits en preprocessing.

E43 Neurale netwerken
Meer flexibele beslisgrenzen.

E44 AI verantwoord inzetten
Bevoegdheid en bias.

E45 Systems engineering en het V-model
Een toetsbaar inspectiecontract.

Habitat

Habitat start met een inspectievoorstel. Datasetlabels, batch-split, drempel en foutkosten worden vastgelegd. De getoonde vocht- en bladkenmerken zijn lesvoorbeelden en voegen geen nieuwe sensor aan de vaste stationsconfiguratie toe.

SAMENVATTING

In het kort

- Labels vragen een onafhankelijke referentie en een duidelijk tijdstip.
- Logistiek, KNN en bomen leren verschillende beslisgrenzen.
- Clustering vindt overeenkomst zonder automatisch een diagnose te geven.
- Precisie en recall beoordelen verschillende foutkosten.
- Onbalans, kalibratie en groepslekken horen bij de evaluatie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

classificatie
Een waarneming aan een vooraf gedefinieerd label toewijzen.

clustering
Groepen zoeken op overeenkomst zonder de doelgroepen als labels aan te leveren.

precisie

Aandeel werkelijk positieve gevallen onder positieve voorspellingen.

recall

Aandeel gevonden positieve gevallen onder alle werkelijk positieve gevallen.

actiedrempel

Scoregrens waarboven een vooraf afgesproken handeling volgt.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

HANDBOEK · HOOFDSTUK 43

Neurale netwerken

Een netwerk leert door de kettingregel door iedere laag terug te rekenen

Een vermogensmodel kan een krom verband tussen instraling en temperatuur bevatten. Een klein neuraal netwerk leert zulke samenhang, maar vraagt controle van iedere afgeleide en een eerlijke toets. Je bouwt het zonder verborgen trainingsfunctie in NumPy.

8× uitleg | 4× uitgewerkt voorbeeld | 1× naslag | 1× verhaal | 1× het geheel | 2× code | ± 14 lestijden

A Data en AI | W Wiskundig modelleren | P Programmeren en computationeel denken



Beschikbaar zonnevermogen vraagt instraling, temperatuur en een duidelijke systeemgrens.

Na dit hoofdstuk

- Je kan perceptron, activaties en niet-lineariteit uitleggen.
- Je kan voorwaartse propagatie met matrixvormen uitvoeren.
- Je kan gradiëntafdaling aan e02 verbinden.
- Je kan backpropagation afleiden en numeriek controleren.
- Je kan een klein NumPy-netwerk trainen en convolutionele gewichtsdeling berekenen.

UITLEG · 43.1

Het perceptron maakt één scheidingsvlak

1/17

Een klassiek perceptron vormt $z = b + w^T x$ en geeft label 1 bij z≥0. Bij een fout wordt w met een stap in de richting van de gelabelde sample aangepast. Met alleen één lineair vlak kun je niet iedere verdeling scheiden. XOR is het bekende tegenvoorbeeld: twee gelijke bits hebben label nul en twee verschillende bits label één.

Een modern netwerk vervangt de harde stap tijdens training meestal door differentieerbare activaties. Het neuron is een rekenmodel, geen complete biologische zenuwcel. Zonder niet-lineariteit tussen lagen blijft iedere opeenvolging van affine lagen één affine functie: meer lagen alleen geven dan geen kromme grens.

LINEAIRE LAGEN ZONDER ACTIVATIE VOUWEN SAMEN

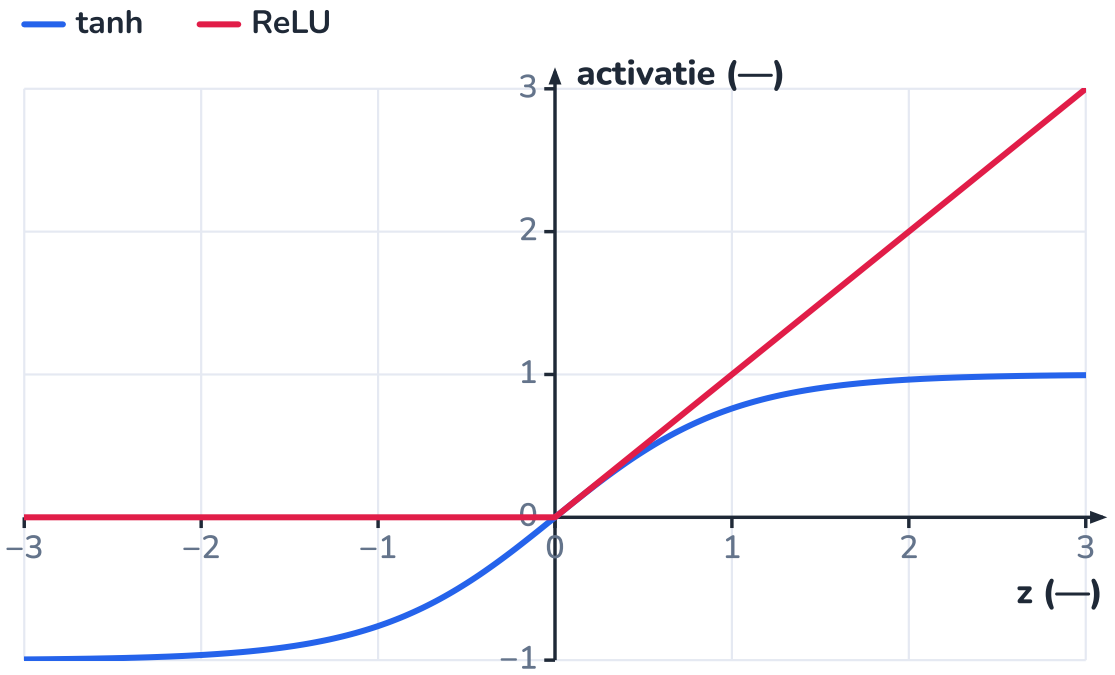
$$W_2(W_1x + b_1) + b_2 = (W_2W_1)x + (W_2b_1 + b_2)$$

UITLEG · 43.2

Activatie verandert ook het leerpad

Sigmoid past bij een binaire uitvoerkans; tanh is symmetrisch tussen −1 en 1; ReLU is $\max(0, z)$. De keuze hoort bij taak en verliesfunctie. Voor regressie kan de laatste laag lineair zijn, zodat de uitvoer niet tot [0,1] wordt beperkt.

tanh heeft afgeleide $1 - h^2$ en raakt bij grote |z| verzadigd: de gradiënt wordt klein. ReLU heeft afgeleide één voor positieve z en nul voor negatieve z; een neuron dat altijd negatief blijft kan niet meer leren via dat pad. Schaal invoer en kies een passende initialisatie. Een activatie is dus een beslissing over modelvorm én optimalisatie.



tanh verzadigt bij grote |z|; ReLU is nul bij negatieve z. Bij z=0 moet een ReLU-implementatie een afgeleideconventie vastleggen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 43.3

Waarom XOR twee stappen vraagt

3/17

Labels: (0,0)→0, (1,0)→1, (0,1)→1, (1,1)→0.

GEGEVEN

- één lineaire score z=b+w1x1+w2x2

GEVRAAGD

- toon de tegenspraak; bouw twee verborgen regio's

OPLOSSING

1. Voor (0,0) negatief moet b<0. Voor de twee enkelvoudige enen moeten b+w1≥0 en b+w2≥0. Dan b+w1+w2≥−b>0, terwijl (1,1) negatief zou moeten zijn.
2. Twee verborgen drempelneuronen kunnen OR en AND vormen: h1=stap(x1+x2−0,5), h2=stap(x1+x2−1,5). Output=stap(h1−2h2−0,5). Controleer de vier combinaties; dit is XOR.
3. De constructie toont representatie. Een harde stap is niet geschikt voor de gewone differentieerbare backprop-code; gebruik voor training gladde of stukgewijs differentieerbare activaties.

ANTWOORD

Een verborgen laag kan regio's combineren die één vlak niet kan scheiden.

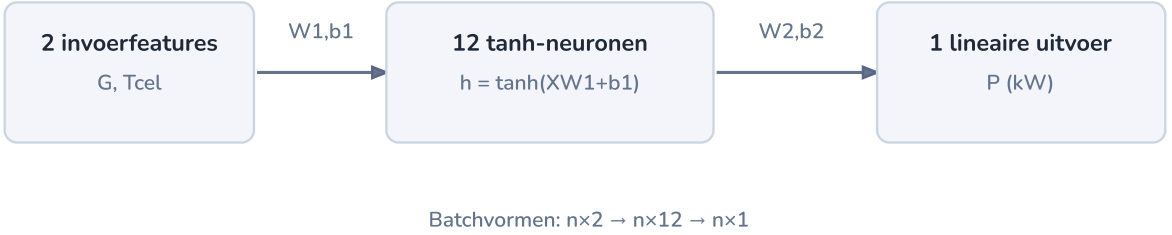
UITLEG · 43.4

Voorwaartse propagatie bewaart de batchvorm

4/17

Voor n waarnemingen en twee features is X een n×2-matrix. Met twaalf verborgen neuronen is W1 2×12 en b1 lengte 12. NumPy broadcast de bias langs de sample-as. H=tanh(XW1+b1) heeft vorm n×12. W2 is 12×1; b2 lengte 1. De regressie-uitvoer heeft vorm n×1.

Een matrixvorm voorkomt twaalf los geschreven neuronlussen, maar vraagt controle van assen. Een uitvoer (n,1) aftrekken van een doelvector (n,) kan onbedoeld een n×n-matrix maken. De code maakt beide tot één doelvector voordat de fout wordt berekend. Bewaar de tussenactivaties: backprop gebruikt precies het forwardpad dat de voorspelling gaf.



Gewichten worden gedeeld tussen samples, niet tussen verborgen neuronen. Het netwerk heeft 49 leerbare parameters.

UITGEWERKT VOORBEELD · 43.5

Een neuron volledig vooruitrekenen

5/17

x=0,5; w1=0,8; b1=0,1; w2=0,7; b2=0,2.

GEGEVEN

- één tanh-neuron
- doel y=0,8

GEVRAAGD

- voorspelling en half-kwadratisch verlies

OPLOSSING

1. z1=0,8×0,5+0,1=0,5; h=tanh(0,5)=0,462117.
2. ŷ=0,7×0,462117+0,2=0,523482.
3. L=(ŷ−y)²/2=0,038231. De fout e=−0,276518 heeft hier uitvoereenheid; de parameters in dit handvoorbeeld zijn dimensieloos.

ANTWOORD

Deze opgeslagen h en fout zijn voldoende om dezelfde sample terug te rekenen.

UITLEG · 43.6

Gradiëntafdaling verbindt aan e02

6/17

De lokale gradiënt geeft de richting van sterkste stijging. De update is $\theta_{nieuw} = \theta - \eta\nabla L$. Een kleine η kan traag leren; een te grote η kan oscillatie of divergentie veroorzaken. Een niet-convex netwerkverlies heeft geen algemene garantie op het globale minimum.

Full-batch gebruikt alle trainingssamples per update. Mini-batches geven vaker een update met een ruisachtige gradiënt; dat kan rekenwerk efficiënter maken. Schud alleen binnen de toegestane trainingsgrens. Vergelijk trainings- en validatieverlies en sla een model op volgens een vooraf gekozen validatieregel. De eindtest kiest geen leersnelheid of epoch.

DEZELFDE OPTIMALISATIEGEDACHTE ALS E02

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta\nabla_\theta L$$

UITLEG · 43.7

Backpropagation is de kettingregel

7/17

Voor een lineaire regressie-uitvoer en gemiddelde half-kwadratische fout geldt $D_2 = (\hat{y} - y)/n$. Dan $\partial L/\partial W_2 = H^T D_2$ en de biasgradiënt is de som over samples. De verborgen fout is $D_1 = (D_2 W_2^T) \odot (1 - H^2)$ voor tanh. Daaruit volgen $X^T D_1$ en de bias-som.

Het Hadamardproduct ⊙ is elementgewijs; matrixproducten dragen foutinvloed naar eerdere lagen. Bereken alle gradiënten met dezelfde oude parameters en voer daarna updates uit. Als W2 al verandert

voordat D1 wordt berekend, past de kettingregel niet meer bij de forwardpass. Een L2-straf λ||W||²/2 voegt λW toe aan de gewichtgradiënt.

TERUG NAAR DE EERSTE LAAG

$$D_1 = (D_2 W_2^T) \odot f'(Z_1), \qquad \nabla W_1 = X^T D_1$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 43.8

Het handneuron terugrekenen

8/17

Gebruik het handvoorbeeld met h=0,462117 en e=−0,276518.

GEGEVEN

- L=e²/2
- η=0,1

GEVRAAGD

- alle vier gradiënten en updates

OPLOSSING

1. dL/dw2=e·h=−0,127784; dL/db2=e=−0,276518.
2. δ1=e·w2·(1−h²)=−0,152227. Dus dL/dw1=δ1×x=−0,076113 en dL/db1=−0,152227.
3. Nieuwe waarden: w1≈0,807611; b1≈0,115223; w2≈0,712778; b2≈0,227652. Alle updates gebruiken de oude forwardwaarden.

ANTWOORD

De nieuwe voorspelling beweegt richting 0,8. Afronding verklaart de laatste cijfers.

UITLEG · 43.9

Een onafhankelijke afgeleidecontrole

9/17

Voor één parameter θj is een centrale-differentieschatting $[L(\theta + \varepsilon e_j) - L(\theta - \varepsilon e_j)]/(2\varepsilon)$. Vergelijk deze met backprop vóór training, op een kleine batch en meerdere parameters. Zij gebruikt opnieuw de forwardfunctie en controleert zo een onafhankelijk rekenpad.

Neem ε niet zo klein dat floating-pointaftrekking domineert, en niet zo groot dat kromming de afgeleide vervormt. Bij ReLU kan een verschil de knik kruisen; dat is geen glad afgeleidepunt. Een geslaagde gradiëntcontrole bewijst de update-algebra, geen goede dataset of geschikte toepassing.

CENTRALE DIFFERENTIE

$$g_j^{FD} = \frac{L(\theta + \varepsilon e_j) - L(\theta - \varepsilon e_j)}{2\varepsilon}$$

CODE · 43.10

10/17

Het PV-netwerk leert in echte NumPy

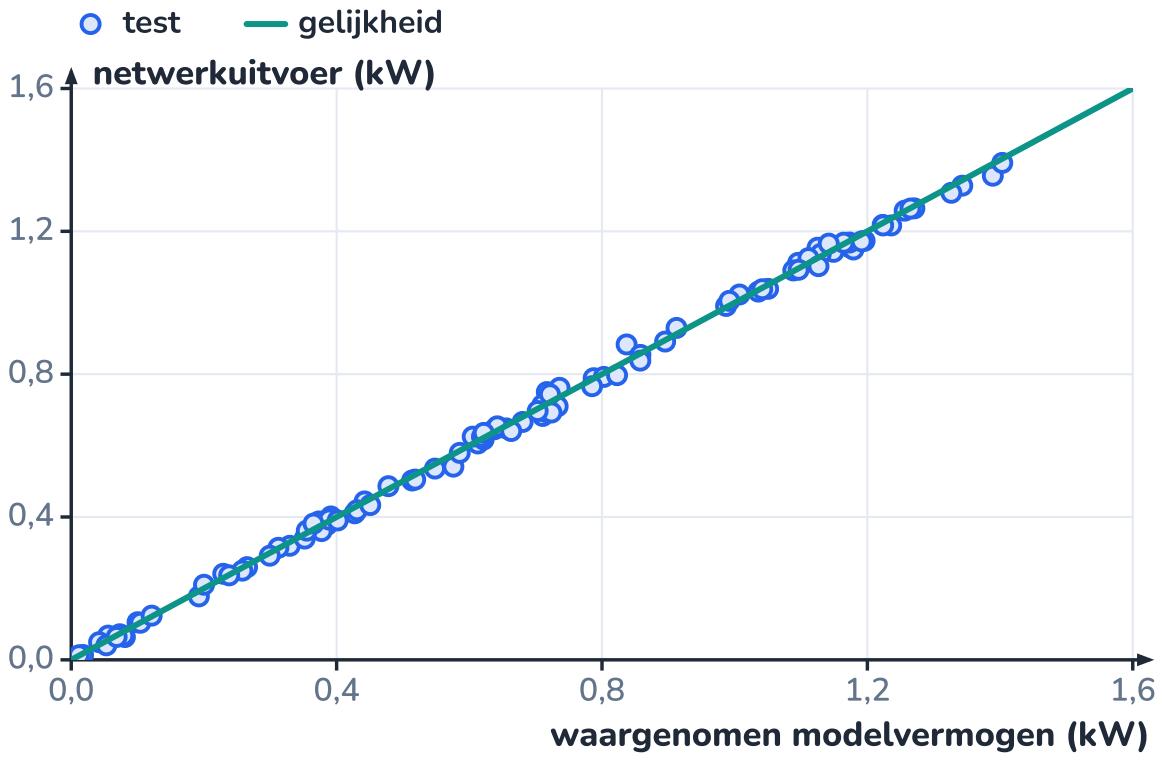
De module heeft 1,40 kWp als systeemgrens. Deze demonstratie schat ongeclipt beschikbaar DC-vermogen uit gerealiseerde instraling en celtemperatuur. Zij levert geen dag-vooruitfout of jaaropbrengst. Alleen training bepaalt de scaler; validatie kiest de opgeslagen epoch. De code vergelijkt op dezelfde honderd testomstandigheden met lineaire regressie en de ruisvloer van het bekende synthetische proces.

Python **pv_netwerk.py** 57 regels

```python
import numpy as np
rng=np.random.default_rng(43)
# Onafhankelijke synthetische omstandigheden; geen dag-vooruitprognoses.
G=rng.uniform(0,1000,500)
Tcel=rng.uniform(-5,55,500)+15*G/1000
X=np.column_stack((G,Tcel))
waar=1.40*(G/1000)*(1-.004*(Tcel-25))
y=waar+rng.normal(0,.015,len(G))
ids=rng.permutation(len(G)); tr,va,te=np.split(ids,[300,400])
gem=X[tr].mean(axis=0); sd=X[tr].std(axis=0)
Z=(X-gem)/sd
par=[rng.normal(0,.25,(2,12)),np.zeros(12),
     rng.normal(0,.25,(12,1)),np.zeros(1)]
lam=1e-4
def vooruit(z,p):
    W1,b1,W2,b2=p
    h=np.tanh(z@W1+b1)
    return (h@W2+b2).ravel(),h
def verlies(z,y,p):
    pred,h=vooruit(z,p)
    return np.mean((pred-y)**2)/2+lam*(np.sum(p[0]**2)+np.sum(p[2]**2))/2
def gradient(z,y,p):
    pred,h=vooruit(z,p)
    d2=(pred-y)[:,None]/len(y)
    d1=(d2@p[2].T)*(1-h*h)
    return [z.T@d1+lam*p[0],d1.sum(axis=0),
            h.T@d2+lam*p[2],d2.sum(axis=0)]
# Onafhankelijke centrale-differentiecontrole vóór training.
g=gradient(Z[tr],y[tr],par)[0][0,0]
eps=1e-6; oud=par[0][0,0]
par[0][0,0]=oud+eps; plus=verlies(Z[tr],y[tr],par)
par[0][0,0]=oud-eps; min_=verlies(Z[tr],y[tr],par)
par[0][0,0]=oud
fd=(plus-min_)/(2*eps)
print("gradient analytisch/numeriek",round(g,9),round(fd,9),"verschil",abs(g-fd))
assert abs(g-fd)<1e-7
# Adam: lopende eerste/tweede momenten, met biascorrectie.
m=[np.zeros_like(a) for a in par]; v=[np.zeros_like(a) for a in par]
best=np.inf; historie=[]; beste=None
for epoch in range(1,2001):
    gg=gradient(Z[tr],y[tr],par)
    for j in range(4):
        m[j]=.9*m[j]+.1*gg[j]; v[j]=.999*v[j]+.001*gg[j]**2
        par[j]-=.01*(m[j]/(1-.9**epoch))/(np.sqrt(v[j]/(1-.999**epoch))+1e-8)
    pt=vooruit(Z[tr],par)[0]; pv=vooruit(Z[va],par)[0]
    tv=np.mean((pv-y[va])**2)
    if tv<best: best=tv; beste=[a.copy() for a in par]; beste_epoch=epoch
    if epoch%50==0: historie.append((epoch,np.mean((pt-y[tr])**2),tv))
pred,h=vooruit(Z,beste)
lineair=np.column_stack((np.ones(len(Z)),Z))
coef=np.linalg.lstsq(lineair[tr],y[tr],rcond=None)[0]
rmse=lambda a,b: np.sqrt(np.mean((a-b)**2))
print("gekozen epoch",beste_epoch,"parameters",sum(a.size for a in par))
```

```
print("test RMSE netwerk",round(rmse(y[te],pred[te]),5),"kW")
print("test RMSE lineair",round(rmse(y[te],lineair[te]@coef),5),"kW")
print("model-noise RMSE",round(rmse(y[te],waar[te]),5),"kW")
assert np.all(np.isfinite(pred))
```

```
gradient analytisch/numeriek -0.109852295 -0.109852295 verschil 2.3535340343272537e-13
gekozen epoch 2000 parameters 49
test RMSE netwerk 0.01535 kW
test RMSE lineair 0.03027 kW
model-noise RMSE 0.01386 kW
```



Dit is beschikbaar DC-vermogen uit gerealiseerde instraling en celtemperatuur. Een weersprognose, clipping of dagintegratie is niet in deze test gemodelleerd.

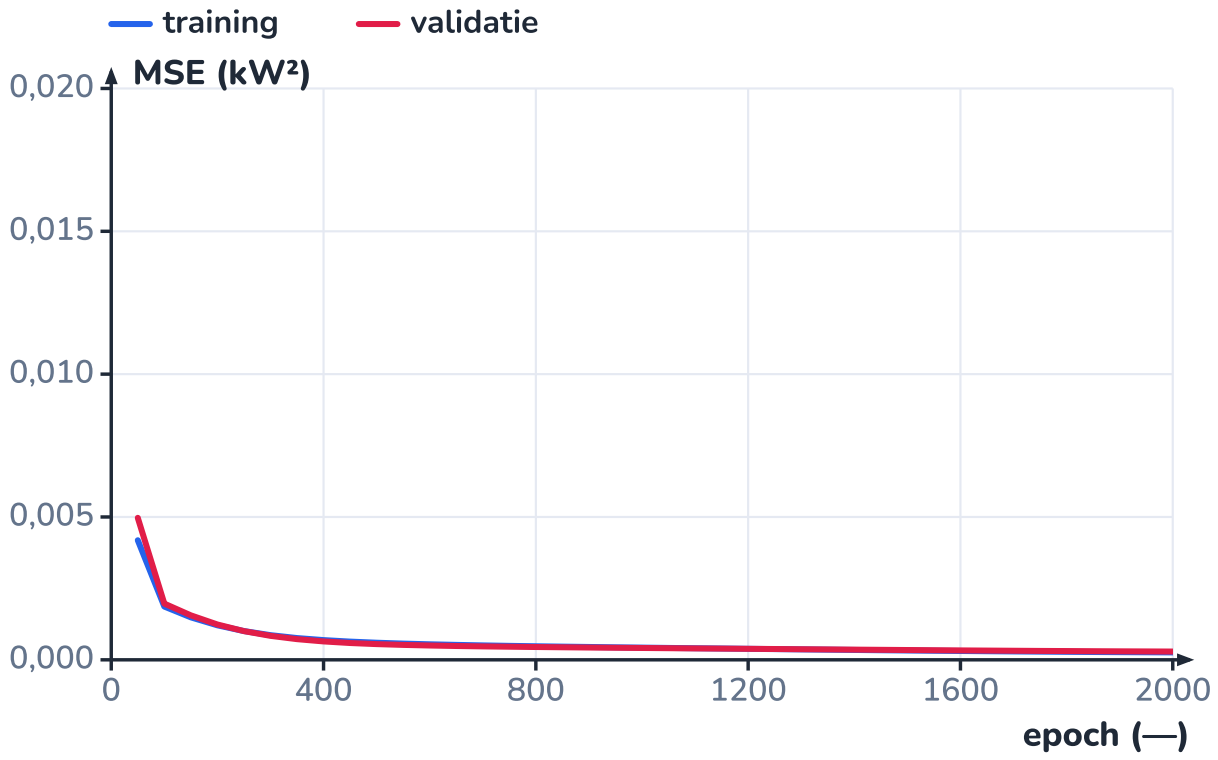
UITLEG · 43.11

De optimizer en de leercurve uitleggen

11/17

De code gebruikt Adam voor de updates: een lopend gemiddelde m van gradiënten en v van hun kwadraten. Biascorrectie deelt door $1-\beta_1^t$ en $1-\beta_2^t$ omdat beide momenten bij nul starten. De update deelt de gecorrigeerde eerste momentwaarde door de wortel van het tweede moment plus een kleine stabilisatieterm.

Deze optimizer verandert de parameterstap, niet de backprop-afleiding. De leswaarden β1=0,9, β2=0,999 en η=0,01 zijn keuzes voor deze demonstratie. Een dalend trainingsverlies met stijgend validatieverlies wijst op overfitting of selectieproblemen. Bewaar de beste validatie-epoch en voer de eindtest eenmaal uit. Bij gelijkwaardige prestaties kan het kleinere fysische of lineaire model beter uitlegbaar en goedkoper zijn.



Alle omstandigheden zijn synthetisch. Validatie kiest de opgeslagen epoch; de honderd testwaarnemingen worden pas na die keuze beoordeeld.

UITLEG · 43.12

Convolutionele netwerken delen een lokaal filter

12/17

Een dense laag verbindt ieder inputelement met ieder outputelement. Een convolutionele laag schuift hetzelfde kleine filter over lokale beeldvakken. Daardoor leert één gewichtenreeks een patroon op meerdere posities, bijvoorbeeld een rand. Meerdere filters leveren meerdere featurekaarten; volgende lagen combineren lokale patronen.

De gebruikelijke implementatie voert kruiscorrelatie uit: het kernelvak wordt niet omgedraaid zoals bij de wiskundige convolutie. Stride bepaalt de stap, padding de behandeling van randen. Pooling vat regio's samen en kan gevoeligheid voor exacte positie verlagen, maar verliest informatie. Gewichtsdeling geeft geen automatische robuustheid tegen belichting, sensorverschuiving of nieuwe cultivars.

LOKALE KRUISCORRELATIE MET ÉÉN KANAAL

$$Y_{ij} = b + \sum_{u,v} K_{uv} X_{i+u,j+v}$$

CODE · 43.13

Een beeldfilter zonder bibliotheekmysterie

13/17

Een 4×4-modelbeeld heeft twee donkere en twee lichte kolommen. Een 3×3-kernel detecteert de verticale overgang. Stride 1 en geen padding geven 2×2-uitvoer. De code toont kruiscorrelatie, ReLU, maxpool en de parameterbesparing tegen een dense laag met dezelfde vier uitvoerplaatsen.

Python `kleine_convolutie.py` 11 regels

```python
import numpy as np
beeld=np.tile([0.,0.,1.,1.],(4,1))
kernel=np.tile([-1.,0.,1.],(3,1))
uit=np.empty((2,2))
for i in range(2):
    for j in range(2):
        uit[i,j]=np.sum(beeld[i:i+3,j:j+3]*kernel)
relu=np.maximum(0,uit)
print("kruiscorrelatie",uit)
print("ReLU",relu,"2x2 maxpool",relu.max())
print("parameters conv",kernel.size+1,"densezelfdeoutput",16*4+4)
```

```
kruiscorrelatie [[3. 3.]
 [3. 3.]]
ReLU [[3. 3.]
 [3. 3.]] 2x2 maxpool 3.0
parameters conv 10 densezelfdeoutput 68
```

UITGEWERKT VOORBEELD · 43.14

Parameters en uitvoermaat van een CNN

14/17

RGB-invoer 32×32×3; acht 3×3-filters; stride 1, padding 1.

GEGEVEN

- één bias per filter

GEVRAAGD

- parameter- en activatieaantal

OPLOSSING

1. Per filter zijn 3×3×3=27 gewichten en één bias. Acht filters geven (27+1)×8=224 parameters.
2. Ruimtelijke maat: (32+2−3)/1+1=32. Uitvoer 32×32×8 heeft 8192 activaties.
3. Parameters worden over alle locaties gedeeld; activaties zijn sample-afhankelijke tussenwaarden. Die twee aantallen zijn dus niet hetzelfde geheugenbegrip.

ANTWOORD

224 leerbare parameters produceren 8192 activaties per afbeelding.

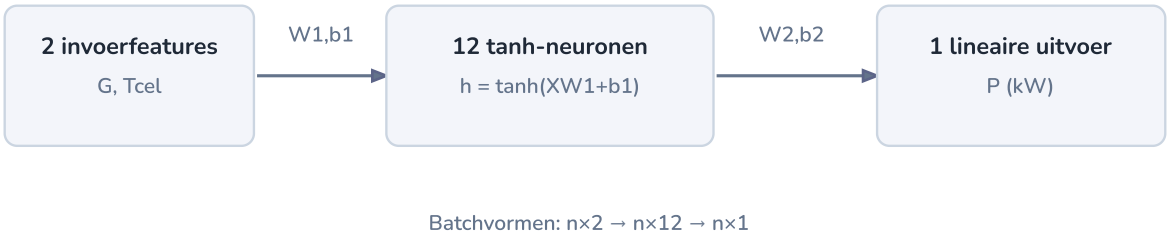
VERHAAL · 43.15

Backpropagation werd een praktische leerroute

15/17

Rumelhart, Hinton en Williams beschreven in 1986 het leren van interne representaties door fouten terug te propageren. Het belang voor deze les is dat verborgen features niet allemaal met de hand gekozen hoeven te worden. De kettingregel verdeelt de uiteindelijke fout over eerdere gewichten.

Convolutionele netwerken werden onder meer concreet toegepast op documentherkenning door LeCun, Bottou, Bengio en Haffner. Primaire bronnen: Learning representations by back-propagating errors (1986) en Gradient Based Learning Applied to Document Recognition (1998), geraadpleegd 30-09-2026. Historisch succes op cijfers bewijst geen betrouwbaarheid op plantbeelden of stationweer; daarvoor zijn eigen data en toetsen nodig.



Gewichten worden gedeeld tussen samples, niet tussen verborgen neuronen. Het netwerk heeft 49 leerbare parameters.

NASLAG · 43.16

Rekenpad en toetsing

16/17

tweelaags backprop

$$\nabla W_2 = H^T D_2, \quad D_1 = (D_2 W_2^T) \odot f'(Z_1)$$

symbool	betekenis	eenheid
H	verborgen activaties	—
D_2	uitvoerfout met verliesafgeleide	—

controle	doel
batchvormen	broadcastfouten voorkomen
numerieke gradiënt	kettingregel controleren
validatiecurve	epoch en complexiteit kiezen
basislijn	meerwaarde aantonen
domein	invoer buiten training herkennen

HET GEHEEL · 43.17

Een zonnevoorspeller houdt fysische grenzen

17/17

Een netwerk kan een niet-lineaire relatie leren, maar kent de systeemgrens alleen als data en contract haar vastleggen. Een vermogensschatting wordt pas opbrengst na integratie met correcte tijdstappen.

E2 Optimaliseren

Afgeleiden en gradiënt.

E3 Integralen: ophopen

Vermogen naar energie.

E41 Van data naar model: regressie

Basislijn en gescheiden toetsing.

E44 AI verantwoord inzetten

Bevoegdheid en bewijs.

E45 Systems engineering en het V-model

Modelmanifest en acceptatie.

Habitat

Habitat houdt beschikbaar PV-vermogen apart van afgeknepen werkelijk geleverd vermogen. De voorbeeld-COP noch het netwerk verandert PV-dimensionering. Dag-vooruitgebruik vraagt een aparte proef met gearchiveerde weerprognoses en een begrensde planner.

SAMENVATTING

In het kort

- Niet-lineariteit maakt meerdere lagen expressiever dan één affine functie.
- Batchvormen en activaties bepalen het forwardpad.
- Backpropagation rekent de kettingregel naar alle parameters.
- Gradiëntcontrole toetst algebra; een onafhankelijke test toetst generalisatie.
- Convolutie deelt filters over plaatsen en vraagt eigen domeinvalidatie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

neuron

Een gewogen som met bias en gekozen activatiefunctie.

epoch

Eén verwerking van het afgesproken trainingsbestand.

backpropagation

Efficiënte toepassing van de kettingregel van verlies terug naar parameters.

gewichtsdeling

Dezelfde leerbare parameters op meerdere posities gebruiken.

leersnelheid

De schaal van een parameterupdate volgens de gradiënt.

E EXPERT · DEEL E9 · DATA SCIENCE EN AI

HANDBOEK · HOOFDSTUK 44

AI verantwoord inzetten

Een overtuigende uitkomst vraagt bewijs, begrensde bevoegdheid en verantwoordelijkheid

Een AI kan een logboek samenvatten of energie voorstellen, maar een fout kan ook bewoners of installatie raken. Je onderzoekt hoe generatieve modellen werken, welke bewijsgrenzen ze hebben en hoe het station een verantwoord besluit over inzet neemt.

12× uitleg · 5× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 12 lestijden

A Data en AI · D Ontwerpen en maken



De bevoegdheid van een model wordt buiten het model vastgelegd.

Na dit hoofdstuk

- Je kan taal- en beeldgeneratie in hoofdlijnen uitleggen en begrenzen.
- Je kan bias, uitlegbaarheid en betrouwbaarheid met concrete toetsen beoordelen.
- Je kan persoonsgegevens en trainingsdata doelgericht beheren.
- Je kan energiegebruik met een expliciete systeemgrens berekenen.
- Je kan de EU AI-verordening op peildatum 30-09-2026 onderscheiden van oude voorstellen en een eigen inzetbesluit onderbouwen.

UITLEG · 44.1

Een AI-taak begint bij het gevolg

1/21

‘Gebruik AI’ is geen eis. Kies een taak: een log samenvatten, een plant voor inspectie voorstellen of morgen energie reserveren. Leg vast wie de uitkomst gebruikt en wat een fout veroorzaakt. Een onjuiste

samenvatting vraagt correctie; een fout warmtecommando kan schade veroorzaken. Dezelfde modelnaam kan dus heel verschillende inzetvragen hebben.

Schrijf doel, invoer, uitvoer, beslissing, bevoegde eigenaar en terugval. Vergelijk een eenvoudiger alternatief. Een groter model verdient geen extra actorrechten alleen omdat zijn tekst beter klinkt. Bewaar naast nuttigheid ook foutkosten, privacy, milieu en de mogelijkheid om een besluit te herstellen.

taak	toegestane rol	foutgevolg
logsamenvatting	concept met broncontrole	verkeerde onderhoudskeuze
plantclassificatie	inspectievoorstel	gemist probleem of overinspectie
energiepredictie	begrensd planningsvoorstel	verkeerde reserve
veiligheidsactie	onafhankelijk lokaal pad	gevaar bij fout

UITLEG · 44.2

Taalmodellen voorspellen tokens

2/21

Een autoregressief taalmodel modelleert $P(t_1, \ldots, t_n) = \prod_k P(t_k \mid t_{<k})$. Tokens zijn subwoorden, tekens of andere gekozen teksteenheden. Training leert parameters uit veel voorbeelden. Een Transformer gebruikt attention om informatie uit beschikbare posities te combineren. Causale masking voorkomt dat een volgende tekstpositie tijdens de next-tokenvoorspelling wordt bekeken.

Invoer wordt getokeniseerd en naar vectoren omgezet. Attention vormt query-, key- en valuevectoren, vergelijkt scores en maakt gewogen contextvectoren. Daarna volgen verdere lagen en uitvoerscores. De primaire Transformerbron is Vaswani et al., Attention Is All You Need (2017). Dit beschrijft de architectuur; het is geen garantie op actuele feiten of correcte berekeningen.

GEWOGEN CONTEXT, MET EEN TAAKPASSEND MASKER

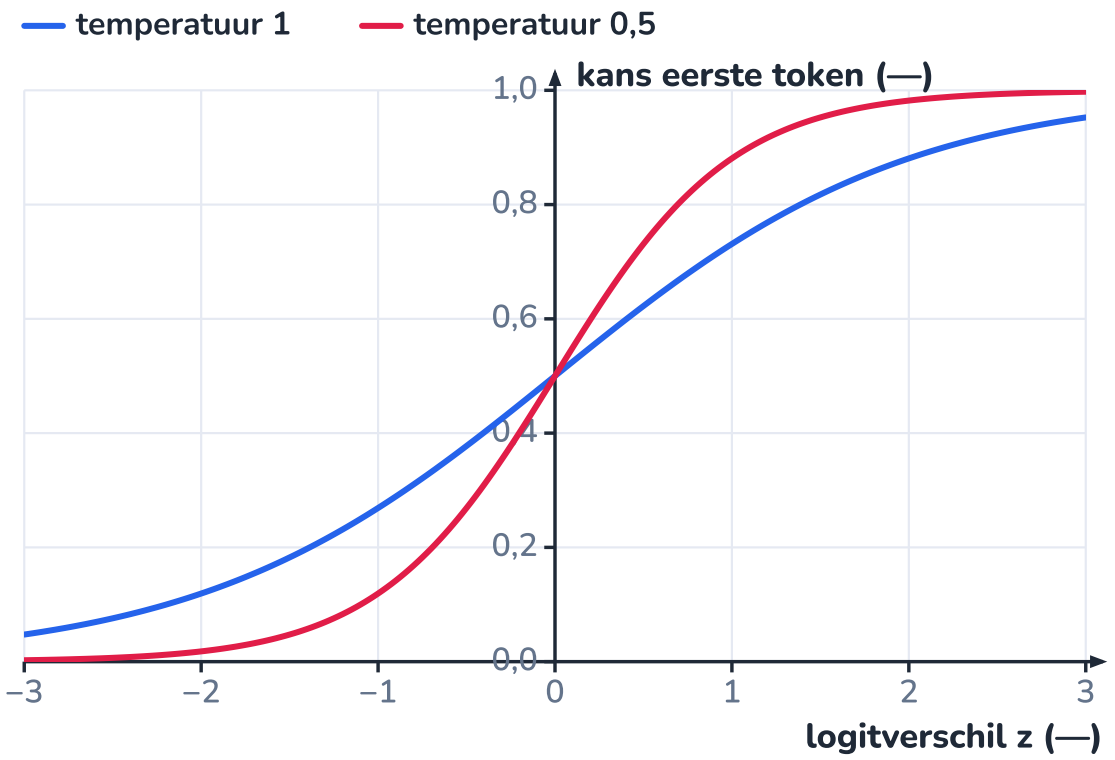
$$\mathrm{Attention}(Q, K, V) = \mathrm{softmax}(QK^T/\sqrt{d_k})V$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 44.3

Een tokenkans is geen waarheidskans

3/21

Drie mogelijke volgende tokens hebben scores 2,1,0.



Deze curve heeft twee tokenkeuzes en één logitverschil. De drie-keuzesoftmax in het rekenvoorbeeld is een aparte verdeling. Minder samplingvariatie geeft geen feitengarantie.

GEGEVEN

- softmax met temperatuur 1 of 0,5

GEVRAAGD

- kansverdeling en interpretatie

OPLOSSING

1. Bij temperatuur 1 zijn kansen 0,665241; 0,244728; 0,090031. Zij tellen op tot één.
2. Bij 0,5 wordt de verdeling 0,866813; 0,117310; 0,015876. De hoogste score wordt vaker gekozen.
3. De scores rangschikken tekstvoortzetting binnen het model. Zij zeggen niet dat een genoemde sensorwaarde met 86,7% kans waar is. Minder variatie kan dezelfde fout consequenter herhalen.

ANTWOORD

Samplingtemperatuur verandert keuzevariatie en geeft geen feitengarantie.

UITLEG · 44.4

Instructies, bronnen en gereedschap veranderen het pad

4/21

Voortraining leert algemene tekstpatronen; aanvullende training en menselijke feedback kunnen instructiegedrag verbeteren. Voorbeelden in een prompt kunnen de actuele taak sturen zonder alle modelgewichten opnieuw te leren. Primaire bronnen zijn Brown et al., Language Models are Few-Shot Learners (2020) en Ouyang et al., Training language models to follow instructions with human feedback (2022).

Een stationsassistent kan gecontroleerde documenten ophalen en berekeningen door een rekenroutine laten uitvoeren. Dat maakt verifieerbare bronnen mogelijk, maar ophalen kan het verkeerde document selecteren en tekst kan een fout samenvatten. Een externe pagina is bronmateriaal, geen bevoegdheid om actuatorrechten te wijzigen. Laat gestructureerde uitvoer door schema-, bereik-, tijd- en rolcontroles gaan en bewaar welke bron een feit ondersteunt.

stap	afzonderlijke toets
ophalen	juiste document en versie
rekenen	uitvoer met bekende invoer
samenvatten	claim steunt op bron
handelen	rol, tijd, bereik en modus

UITLEG · 44.5

Beeldgeneratoren leren een verdeling

5/21

Een diffusievoorbeeld voegt tijdens training ruis aan een beeld toe: $x_t = \sqrt{\bar{\alpha}_t}x_0 + \sqrt{1-\bar{\alpha}_t}\varepsilon$. Een netwerk leert een taakpassende ruis- of herstelvoorspelling. Generatie begint met ruis en voert opeenvolgende herstelstappen uit; een tekstconditionering kan de gewenste beeldinhoud sturen.

De primaire bron is Ho, Jain en Abbeel, Denoising Diffusion Probabilistic Models (2020). Het resultaat hoeft geen exacte kopie van een trainingsbeeld te zijn, maar dat betekent niet dat memorisatie of ongewenste reproductie onmogelijk is. Een gegenereerde stationsfoto is een illustratie. Zij bewijst geen montage, ziekte, meting of historische gebeurtenis. Technische maten, labels en schakelingen vragen afzonderlijke exacte tekeningen.

ÉÉN VOORWAARTSE DIFFUSIERUISSTAP

$$x_t = \sqrt{\bar{\alpha}_t}x_0 + \sqrt{1-\bar{\alpha}_t}\varepsilon$$

CODE · 44.6

Drie claims daadwerkelijk narekenen

6/21

De kleine attentionmatrix, groepsfouten en energieboekhouding worden in NumPy uitgevoerd. Het is geen getraind taalmodel. De energiecijfers zijn expliciete aannamen en geen meting van een aanbieder. De code helpt onderscheiden wat een algoritme, een toetsdataset en een systeemgrens elk kunnen aantonen.

Python ai_toetsen.py 28 regels

```python
import numpy as np
def softmax(z):
    z=np.asarray(z,dtype=float); e=np.exp(z-z.max(axis=-1,keepdims=True))
    return e/e.sum(axis=-1,keepdims=True)
for temp in (1.,.5):
    print("temperatuur",temp,"kansen",np.round(softmax(np.array([2.,1.,0.])/temp),6))
# Klein causaal attentionvoorbeeld; geen getraind taalmodel.
Q=np.array([[1.,0.],[0.,1.],[1.,1.]])
K=Q.copy(); V=np.array([[1.,0.],[0.,2.],[3.,1.]])
score=Q@K.T/np.sqrt(2)
```

```
score[np.triu_indices(3,1)]=-1e9
A=softmax(score)
print("causale attention",np.round(A,3))
print("contextvectoren",np.round(A@V,3))
# Onafhankelijke rekenproef van een toetsrapport.
groepen={"helder":[76,4,1,19],"schaduw":[72,8,8,12]}
for naam,(tn,fp,fn,tp) in groepen.items():
    print(naam,"recall",round(tp/(tp+fn),3),"FPR",round(fp/(fp+tn),3))
alles=np.sum(list(groepen.values()),axis=0)
tn,fp,fn,tp=alles
print("aggregaat recall",tp/(tp+fn),"precisie",tp/(tp+fp))
# Energie: uitsluitend veronderstelde boekhoudwaarden.
training_kwh=1200; levensduur_outputs=10_000_000
train_wh=training_kwh*1000/levensduur_outputs
it_wh=.020; pue=1.2; netwerk_wh=.006
per_output=train_wh+it_wh*pue+netwerk_wh
print("Wh/output",per_output,"kWh/jaar bij200perdag",per_output*200*365/1000)
print("apart continu apparaat5W",5*24*365/1000,"kWh/jaar")
```

```
temperatuur 1.0 kansen [0.665241 0.244728 0.090031]
temperatuur 0.5 kansen [0.866813 0.11731  0.015876]
causale attention [[1.    0.    0.   ]
 [0.33  0.67  0.   ]
 [0.248 0.248 0.503]]
contextvectoren [[1.    0.   ]
 [0.33  1.34 ]
 [1.759 1.   ]]
helder recall 0.95 FPR 0.05
schaduw recall 0.6 FPR 0.1
aggregaat recall 0.775 precisie 0.7209302325581395
Wh/output 0.15 kWh/jaar bij200perdag 10.95
apart continu apparaat5W 43.8 kWh/jaar
```

UITLEG · 44.7

Bias zit ook vóór en na het model

7/21

Een dataset kan te weinig schaduwplanten bevatten; een label kan aan de ene batch strenger worden toegekend; een camera kan alleen in één kaspositie scherp zijn. Een model kan daarna de afwijking leren. Inzet kan opnieuw selecteren: alleen voorgestelde planten worden onderzocht, zodat gemiste problemen onzichtbaar blijven.

Definieer relevante groepen vanuit de taak en toets prestaties per groep met aantallen en onzekerheid. Kies niet achteraf alleen de gunstige doorsnede. Voor persoonsbesluiten komen ook mogelijke ongelijke gevolgen en grondrechten in beeld. Een gemiddelde score kan een zwakke groep verbergen. Een even hoge score voor alle groepen is evenmin voldoende als het label of de taak zelf ongeschikt is.

fase	mogelijke vertekening	controle
verzamelen	te weinig schaduw	dekking per omgeving
labelen	verschillende criteria	blinde referentie
trainen	dominante meerderheid	groepsfout en onbalans

fase	mogelijke vertekening	controle
inzetten	alleen meldingen geverifieerd	steekproef onder niet-meldingen

UITGEWERKT VOORBEELD · 44.8

Het aggregaat verbergt schaduw

8/21

Twee groepen van 100 planten, ieder 20 positief.

GEGEVEN

- helder TP=19,FN=1,FP=4,TN=76
- schaduw TP=12,FN=8,FP=8,TN=72

GEVRAAGD

- recall per groep en totaal

OPLOSSING

1. Heldere groep: recall=19/20=95%; schaduw: 12/20=60%.
2. Totaal: TP=31,FN=9, dus recall=31/40=77,5%. Totale precisie=31/(31+12)=72,09%.
3. Het totaal beschrijft geen van beide groepen goed. Onderzoek data, meetkwaliteit en labelherkomst vóór een oplossing. De kleine aantallen vragen nieuwe toetsdata.

ANTWOORD

Een totaalpercentage vervangt geen beoordeling van de beoogde omstandigheden.

UITLEG · 44.9

Uitlegbaarheid is informatie voor een gebruiker

9/21

Een coefficient, beslisregel, voorbeeldbuur of featurebijdrage kan helpen begrijpen waarom een voorstel kwam. Een achteraf geschreven reden door een taalmodel is niet vanzelf de werkelijke oorzaak in het netwerk. Een uitleg moet trouw zijn aan de gebruikte beslisroute en relevant voor degene die de fout kan ontdekken.

Een operator heeft andere vragen dan een ontwikkelaar: welke bron is oud, wat gebeurt bij weigering en hoe kan de actie hersteld worden? Toon meettijd, modelversie, onzekerheidsstatus en begrenzing. Featurebelang bewijst geen causaliteit en kan misleidend zijn bij gecorreleerde features. Toets daarom ook met gecontroleerde veranderproeven en onafhankelijke waarnemingen.

uitlegonderdeel	gebruiker kan controleren
bron en tijd	actualiteit
invoerbereik	extrapolatie
versie en regel	reproduceerbaarheid
alternatief en terugval	besluit herstellen

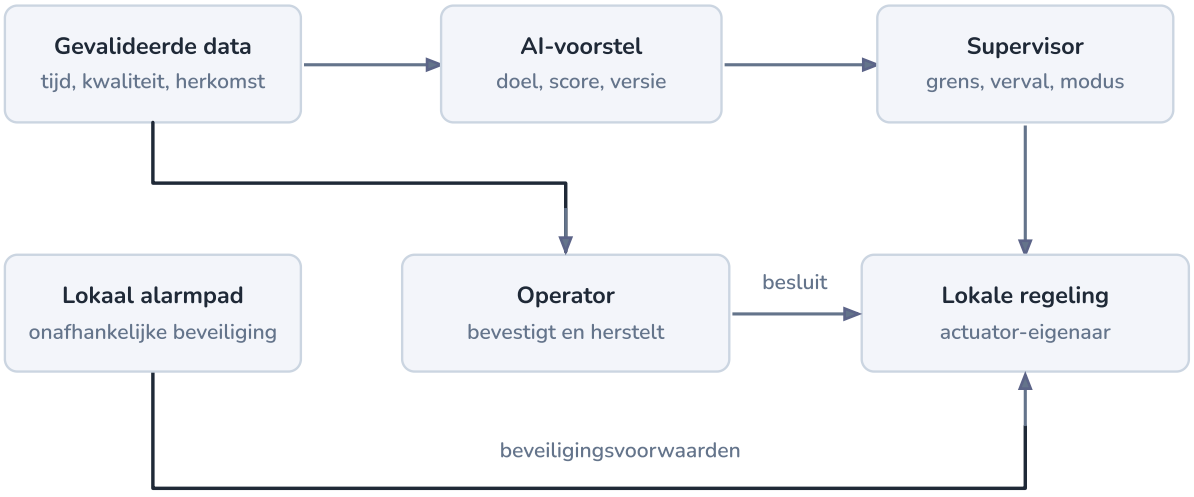
UITLEG · 44.10

Betrouwbaarheid vraagt het complete beslispad

10/21

Een goede modelscore is slechts één schakel. Invoer kan ontbreken, het netwerk kan uitvallen, een voorstel kan verlopen en een actuator kan weigeren. Toets gewone omstandigheden, zeldzame regimes en fouten. Leg vooraf vast wat acceptabel is en waar het systeem zich onthoudt van een voorstel.

Een mens in de lus werkt alleen als die tijd, informatie en bevoegdheid heeft om te corrigeren. Een automatische actie gevolgd door een onduidelijk scherm is geen werkelijke controle. Het station laat AI voorstellen aan een supervisor; de lokale eigenaar bewaakt tijd, bereik en modus. Onafhankelijke alarm- en beveiligingspaden krijgen hun eigen ontwerp en testen.



De AI schrijft voorstellen. De operator kan een besluit aan de lokale eigenaar geven; die past op beide routes zijn eigen grenzen toe. Het onafhankelijke alarmpad kan ingrijpen. Het architectuurvoorstel vraagt nog storingstests en productbeoordeling.

UITGEWERKT VOORBEELD · 44.11

Een review die echt kan weigeren

11/21

Een AI stelt 23 °C voor, de actuele modulemodus is NACHT en het voorstel is tien minuten oud.

GEGEVEN

- contract bevat modus en vervaltijd
- operator ziet bron/tijd/alternatief

GEVRAAGD

- controlepad

OPLOSSING

1. Verifieer identiteit, eenheid, meettijd, voorstel-ID, modelversie, modus en vervaltijd. Een verlopen of verkeerd-modusvoorstel wordt geweigerd vóór activering.
2. De supervisor geeft reden en bewaart het vorige geldige regime. De operator kan alleen binnen eigen bevoegdheid een nieuw voorstel maken; een modelzin verandert geen hardwarelimiet.

3 Toets het pad met netwerkverlies, replay, dubbele ID en herstart. Controleer ook dat een weigering geen lokale regeltaak blokkeert.

ANTWOORD

Dit is een toetsbare architectuurkeuze, geen gecertificeerde veiligheidsfunctie.

UITLEG · 44.12

Privacy volgt doel en gegevens

12/21

Een bladtemperatuur zonder koppeling aan personen is iets anders dan een bewonerslog met aanwezigheid, gezondheid of stemopnamen. Identificeer persoonsgegevens, doel en rechtsgrond. Verzamel alleen wat nodig is, stel bewaartermijnen en toegang vast en informeer betrokkenen. Een nieuw trainingsdoel moet afzonderlijk worden beoordeeld.

Pseudoniemen maken data niet automatisch anoniem: een sleutel of patroon kan koppeling herstellen. Let bij externe verwerking op afspraken, opslag, doorgifte, toegang en de vraag of gegevens opnieuw worden gebruikt. De AVG en de Commissie-uitleg van de gegevensbeginselen blijven naast de AI-verordening gelden. Deze gegevenskeuzen gaan vooraf aan upload of training. Een synthetische dataset kan ontwikkeling helpen, maar geeft geen bewijs van privacy als zij herleidbare voorbeelden reproduceert.

veld	doelgebonden keuze
bewoners-ID	nodig? zo ja, beperkte koppeling
ruwe audio	bewaren alleen met duidelijk doel
sensorreeks	bewaar kwaliteit en versie
toegang	rollen en audit
verwijdering	termijn en uitvoerbaar proces

UITLEG · 44.13

EU AI-verordening: peildatum is deel van het bewijs

13/21

Stand 30-09-2026: de AI-verordening is Verordening (EU) 2024/1689, gewijzigd door Verordening (EU) 2026/1744. De wijziging trad op 27-07-2026 in werking. De Omnibus was een voorstel van 19-11-2025 en kreeg politiek akkoord op 07-05-2026; op deze peildatum is de vastgestelde wijziging dus relevant, niet alleen het oude voorstel.

De algemene toepassingsdatum is 02-08-2026, met uitzonderingen. GPAI- en governancebepalingen begonnen op 02-08-2025; de oorspronkelijke verboden praktijken en AI-geletterdheid op 02-02-2025. Voor de betrokken hoogrisicoregels van Annex III geldt nu 02-12-2027; voor productgebonden hoogrisico-AI onder Annex I 02-08-2028. Zie Europese Commissie: actuele tijdlijn en de geconsolideerde tekst van 27-07-2026, met artikel 113.

regelgroep	toepassing volgens huidige tijdlijn
oorspronkelijke verboden/geletterdheid	02-02-2025
GPAI en governance	02-08-2025
algemene regels/transparantie	02-08-2026, met overgangsbepalingen
hoogrisico Annex III	02-12-2027
hoogrisico productroute Annex I	02-08-2028

In werking en van toepassing zijn verschillende data

Een wet kan al bestaan terwijl specifieke verplichtingen pas later gelden. Bewaar de gebruikte versie en controleer bij een werkelijk inzetbesluit de dan geldende tekst.

UITGEWERKT VOORBEELD · 44.14

De rol bepaalt welke verplichting je onderzoekt

14/21

Een stationsbedrijf gebruikt een taalmodeldienst voor een interne conceptnotitie.

GEGEVEN

- dienstverlener levert model
- station bepaalt zijn eigen gebruik

GEVRAAGD

- rol- en scopeonderzoek

OPLOSSING

1. Onderscheid aanbieder van het algemene model, aanbieder van een concrete AI-toepassing en gebruiksverantwoordelijke. Een gebruiksdoel of belangrijke wijziging kan de rol beïnvloeden.
2. Onderzoek beoogd doel, gebruikers, betrokken personen, outputpublicatie en koppeling aan producten of kritieke veiligheidsfuncties. ‘AI aanwezig’ maakt niet iedere interne notitie automatisch hoogrisico.
3. Bewaar de beoordeling met bronversie en verantwoordelijke. Herhaal haar wanneer doel, functies of doelgroep veranderen.

ANTWOORD

De risicocategorie wordt vanuit de concrete toepassing onderzocht.

UITLEG · 44.15

Transparantie en hoog risico zijn verschillende vragen

15/21

Artikel 50 bevat specifieke transparantieplichten, onder meer rond menselijke interactie met AI en bepaalde synthetische inhoud, met voorwaarden en uitzonderingen. Aanbieders en gebruiksverantwoordelijken hebben verschillende taken. Voor bestaande generatieve systemen van vóór 02-08-2026 kent artikel 111(4) een overgang tot 02-12-2026 voor artikel 50(2). Dat verschuift niet alle transparantieplichten.

Hoog risico hangt onder meer af van artikel 6 en de bijlagen. Een veiligheidscomponent in kritieke infrastructuur of een productroute vraagt ander onderzoek dan een plantinspectievoorstel. De nieuwe tekst van artikel 4 verlangt ondersteunende maatregelen voor AI-geletterdheid, geen garantie op een bepaald individueel kennisniveau. Voor deze les wordt geen automatische juridische kwalificatie of conformiteitsverklaring afgegeven. Bron: AI-verordening, artikelen 4,6,50,111 en 113, gelezen op 30-09-2026. De Commissie-FAQ over artikel 50 licht de verschillende rollen toe.

onderzoek	bewijsstuk
transparantie	interactie, synthetische inhoud en rol
hoog risico	beoogd doel, artikel 6 en bijlage
overgang	exact artikel en plaatsingsdatum
geletterdheid	ondersteunende maatregelen

UITLEG · 44.16

Energieboekhouding houdt training en gebruik apart

16/21

AI gebruikt energie voor training, inferentie, opslag, netwerk en ondersteunende infrastructuur. PUE is totale datacentrumenergie gedeeld door IT-energie; vermenigvuldig een IT-meting daarmee alleen als die infrastructuur nog niet in de meting zit. Deel trainingsenergie over een expliciete levensduur of aantal nuttige uitvoerproducten. Een nieuw trainingsrondje hoort opnieuw in de inventaris.

De IEA, Energy and AI (2025) schat alle datacentrumstroom in 2024 op ongeveer 415 TWh. Dat is geen AI-onlycijfer en geen universeel verbruik per vraag. Model, hardware, uitvoerlengte, batching en systeemgrens verschillen. CO_2-equivalent vraagt daarnaast een passende elektriciteitsmix en hardwarelevenscyclus. Geraadpleegd 30-09-2026.

ALLE TERMEN MET DEZELFDE ENERGIE-EENHEID

$$E_{\text{uitvoer}} = \frac{E_{\text{training}}}{N} + E_{\text{IT}} \cdot \text{PUE} + E_{\text{netwerk}}$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 44.17

Een verondersteld energiebudget

17/21

Training 1200 kWh verdeeld over tien miljoen uitvoerproducten; IT-inferentie 0,020 Wh, PUE=1,2, netwerk 0,006 Wh.

GEGEVEN

- 200 uitvoerproducten per dag
- alle cijfers zijn rekenaannamen

GEVRAAGD

- energie per uitvoer en jaar

OPLOSSING

1. Trainingstoerekening=1200×1000/10000000=0,120 Wh. Inferentie inclusief infrastructuur=0,024 Wh. Totaal=0,150 Wh per uitvoer.

2 200×365×0,150/1000=10,95 kWh/jaar. Hardwareproductie en eventuele nieuwe training zijn nog niet inbegrepen.

3 Een afzonderlijk continu apparaat van 5 W gebruikt 43,8 kWh/jaar. Is het al nodig voor andere taken, kies een verantwoorde toerekening in plaats van dubbel tellen.

ANTWOORD

De boekhouding is controleerbaar; de getallen voorspellen geen specifieke AI-dienst.

UITLEG · 44.18

Een eigen afwegingskader heeft harde grenzen

18/21

Het team beantwoordt vijf vragen: welk doel en alternatief; welk bewijs en welke onzekerheid; welke gevolgen voor personen en installatie; welke data- en rechtsvoorwaarden; welke herstelbare bevoegdheid en eigenaar. Een goedkope oplossing met ontbrekende rechtsgrond of onbeheerste gevaarlijke actie wint niet door een goede totaalscore.

Maak daarna een proportionele vergelijking van nuttigheid, foutkosten, energie en beheerlast. Leg proefcriteria vooraf vast, begin in schaduwmodus en onderhoud een incident- en wijzigingsprocedure. Het vrijwillige NIST AI Risk Management Framework ondersteunt risicobeheer; het is geen vervanging van Europees recht. Deze les gebruikt een eigen stationskader, met concrete toetsbare besluiten.

poort	vereist bewijs
doel	meerwaarde tegen eenvoudig alternatief
data/recht	herkomst, toestemming of andere passende grond, rollen
gevolg	foutscenario en herstel
model	aparte test, regimes en versie
actie	begrenzing, eigenaar en terugval

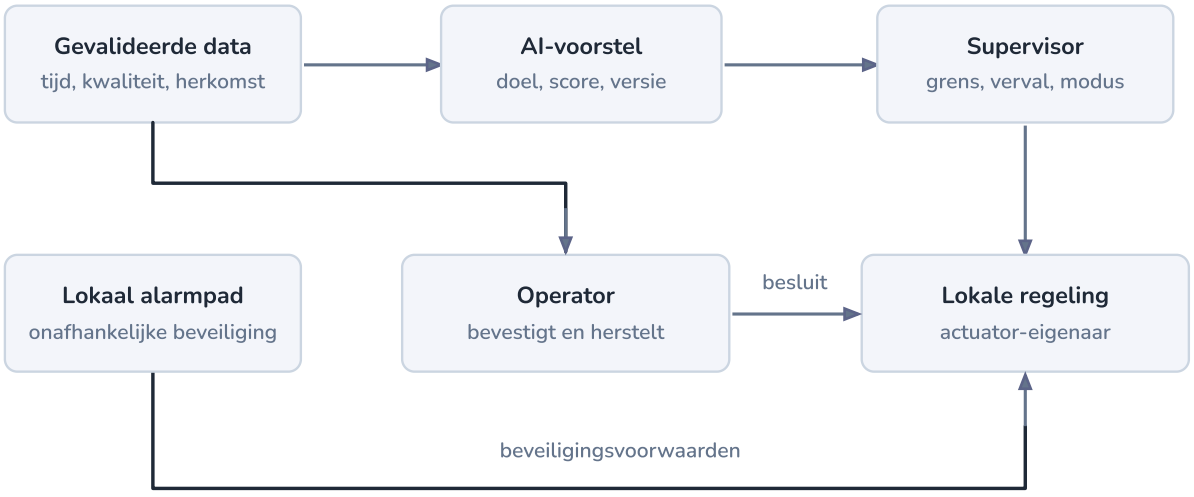
VERHAAL · 44.19

Het station kiest een beperkte eerste inzet

19/21

In een fictieve ontwerpbespreking wil de planner de klimaatregelaar laten vervangen door één generatieve agent. Het team splitst de vraag in taken. Logsamenvattingen kunnen met broncontrole worden gebruikt; energiepredicties worden in schaduwmodus met een basislijn vergeleken. De bestaande lokale regeling en alarmen blijven eigen systeemfuncties.

Het besluit is geen algemene uitspraak dat AI altijd ongeschikt of geschikt is. Het is een onderbouwde bevoegdheid voor een bepaalde versie, taak en proefgebied. Het team noteert welke prestatie later uitbreiding zou kunnen rechtvaardigen en welke gebeurtenis terugkeer naar de basisstrategie verplicht. Zo is ‘verantwoord’ een controleerbare werkwijze in plaats van een geruststellend bijvoeglijk naamwoord.



De AI schrijft voorstellen. De operator kan een besluit aan de lokale eigenaar geven; die past op beide routes zijn eigen grenzen toe. Het onafhankelijke alarmpad kan ingrijpen. Het architectuurvoorstel vraagt nog storingstests en productbeoordeling.

NASLAG · 44.20

Bronnen en beslisbewijs

20/21

bron	waarvoor	status op peildatum
AI-verordening 2024/1689, gewijzigd 2026/1744	recht en toepassingsdata	vastgesteld recht
Commissie AI Act-pagina	implementatietijdlijn	primaire toelichting
AVG 2016/679	persoonsgegevens	afzonderlijk toepasselijk recht
Transformer/DDPM-papers	algoritmisch principe	primaire onderzoeksbronnen
IEA 2025	energiecontext	schatting met eigen grens
NIST AI RMF	risicowerkwijze	vrijwillig kader

HET GEHEEL · 44.21

Het brein krijgt een afgebakende rol

21/21

Het afwegingskader wordt verbonden aan eisen, interfaces en storingstests. Modelversie, dataherkomst en juridische bronversie blijven deel van het dossier.

E41 Van data naar model: regressie
Voorspelfout en toekomstlek.

E42 Classificatie en clustering
Foutkosten en onbalans.

E43 Neurale netwerken
Algoritme en gradiëntcontrole.

E45 Systems engineering en het V-model

E46 Betrouwbaarheid en risico
Faalwijzen en onafhankelijk ingrijpen.

Traceerbare bevoegdheid.

Habitat

Habitat begint met voorstellen en schaduwtests. Uitbreiding van actorrechten vraagt een nieuw meetbaar contract en review van doel, data, risico en geldend recht. De AI kan geen lokale veiligheidseis herschrijven.

SAMENVATTING

In het kort

- Generatieve waarschijnlijkheid is geen feitengarantie.
- Bias en betrouwbaarheid betreffen het hele data- en beslispad.
- Privacy, rol en doel worden vóór verwerking vastgelegd.
- Energie vraagt training, gebruik en expliciete toerekening.
- Recht krijgt een peildatum; bevoegdheid krijgt een eigenaar, toets en terugval.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

generatief model
Een model dat nieuwe uitvoer produceert volgens een geleerd patroon.

hallucinatie
Een plausibel gepresenteerde uitkomst die niet door de relevante feiten wordt gedragen.

bias
Een systematische vertekening in data, model of gebruik.

pseudonimisering
Persoonsgegevens met vervangende identificatoren verwerken, waarbij koppeling via aanvullende informatie mogelijk blijft.

bevoegdheid
De expliciet toegestane handelingen en grenzen van een systeemrol.

E EXPERT · DEEL E10 · SYSTEMS ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 45

Systems engineering en het V-model

Eisen, architectuur en bewijs vormen samen één beheerde systeemversie

Het brein van Habitat verbindt warmte, energie, metingen en operator. Een goede component is nog geen goed geheel. Je maakt eisen meetbaar, verdeelt verantwoordelijkheden en ontwerpt het bewijs waarmee een systeemversie wordt aanvaard.

9× uitleg · 5× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 12 lestijden

D Ontwerpen en maken



Het systeemdoel verbindt eisen, verantwoordelijkheden en proefbewijs.

Na dit hoofdstuk

- Je kan functionele en niet-functionele eisen toetsbaar en traceerbaar formuleren.
- Je kan architectuur en interfacecontracten vanuit eisen afleiden.
- Je kan verificatie en validatie aan het V-model koppelen.
- Je kan trade-offs met harde voorwaarden en gevoeligheidsanalyse uitvoeren.
- Je kan configuraties, wijzigingen en acceptatiebewijzen beheersen.

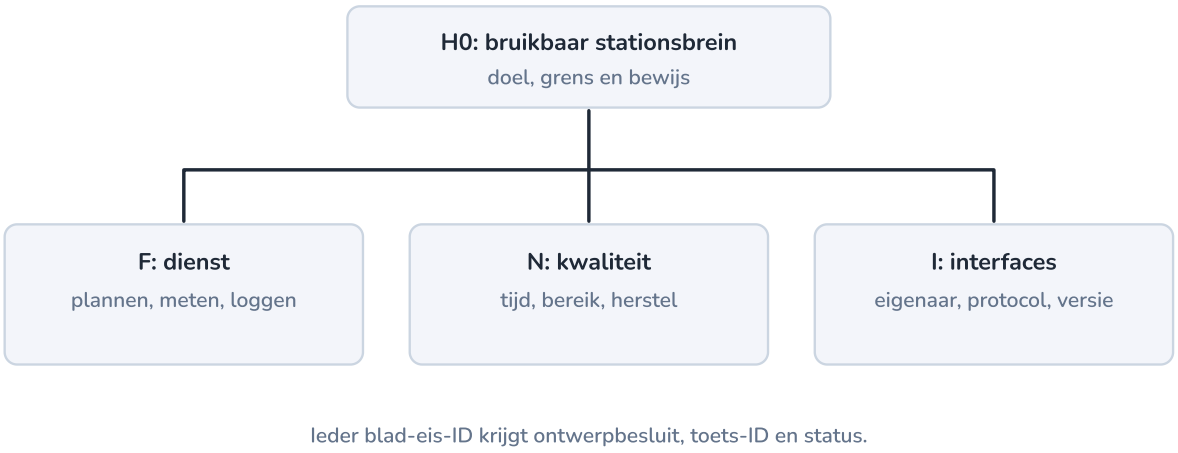
UITLEG · 45.1

Van behoefte naar afgebakend systeem

1/19

Een gebruiker wil een bewoonbaar station met bruikbare plantproductie en weinig operatorwerk. Dat is nog geen eis voor één computer. Kies de systeemgrens: het stationsbrein omvat centrale planning en logging, gekoppeld aan lokale regelaars. De 12 V-module en het 48 V-stationsnet houden eigen actuatoren en energiebalansen.

Leg stakeholders, gebruiksomstandigheden en succescriteria vast. Een operator wil herstelbare storingen; een onderhoudsmedewerker wil versieherkomst; een gebruiker wil het bedoelde comfort. Een architectuur is een antwoord op die behoeften. Begin daarom niet met ‘koop een Pi’ als onbesproken oplossing. Maak aannamen zichtbaar en onderzoek wat bij een grenswijziging mee moet veranderen.



De boom is een voorbeeldstructuur. Een gerealiseerde eis kan meerdere ontwerpmodules en meerdere bewijsstukken nodig hebben.

UITLEG · 45.2

Een eis bevat gedrag, grens en toets

2/19

Een goede eis noemt onderwerp, meetbare prestatie, omstandigheden en acceptatiegrens. ‘Snel en betrouwbaar’ is niet toetsbaar. ‘De centrale logger markeert een telemetriemeting ouder dan 90 s als verouderd, gemeten aan het opgegeven meettijdstip’ heeft wel een concrete betekenis. Leeftijd en klokfout moeten daarbij afzonderlijk worden beheerd.

Houd iedere eis atomair genoeg om één status te kunnen geven. Vermijd een zin die zowel klimaatkwaliteit, energiebesparing als onderhoud regelt. Geef een uniek ID, bron, rationale, eigenaar en toetsmethode. Een gekozen grens is eerst een ontwerp- of proefcriterium; een groen vinkje vraagt daadwerkelijk bewijs op de bedoelde versie.

eisveld	voorbeeld
ID	RN-01
gedrag	markeert verouderde telemetrie
grens	leeftijd >90 s
conditie	meetklok geldig en herkomst bekend
bewijs	grensgevallen en klokfoutinjectie

Een getal maakt een eis niet vanzelf goed

Een reactietijd zonder startgebeurtenis, belasting en meetmethode blijft dubbelzinnig.

UITGEWERKT VOORBEELD · 45.3

Een vage klimaatwens herschrijven

3/19

Wens: ‘Het brein houdt de temperatuur altijd goed en gebruikt weinig stroom.’

GEGEVEN

- gebruiksscenario en lokale regeling bestaan

GEVRAAGD

- scheid toetsbare eisen en aannamen

OPLOSSING

1. Maak comfort een systeemdoel met temperatuurband, buitengebied, bezetting en meetplaats. Zonder dat domein kan ‘altijd’ niet worden beoordeeld.
2. Maak energiebeheer een aparte eis met basislijn en vergelijkbaar proefweer. Maak een interface-eis die vastlegt dat centrale voorstellen door de lokale eigenaar worden begrensd.
3. Voorbeeldcriterium RN-02: bij wegvallen van de centrale verbinding blijft de lokale klimaatlus gedurende een afgesproken proefduur uitvoeren, met gemelde gedegradeerde status. Tijdduur en prestatieband worden vooraf gekozen en daarna getoetst.

ANTWOORD

De wens wordt een set samenhangende eisen; de voorbeelden zijn nog geen behaalde stationseisen.

UITLEG · 45.4

Functioneel en niet-functioneel beïnvloeden elkaar

4/19

Een functionele eis vraagt wat gebeurt: plannen, loggen, alarmeren of een voorstel weigeren. Een niet-functionele eis beschrijft kwaliteit of beperking: tijd, nauwkeurigheid, beschikbaarheid, onderhoud, energie of beveiliging. Beide sturen architectuur. Een logfunctie met onbeperkte blokkerende schrijftijd kan een regelfunctie onbruikbaar maken.

Beschrijf eisen in waarneembare termen. Een percentile-eis voor rekentijd vraagt hardware, bestandsgrootte, belasting, meetduur en uitgesloten onderhoudsfasen. Een deterministische deadline vraagt een andere analyse dan een gemiddeld snelle uitvoering. Beveiligings- en privacyvoorwaarden kunnen harde selectiepoorten zijn.

voorbeeld-ID	soort	toets
RF-01: lever energieplan	functioneel	planstructuur/horizon
RF-02: grens vermogenvoorstel	functioneel/interface	onder-, boven- en niet-eindige waarden
RN-03: voorstel maximaal 60 s geldig	tijdkwaliteit	vervalgrens en toekomstige tijd
RN-04: reproduceer versie	beheerkwaliteit	manifest terugbouwen

UITLEG · 45.5

Traceerbaarheid is tweerichtingsverkeer

5/19

Van iedere behoefte ga je naar systeem- en deeleisen, ontwerpbesluiten en bewijsstukken. Omgekeerd moet een implementatiedetail terug te voeren zijn op een behoefte of gemotiveerde technische keuze. Zo herken je een ontbrekende toets én een onnodige functie.

Een teststatus hoort bij versie, configuratie, testmethode en resultaat. ‘Getest’ zonder identiteit kan een oude interface betreffen. Eén eis kan analyse, inspectie en proef tegelijk nodig hebben. Een unit-test voor een berichtvalidator bewijst geen netwerkbeschikbaarheid of thermische prestatie van het volledige station.

behoefte	eis	ontwerp	bewijs
herstelbaar beheer	RF-03 replay weigeren	boot/ID en verval	T-03 + herstartproef
actuator begrensd	RF-02	lokale eigenaar	T-02 + hardwaretest
bruikbaar klimaat	H-CLIM	model/lus/sensor	dag-nachtvalidatie
reproduceerbaarheid	RN-04	manifest en hashes	rebuild/restore

UITGEWERKT VOORBEELD · 45.6

Een trace die haar grens toont

6/19

RF-02 begrenst het stationsheater-voorstel tot 0–2000 W.

GEGEVEN

- e39 vereenvoudigde stationsheater als contractvoorbeeld

GEVRAAGD

- bewijs en ontbrekend bewijs

OPLOSSING

1. Een unittest toetst −1,0,2000,2001 W en NaN. Daarmee is het softwarebereik aangetoond voor die validatorversie.
2. Een integratietest controleert dat een afgekeurd voorstel niet via een tweede route de lokale eigenaar bereikt. Een hardwareproef controleert de daadwerkelijke vermogensbegrenzing en storingreactie.
3. Een SSR die kortgesloten blijft is geen invoerbereikfout. Daarvoor is een afzonderlijk technisch beveiligingsontwerp en bewijs nodig. De 2000 W betreft het e39-voorbeeld, niet de 800 W-moduleconvector.

ANTWOORD

Traceerbaarheid maakt zichtbaar wat de unittest wel en nog niet bewijst.

UITLEG · 45.7

Architectuur verdeelt eigenaarschap

7/19

De centrale Pi plant en logt; lokale controllers voeren hun eigen snelle regel- en beveiligingsfuncties uit. Energievoorstellen gaan door een expliciete supervisorinterface. De bestaande Mega van de module, luchtknoop en energiecontrollers behouden hun bussen, adressen en pin-eigenaars.

Kies functies, datastromen, grenzen en foutverantwoordelijkheid vóór de fysische bekabeling. Een gedeelde logger mag geen deadline van de lokale regeling opeisen. De twee energienetten wisselen informatie en eventueel expliciet beschreven energie uit; hun verbruiken en bronnen worden niet dubbel geteld. Koppel een storing aan de functie die haar detecteert, begrenst en aan de operator verklaart.

functie	eigenaar	contract
snelle klimaatlus	lokale controller	eigen sensor/actuator
dagplanning	centrale predictor/planner	voorstel met horizon
toestemming	supervisor en lokale eigenaar	rol, tijd, modus, bereik
logging	centrale logger	kwaliteit/versie, niet blokkeren
beveiliging	onafhankelijk ontworpen pad	eigen storingbewijs

UITLEG · 45.8

Interfaces zijn meer dan stekkers

8/19

Een interfacecontract bevat fysische signalen, elektrische niveaus en eenheden, maar ook timing, eigenaarschap, foutstatus en versies. Een MQTT-bericht met temperatuur moet vertellen welke toestand en meetplaats bedoeld zijn. Een leeg meetveld is geen nul graden.

Definieer commando-ID, bron, boot-ID, meettijd, vervaltijd, modus en bevestiging. Een ontvangen bevestiging kan ontvangst of uitvoering betekenen; leg het verschil vast. Bij herstart moet replaybeleid niet vergeten worden: de kleine lesvalidator bewaart alleen een set in RAM en toont dus nog geen volledige herstartbeveiliging. Een productiecontract vraagt boot/sequence, duurzame toestand of een aantoonbaar nieuwe sessie.

onderdeel	voorbeeld
data	temp_C, meettijd, kwaliteit
voorstel	id, rol, modus, vermogen, TTL
antwoord	aanvaard/geweigerd met reden
fout	verlopen, bereik, onbekende versie
fysiek	bus, adres, niveau en actor-eigenaar

CODE · 45.9

Eisen in een echt contractprogramma

De vijf tests refereren aan eis-ID's en toetsen grensgevallen met een expliciete klok. De uitkomst is een voorstelstatus, geen pinactie. Tijd is relatieve monotone tijd; logs krijgen daarnaast UTC+1. Een echt geïntegreerde versie vraagt lokale uitvoering, herstartcontract en fouttests. De canonieke config en SHA-256 identificeren deze configuratie; zij bewijzen geen inhoudelijke juistheid.

Python **eisen_contract.py** 47 regels

```python
from dataclasses import dataclass
import math,unittest,json,hashlib,io
@dataclass(frozen=True)
class Voorstel:
    id: str
    tijd_s: float
    modus: str
    vermogen_W: float
    ttl_s: float=60.
class Supervisor:
    # Contractvoorbeeld voor de e39-stationsheater, geen pinbesturing.
    def __init__(self): self.gezien=set()
    def beoordeel(self,p,nu,modus):
        if not isinstance(p,Voorstel): return False,"schema"
        if not isinstance(p.id,str) or not p.id: return False,"id"
        if not all(not isinstance(v,bool) and isinstance(v,(int,float)) and math.isfinite(v)
                   for v in (p.tijd_s,p.vermogen_W,p.ttl_s,nu)): return False,"niet-eindig"
        if not 0<p.ttl_s<=60: return False,"ttl"
        if not 0<=nu-p.tijd_s<=p.ttl_s: return False,"tijd"
        if p.modus not in ("DAG","NACHT") or p.modus!=modus: return False,"modus"
        if not 0<=p.vermogen_W<=2000: return False,"bereik"
        if p.id in self.gezien: return False,"dubbel"
        self.gezien.add(p.id)
        return True,"voorstel-goedgekeurd"
class Eisen(unittest.TestCase):
    def test_RF02_grenzen(self):
        for w,ok in [(-1,False),(0,True),(2000,True),(2001,False)]:
            self.assertEqual(Supervisor().beoordeel(Voorstel("a",10,"DAG",w),10,"DAG")[0],ok)
    def test_RN03_tijd(self):
        for tijd,ok in [(9,False),(10,True),(70,True),(70.001,False)]:
            self.assertEqual(Supervisor().beoordeel(Voorstel("a",10,"DAG",500),tijd,"DAG")[0],ok)
    def test_RF03_replay(self):
        s=Supervisor(); p=Voorstel("a",10,"DAG",500)
        self.assertTrue(s.beoordeel(p,11,"DAG")[0])
        self.assertEqual(s.beoordeel(p,12,"DAG"),(False,"dubbel"))
    def test_RF04_modus(self):
        self.assertEqual(Supervisor().beoordeel(Voorstel("a",10,"NACHT",500),11,"DAG"),(False,"modus"))
    def test_RF02_niet_eindig(self):
        for v in (float("nan"),float("inf")):
            self.assertFalse(Supervisor().beoordeel(Voorstel("a",10,"DAG",v),11,"DAG")[0])
res=unittest.TextTestRunner(stream=io.StringIO()).run(unittest.defaultTestLoader.loadTestsFromTestCase(Eisen))
print("contracttests",res.testsRun,"fouten",len(res.errors)+len(res.failures))
config={"telemetrie_s":60,"leeftijd_s":90,"voorstel_ttl_s":60,"eigenaar":"lokale-regelaar"}
canon=json.dumps(config,sort_keys=True,separators=(",",":"))
print("config",canon)
print("configsha256",hashlib.sha256(canon.encode()).hexdigest())
assert res.wasSuccessful()
```

```
contracttests 5 fouten 0
config {"eigenaar":"lokale-regelaar","leeftijd_s":90,"telemetrie_s":60,"voorstel_ttl_s":60}
configsha256 a1af993a3928302047806313be9d7061030b8f7358dfd8f0fb42a2f3b0756988
```

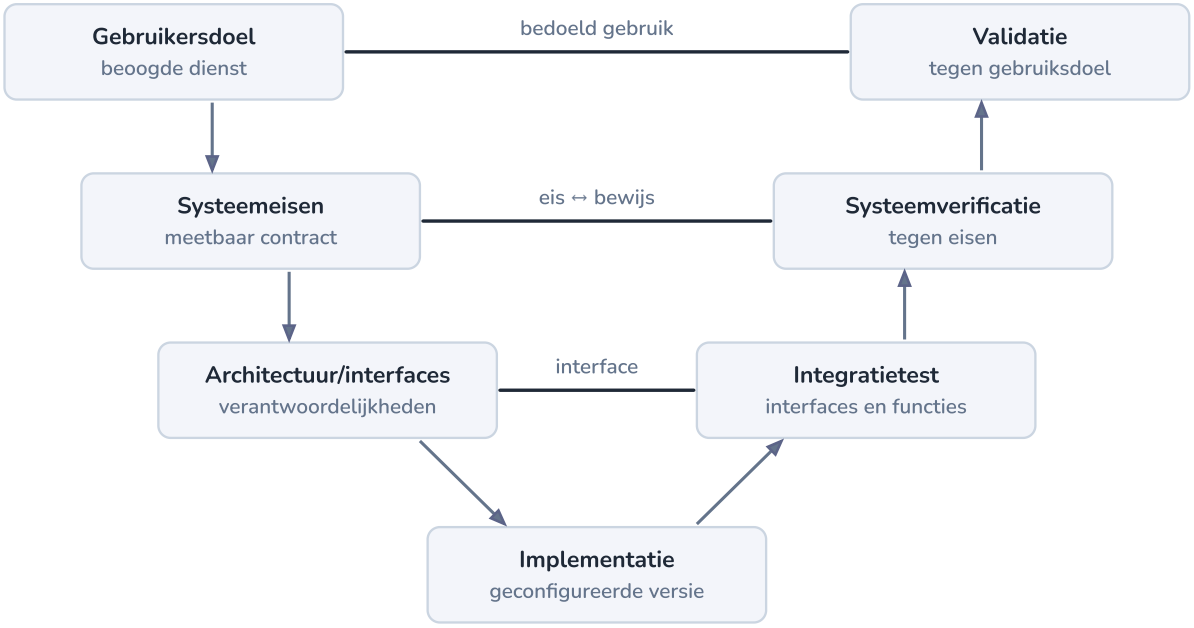
UITLEG · 45.10

Het V-model koppelt ontwerp aan bewijs

10/19

Links specificeer en ontwerp je van gebruikersdoel naar systeem, interfaces en componenten. Onderin realiseer je de onderdelen. Rechts toets je componenten, integreer je interfaces, verifieer je systeemeisen en valideer je het beoogde gebruik. De lijnen over de V verbinden de bronvraag met passend bewijs.

Een testontwerp begint bij het schrijven van de eis. Daardoor kunnen proefopstelling, meetbereik en instrumenten tijdig worden voorzien. Iteratie blijft mogelijk: een integratiefout kan de interface terug naar review sturen. Het model ordent bewijsniveaus en is geen verplicht lineair tijdschema.



Reviews en testontwerp beginnen links, niet pas na implementatie. Iteraties kunnen op ieder niveau teruggaan; de V is geen verbod op iteratief ontwikkelen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 45.11

Verificatie is niet hetzelfde als validatie

11/19

Een planner voldoet exact aan de gespecificeerde temperatuurband, maar de gekozen band past niet bij de onderzochte teelt.

GEGEVEN

- de softwaretoets en sensorproef zijn geslaagd

GEVRAAGD

- welke vraag blijft open?

OPLOSSING

1. Verificatie kan geslaagd zijn: de gespecificeerde band is uitgevoerd. Validatie kan toch falen: de functie ondersteunt het echte teeltdoel onvoldoende.
2. Ga terug naar behoefte en randvoorwaarden, niet alleen naar een softwarebug. Onderzoek teelt, meetplaats en het bedoelde dag/nachtregime met passende referentie.
3. Een eiswijziging krijgt rationale, impactanalyse en nieuwe toetsen. Het oude groene resultaat geldt uitsluitend voor de oude eis/configuratie.

ANTWOORD

Een correct gebouwde functie kan nog de verkeerde functie voor het gebruik zijn.

UITLEG · 45.12

Een trade-off begint met harde voorwaarden

12/19

Vergelijk haalbare alternatieven op dezelfde functie en systeemgrens. Harde voorwaarden zoals lokale actuatorbeheersing worden eerst gecontroleerd. Een alternatief dat daar niet aan voldoet wordt geen winnaar door een goedkope prijs.

Gebruik daarna criteria met een gedocumenteerde schaal en gewichten. Scores zijn beoordelingen, geen nauwkeurige fysische kansen. Vermijd dubbeltellen van hetzelfde voordeel onder meerdere namen. Noteer bronnen, onzekerheid en gevoeligheid. Een robuuste keuze verandert niet bij iedere kleine aannamenwijziging.

alternatief	sterk punt	belangrijk onderzoek
A Pi + lokale MCU	functies verdeeld	interfaces en terugval
B alleen Pi	eenvoudige centrale doos	faalt lokale eigenaarseis
C twee Pi + lokale MCU	centrale reserve	gemeenschappelijke oorzaak, extra beheer

CODE · 45.13

Scores en gevoeligheid uitrekenen

13/19

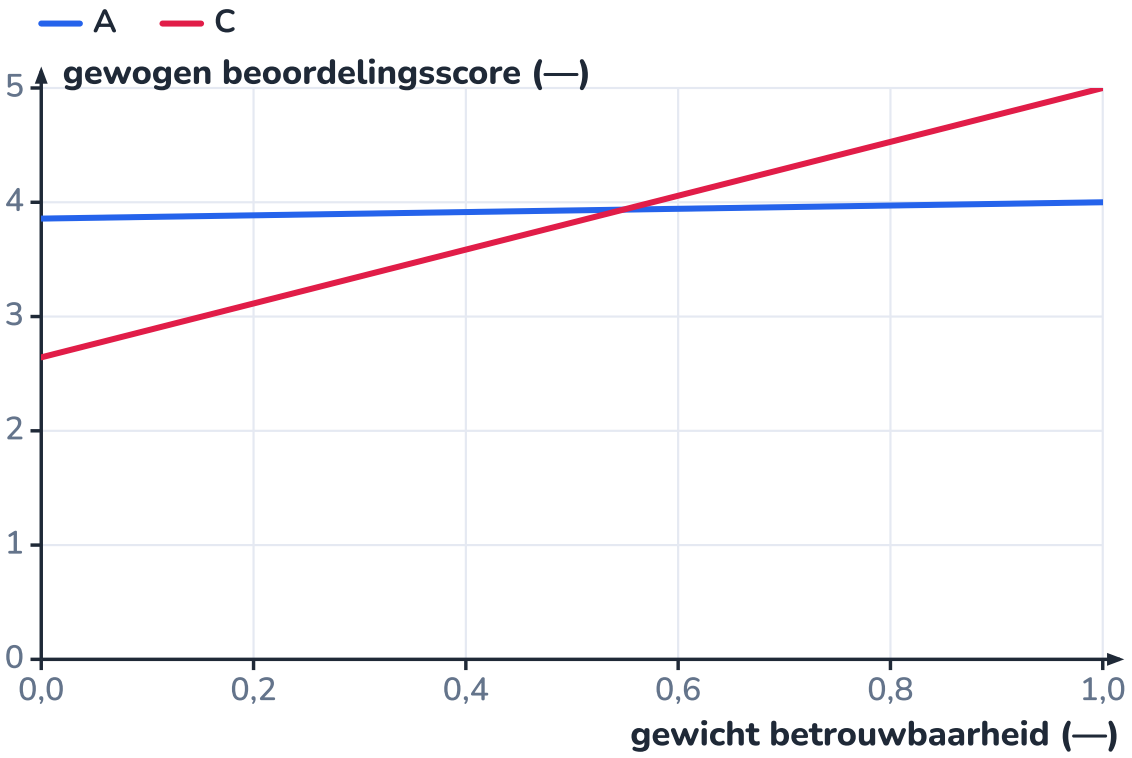
De scores 0–5 zijn expliciete fictieve ontwerpbeoordelingen. B wordt door een harde eis uitgesloten. De gevoeligheidsproef verhoogt alleen het gewicht van betrouwbaarheid en houdt overige verhoudingen vast. Zij toont wanneer een andere prioriteit A en C gelijkwaardig maakt.

Python `architectuur_tradeoff.py` 11 regels

```python
import numpy as np
criteria=["betrouwbaarheid","onderhoud","kosten","energie","reactie"]
w=np.array([.30,.25,.20,.15,.10])
scores=np.array([[4,4,4,4,3],[2,3,5,5,5],[5,3,2,2,4]],float)
namen=["A Pi+lokaleMCU","B alleenPi","C tweePi+lokaleMCU"]
for n,v in zip(namen,scores@w): print(n,"score",round(v,3))
restA=scores[0,1:]@w[1:]/.7
restC=scores[2,1:]@w[1:]/.7
```

```
grens=(restA-restC)/(scores[2,0]-scores[0,0]+restA-restC)
print("A/C gelijk bij gewicht betrouwbaarheid",round(grens,6))
print("B voldoet niet aan harde eis lokale actuator-eigenaar")
```

```
A Pi+lokaleMCU score 3.9
B alleenPi score 3.6
C tweePi+lokaleMCU score 3.35
A/C gelijk bij gewicht betrouwbaarheid 0.548387
B voldoet niet aan harde eis lokale actuator-eigenaar
```



Scores zijn expliciete ontwerpbeoordelingen, geen gemeten betrouwbaarheidskansen. Overige gewichten blijven onderling in dezelfde verhouding.

UITGEWERKT VOORBEELD · 45.14

Een keuze met een breekpunt

14/19

A heeft score 3,90; C 3,35 bij betrouwbaarheidgewicht 0,30.

GEGEVEN

- overige gewichten proportioneel

GEVRAAGD

- besluit en gevoeligheid

OPLOSSING

1. De resterende gewogen gemiddelden zijn A=3,857143 en C=2,642857. Gelijkheid geeft $4r+3{,}857143(1-r)=5r+2{,}642857(1-r)$.
2. Oplossen geeft r=0,548387. Bij r=0,55 wordt C nipt beter volgens deze scores.

3 Onderzoek of zo'n gewichtsverandering werkelijk past bij de gebruiksbehoefte. Extra centrale computers delen mogelijk voeding, software of netwerk; de score 5 is geen bewezen onafhankelijke redundantie.

ANTWOORD

A is de transparante voorbeeldkeuze bij de huidige aannamen, geen universeel hardwareadvies.

UITLEG · 45.15

Configuratiebeheer bewaart het geheel

15/19

Een systeemversie omvat software, firmware, schema, pin/adreslijst, kalibratie, modelparameters, datasets en eisen. Een Git-commit alleen is onvoldoende als de dataset of ingestelde sensorcorrectie buiten het repository verandert. Bewaar een manifest met identifiers, hashes, toolversies en verantwoordelijke.

Een baseline bevriest een samenhangende referentie. Een wijzigingsverzoek beschrijft trigger, betrokken eisen/interfaces, risico, toetsimpact en terugrol. Maak de testomgeving reproduceerbaar en vergelijk werkelijk gebruikte configuratie met het manifest. Een hash toont identiteit; hij zegt niet dat een bestand goed of bevoegd is.

manifestveld	doel
commit/firmware	implementatie
eisen/interfaceversie	betekenis
kalibratie/model	rekenwaarden
dataset en hash	proefherkomst
test-ID/resultaat	bewijs
terugrolbaseline	herstel

UITGEWERKT VOORBEELD · 45.16

Een kleine sensorwijziging heeft systeemimpact

16/19

Een temperatuurprobe krijgt een nieuwe ijkoffset van −0,3 K.

GEGEVEN

- hardwareplaats gelijk
- lokale regeling en centralelog gebruiken de waarde

GEVRAAGD

- wijzigingsroute

OPLOSSING

1 Leg referentiemeting, onzekerheid, datum en kalibratieversie vast. Bepaal welke regel-, alarm- en modeltests door de offset veranderen.

2 Pas precies één aangewezen correctielaag aan: dubbele correctie lokaal én centraal verschuift −0,6 K. Toets ruwe en gecorrigeerde logvelden en interfacebetekenis.

3 Voer relevante acceptatietoetsen opnieuw uit en koppel hun resultaten aan de nieuwe baseline. Bewaar terugrol en controleer wat historische dataherberekening vraagt.

ANTWOORD

Een numeriek kleine wijziging kan alarm- en energiegedrag veranderen.

VERHAAL · 45.17

Systems engineering houdt verschillende experts samen

17/19

Een fictieve review van Habitat vindt geen groot algoritmeprobleem, maar een interfacefout: de planner noemt elektrisch vermogen, terwijl de warmtebalans thermisch vermogen verwacht. Beide teams hebben hun eigen component correct getest. De systeemreview legt een COP- en eenhedencontract vast en verlangt een integratieproef.

Deze manier van werken is ook zichtbaar in het primaire NASA Systems Engineering Handbook: systeemontwerp, productrealisatie en technisch beheer worden met elkaar verbonden. De les past die gedachte op een klein station toe en claimt geen NASA-procescertificering. Geraadpleegd 30-09-2026.

lokale waarheid	systeemvraag
vermogen klopt	welke grens en eenheid?
sensor klopt	tijd, meetplaats en ijking?
softwaretest groen	welke versie en interface?
score hoog	bedoeld gebruik echt geholpen?

NASLAG · 45.18

Het bewijsregister

18/19

bewijssoort	kan aantonen	grens
inspectie	schema/manifest overeenstemming	geen dynamische prestatie
analyse	balans/timing onder aannamen	aannamen toetsen
test	gedrag in proefgebied	geen onbeperkt altijd
demonstratie	bruikbaarheid in scenario	aanvullende meetgrenzen

HET GEHEEL · 45.19

Het stationsbrein wordt een toetsbare versie

19/19

Eisen bepalen hoe algoritmen, lokale controllers en operator samenwerken. De integratieproef gebruikt één samenhangende baseline en houdt beide energienetten herkenbaar.

E35 Objectgericht programmeren en softwareontwerp

Contracten en verantwoordelijkheden.

E37 Embedded systemen en IoT

Tijd, berichten en lokale eigenaar.

E44 AI verantwoord inzetten

Begrensde AI-rol.

E46 Betrouwbaarheid en risico

Storingseisen en onafhankelijkheid.

E48 Technisch communiceren en projectmanagement

Rapport en projectbewijs.

Habitat

Habitat krijgt een eisenboom met unieke ID's, architectuur/interfaces, testmatrix en versiebeheer. Voorbeeldcriteria worden pas behaalde eisen na centrale simulatie- en hardwareproef; er wordt geen veiligheidscertificaat uit de lescode afgeleid.

SAMENVATTING

In het kort

- Behoeften worden meetbare eisen met eigenaar en bewijs.
- Architectuur verdeelt functies en interfaceverantwoordelijkheid.
- Verificatie toetst eisen; validatie toetst bedoeld gebruik.
- Trade-offs vergelijken haalbare opties en tonen gevoeligheid.
- Configuratiebeheer bewaart eisen, realisatie en bewijs als één versie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

functionele eis

Een beschreven dienst of handeling die het systeem moet leveren.

niet-functionele eis

Een kwaliteit, beperking of randvoorwaarde van die dienst.

verificatie

Aantonen dat de gerealiseerde versie aan de gespecificeerde eisen voldoet.

validatie

Aantonen dat het systeem voor het beoogde gebruik geschikt is.

baseline

Een vastgelegde samenhangende versie als referentie voor bouwen en beoordelen.

E EXPERT · DEEL E10 · SYSTEMS ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 46

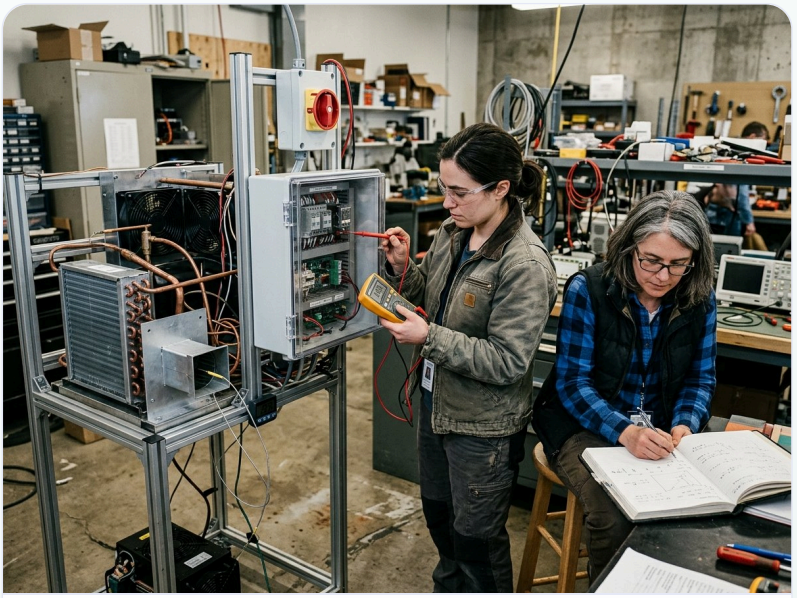
Betrouwbaarheid en risico

Een veilige terugval begint bij faalwijzen, afhankelijkheden en aantoonbaar ingrijpen

Een klimaatregeling kan goed werken en toch kwetsbaar zijn voor een vastgelopen sensor of kortgesloten uitgang. Je analyseert faalwijzen, bouwt een foutenboom en rekent betrouwbaarheid onder expliciete aannamen. Het belangrijkste resultaat is een beheerste storingreactie met bewijs.

10× uitleg · 6× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 1× code · ± 13 lestijden

D Ontwerpen en maken · W Wiskundig modelleren



Een storing wordt gecontroleerd geïnjecteerd en de werkelijke reactie gemeten.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een FMEA van functie naar faalwijze, effect en maatregel maken.
- Je kan een foutenboom en minimale snijverzamelingen afleiden.
- Je kan serie- en parallelbetrouwbaarheid met onafhankelijkheidsvoorwaarden berekenen.
- Je kan MTBF, beschikbaarheid en badkuipcurve onderscheiden.
- Je kan fail-safe gedrag per hazard en modus ontwerpen en toetsen.

UITLEG · 46.1

De functie bepaalt wat falen betekent

1/20

Een stilstaande ventilator kan voor één proef alleen opbrengstverlies betekenen, voor een andere ruimte een luchtgevaar. Begin daarom met functie, systeemgrens, bedrijfsmodus en ongewenst gevolg.

Beschrijf oorzaak, faalwijze en effect apart: kabelbreuk is een oorzaak, ontbrekende meting een faalwijze, verkeerde warmtevraag een mogelijk systeemeffect.

Een storing hoeft niet direct gevaar te veroorzaken als detectie, begrenzing of onafhankelijke beveiliging werkt. Omgekeerd kan een plausibel fout getal gevaarlijker zijn dan een duidelijke lege cel. Analyseer ook onderhoud, opstart, netwerkverlies en stroomherstel. Een functioneel diagram laat afhankelijkheden zien die een lijst losse componenten mist.

niveau	voorbeeld
oorzaak	losse meetkabel
faalwijze	waarde ontbreekt
lokaal effect	regelaar mist feedback
systeemeffect	comfortverlies of ongewenste actie
beheersing	status, terugval en apart beveiligingspad

UITLEG · 46.2

FMEA kijkt vanaf de onderdelen omhoog

2/20

Een Failure Mode and Effects Analysis bespreekt per functie plausibele faalwijzen, oorzaken, lokale en systeemeffecten, detectie, bestaande beheersing en aanvullende actie. Leg eigenaar, bewijs en resterende onzekerheid vast. Het register verandert wanneer ontwerp of proefkennis verandert.

Werk niet alleen met ‘kapot’. Een sensor kan open, kortgesloten, bevroren, verschoven, vertraagd of verkeerd geijkt zijn. Software kan een oude toestand of foutieve eenheid leveren; een actuator kan vast uit én vast aan falen. De primaire NASA GSFC-HDBK-8004 beschrijft FMECA als een levende risicoanalyse. Deze les gebruikt een beperkte stations-FMEA, geen certificeringsrapport.

faalwijze	effect	detectie	maatregel / nog te toetsen
temperatuur ontbreekt/NaN	regeling zonder geldige feedback	schema/bereik/leeftijd	geen nieuwe modelactie; lokale terugvaltest
plausibele waarde bevriest	opwarming blijft onzichtbaar	innovatie en onafhankelijke referentie	stilstaan injecteren; niet alleen bereik
SSR blijft geleiden	warmte ondanks uit-verzoek	stroom/temperatuur tegen commando	onafhankelijk seriepad fysisch testen
lokale controller hangt	laatste uitgang blijft staan	watchdog en onafhankelijke observatie	reset/uitgangstoestand en deadlinetest
netwerkbericht is oud	verkeerd huidig voorstel	meettijd/TTL/boot/sequence	weigeren en lokale modus behouden
gedeelde voeding valt weg	meerdere functies tegelijk weg	voedingsstatus en lokaal alarm	afhankelijkheidskaart; energie-/herstelproef
seriebeveiliging verborgen defect	geen ingreep bij tweede fout	periodieke proof-test	interval en inspectie op hazard baseren

faalwijze	effect	detectie	maatregel / nog te toetsen
bufferprobe heeft bias	nachtreserve verkeerd geschat	ijkreferentie en energieresidu	kalibratieversie en modelvalidatie

UITGEWERKT VOORBEELD · 46.3

Een bevroren sensor door de keten volgen

3/20

De probe blijft 18 °C geven terwijl de module warmer wordt.

GEGEVEN

- waarde binnen bereik
- berichten nog steeds vers

GEVRAAGD

- detectie en resterende afhankelijkheid

OPLOSSING

1. Bereik- en leeftijdtoets slagen, dus detectie alleen daarop is onvoldoende. Vergelijk gemeten verandering met afgegeven warmte, buffer en een onafhankelijke referentie.
2. Een innovatiedetector kan ook op modeltekort reageren. Meld daarom een verdachte meetketen en voer het vooraf getoetste lokale terugvalbeleid uit; kies niet blind één van twee verschillende toestanden.
3. Een onafhankelijke fysieke thermische begrenzing moet haar eigen meet-/schakelpad hebben. Een tweede label in dezelfde code is geen onafhankelijk beveiligingspad.

ANTWOORD

De FMEA maakt de detectiegaten van een plausibele storing zichtbaar.

UITLEG · 46.4

Prioriteitsscores zijn geen kansen

4/20

Teams kunnen ernst S, voorkomen O en detectiemoeilijkheid D met een ordinale schaal rangschikken. Een RPN=S×O×D helpt bespreking, maar de schaalstappen zijn geen echte vermenigvuldigbare fysische kansen. Verschillende combinaties kunnen hetzelfde getal krijgen met heel andere gevolgen.

Een zeer ernstige faalwijze blijft aandacht vragen bij een lage geschatte voorkomen-score. Scores moeten een gedefinieerde context hebben en worden niet omgezet naar FIT of faalkans. Prioriteer ook op hazard, onzekerheid en ontbrekende beheersing. Sluit acties pas na verificatie; een ingeplande maatregel is nog geen gerealiseerde risicoreductie.

voorbeeld	S/O/D	RPN	beoordeling
ernstig maar vroeg gedetecteerd	5/1/1	5	ernst blijft harde aandacht
kleine hinder, moeilijk te vinden	2/3/3	18	hogere RPN maakt haar niet ernstiger
SSR aan blijft verborgen	5/2/4	40	onafhankelijk ingrijpen aantonen

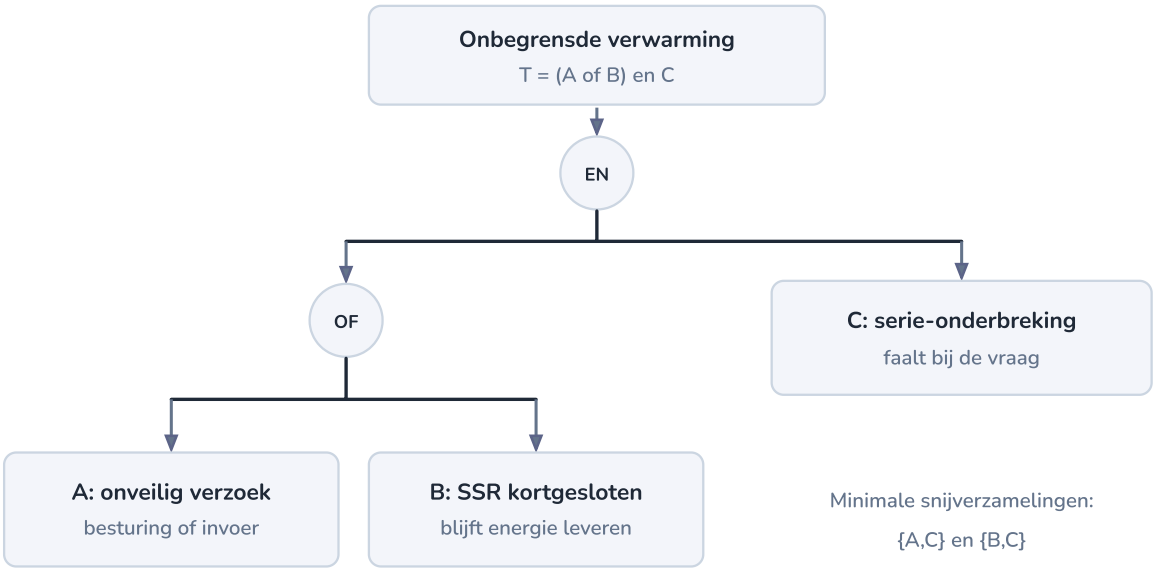
UITLEG · 46.5

Een foutenboom begint bij één topgebeurtenis

5/20

Fault Tree Analysis vraagt welke combinatie van gebeurtenissen een precies omschreven ongewenst gevolg veroorzaakt. Een OF-poort vraagt ten minste één oorzaak; een EN-poort alle verbonden oorzaken. De logica hangt van de fysieke functie af. Definieer ook tijdvenster en bedrijfsmodus.

De figuur gebruikt T=(A OF B) EN C: een onveilig verwarmingsverzoek of kortgesloten SSR wordt pas onbegrensde verwarming als ook het onafhankelijke seriepad faalt. Dit veronderstelt dat het seriepad bij vraag werkelijk warmte kan afschakelen. Een minimale snijverzameling is een kleinste set basisevents die T veroorzaakt: hier {A,C} en {B,C}.



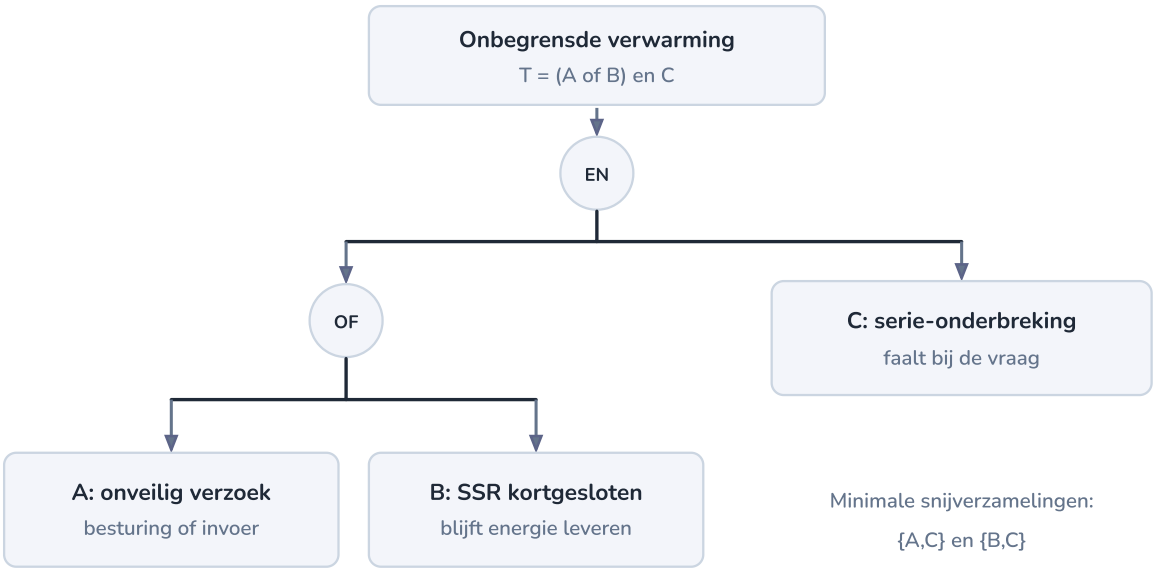
Vereenvoudigd hazardmodel: een onafhankelijke serie-onderbreking moet ook een kortgesloten SSR werkelijk kunnen stoppen. Die fysieke aanname vraagt bewijs.

UITGEWERKT VOORBEELD · 46.6

De foutenboom kwantificeren

6/20

qA=0,002; qB=0,001; qC=0,0005 voor dezelfde modelmissie.



Vereenvoudigd hazardmodel: een onafhankelijke serie-onderbreking moet ook een kortgesloten SSR werkelijk kunnen stoppen. Die fysieke aanname vraagt bewijs.

GEGEVEN

- events onafhankelijk
- alle kansen zijn lesaannamen

GEVRAAGD

- topkans en gedeelde oorzaak

OPLOSSING

1. P(A OF B)=qA+qB−qAqB=0,002998. P(T)=0,002998×0,0005=0,000001499.
2. Een extra gemeenschappelijke oorzaak D die het complete pad faalt, met qD=0,0001 en onafhankelijk van de resterende events, geeft qD+(1−qD)P(T)=0,00010149885.
3. De gedeelde oorzaak domineert. Een correcte OF-formule maakt onjuiste onafhankelijkheid niet correct; de oorzaakkaart vraagt fysisch onderzoek.

ANTWOORD

De berekende getallen vergelijken modellen en zijn geen bewezen hazardkansen van Habitat.

UITLEG · 46.7

Betrouwbaarheid en faalintensiteit verbinden

7/20

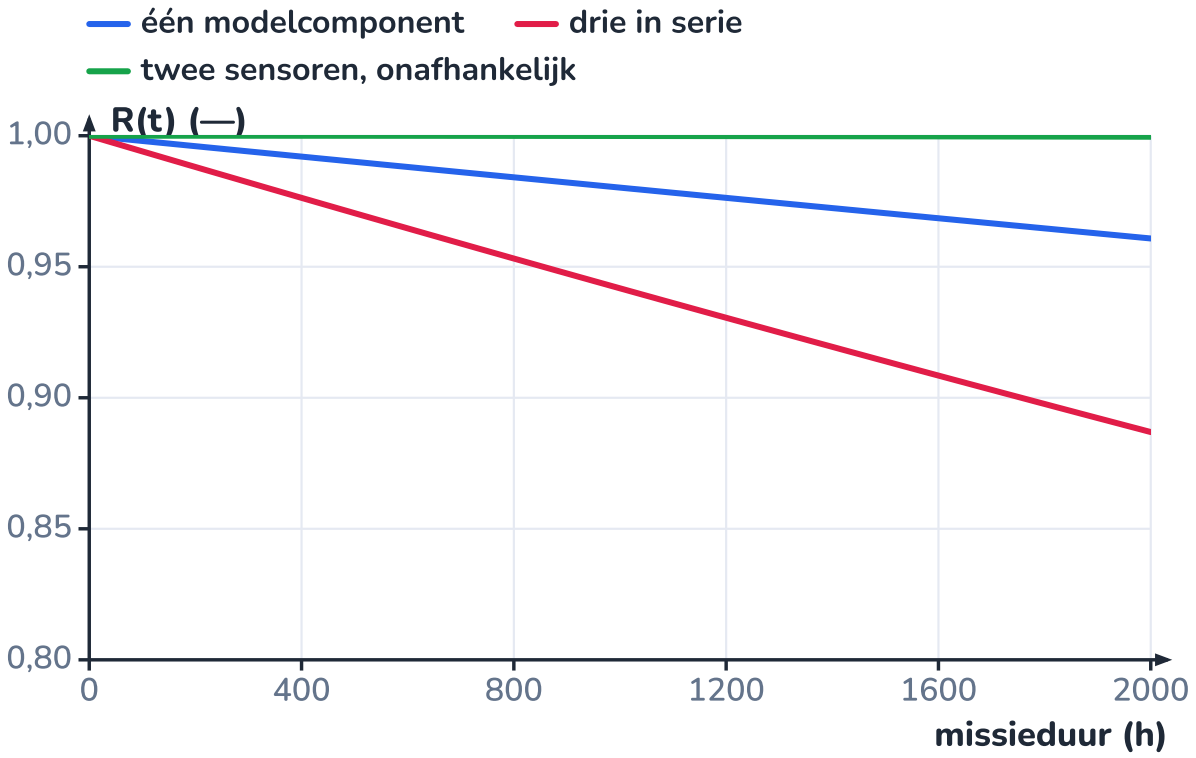
R(t) is de kans dat de functie tot t zonder falen werkt. De hazard h(t) is de onmiddellijke faalintensiteit gegeven overleven tot t. Voor een constante λ geldt $dR/dt = -\lambda R$ en R(0)=1. Oplossen geeft $R(t) = e^{-\lambda t}$. λ heeft bijvoorbeeld eenheid h^{-1} als t in uren wordt gebruikt.

De exponentiële verdeling heeft gemiddelde 1/λ voor tijd tot falen. Bij een herstelbaar constant-rateproces correspondeert dit met MTBF; bij een niet-herstelbare populatie spreek je van MTTF. Geen

van beide zegt dat elk exemplaar precies die tijd meegaat. De populatie, omgeving en faaldefinitie horen bij het getal.

CONSTANTE-HAZARDMODEL

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \mathrm{MTTF} = 1/\lambda$$



Alle λ-waarden zijn lesaannamen in h^{-1}. De berekende lijnen zijn geen gemeten of gecertificeerde betrouwbaarheid van Habitat.

UITGEWERKT VOORBEELD · 46.8

Een grote MTBF is geen missiegarantie

8/20

Model-MTBF=50000 h; de volgende missie duurt 720 h.

GEGEVEN

- constant faalproces

GEVRAAGD

- R en kans op falen

OPLOSSING

1. λ=1/50000=0,000020 h^{-1}. R(720)=exp(−0,0144)=0,985703.
2. Faal-kans=1−R=0,014297, dus circa 1,43%. Een getal van vijftigduizend uur geeft geen 100% kans op een missie van één maand.
3. Of die kans aanvaardbaar is hangt af van het gevolg, herstel en onafhankelijk beveiligingsontwerp. De veronderstelde λ moet nog door passende gegevens worden onderbouwd.

ANTWOORD

MTBF is een modelparameter voor een populatie en proces.

UITLEG · 46.9

Serie vraagt dat ieder vereist deel werkt

9/20

Als alle onderdelen nodig zijn en hun falen onafhankelijk is, geldt $R_s = \prod_i R_i$. Bij exponentiële modellen wordt $R_s = \mathrm{e}^{-t\sum_i \lambda_i}$. Meer vereiste serieonderdelen verlagen zo de missiebetrouwbaarheid, ook wanneer elk onderdeel goed is.

Dit is functionele serie, niet alleen elektrische serie. Controller, sensor, voeding en uitvoerpad kunnen samen een functie vormen. Een extra diagnosefunctie mag in werkelijkheid de bestaande functie niet onverwacht blokkeren. Leg vast welk deel noodzakelijk is en wat bij diens uitval nog bruikbaar blijft.

ALLE DELEN VEREIST, ONAFHANKELIJK

$$R_s(t) = \prod_i R_i(t)$$

UITGEWERKT VOORBEELD · 46.10

Drie onderdelen op dezelfde horizon

10/20

$\lambda 1 = 2\times10^{-5}$, $\lambda 2 = 1\times10^{-5}$ en $\lambda 3 = 3\times10^{-5}$ h^{-1}.

GEGEVEN

- t=720 h
- onafhankelijke serie

GEVRAAGD

- Rcomponent en Rsysteem

OPLOSSING

1. R1=0,985703; R2=0,992826; R3=0,978632.
2. Som $\lambda = 6\times10^{-5}$ h^{-1}. Rserie=exp(−0,0432)=0,957720.
3. De faalkans is circa 4,228%. Controleer of de gedeelde voeding nog een extra serie-element is en of de λ-waarden op dezelfde faaldefinitie zijn gebaseerd.

ANTWOORD

De exacte codeproductie en Monte Carlo gebruiken hetzelfde expliciete kansmodel.

UITLEG · 46.11

Parallel helpt alleen met een bruikbare tweede route

11/20

Als minstens één van n onafhankelijke paden voldoende is, is de totale faalkans het product van alle padfaalkansen. Daarom $R_p = 1 - \prod_i (1 - R_i)$. Voor twee gelijke paden is dit $1 - (1 - R)^2$.

Actieve redundantie verschilt van standby: omschakelen kan falen en reserveonderdelen kunnen verborgen defect zijn. Voeg detectie, schakelpad, voeding en onderhoud toe aan het model. Twee probes die verschillende toestanden meten zijn geen uitwisselbare redundante meting. Ook dezelfde firmware, ADC-referentie of montage kan onafhankelijkheid breken.

MINSTENS ÉÉN VOLDOENDE PAD, ONAFHANKELIJK

$$R_p = 1 - \prod_i (1 - R_i)$$

CODE · 46.12

Betrouwbaarheid exact en met simulatie

12/20

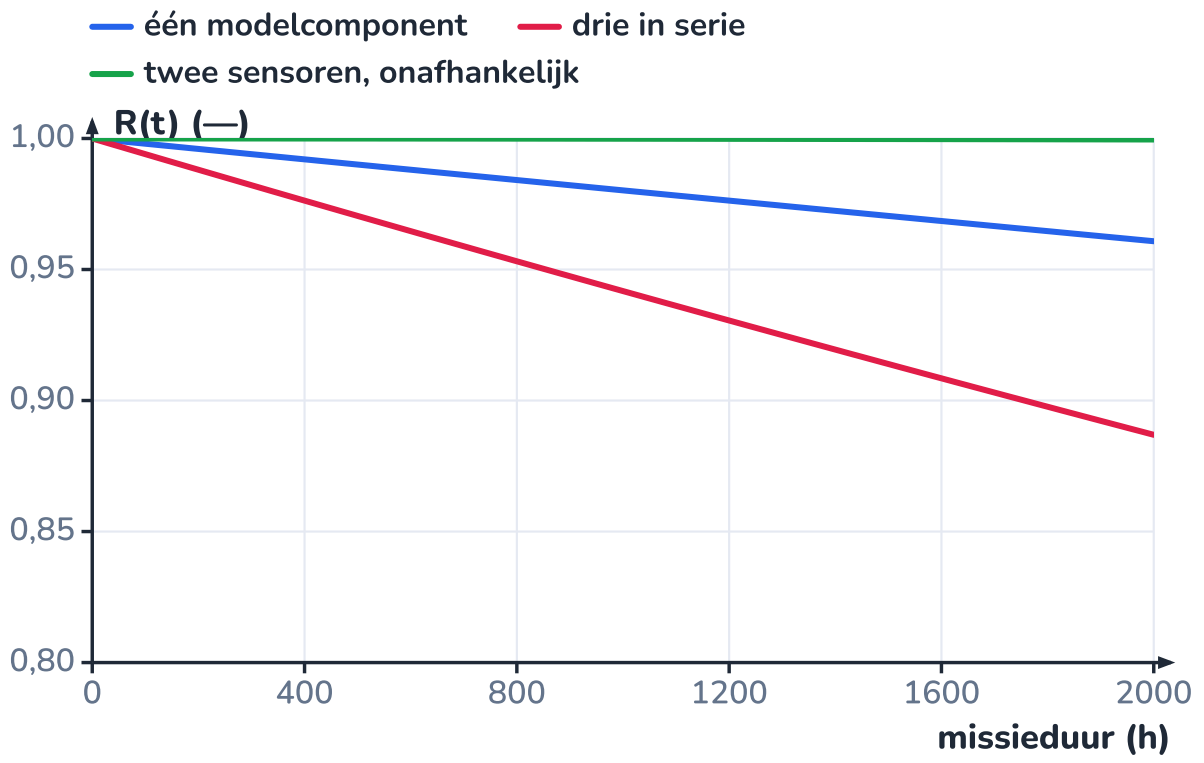
De code rekent de foutenboom ook door alle acht eventcombinaties op te tellen. De Monte Carlo trekt tweehonderdduizend levensduren en controleert de serieformule met een simulatiestandaardfout. Zij controleert wiskunde onder aannamen, geen componentkwaliteit. De 400000 uur en acht storingen zijn fictieve voorbeeldgegevens.

Python **betrouwbaarheid_model.py** 34 regels

```python
import numpy as np
from itertools import product
t=720.
lam=np.array([2e-5,1e-5,3e-5]) # veronderstelde h^-1, geen FIT-data
r=np.exp(-lam*t)
serie=np.prod(r)
sensor=np.exp(-1e-5*t)
parallel=1-(1-sensor)**2
lc=2e-6; li=8e-6
gemeen=np.exp(-lc*t)*(1-(1-np.exp(-li*t))**2)
print("component R",np.round(r,8))
print("serie",round(serie,8),"sensorpaar onafhankelijk",round(parallel,8))
print("sensorpaar gemeenschappelijke oorzaak",round(gemeen,8))
# Foutenboom T=(A of B) en C, drie onafhankelijke basisevents.
q=[.002,.001,.0005]
exact=0.
for a,b,c in product((0,1),repeat=3):
    kans=np.prod([p if e else 1-p for p,e in zip(q,(a,b,c))])
    if (a or b) and c: exact+=kans
qc=.0001
print("foutenboom onafhankelijk",exact,"metgemeen",qc+(1-qc)*exact)
# Monte Carlo controle van het kansmodel, geen componentproef.
rng=np.random.default_rng(46); n=200000
leven=rng.exponential(1/lam,(n,3))
mc=np.mean(np.all(leven>t,axis=1))
se=np.sqrt(mc*(1-mc)/n)
print("MC serie",round(mc,6),"standaardfout",round(se,6))
totale_uren=400000; falen=8
mtbf=totale_uren/falen; mdt=2.
```

```python
print("model MTBF",mtbf,"h beschikbaarheid",mtbf/(mtbf+mdt))
# Nul falen: eenzijdige95%-bovengrens bij constant faalproces.
duur=1000.
lambda95=-np.log(.05)/duur
print("nulfaalproef1000h lambda95",lambda95,"ondergrensMTBF",1/lambda95)
```

```
component R [0.98570318 0.99282586 0.97863161]
serie 0.95771983 sensorpaar onafhankelijk 0.99994853
sensorpaar gemeenschappelijke oorzaak 0.9985281
foutenboom onafhankelijk 1.4990000000000002e-06 metgemeen 0.0001014988501
MC serie 0.957955 standaardfout 0.000449
model MTBF 50000.0 h beschikbaarheid 0.999960001599936
nulfaalproef1000h lambda95 0.0029957322735539907 ondergrensMTBF 333.8082006953341
```



Alle λ-waarden zijn lesaannamen in h^{-1}. De berekende lijnen zijn geen gemeten of gecertificeerde betrouwbaarheid van Habitat.

UITGEWERKT VOORBEELD · 46.13

Een sensorpaar met gedeelde oorzaak

13/20

Totale individuele intensiteit 10^{-5} h^{-1}: gedeelde oorzaak $\lambda c=2\times10^{-6}$, onafhankelijke rest $\lambda i=8\times10^{-6}$.

GEGEVEN

- t=720 h
- gemeenschappelijke event schakelt beide uit

GEVRAAGD

- Rpaar en vergelijking

OPLOSSING

1. Zonder gedeelde oorzaak geeft $1-(1-\exp(-0{,}0072))^2=0{,}9999485$.

2 Met aparte gedeelde schok geldt $R=\exp(-\lambda c t)[1-(1-\exp(-\lambda i t))^2]$, omdat het gedeelde event niet mag optreden en minstens één restpad moet werken.

3 De code geeft R=0,99852810, lager dan het onafhankelijke model. Een kleine gedeelde faalintensiteit kan de winst van twee paden sterk beperken.

ANTWOORD

Een oorzaak moet eenmaal als gedeeld event worden gemodelleerd; anders tel je haar verkeerd of niet.

UITLEG · 46.14

Beschikbaarheid bevat ook hersteltijd

14/20

Een systeem kan gedurende een jaar meerdere keren falen en snel herstellen. Beschikbaarheid vraagt het aandeel tijd bruikbaar, niet de kans op geen enkele storing. In een eenvoudige stationaire afwisseling van bedrijf en uitval geldt $A = \mathrm{MTBF}/(\mathrm{MTBF} + \mathrm{MDT})$, met MDT de gemiddelde totale uitvaltijd.

MDT omvat detectie, wachten, onderdelen, reparatie en herstart. MTTR kan alleen de reparatietijd aanduiden en is dan kleiner. Bij MTBF=50000 h en MDT=2 h volgt A=0,999960. Dat hoge aandeel maakt een zeldzaam ernstig incident niet aanvaardbaar. Ontwerp herstelbaar gedrag én beheerste gevolgen.

EENVOUDIG STATIONAIR HERSTELMODEL

$$A = \frac{\mathrm{MTBF}}{\mathrm{MTBF} + \mathrm{MDT}}$$

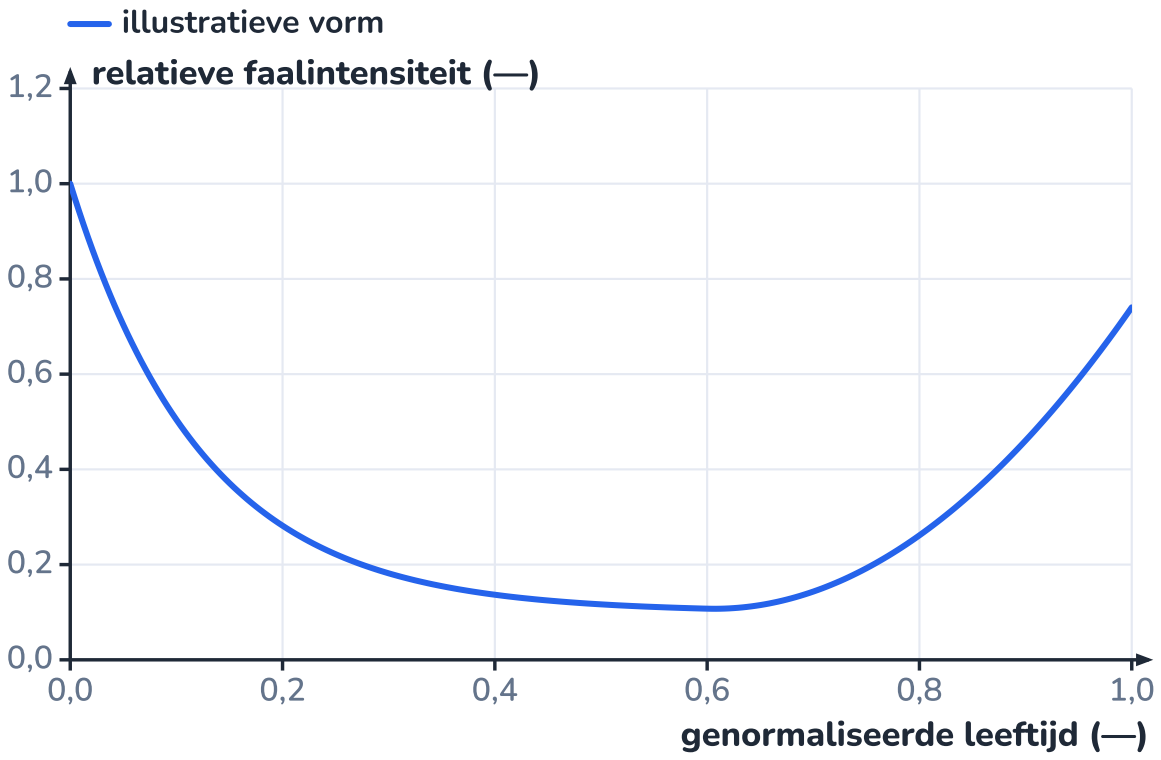
UITLEG · 46.15

De badkuipcurve is een mechanismebeeld

15/20

Een populatie kan vroeg verhoogde intensiteit hebben door fabricage- of montageproblemen, daarna een ongeveer constant gebied en later slijtage. De badkuipcurve vat dat mogelijke patroon samen. Andere producten hebben een andere vorm; softwarebugs slijten bijvoorbeeld niet zoals lagers.

Een constant-rate-MTBF uit de middenfase is niet vanzelf toepasbaar op een oud onderdeel of nieuwe montage. Koppel onderhoud aan mechanismen en proefkennis. Burn-in kan bepaalde vroege defecten vinden, maar bewijst niet dat alle latere hazards beheerst zijn. Primair: NIST badkuipcurve en exponentieel model, geraadpleegd 30-09-2026.



De getekende functie is een vormillustratie, geen leeftijds- of FIT-model. Een werkelijke populatie hoeft deze vorm niet te volgen.

UITGEWERKT VOORBEELD · 46.16

Nul storingen is beperkt bewijs

16/20

Een proef draait 1000 apparaat-uren zonder storing.

GEGEVEN

- constant Poisson-faalproces
- eenzijdige 95%-grens

GEVRAAGD

- bovengrens λ en ondergrens model-MTBF

OPLOSSING

1. Kans op nul events is $\exp(-\lambda T)$. Voor de grens geldt $\exp(-\lambda_{95} T)=0{,}05$, dus $\lambda_{95}=-\ln(0{,}05)/1000=0{,}00299573\ h^{-1}$.
2. De bijbehorende ondergrens voor $1/\lambda$ is slechts 333,808 h. Nul storingen gedurende 1000 h bewijst dus geen MTBF van honderdduizend uur.
3. De berekening veronderstelt hetzelfde faalproces en omgeving. Zij bewijst geen afwezigheid van verborgen gevaarlijke faalwijzen.

ANTWOORD

Bewijssterkte vraagt blootstelling, model en onzekerheidsgrens.

UITLEG · 46.17

Fail-safe is gekoppeld aan een hazard

17/20

Alles uitschakelen is geen universeel veilige toestand. Verwarming uit kan oververhitting voorkomen maar vorstschade vergroten. Ventilatie uit kan een luchtprobleem verergeren. Kies per hazard, modus en tijdschaal welke lokale reactie risico beheerst, met voldoende voeding en detectie.

Voor een kortgesloten heater-SSR moet het onafhankelijke seriepad fysisch energie kunnen onderbreken. Een software-uitcommando aan dezelfde SSR helpt dan niet. Voor netwerkverlies behoudt de lokale klimaatlus een geteste beperkte modus. Een watchdog helpt alleen als reset en opstartuitgangen aantoonbaar passend zijn. De concrete beveiliging vraagt componentselectie en toepasselijke productnormen; lescode is geen gecertificeerde noodstop.

fout	passende ontwerpvraag
SSR vast aan	ander fysisch onderbrekingspad
sensor ongeldig	begrensde lokale terugval
centrale verbinding weg	lokale eigenaar blijft werken
voeding weg	welke alarm/ventilatiefunctie blijft nodig?
herstart	veilige uitgang en gecontroleerde vrijgave

VERHAAL · 46.18

De storingproef sluit de analysekring

18/20

Een fictieve klimaatproef begint met lage vermogens en een afgebakende veilige opstelling. Het team injecteert ontbrekende en bevroren metingen, oude berichten en netwerkverlies. Het meet detectietijd, feitelijke uitgang, alarm, operatoractie en herstel. Een hardwareschakelfout wordt alleen met een geschikte gecontroleerde testopstelling onderzocht.

Elke proef verwijst naar faalwijze, eis, configuratie en bewijs. Afwijkingen veranderen FMEA, foutenboom of ontwerp. Test niet alleen dat een alarmtekst verschijnt: controleer dat de bedoelde fysieke functie reageert. De FMEA blijft zo een werkdocument voor ontwerp en onderhoud in plaats van een eenmaal ingevuld formulier.

bewijsveld	inhoud
trigger	exacte fout en injectietijd
detectie	tijd en status
effect	gemeten uitgang/temperatuur
herstel	voorwaarde en operator
versie	hardware, software, kalibratie

NASLAG · 46.19

Aannamen vóór kansrekenen

19/20

functionele serie en parallel

$$R_s = \prod R_i, \quad R_p = 1 - \prod (1 - R_i)$$

symbool	betekenis	eenheid
R_i	betrouwbaarheid bij dezelfde duur	—

voorwaarde	controle
zelfde horizon	geen jaar- en uurkansen mengen
passend model	hazard/leeftijd/omgeving
onafhankelijkheid	voeding, software, meetketen
functie	welk aantal paden voldoende?
inputbewijs	data, bron en onzekerheid

HET GEHEEL · 46.20

Risicoanalyse schrijft storingseisen

20/20

FMEA en foutenboom vinden welke interfaces, tests en onderhoudspaden de systeemversie nodig heeft. Probabilistische voorbeelden helpen redeneren; fysieke risico's vragen passend ontwerp en bewijs.

E37 Embedded systemen en IoT
Tijd, replay en lokaal gedrag.

E39 PID-regeling
Regeling en actuatorbegrenzing.

E40 Sensorfusie en schatten
Plausibele sensorfouten.

E45 Systems engineering en het V-model
Eis en bewijs-ID.

E48 Technisch communiceren en projectmanagement
Risico en open bewijs helder rapporteren.

Habitat

Habitat krijgt een klimaat-FMEA en oorzaakkaart. Alle λ/q-waarden in deze les zijn fictieve rekenwaarden. Geen FIT, SIL, veiligheidsniveau of bewezen beschikbaarheid wordt aan de werkelijke installatie toegekend.

SAMENVATTING

In het kort

- Faalwijze, oorzaak en effect zijn verschillende vragen.
- FMEA kijkt omhoog; foutenbomen combineren oorzaken van één topgebeurtenis.

- Serie/parallelkansen vragen functie, duur en onafhankelijkheid.
- MTBF, beschikbaarheid en veilige gevolgen zijn verschillende eigenschappen.
- Fail-safe gedrag wordt per hazard ontworpen en fysisch getoetst.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

betrouwbaarheid
Kans op de afgesproken functie zonder falen gedurende een opgegeven duur en omstandigheden.

faalwijze
De manier waarop een functie of component haar vereiste gedrag niet levert.

gemeenschappelijke oorzaak
Een oorzaak die meerdere ogenschijnlijk redundante paden tegelijk kan treffen.

MTBF
Gemiddelde bedrijfstijd tussen storingen in een passend model voor een herstelbaar systeem.

fail-safe
Zo ontworpen reageren op een beschreven fout dat het betreffende risico wordt beheerst.

E EXPERT · DEEL E10 · SYSTEMS ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 47

Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

Van een duidelijke dienst en inventaris naar een onderbouwde milieukeuze

Een station met zonnepanelen is niet automatisch milieuvriendelijk. Productie, levensduur, energiegebruik en vervanging kunnen de conclusie veranderen. Je bouwt een reproduceerbare levenscyclusanalyse, vergelijkt eerlijke systeemgrenzen en laat zien welke onbekende het ontwerpbesluit nog kan omkeren.

9× uitleg | 7× uitgewerkt voorbeeld | 1× naslag | 1× verhaal | 1× het geheel | 1× code | ± 14 lestijden

D Ontwerpen en maken | E Energie | M Materie en chemie



Een milieuclaim begint bij onderdelen, functies en controleerbare gegevens.

Na dit hoofdstuk

- Je kan doel, functionele eenheid, inventaris, impactberekening en interpretatie van een LCA uitwerken.
- Je kan CO_2-equivalenten met een gekozen tijdshorizon berekenen.
- Je kan energieterugverdientijd afleiden met benutting en degradatie.
- Je kan herstel, hergebruik en recycling met expliciete allocatie vergelijken.
- Je kan een stationskeuze onderbouwen met scenario's, gevoeligheid en open bewijs.

UITLEG · 47.1

Welke vraag moet de analyse beantwoorden?

1/20

Een LCA (Life Cycle Assessment) volgt relevante materiaal- en energiestromen en vertaalt ze naar milieu-impact. Begin met de beslissing: welk onderdeel of welke systeemvariant wordt gekozen, door

wie en onder welke prestaties? ‘Welke batterij is groener?’ is te vaag. Vraag bijvoorbeeld welke oplossing gedurende twintig jaar hetzelfde gevalideerde nachtprofiel levert bij dezelfde toegestane uitval en eindcapaciteit.

De vier samenhangende fasen zijn doel en reikwijdte, levenscyclusinventaris, impactbeoordeling en interpretatie. Nieuwe informatie kan je terugsturen naar een eerdere fase. Het JRC ILCD-handboek geeft methodische richtlijnen voor consistente analyses. In deze les is de hele-stationsrekening een screening met zichtbare aannamen; ontbrekende productgegevens blijven ontbrekend.

fase	controleerbare uitkomst
doel/reikwijdte	vraag, doelgroep, dienst, grens, methode
inventaris	hoeveelheden, bronnen, vervanging, verliezen
impact	gekozen categorieën en karakterisatiefactoren
interpretatie	hotspots, robuustheid, beperkingen, besluit

UITLEG · 47.2

De functionele eenheid voorkomt een oneerlijke wedstrijd

2/20

Een productgewicht is vaak geen dienst. Twee accu's van 10 kg kunnen verschillende bruikbare energie, cyclische levensduur en rendement hebben. Een passende functionele eenheid kan ‘1 kWh wisselstroom aan de vereiste belasting geleverd gedurende het beschreven twintigjarige profiel’ zijn. De referentiestroom omvat alle pakketten, omvormers en vervangingen die daarvoor nodig zijn.

Voor LCA-S1 nemen we één gemiddeld stationsjaar van een benoemde referentieconfiguratie op een horizon van twintig jaar. Station en één klimaatmodule staan samen binnen de grens. De projectdienst wordt beschreven door hetzelfde woon-, klimaat-, water- en teeltprofiel en dezelfde acceptatie-eisen. Die prestaties zijn voorwaarden voor vergelijken, geen gevolg van het LCA-getal. Zolang het energieprofiel, de werkelijke materiaalstaat en stationbatterij niet vastgesteld zijn, is S1 alleen een reproduceerbaar screeningscenario en geen definitieve milieuverklaring van Habitat.

dienstvoorwaarde	bewijs vóór vergelijken
energie/autonomie	hetzelfde belastingprofiel en eindcapaciteit
klimaat/water/teelt	dezelfde functionele acceptatie-eisen
duur	twintigjarige referentiehorizon
configuratie	onderdelen en randapparatuur volledig

UITGEWERKT VOORBEELD · 47.3

Vergelijk een geleverde dienst, geen nominale capaciteit

3/20

Twee opslagvarianten moeten ieder 10000 kWh bruikbare energie leveren. Alleen de aangegeven productie en laadverliezen vallen in dit beperkte voorbeeld.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- A: productie 500 kg CO_2-eq, rendement 0,95
- B: productie 400 kg CO_2-eq, rendement 0,80
- Laadstroom: 0,15 kg CO_2-eq/kWh

- Impact per geleverde kWh en het omslagpunt van de laadfactor

OPLOSSING

1. A heeft 10000(1/0,95−1)=526,316 kWh extra laadenergie; B 2500 kWh.
2. A: 500+78,947=578,947 kg; B: 400+375=775 kg. Deel door dezelfde 10000 kWh.
3. Gelijkheid: 100=(2500−526,316)g; dus g=0,050667 kg CO_2-eq/kWh.

ANTWOORD

A: 0,057895 en B: 0,077500 kg CO_2-eq per geleverde kWh. Bij een laadfactor onder 0,050667 wint B binnen deze beperkte grens.

Klopt dit? Bij g=0 wint de lagere productiepost van B. Controleer vóór een ontwerpkeuze ook levensduur, omvormer, veiligheid, prestaties en eindprocessen.

UITLEG · 47.4

CO_2-equivalent is een methodekeuze

4/20

Een inventaris kan emissies van CO_2, methaan en lachgas bevatten. Voor klimaatimpact vermenigvuldig je elke massa met een karakterisatiefactor en tel je de bijdragen op: $C=\Sigma\, m_i \cdot GWP_i$. De factor is geen chemische massaomrekening. GWP100 integreert een klimaatrespons over honderd jaar ten opzichte van CO_2; een andere horizon of methode kan een andere verhouding geven.

Voor het oefenvoorbeeld gebruiken we IPCC AR6, hoofdstuk 7, tabel 7.15: CO_2 1, fossiel CH_4 29,8 en N_2O 273 voor GWP100. Maak het methaantype expliciet: fossiel en niet-fossiel hebben in deze tabel verschillende factoren. De factoren hebben onzekerheid; de getoonde afgeronde centrale waarden zijn geen exacte natuurconstanten. Een productverklaring met een andere methode mag je niet stilzwijgend optellen.

GWP100-KARAKTERISATIE

$$C = \sum_i m_i \, \mathrm{GWP}_{i,100}$$

Massa in kg; factor in kg CO_2-eq/kg emissie; uitkomst in kg CO_2-eq.

UITGEWERKT VOORBEELD · 47.5

Drie emissies in één klimaatindicator

5/20

Een proces stoot 100 kg CO_2, 2 kg fossiel CH_4 en 0,1 kg N_2O uit.

GEGEVEN

- GWP100: 1; 29,8; 273

GEVRAAGD

- De klimaatbijdrage volgens deze methode

OPLOSSING

1. CO_2: 100×1=100 kg CO_2-eq.
2. Methaan: 2×29,8=59,6 kg CO_2-eq. Lachgas: 0,1×273=27,3 kg CO_2-eq.
3. Som: 100+59,6+27,3=186,9 kg CO_2-eq.

ANTWOORD

186,9 kg CO_2-eq (IPCC AR6 GWP100).

Klopt dit? De oorspronkelijke emissiemassa is 102,1 kg. Dat is een andere grootheid; CO_2-eq is een impactindicator.

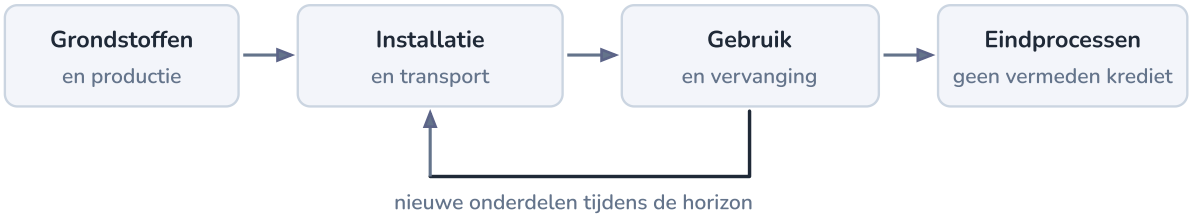
UITLEG · 47.6

Een grens sluit dubbele telling uit

6/20

Wieg tot poort stopt bij productie; wieg tot graf bevat ook gebruik en eindprocessen. Zet transport, onderhoud, batterijvervanging en elektriciteitsverliezen expliciet binnen of buiten de grens. Het hele station bevat de klimaatmodule: haar panelen, batterijen en gebruiksenergie mogen niet nogmaals als een losse jaarlijkse module-impact worden toegevoegd.

I38 berekende ongeveer 164 kg CO_2-eq per modulejaar met jaarlijkse spreiding van productie en eigen gebruiksallocaties. Dat is geen eenmalige productiepost. E47 hergebruikt afzonderlijke moduleonderdelen in een nieuwe twintigjarige inventaris en neemt globale netimport als één gebruikspost. De 1,4 kWp module-PV en 4,2 kWp extra station-PV blijven twee rijen. De modulebatterij is exact 2×12,8 V×120 Ah=3,072 kWh nominaal; de 48 V-stationcapaciteit B blijft open.



Binnen de grens: station én module; ieder onderdeel eenmaal.

Netimport omvat alle gebruiksfuncties; lokale opwek krijgt geen dubbel krediet.

Schematische procesgrens van LCA-S1. Recycling wordt met de gekozen cut-offregels verwerkt; een tweede analyse mag andere allocatie kiezen, mits zichtbaar en consistent.

UITGEWERKT VOORBEELD · 47.7

Vervanging aan de rand van de horizon

7/20

Een pakket gaat onder de veronderstelde dienst exact acht jaar mee. De analyse omvat het interval [0,20 jaar).

GEGEVEN

- Productie: 307,2 kg CO_2-eq per pakket
- Geen resterende-waardekrediet bij jaar 20

GEVRAAGD

- Aantal pakketten en jaarlijkse bijdrage binnen de gekozen grens

OPLOSSING

1. Installaties op jaar 0, 8 en 16 vallen binnen de horizon: n=ceil(20/8)=3. Een vervanging op precies jaar 20 zou buiten de grens vallen.
2. Productie in twintig jaar: 3×307,2=921,6 kg CO_2-eq. Gemiddeld: 921,6/20=46,08 kg/jaar.
3. Langetermijnallocatie geeft 307,2/8=38,4 kg/jaar. Dat verdeelt elk pakket over zijn volledige levensduur en is een andere grens.

ANTWOORD

46,08 kg CO_2-eq per gemiddeld projectjaar, met de expliciete cut-off op jaar 20.

Klopt dit? De laatste batterij heeft nog vier verwachte dienstjaren over. Een alternatief met restwaarde moet ook voor alle andere onderdelen consequent worden toegepast.

UITLEG · 47.8

Inventaris S1: gegevens hebben een status

8/20

Onderstaande factoren zijn rekenwaarden voor onderwijs, geen nieuwe productverklaringen. De moduleposten sluiten aan bij de afgeronde aannamen van i38, met de exacte nominale batterijcapaciteit. De extra stationschilmassa's, wind-, installatie- en waterstofbundels zijn expliciete screeningaannamen. Ze canoniseren geen materiaallijst, fabrikant, capaciteit of batterijlevensduur van Habitat.

De tabel telt productie van nieuwe en vervangende pakketten. Voor S1 is B=10 kWh uitsluitend een demonstratiepunt. De algemene formule en figuur behouden B als parameter. Voor een beslisbare hele-station-LCA vervang je elke bundel door een gecontroleerde onderdelenlijst, herkomst, relevante productverklaring en aangetoonde dienstduur. Controleer de dekking: fundering, omvormers, kabels, waterinstallatie, transport en eindprocessen mogen niet verdwijnen doordat ze slecht bekend zijn.

post	hoeveelheid / pakket	factor (kg CO_2-eq/eenheid)	leven (jaar)	pakketten / 20 jaar	impact (kg CO_2-eq)
stationschil: hout	1200,000 kg	0,26	30	1	312,0
stationschil: staal	300,000 kg	2,50	30	1	750,0
stationschil: beton	2000,000 kg	0,12	30	1	240,0
stationschil: isolatie	150,000 kg	3,00	30	1	450,0
modulegebouw	1,000 pakket	650,00	30	1	650,0
module rek/water/pomp	1,000 pakket	110,00	15	2	220,0
PV module	1,400 kWp	600,00	25	1	840,0
PV extra station	4,200 kWp	600,00	25	1	2520,0
modulebatterij	3,072 kWh	100,00	8	3	921,6

post	hoeveelheid / pakket	factor (kg CO_2-eq/eenheid)	leven (jaar)	pakketten / 20 jaar	impact (kg CO_2-eq)
modulelampen	2,000 stuk	50,00	8	3	300,0
module-elektronica	1,000 pakket	60,00	10	2	120,0
windinstallatie	1,000 pakket	650,00	20	1	650,0
warmtepomp/installaties	1,000 pakket	800,00	15	2	1600,0
waterstofketen	1,000 pakket	1000,00	10	2	2000,0
extra centrale elektronica	1,000 pakket	150,00	10	2	300,0
48 V-stationbatterij (scenario)	10,000 kWh	100,00	10	2	2000,0

CODE · 47.9

Een hele-stationsrekening die je opnieuw kunt draaien

9/20

Het programma rekent alle inventarisrijen, vervangingen, gebruiksposten en gevoeligheden opnieuw. Getallen in de uitvoer volgen de Pythonnotatie; de tekst gebruikt een decimale komma. Alle aanvullende invoer is zichtbaar in de bron. De netimport 200 kWh/jaar is een scenario-invoer voor het hele station inclusief module; tel de eerdere 130 en 100 kWh moduleallocaties hier niet nog eens bij op.

Transport 300 kg, eindprocessen 500 kg, verbruiksgoederen 30 kg/jaar en overige gebruiksemissies 15 kg/jaar zijn expliciete open screeningposten. De laatste post legt geen koudemiddeltype of lekpercentage vast. Er is geen exportkrediet, geen negatieve koolstofopslagpost en geen recyclingkrediet. De code bewaakt eindige niet-negatieve parameters en controleert de vervangingsgrens.

Python `lca_station_s1.py` 89 regels

```python
import math
import numpy as np

H = 20.0  # horizon jaar; scenario LCA-S1, geen gemeten stationinventaris
# (naam, hoeveelheid, eenheid, kg CO2-eq per eenheid, levensduur jaar)
# De eerste groep zijn expliciete aanvullende screeningaannamen.
vast = [
    ("stationschil: hout",1200,"kg",.26,30),
    ("stationschil: staal",300,"kg",2.5,30),
    ("stationschil: beton",2000,"kg",.12,30),
    ("stationschil: isolatie",150,"kg",3.,30),
    ("modulegebouw",1,"pakket",650.,30),
    ("module rek/water/pomp",1,"pakket",110.,15),
    ("PV module",1.4,"kWp",600.,25),
    ("PV extra station",4.2,"kWp",600.,25),
    ("modulebatterij",2*12.8*120/1000,"kWh",100.,8),
    ("modulelampen",2,"stuk",50.,8),
    ("module-elektronica",1,"pakket",60.,10),
    ("windinstallatie",1,"pakket",650.,20),
    ("warmtepomp/installaties",1,"pakket",800.,15),
    ("waterstofketen",1,"pakket",1000.,10),
    ("extra centrale elektronica",1,"pakket",150.,10),
]

def positief(x,naam,nul=True):
```

```
    if isinstance(x,bool) or not math.isfinite(x) or x<0 or (not nul and x==0):
        raise ValueError(naam)
    return float(x)

def lca(B_kWh,import_kWh_jaar=200.,netfactor=.15,
        batterij_factor=100.,station_batterij_leven=10.,pv_factor=600.):
    # B is de nog te kiezen 48 V-stationcapaciteit. B=10 is alleen S1.
    for naam,x in [("B",B_kWh),("import",import_kWh_jaar),
                   ("netfactor",netfactor),("batterijfactor",batterij_factor),
                   ("PV-factor",pv_factor)]: positief(x,naam)
    positief(station_batterij_leven,"batterijleven",False)
    rijen=[]
    for naam,q,u,f,leven in vast:
        if naam.startswith("PV "): f=pv_factor
        if naam=="modulebatterij": f=batterij_factor
        aantal=math.ceil(H/leven) # eerste pakket plus vervanging vóór einde horizon
        rijen.append((naam,q,u,f,leven,aantal,q*f*aantal))
    n=math.ceil(H/station_batterij_leven)
    rijen.append(("48 V-stationbatterij (scenario)",B_kWh,"kWh",
                  batterij_factor,station_batterij_leven,n,B_kWh*batterij_factor*n))
    productie=sum(r[-1] for r in rijen)
    overige={"transport":300.,"eindprocessen":500.,
             "verbruiksgoederen":H*30., # module 10 + station 20 kg CO2-eq/jaar
             "netimport":H*import_kWh_jaar*netfactor,
             "overige gebruiksemissies":H*15.} # open screeningpost, geen koudemiddelkeuze
    totaal=productie+sum(overige.values())
    return totaal,rijen,overige

TOTAAL,RIJEN,OVERIG=lca(10.)
print("LCA-S1: H=20 jaar, B=10 kWh (uitsluitend scenario)")
for naam,q,u,f,leven,n,c in RIJEN:
    print(f"{naam:31} {n} pakket(ten), {c:.1f} kg CO2-eq")
print("overige posten",OVERIG)
print("totaal",round(TOTAAL,1),"kg CO2-eq; per stationsjaar",round(TOTAAL/H,2))
print("B=0/10/30 (geen haalbaarheidstoets)",
      [round(lca(b)[0]/H,2) for b in [0,10,30]])
print("batterijleven 8/10/12 jaar",
      [round(lca(10.,station_batterij_leven=l)[0]/H,2) for l in [8,10,12]])
print("netfactor 0.05/0.15/0.40",
      [round(lca(10.,netfactor=g)[0]/H,2) for g in [.05,.15,.4]])
print("PV-factor 420/600/780",
      [round(lca(10.,pv_factor=g)[0]/H,2) for g in [420,600,780]])
print("CO2 + fossiel CH4 + N2O",100+2*29.8+.1*273,"kg CO2-eq")
# Verschil tussen eindige projectgrens en jaarlijkse vervangingsallocatie.
print("modulebatterij: project per jaar",3.072*100*3/H,
      "tegen langetermijnallocatie",3.072*100/8)
# Afzonderlijke tegenfeitelijke paneelvergelijking; GEEN krediet in stationtotaal.
energy=carbon=0.; te=tc=None; CE=[(0.,0.)]; CC=[(0.,0.)]
for jaar in range(1,26):
    bruikbaar=350.*.70*.995**(jaar-1) # kWh/jaar van één 350 Wp-paneel
    dE=bruikbaar*2. # kWh primaire energie per kWh vervangen netstroom (aanname)
    dC=bruikbaar*.20*.97**(jaar-1) # kg CO2-eq; dalende vermeden factor (aanname)
    if te is None and energy+dE>=1200: te=jaar-1+(1200-energy)/dE
    if tc is None and carbon+dC>=250: tc=jaar-1+(250-carbon)/dC
    energy+=dE; carbon+=dC
    CE.append((float(jaar),energy)); CC.append((float(jaar),carbon))
print("paneel: energiepayback",round(te,6),"jaar; koolstofpayback",round(tc,6))
print("paneel: 25 jaar vermeden",round(energy,2),"kWh primair en",round(carbon,2),"kg CO2-eq")
assert abs(TOTAAL-(lca(0.)[0]+2000.))<1e-8
assert math.ceil(H/10)==2 and math.ceil(H/8)==3
for slecht in [float("nan"),float("inf"),-1.]:
    try: lca(slecht)
    except ValueError: pass
```

```
89      else: raise AssertionError("parameter niet afgewezen")
```

```
LCA-S1: H=20 jaar, B=10 kWh (uitsluitend scenario)
stationschil: hout              1 pakket(ten), 312.0 kg CO2-eq
stationschil: staal             1 pakket(ten), 750.0 kg CO2-eq
stationschil: beton             1 pakket(ten), 240.0 kg CO2-eq
stationschil: isolatie          1 pakket(ten), 450.0 kg CO2-eq
modulegebouw                    1 pakket(ten), 650.0 kg CO2-eq
module rek/water/pomp           2 pakket(ten), 220.0 kg CO2-eq
PV module                       1 pakket(ten), 840.0 kg CO2-eq
PV extra station                1 pakket(ten), 2520.0 kg CO2-eq
modulebatterij                  3 pakket(ten), 921.6 kg CO2-eq
modulelampen                    3 pakket(ten), 300.0 kg CO2-eq
module-elektronica              2 pakket(ten), 120.0 kg CO2-eq
windinstallatie                 1 pakket(ten), 650.0 kg CO2-eq
warmtepomp/installaties         2 pakket(ten), 1600.0 kg CO2-eq
waterstofketen                  2 pakket(ten), 2000.0 kg CO2-eq
extra centrale elektronica      2 pakket(ten), 300.0 kg CO2-eq
48 V-stationbatterij (scenario) 2 pakket(ten), 2000.0 kg CO2-eq
overige posten {'transport': 300.0, 'eindprocessen': 500.0, 'verbruiksgoederen': 600.0,
'netimport': 600.0, 'overige gebruiksemissies': 300.0}
totaal 16173.6 kg CO2-eq; per stationsjaar 808.68
B=0/10/30 (geen haalbaarheidstoets) [708.68, 808.68, 1008.68]
batterijleven 8/10/12 jaar [858.68, 808.68, 808.68]
netfactor 0.05/0.15/0.40 [788.68, 808.68, 858.68]
PV-factor 420/600/780 [758.28, 808.68, 859.08]
CO2 + fossiel CH4 + N2O 186.9 kg CO2-eq
modulebatterij: project per jaar 46.08 tegen langetermijnallocatie 38.4
paneel: energiepayback 2.458554 jaar; koolstofpayback 5.523721
paneel: 25 jaar vermeden 11542.42 kWh primair en 826.78 kg CO2-eq
```

UITGEWERKT VOORBEELD · 47.10

Van totaal naar hotspot en keuzevraag

10/20

Gebruik het daadwerkelijk berekende scenario S1.

GEGEVEN

- B=10 kWh, horizon 20 jaar
- Alle tabellen en gebruiksposten uit de code

GEVRAAGD

- Gemiddelde impact en twee gevoelige bijdragen

OPLOSSING

1. Totaal: 16 173,6 kg CO_2-eq; delen door 20 geeft 808,68 kg CO_2-eq per stationsjaar.
2. PV-productie: (1,4+4,2)×600=3360 kg. Stationbatterij: 10×100×2=2000 kg. Modulebatterij: 921,6 kg.

3 De PV-post is groot, maar extra PV kan ook het gebruik en de autonomie veranderen. Het batterijtotaal verandert sprongsgewijs wanneer een extra vervanging nodig wordt. Een keuze vraagt dus een nieuw gelijkwaardig dienstenprofiel, geen schrappen van de grootste tabelrij.

ANTWOORD

S1 levert een hotspotkaart en onderzoeksvragen, geen ranglijst van definitieve stationontwerpen.

Klopt dit? Productie, gebruik en eindprocessen staan in dezelfde twintigjarige eenheid. 164 kg per modulejaar is nergens als extra rij toegevoegd.

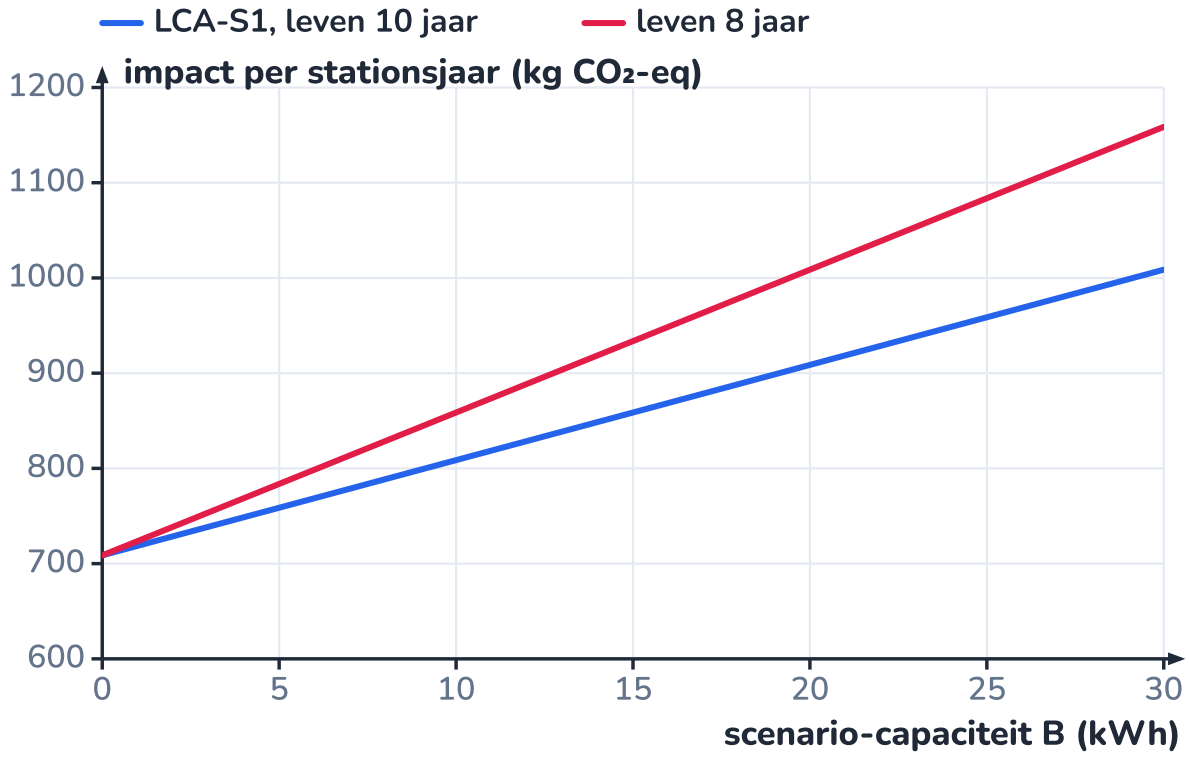
UITLEG · 47.11

Gevoeligheid en onzekerheid zijn verschillende vragen

11/20

Een gevoeligheid verandert één aanname en kijkt naar de reactie. Een onzekerheidsanalyse onderzoekt mogelijke combinaties en samenhang. Een spreiding die je zelf kiest is geen gemeten betrouwbaarheidsinterval. Eén leveranciermix kan bijvoorbeeld tegelijk de PV- en batterijproductiefactor beïnvloeden; onafhankelijk trekken zou de onzekerheid anders verdelen.

Bij de S1-batterijfactor en tienjarige levensduur is de jaarlijkse stationsbijdrage 10B kg CO_2-eq. Achtjarige levensduur vraagt drie pakketten en geeft 15B. B=10 verschuift daardoor 50 kg per stationsjaar. De netfactor 0,05/0,15/0,40 bij 200 kWh import verschuift de gebruiksbijdrage van 10 naar 30 naar 80 kg/jaar. De PV-factor 420/600/780 verandert de PV-post met ±50,4 kg/jaar. Deze bereiken zijn scenario's; ze zijn geen kansverdeling of nieuwe Belgische jaarmix.



Alle aanvullende inventaris- en gebruiksposten zijn screeningaannamen. De 48 V-capaciteit B is geen definitieve Habitat-waarde. B=0 is een rekenpunt, geen aantoonbaar uitvoerbare configuratie.

UITGEWERKT VOORBEELD · 47.12

Een conclusie kan een broncontrole nodig hebben

12/20

Twee gelijkwaardig functionerende pompvarianten verschillen alleen in productie en vervanging.

GEGEVEN

- A: 18 kg CO_2-eq per pomp, levensduur 8 jaar
- B: 12 kg CO_2-eq per pomp, levensduur onbekend
- Horizon 20 jaar; andere bijdragen gelijk

GEVRAAGD

- Wanneer wint B?

OPLOSSING

1. A vraagt ceil(20/8)=3 pompen: 54 kg.
2. B wint als 12×ceil(20/L_B) <54. Dat kan met maximaal vier pakketten.
3. Bij L_B≥5 jaar zijn maximaal vier pakketten nodig en is B maximaal 48 kg. Bij L_B=4 jaar zijn het vijf pakketten, 60 kg, en wint A.

ANTWOORD

Een aangetoonde levensduur van minstens vijf jaar maakt B gunstiger binnen deze grens.

Klopt dit? Een levensduurclaim vraagt proef, onderhoudsvoorwaarden en identieke pomp-/veiligheidsfunctie. Het lagere productiegetal alleen beslist niets.

UITLEG · 47.13

Energieterugverdientijd rekent primaire energie

13/20

De energieterugverdientijd is de tijd totdat het systeem evenveel relevante energie heeft geleverd of vervangen als zijn levenscyclus heeft gevraagd. Maak de energiesoort consistent. Een productiefactor in primaire energie mag je niet direct delen door elektrische kWh zonder de conversieconventie te vermelden. De IEA PVPS Task 12-methodologierichtlijn bespreekt onder meer prestatie, locatie, levensduur, degradatie en energie-indicatoren.

Bij constante opbrengst is t_E=E_{emb}/(Y·f_{benut}·p). E_{emb} is kWh primaire energie voor productie en andere meegenomen fasen; Y is elektrische kWh/jaar; f_{benut} is het nuttige aandeel; p is vervangen primaire energie per nuttige elektrische kWh. Met degradatie tel je jaarlijkse bijdragen op. Vergelijk twee panelen alleen bij dezelfde afgebakende methode en tegenfeitelijke energiedienst.

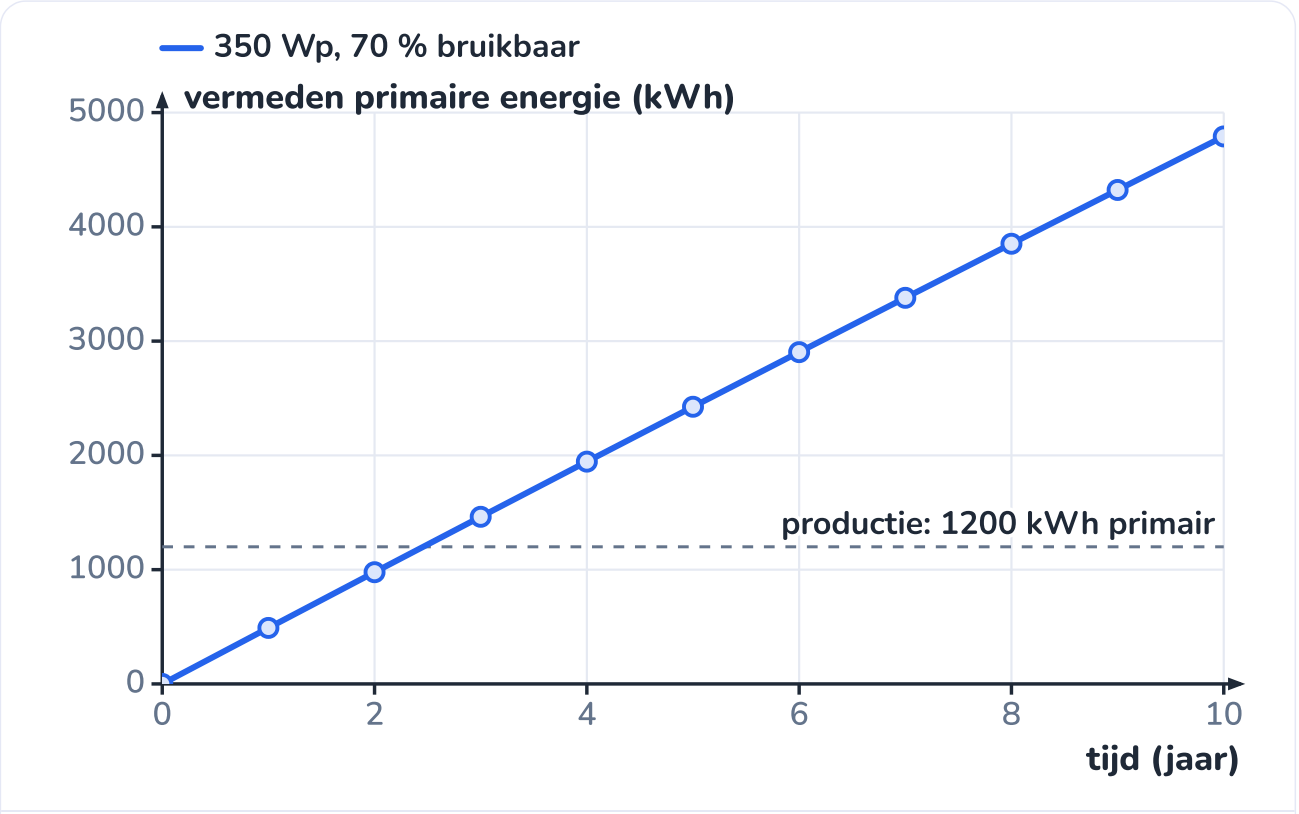
CONSTANTE OPBRENGST

$$t_E = \frac{E_{\mathrm{emb}}}{Y\, f_{\mathrm{benut}} p}$$

De noemer is vervangen primaire energie per jaar; bij degradatie gebruik je de cumulatieve som.

Een zonnepaneel verdient energie terug

Zelfstandig rekenvoorbeeld voor één 350 Wp-paneel.



Zelfstandig paneelscenario met aangenomen productiebeslag, opbrengst en primaire-energiefactor. Jaarlijkse cumulatie is lineair geïnterpoleerd binnen een jaar; de lijn snijdt 1200 kWh primair na 2,459 jaar.

GEGEVEN

- Productie en meegenomen fasen: 1200 kWh primair
- Eerstejaarsopbrengst 350 kWh elektrisch, nuttig aandeel 0,70
- Vervangen primaire factor 2, degradatie 0,5 %/jaar

GEVRAAGD

- Constante benadering en cumulatieve terugverdientijd

OPLOSSING

1. Volledig benut en zonder degradatie: 1200/(350×2)=1,714 jaar. Met 70 % benutting: 1200/(350×0,70×2)=2,449 jaar.
2. Jaar j vervangt $490\times0{,}995^{j-1}$ kWh primair. Na twee jaar is dat 490+487,55=977,55 kWh.
3. Jaar drie levert 485,11225 kWh primair; nog 222,45 kWh nodig. Lineaire jaarinterpolatie: 2+222,45/485,11225=2,458554 jaar.

ANTWOORD

Energieterugverdientijd 2,459 jaar onder deze scenarioaannamen.

Klopt dit? 70 % benutting is geen paneelrendement. Het beschrijft welke opgewekte stroom de gekozen tegenfeitelijke dienst werkelijk vervangt.

UITLEG · 47.15

Koolstofterugverdientijd volgt een andere grootheid

15/20

Neem voor hetzelfde losse paneel een aangenomen levenscyclusimpact van 250 kg CO_2-eq en een vermeden stroomfactor van 0,20 kg/kWh in jaar één. De eerstejaarsbesparing is 245×0,20=49 kg CO_2-eq. Als de vermeden factor jaarlijks 3 % daalt en het paneel 0,5 % degradeert, wordt de bijdrage $49\times(0{,}97\times0{,}995)^{j-1}$. De code vindt de kruising na 5,524 jaar.

Dat is geen energieterugverdientijd. Een stroommix kan weinig klimaatimpact maar veel primaire energie hebben, of andersom. De tegenfeitelijke vergelijking ‘welke netstroom wordt vermeden?’ is bovendien een andere vraag dan de toerekening van stationproductie en gemeten import. S1 krijgt daarom geen automatische negatieve PV-credit uit dit losse voorbeeld. Leg vast of je een attributionele voetafdruk of een verandering ten opzichte van een alternatief berekent.

LOS TEGENFEITELIJK PANEELSCENARIO

$$\Delta C_j = 49(0{,}97 \cdot 0{,}995)^{j-1}$$

Jaarbijdrage in kg CO_2-eq; kruising wanneer de cumulatieve som 250 kg bereikt.

UITGEWERKT VOORBEELD · 47.16

Herstellen met dezelfde prestatie

16/20

Een pomp voldoet nog aan haar debiet-, lek- en hygiëneeis na vervanging van één onderdeel.

GEGEVEN

- Hele nieuwe pomp: 18 kg CO_2-eq
- Herstelonderdeel 3 kg; extra vervoer 1 kg CO_2-eq
- Resterende levensduur en gebruik zijn gelijk

GEVRAAGD

- Milieuverschil en acceptatievoorwaarde

OPLOSSING

1. Vervangen: 18 kg. Herstellen: 3+1=4 kg. Verschil: 14 kg CO_2-eq.
2. Leg daarna dezelfde debiet/druk-, lek-, elektrische en reinigingsproef vast. Als herstel de levensduur verkort of verbruik verhoogt, moeten die verschillen terug in de inventaris.
3. Ontwerp voor losneembare verbindingen, bereikbaarheid en beschikbare onderdelen maakt herstel uitvoerbaar. Recyclebaarheid alleen levert die dienst niet.

ANTWOORD

Herstel vermijdt in deze beperkte gelijkwaardige vergelijking 14 kg CO_2-eq.

Klopt dit? Een onveilige of onhygiënische reparatie wordt niet acceptabel door een lagere LCA-score.

UITLEG · 47.17

Circulair ontwerpen vraagt een allocatieregel

17/20

Verminderen van behoefte, levensduur verlengen, onderhouden, repareren, hergebruiken en uiteindelijk materialen terugwinnen raken verschillende levenscyclusfasen. Een modulair toestel kan langer meegaan maar ook extra connectoren hebben. Meet beide kanten. Behoud technische materialen in een bruikbare stroom en houd schadelijke contaminatie uit mogelijke biologische kringlopen.

In S1 gebruiken we een afgebakende cut-offconventie: de ingevoerde productiefactor bevat de gekozen inputmix; aan het einde tellen we onze inzameling en verwerking, maar geen krediet voor een volgend product. Dat is één transparante keuze, geen universele waarheid. Je mag niet én een lage factor voor recyclaat én een volledige vermeden primaire productie aan het einde boeken zonder consistente verdeling. Rapporteer een alternatieve allocatie als gevoeligheid, met dezelfde regel voor alle vergeleken varianten.

strategie	wat de inventaris moet toetsen
minder materiaal	dezelfde sterkte/dienst
herstel/onderhoud	delen, vervoer, levensduur, energie
hergebruik	restlevensduur, transport, inspectie
recycling	rendement, kwaliteit, allocatie en volgende functie

VERHAAL · 47.18

De conclusie gaat verder dan één klimaatgetal

18/20

Een LCA kan naast klimaat ook grondstofgebruik, water, toxiciteit of andere categorieën onderzoeken. Lager CO_2-eq bewijst niet dat alle milieu-effecten lager zijn. Veiligheid, leverbaarheid, herstelbaarheid en de functionele eisen blijven harde voorwaarden. Geef per hotspot de bronkwaliteit, regio/jaar, methode, levensduur en omvang van ontbrekende gegevens.

Een bruikbaar besluit luidt bijvoorbeeld: ‘we houden het repareerbare pomppad bij gelijk aangetoonde prestaties; voor de stationbatterij wachten we het gelijke energieprofiel en leveranciersgegevens af; PV-productie en vervanging krijgen prioriteit in de data-aanvraag’. Dat verbindt bewijs aan actie. Het dossier bewaart versie, bronregister, Pythoncode, scenario-ID en beperkingen, zodat e49 later dezelfde inventaris gebruikt of een wijziging zichtbaar herberekent.

besluitveld	verantwoord formuleren
resultaat	getal plus grens en methode
onzekerheid	datastatus en omslagfactor
voorwaarde	gelijke bewezen dienst en veiligheid
vervolg	eigenaar en gerichte data/proef

NASLAG · 47.19

Eenheden en grenzen bij de LCA

19/20

klimaatkarakterisatie

$$C = \sum_i m_i \, \mathrm{GWP}_{i,100}$$

symbool	betekenis	eenheid
m_i	massa van de emissie	kg
C	klimaatimpact	kg CO_2-eq

eindige inventaris met vervanging

$$n_i = \lceil H / L_i \rceil, \quad C_H = \sum_i n_i q_i f_i + C_{gebruik} + C_{einde}$$

symbool	betekenis	eenheid
H, L_i	horizon en dienstduur	jaar
$q_i f_i$	impact per pakket	kg CO_2-eq

onderscheid	vastleggen
dienst / product	functionele eenheid / referentiestroom
elektrisch / primair	conversie en systeemgrens
project / jaarallocatie	eindgrens en restwaarde
eigen impact / vermeden impact	attributioneel / tegenfeitelijk
getal / bewijs	scenariofactor / gemeten of verklaarde bron

HET GEHEEL · 47.20

De milieu-impact van het hele station

20/20

De analyse van het hele station kan pas beslissen wanneer de componentgrens en dienstenprofielen vastliggen. De screening maakt nu al hotspots, ontbrekende gegevens en vervangingsgevoeligheid zichtbaar.

I38 Duurzaam ontwerpen

Module-inventaris en herstelkeuzes.

E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse

Opslagprofiel en open stationcapaciteit.

E45 Systems engineering en het V-model

Gelijkwaardige functionele eisen.

E46 Betrouwbaarheid en risico

Dienstduur, onderhoud en veilige functie.

E49 Integratieproject: het brein van het station

Dezelfde inventaris of een traceerbare herberekening.

Habitat

LCA-S1 is een onderwijs-scenario, geen definitieve Habitat-LCA. B=10 kWh, import 200 kWh/jaar en extra productie-/gebruiksposten blijven benoemde aannamen. 1,4+4,2 kWp en de exacte modulecapaciteit 3,072 kWh zijn afzonderlijk verwerkt. Geen nieuwe hardwarekeuze wordt vastgezet. Methodische bronnen: JRC ILCD, IPCC AR6 en IEA PVPS; geraadpleegd 30-09-2026.

SAMENVATTING

In het kort

- De dienst, horizon en systeemgrens komen vóór de factoren.
- CO_2-equivalent vraagt een benoemde methode en tijdshorizon.
- Vervangingen en jaarallocatie zijn verschillende grenzen.
- Energie- en koolstofterugverdientijd meten verschillende grootheden.
- Herstel en recycling vragen dezelfde functionele prestaties en consistente allocatie.
- Een scenarioresultaat is geen productverklaring of bewezen stationimpact.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

functionele eenheid
De kwantitatief omschreven dienst waarop inputs en impacts worden betrokken.

referentiestroom
De hoeveelheid product of systeem die nodig is om die dienst te leveren.

CO_2-equivalent
Massa CO_2 die in een gekozen impactmethode dezelfde geïntegreerde klimaatbijdrage vertegenwoordigt.

allocatie
Verdeling van inputs en impacts over meer functies, producten of levenscycli.

hotspot
Post die sterk bijdraagt aan de impact of de onzekerheid van de conclusie.

E EXPERT · DEEL E10 · SYSTEMS ENGINEERING

HANDBOEK · HOOFDSTUK 48

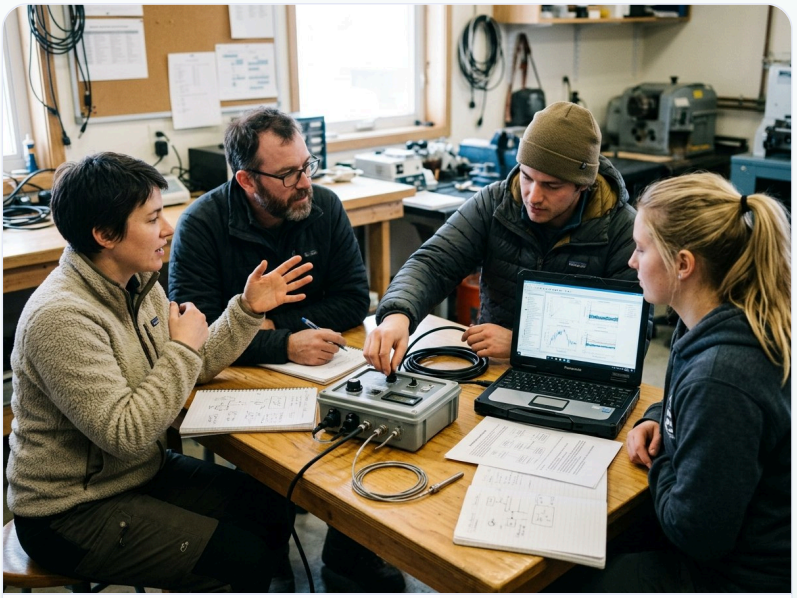
Technisch communiceren en projectmanagement

Een besluit wordt sterker als de lezer de claim, het bewijs en het vervolg kan volgen

De beste regelaar helpt weinig als de bouwer een andere eenheid verwacht of de beoordelaar een simulatie voor een meting aanziet. Je schrijft een controleerbaar technisch rapport, rekent een planning door en maakt teamafspraken die interfaces en bewijs bewaken. Je oefent ook een pitch en een verdediging die beperkingen helder houden.

10× uitleg · 8× uitgewerkt voorbeeld · 1× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 2× code · ± 14 lestijden

D Ontwerpen en maken · O Onderzoeken en meten



Rapport, planning en proefopstelling vertellen hetzelfde controleerbare verhaal.

Na dit hoofdstuk

- Je kan een technisch rapport rond probleem, methode, resultaat, discussie en besluit schrijven.
- Je kan figuren, tabellen, bronnen en onzekerheden controleerbaar publiceren.
- Je kan een Gantt-diagram uit afhankelijkheden maken en het kritische pad berekenen.
- Je kan rollen, interfaces, overdracht en wijzigingsafspraken vastleggen.
- Je kan een ontwerp pitchen en vragen met passend bewijs beantwoorden.

UITLEG · 48.1

Schrijf voor het besluit van de lezer

1/23

Een technisch rapport helpt een ander bepalen of een ontwerp werkt, welke grens het bewijs heeft en wat de volgende stap is. Noem vroeg de concrete vraag, het resultaat en de beperking. Een lijst

verrichtingen is nog geen redenering. Orden op claim en bewijs: welke eis wordt onderzocht, met welke methode, wat kwam eruit en wat betekent dat?

Kies je lezer. Een operator heeft handelingsinstructies, status en herstel nodig; een bouwer interfaces en componenten; een reviewer aannamen, versies en reproduceerbaar bewijs. Het hoofdrapport houdt het besluit leesbaar; bijlagen dragen volledige code, data en detailafleidingen. Schrijf geen bewezen veiligheid of voorspelnauwkeurigheid toe aan een demonstratie die dat niet onderzocht.

lezersvraag	plaats in rapport
wat moet werken?	probleem, dienst, eisen
hoe is het onderzocht?	methode, grens, versie
wat is gevonden?	resultaat plus eenheid
wat betekent dit?	discussie en beperking
wat doen we?	besluit en vervolgactie

UITLEG · 48.2

Een rapport heeft een bewijsstructuur

2/23

Titel en korte samenvatting noemen onderwerp, systeemgrens en hoofdbevinding. De inleiding motiveert het probleem en de meetbare onderzoeksvraag. De methode legt model, materiaal, opstelling, parameterbronnen, verwerking en acceptatiecriteria vast. Resultaten tonen de berekende of gemeten uitkomsten; discussie verklaart afwijkingen en bereik. De conclusie beantwoordt de oorspronkelijke vraag zonder nieuwe onbewezen informatie.

Verbind elke belangrijke uitspraak aan eis/test-ID en vindbaar bewijs. Een negatieve uitkomst hoort ook in resultaten. Vermeld afwijkingen van het proefplan, mislukkingen en ontbrekende data. Een reproduceerbare bijlage bevat schema, kalibratie, codeversie, invoer, uitvoer en een korte startinstructie. ‘De code werkte’ is geen acceptatiecriterium.

deel	concrete inhoud voor klimaatregeling
samenvatting	bereik, belangrijkste resultaat, open fysische proef
methode	C/H, discretisatie, sensorcontract, storinginjectie
resultaten	temperatuur, uitgang, timings en weigeringen
discussie	verzadiging, ruis, modelgrens, onbewezen hazards
bijlagen	versie, data, bronlijst, reproduceerbare run

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.3

Herformuleer een te grote claim

3/23

Een conceptverslag zegt: ‘Ons AI-station is veilig en voorspelt energie met RMSE 0,2494’.

GEGEVEN

GEVRAAGD

- E41 gebruikte gerealiseerde synthetische dagtemperatuur/donkerte
- E45 testte een softwarecontract; geen gecertificeerde fysieke veiligheid

- Een nauwkeurige resultaatzin en passende vervolgvraag

OPLOSSING

1. Noem E41 een conditionele energieschatting op 35 aparte synthetische testdagen, met RMSE 0,2494 kWh/dag. De invoer bevat gerealiseerd weer; dit is geen operationele dag-vooruitfout.
2. Noem E45 de geslaagde grens-/fouttests van het voorstelcontract in de benoemde versie. Ze tonen weigering van de beschreven ongeldige invoer, geen volledige fysieke veiligheidsfunctie.
3. Vraag daarna gearchiveerde prognose-invoer, werkelijke tijdreeksen en afgebakende storingproeven voor de nieuwe claims.

ANTWOORD

De resultaatzin houdt prestatie, gegevenssoort en bewijsgrens samen.

Klopt dit? Een beperking onderaan een rapport herstelt geen misleidende titel of figuur die als losse afbeelding wordt gedeeld.

UITLEG · 48.4

Methode, resultaat en interpretatie uit elkaar houden

4/23

‘We kozen RK4 met stap 60 s’ beschrijft methode. ‘Na 24 h is de berekende lucht 28,375973 °C’ beschrijft resultaat voor het tweeknoopsmodel van e17/e36/e38. ‘Deze parameterisatie benadert de opgegeven referentie’ is een interpretatie waarvoor een vergelijking nodig is. Een werkelijk gemeten ruimte is nog een ander bewijs.

Gebruik de systeemgrens bij elk getal. Het éénknopstation met C=540 kJ/K en H=50 W/K is niet de lucht-plus-buffer van de klimaatmodule. Toon dezelfde start, buitenconditie, warmte-invoer en tijd voor een vergelijking. Maak het type data zichtbaar in tabelkop en caption: model, synthetische afwijking, laboratoriummeting of installatieproef.

zinsoort	controle
methode	kan een ander de run herhalen?
resultaat	gegevenssoort, getal, eenheid, condities
interpretatie	welke alternatieve verklaring past?
claim	welke eis en welk bewijs dragen haar?

CODE · 48.5

Een kleine publicatierekening met echte uitvoer

Deze code rekent herhaalde synthetische aflezingen en onzekerheidsbijdragen na. Het kalibratie-effect is een gemeenschappelijke aangenomen standaardonzekerheid; het wordt niet kleiner door meer herhalingen. $U=2u_c$ noemt expliciet de dekkingsfactor. Een 95 %-interpretatie vraagt aanvullende verdelings- en vrijheidsgradenaannamen; k=2 alleen bewijst die niet.

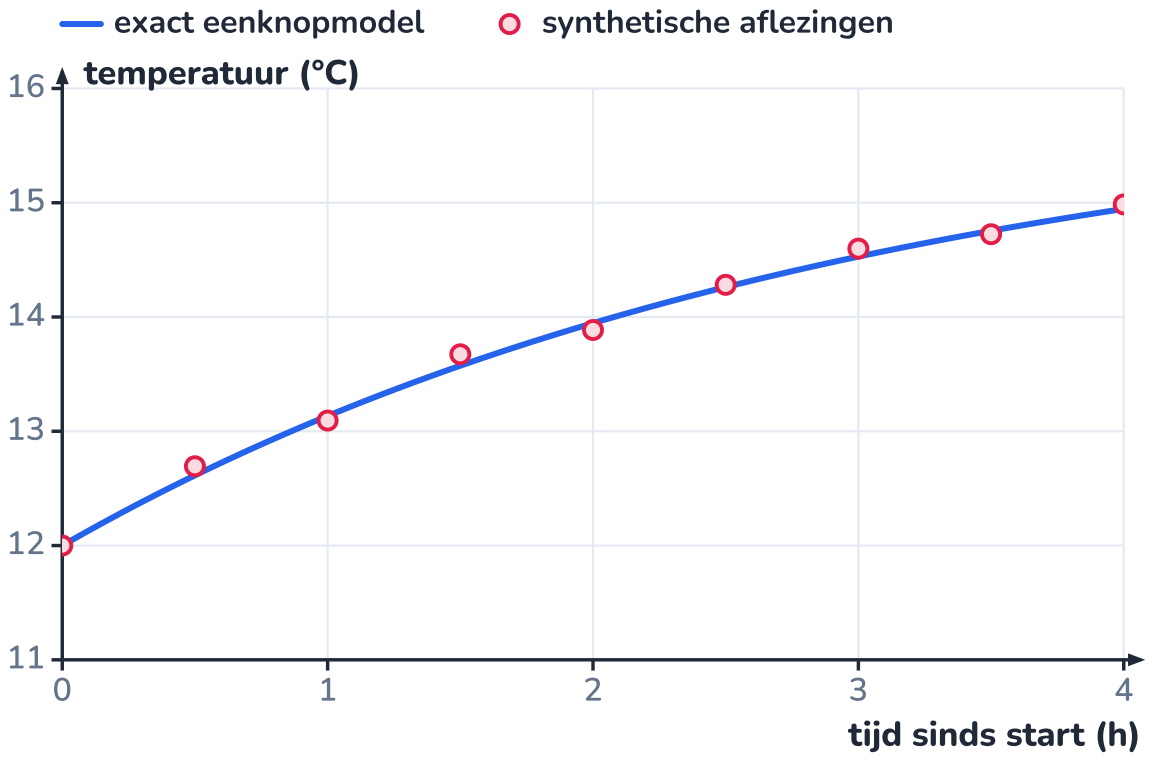
Het tweede deel maakt het exacte e39-eenknopmodel plus zelfgekozen afwijkingen. Daardoor zijn figuur R1 en R2 volledig reproduceerbaar. Ze demonstreren rapportage, niet validatie van echte temperatuurmetingen. De getallen blijven op hun eigen systeemgrens.

Python **rapport_getallen.py** 22 regels

```python
import numpy as np

# Vijf synthetische herhaalde aflezingen, geen meting van Habitat.
x=np.array([19.8,20.0,20.1,19.9,20.2])
y=np.mean(x); s=np.std(x,ddof=1); ua=s/np.sqrt(len(x))
ub=.15 # aangenomen standaardonzekerheid kalibratie, gemeenschappelijk
uc=np.hypot(ua,ub); U=2*uc
print("gemiddelde",y,"s",round(s,6),"uA",round(ua,6))
print("uB",ub,"uc",round(uc,6),"U (k=2)",round(U,6))
print("publicatie",f"{y:.2f} +/- {U:.2f} deg C, k=2")
print("100 aflezingen, zelfde spreiding: uc",round(np.hypot(s/10,ub),6))
# Modelvergelijking van het e39-eenknopstation, uitsluitend synthetisch.
C=540000.; H=50.; P=600.; buiten=4.; start=12.
t=np.arange(0.,4.01,.5) # uur
exact=buiten+P/H+(start-buiten-P/H)*np.exp(-H/C*t*3600)
synthetisch=exact+np.array([0.,.08,-.04,.10,-.06,.02,.07,-.03,.04])
residu=synthetisch-exact
rmse=np.sqrt(np.mean(residu**2))
print("model eind",round(exact[-1],6),"deg C; synthetische RMSE",round(rmse,6),"K")
for h,a,b,r in zip(t,exact,synthetisch,residu):
    print(f"{h:.1f} h  model {a:.4f}  synthetisch {b:.4f}  residu {r:+.4f} K")
assert abs(y-20.)<1e-12 and U>.3
```

```
gemiddelde 20.0 s 0.158114 uA 0.070711
uB 0.15 uc 0.165831 U (k=2) 0.331662
publicatie 20.00 +/- 0.33 deg C, k=2
100 aflezingen, zelfde spreiding: uc 0.150831
model eind 14.945611 deg C; synthetische RMSE 0.057155 K
0.0 h  model 12.0000  synthetisch 12.0000  residu +0.0000 K
0.5 h  model 12.6141  synthetisch 12.6941  residu +0.0800 K
1.0 h  model 13.1339  synthetisch 13.0939  residu -0.0400 K
1.5 h  model 13.5739  synthetisch 13.6739  residu +0.1000 K
2.0 h  model 13.9463  synthetisch 13.8863  residu -0.0600 K
2.5 h  model 14.2616  synthetisch 14.2816  residu +0.0200 K
3.0 h  model 14.5285  synthetisch 14.5985  residu +0.0700 K
3.5 h  model 14.7544  synthetisch 14.7244  residu -0.0300 K
4.0 h  model 14.9456  synthetisch 14.9856  residu +0.0400 K
```



Rapportfiguur R1. Eenknopstation e39: C=540 kJ/K, H=50 W/K, P=600 W, buiten 4 °C en start 12 °C. Punten zijn zelfgemaakte afwijkingen, geen proefdata. De synthetische RMSE is 0,0572 K. De figuur bewijst geen validatie van het werkelijke station.

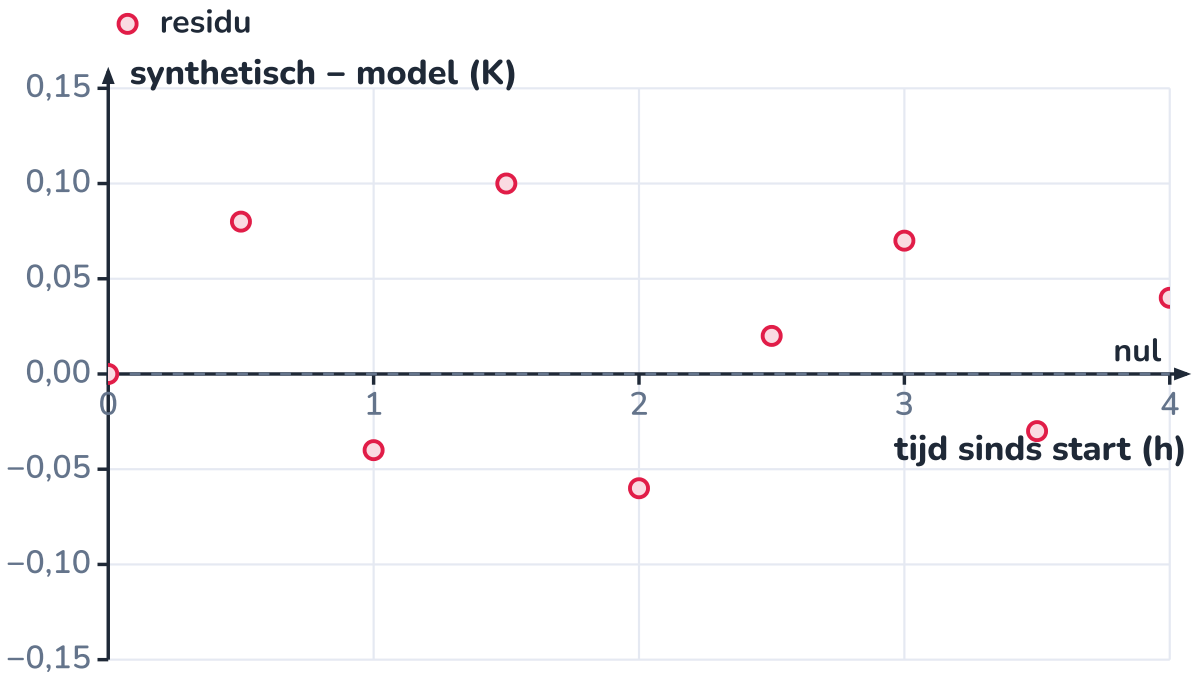
UITLEG · 48.6

Een caption draagt de vergelijking

6/23

Een figuur moet op zichzelf begrijpelijk zijn: titel, assen, eenheden, legenda, condities en bron-/versie-ID horen bij elkaar. Benoem of een lijn interpolatie, model of fit is. Geef de relevante beginvoorwaarde en systeemgrens in de caption. Gebruik een zichtbare schaal en maak een uitsnede of log-as expliciet. Een nulonderdrukking kan een klein verschil groot laten lijken; leg uit waarom die schaal nodig is.

Een residufiguur toont wat een nette modelcurve kan verbergen. Residuen met tijdstructuur kunnen op vertraging, drift of ontbrekende fysica wijzen; één RMS-getal toont die structuur niet. Onzekerheidsbanden vragen een beschreven berekening. Een willekeurig brede gekleurde band is geen bewijs.



Rapportfiguur R2, zelfde synthetische gegevens als R1. Verbind punten alleen omdat ze dezelfde tijdreeks vertegenwoordigen. Geen onzekerheidsband of meetbewijs wordt uit deze gekozen afwijkingen afgeleid.

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.7

Onzekerheid in een resultaatzin

7/23

Vijf synthetische herhalingen hebben gemiddelde 20,00 °C en steekproefspreiding 0,158114 K.

GEGEVEN

- uA=s/√5=0,070711 K
- Onafhankelijke kalibratiebijdrage uB=0,15 K (aanname)

GEVRAAGD

- u_c, U bij k=2 en een eerlijke publicatie

OPLOSSING

1. Bij onafhankelijke bijdragen: $u_c=\sqrt{(0{,}070711^2+0{,}15^2)}=0{,}165831$ K.
2. $U=2u_c=0{,}331662$ K. Rond onzekerheid en waarde samen: 20,00±0,33 °C, k=2, met benoemde bijdragen.
3. Bij 100 aflezingen wordt alleen de herhaalbijdrage 0,158114/10; $u_c=0{,}150831$ K. De gemeenschappelijke kalibratiegrens verdwijnt niet.

ANTWOORD

20,00±0,33 °C (U, k=2), synthetisch voorbeeld met expliciet aangenomen kalibratiebijdrage.

Klopt dit? Het JCGM GUM-bronnenregister onderscheidt standaard- en uitgebreide onzekerheid. Schrijf geen exact 95 %-interval zonder de passende aannamen.

UITLEG · 48.8

Tabellen en bronnen maken cijfers terugvindbaar

Een tabel geeft grootheid en eenheid in de kop, geen los getal zonder betekenis. Gebruik genoeg cijfers voor de beslissing, maar geen schijnprecisie. Vergelijk varianten op dezelfde horizon en functie. Voeg datastatus toe bij scenario-aannamen; een actuele wet, een technische datasheet en een zelfgekozen factor hebben een andere bewijskracht.

Een bronregister noteert maker, titel, publicatieversie/datum, vindplaats, raadpleegdatum, ondersteunde claim en toepassingsgrens. Link bij de claim, zodat de lezer niet hoeft te raden welk document erbij hoort. Noteer een paragraaf/tabel waar mogelijk. Controleer citaten en AI-verwijzingen in de oorspronkelijke bron. Bij een wijziging bewaar je de oude versie en motiveer je de nieuwe conclusie.

bron-ID	claim	vindplaats/status
MODEL-39	C/H van éénknopstation	e39; vast model, geen gemeten kamer
DATA-R1	synthetische aflezingen	rapport_getallen.py; zelfgemaakt
MET-01	U=kuc	JCGM 100:2008; methodische bron
PLAN-01	afhankelijkheden/risico	GAO-16-89G; methodische bron
LAW-44	AI Act op peildatum	e44; primaire versie en datum opnieuw controleren

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.9

Een kleine tabel die het besluit ondersteunt

Een proefrapport vergelijkt twee regulatorversies onder hetzelfde synthetische invoerprofiel.

GEGEVEN

- Versie A: maximale temperatuur 24,2 °C, 3 overschrijdingen
- Versie B: 23,8 °C, 0 overschrijdingen
- Criterium: modeltemperatuur ≤24,0 °C

GEVRAAGD

- Een resultaat en de juiste bewijsgrens

OPLOSSING

1. A voldoet niet aan dit modelcriterium; B voldoet voor dit ene benoemde scenario.
2. Bewaar tijdreeks, scenario-invoer, samplingstap en definitie van overschrijding. Eén plot zonder maximale waarde kan een korte piek missen.
3. De conclusie is niet dat B veilig is onder alle fouten of echte omstandigheden. Voeg aparte fysische sensor-/actuator-/storingproeven en meer randgevallen toe.

ANTWOORD

B haalt het modelcriterium in dit scenario; A niet. De nieuwe versie is kandidaat voor vervolgproeven.

Klopt dit? Als beide versies verschillende begincondities of modelstappen gebruiken, is de directe rangorde nog niet eerlijk.

UITLEG · 48.10

Planning begint bij werkproducten en afhankelijkheden

10/23

Een taak is af wanneer een beoordeelbaar werkproduct zijn gereedcriterium haalt. ‘Aan model werken’ heeft geen eindpunt; ‘warmtemodel met eenheidsbalans, referentieproef en versie publiceren’ wel. Schat duur, uitvoerder, middelen en voorgangers apart. Een netwerk maakt zichtbaar welke taak echt op een andere wacht.

Een Gantt-diagram tekent activiteiten op een tijdas. Het kritische pad volgt uit afhankelijkheden en duur, niet uit de langste losse taak of een rode kleur die je vooraf koos. Deze les gebruikt finish-to-start zonder extra wachttijd. De GAO Schedule Assessment Guide, GAO-16-89G (2015) behandelt betrouwbare planning en risicoanalyse. Wij rekenen eerst de logische duur, controleren daarna capaciteit en bewaren een baseline.

taakveld	voorbeeld
werkproduct	vastgelegd sensor/voorstelcontract
gereed	review plus grens-/fouttest
voorganger	eisenbaseline goedgekeurd
middel	auteur, reviewer, testadapter
duur	vier werkdagen als schatting
risico	onduidelijke tijd-/eenheidsinterface

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.11

Voorwaarts en achterwaarts rekenen

11/23

Het onderwijsnetwerk bevat negen taken A–I.

GEGEVEN

- ES=max(EF voorgangers); EF=ES+duur
- LF=min(LS opvolgers); LS=LF−duur
- Terminaal LF=projecteinde

GEVRAAGD

- Begin bij A, bepaal F en bereken de speling van C

OPLOSSING

1. A: ES=0,EF=3. B:3–7; C:3–8. D volgt B:7–13. E volgt B én C:max(7,8)=8 tot12.
2. F wacht op D én E:ES=max(13,12)=13,EF=16. G:16–20; H:20–22; I:22–23.
3. Achterwaarts: I22–23,H20–22,G16–20,F13–16. D7–13,E9–13. Voor C:LF=LS(E)=9; LS=9−5=4. Totale speling C=4−3=1 dag.

ANTWOORD

Projectduur 23 werkdagen; kritisch A–B–D–F–G–H–I. C en E hebben ieder één dag totale speling.

Klopt dit? Dezelfde ene dag ruimte op een route mag je niet als twee onafhankelijke buffers besteden.

CODE · 48.12

Bereken het kritische pad en controleer foutnetten

12/23

De code sorteert afhankelijkheden topologisch, rekent vroegste en laatste tijden en weigert een cyclus. De tabel/figuur komen uit precies dezelfde resultaten. Twee scenario's wijzigen één echte voorwaarde: D vóór E wegens gedeelde proefopstelling, en C twee dagen langer.

De laatste lus trekt zelfgekozen driehoekige duren tussen 0,6 en 1,8 keer de basisduur, met de basis als modus. De 5000 runs tonen mogelijke padwisseling onder die aannamen. Ze leveren geen empirische kans op een echte deadline; gedeelde risico's en kalenders zijn niet gemodelleerd. Een P90 uit dit model moet als scenarioquantiel worden benoemd.

Python `planning_cpm.py` 72 regels

```python
import numpy as np

# Onderwijsplanning in werkdagen; geen werkelijk behaalde voortgang.
taken = {
 "A":("eisen en proefplan",3.,()),
 "B":("interfaces",4.,("A",)),
 "C":("tweelingmodel",5.,("A",)),
 "D":("lokaal prototype",6.,("B",)),
 "E":("modelsimulatie",4.,("B","C")),
 "F":("integratie",3.,("D","E")),
 "G":("systeemproeven",4.,("F",)),
 "H":("eindrapport",2.,("G",)),
 "I":("review en verdediging",1.,("H",)),
```

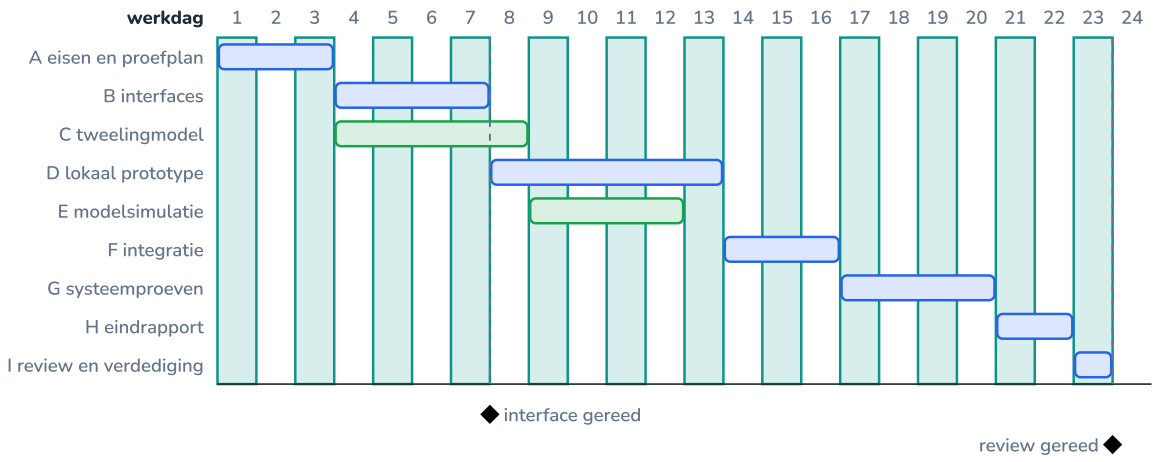
```
}

def cpm(net):
    # Topologisch sorteren: afhankelijkheden mogen niet vooruit worden gegokt.
    for k,(naam,d,pred) in net.items():
        if not np.isfinite(d) or d<0: raise ValueError("duur")
        if any(p not in net for p in pred): raise ValueError("ontbrekende voorganger")
    order=[]; over=set(net)
    while over:
        klaar=sorted(k for k in over if all(p in order for p in net[k][2]))
        if not klaar: raise ValueError("cyclus in afhankelijkheden")
        order.extend(klaar); over.difference_update(klaar)
    es={}; ef={}
    for k in order:
        es[k]=max((ef[p] for p in net[k][2]),default=0.)
        ef[k]=es[k]+net[k][1]
    eind=max(ef.values(),default=0.)
    succ={k:[j for j in net if k in net[j][2]] for k in net}
    ls={}; lf={}
    for k in reversed(order):
        lf[k]=min((ls[j] for j in succ[k]),default=eind)
        ls[k]=lf[k]-net[k][1]
    ruimte={k:ls[k]-es[k] for k in net}
    kritisch=[k for k in order if abs(ruimte[k])<1e-9]
    return eind,es,ef,ls,lf,ruimte,kritisch

R=cpm(taken)
print("ID ES EF LS LF speling (werkdagen)")
for k in taken:
    print(k,*[round(R[i][k],2) for i in range(1,6)])
print("eind",R[0],"kritische activiteiten",R[6])
# D en E delen nu exclusief dezelfde proefopstelling: D moet eerst klaar.
gedeeld=dict(taken)
naam,d,pred=gedeeld["E"]; gedeeld["E"]=(naam,d,pred+("D",))
RG=cpm(gedeeld)
print("met proefopstelling D voor E",RG[0],RG[6])
# Twee extra dagen voor C kunnen het kritische pad veranderen.
vertraging=dict(taken)
naam,d,pred=vertraging["C"]; vertraging["C"]=(naam,d+2,pred)
RV=cpm(vertraging)
print("C twee dagen langer",RV[0],RV[6])
# Illustratieve spreiding, niet uit werkelijke projecten geschat.
rng=np.random.default_rng(48); n=5000
duren=[]; hits={k:0 for k in taken}
for _ in range(n):
    scenario={k:(naam,rng.triangular(.6*d,d,1.8*d),pred)
              for k,(naam,d,pred) in taken.items()}
    s=cpm(scenario); duren.append(s[0])
    for k in s[6]: hits[k]+=1
Q=np.quantile(duren,[.1,.5,.9])
print("scenario P10/P50/P90",np.round(Q,3))
print("scenario kans duur > 23",round(np.mean(np.array(duren)>23),4))
print("kritiekfrequentie B/C/D/E",[round(hits[k]/n,4) for k in ["B","C","D","E"]])
assert R[0]==23 and RG[0]==27 and RV[0]==24
assert R[5]["C"]==1 and R[5]["E"]==1
cyclus=dict(taken); cyclus["A"]=("fout",3.,("I",))
try: cpm(cyclus)
except ValueError as e: print("foutnet geweigerd:",e)
else: raise AssertionError("cyclus niet gedetecteerd")
```

```
ID ES EF LS LF speling (werkdagen)
A 0.0 3.0 0.0 3.0 0.0
```

```
B 3.0 7.0 3.0 7.0 0.0
C 3.0 8.0 4.0 9.0 1.0
D 7.0 13.0 7.0 13.0 0.0
E 8.0 12.0 9.0 13.0 1.0
F 13.0 16.0 13.0 16.0 0.0
G 16.0 20.0 16.0 20.0 0.0
H 20.0 22.0 20.0 22.0 0.0
I 22.0 23.0 22.0 23.0 0.0
eind 23.0 kritische activiteiten ['A', 'B', 'D', 'F', 'G', 'H', 'I']
met proefopstelling D voor E 27.0 ['A', 'B', 'D', 'E', 'F', 'G', 'H', 'I']
C twee dagen langer 24.0 ['A', 'C', 'E', 'F', 'G', 'H', 'I']
scenario P10/P50/P90 [23.827 26.508 29.407]
scenario kans duur > 23 0.9538
kritiekfrequentie B/C/D/E [0.695, 0.305, 0.6702, 0.3298]
foutnet geweigerd: cyclus in afhankelijkheden
```



Onderwijsplanning zonder kalenderdatum of werkelijk voltooiingsbewijs. Dag 0 is het begin van werkdag 1; eind is exclusief. De kleur 1 volgt kritische activiteiten, kleur 3 volgt taken met één dag totale speling. Beschikbaarheid van mensen en proefopstelling vraagt een aparte controle.

UITLEG · 48.13

Van netwerk naar Gantt, met alle cijfers erbij

13/23

Deze tabel maakt de Gantt-controle mogelijk zonder kleur af te lezen. ES/EF zijn vroegste start/einde, LS/LF laatste start/einde bij dezelfde einddatum. Start 0 betekent begin van werkdag 1; einde 23 is het einde van 23 werkdagen. De planning heeft geen kalenderdatum, verlof of werkelijke voortgang.

Een taak met speling kan toch aandacht vragen als haar onzekerheid groot is of ze specialistische capaciteit bezet. Kritische activiteiten kunnen veranderen na een update. Benoem mijlpalen met een aantoonbaar gereedcriterium: de interface-mijlpaal op dag 7 vraagt contract plus review, geen alleen verstreken tijd.

taak	duur (werkdagen)	voorgangers	vroegste start/einde	laatste start/einde	speling
A eisen en proefplan	3	—	0 / 3	0 / 3	0

taak	duur (werkdagen)	voorgangers	vroegste start/einde	laatste start/einde	speling
B interfaces	4	A	3 / 7	3 / 7	0
C tweelingmodel	5	A	3 / 8	4 / 9	1
D lokaal prototype	6	B	7 / 13	7 / 13	0
E modelsimulatie	4	B, C	8 / 12	9 / 13	1
F integratie	3	D, E	13 / 16	13 / 16	0
G systeemproeven	4	F	16 / 20	16 / 20	0
H eindrapport	2	G	20 / 22	20 / 22	0
I review en verdediging	1	H	22 / 23	22 / 23	0

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.14

Capaciteit kan het logische pad veranderen

14/23

D en E hebben dezelfde exclusieve proefopstelling; het team plant eerst D.

GEGEVEN

- D duurt dag 7–13
- E heeft B,C en nu ook D als voorgangers

GEVRAAGD

- Nieuwe duur en pad; effect van een losse modelvertraging

OPLOSSING

1. E start op max(7,8,13)=13 en eindigt17. F17–20,G20–24,H24–26,I26–27.
2. Nieuwe route A–B–D–E–F–G–H–I duurt 27 werkdagen. Dit is een expliciete volgordekeuze; een andere middelenvolgorde moet je apart beoordelen.
3. Zonder gedeelde opstelling maar met C twee dagen langer: C3–10,E10–14,F14–17,G17–21,H21–23,I23–24. Nu wordt A–C–E–F–G–H–I kritisch.

ANTWOORD

Een gedeeld middel maakt de basisplanning hier vier dagen langer. Twee extra dagen op een taak met één dag speling verlengen het project één dag.

Klopt dit? Een Gantt met overlappende taken bewijst niet dat de uitvoerders of middelen die overlap aankunnen.

UITLEG · 48.15

Voortgang vraagt een baseline en bewijs

15/23

Bewaar oorspronkelijke schattingen en benoemde versies. Update werkelijke start/einde, resterend werk, nieuwe afhankelijkheden en open reviewpunten. ‘90 % klaar’ betekent weinig wanneer het laatste

probleem de acceptatie blokkeert. Gebruik gereed bewijs: gepubliceerde code, geslaagde test, gecontroleerde figuur of gesloten interfacevraag.

Maak bij een verandering de impact zichtbaar op eisen, bewijs, risico en planning. Een sensorfilterwijziging raakt niet alleen firmware, maar ook tijdvertraging, modelvergelijking en caption. Een planningsbuffer is een beheerde reserve; zij vervangt geen test of onduidelijk gereedcriterium. De scenarioquantielen van de code zijn een gesprek over onzekerheid, geen garantie van 90 % haalbaarheid voor Habitat.

statusveld	vastleggen
baseline	versie en oorspronkelijke aannamen
werkelijk	start/einde plus werkproduct
resterend	concrete activiteit, duur, blokkade
wijziging	reden, eigenaar, afhankelijke testen
besluit	nieuw kritische pad en vervolg

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.16

Een scenarioquantiel vraagt zijn aannamen

16/23

De 5000 modelplanningen gebruiken onafhankelijke driehoekige duren met grenzen 0,6d en 1,8d en modus d.

GEGEVEN

- Basisproject 23 werkdagen
- Modeluitvoer P10/P50/P90: 23,827 / 26,508 / 29,407 werkdagen

GEVRAAGD

- Verklaar de verschuiving en formuleer een juiste P90-zin

OPLOSSING

1. De gemiddelde taakduur van deze verdeling is (0,6d+d+1,8d)/3=1,133333d. De invoer heeft dus bewust een grotere gemiddelde duur dan de basisduur.
2. Voor alleen het basispad is de gemiddelde duur 23×1,133333=26,066667 dagen. Het maximum over routes kan bovendien door padwisseling groeien; de simulatie berekent iedere route opnieuw.
3. Zeg: ‘Binnen dit illustratieve duurmodel ligt 90 % van de gesimuleerde projecteinden vóór 29,407 werkdagen’. De invoerverdelingen, afhankelijkheid tussen risico's, kalender en middelen moeten nog met projectkennis worden onderbouwd.

ANTWOORD

P90 is hier een scenarioquantiel, geen bewezen 90 %-haalbaarheid van een echte deadline.

Klopt dit? Het hogere gemiddelde volgt uit de gekozen asymmetrie, niet uit een ontdekking over Habitat.

UITLEG · 48.17

Teamrollen bepalen wie beslist en overdraagt

Een team heeft zowel uitvoering als beslisbevoegdheid nodig. In onderstaande werkafspraak betekent U uitvoerder, B besliseigenaar, R raadplegen/reviewen en I informeren. Dit is een eigen rollenkaart, geen voorgeschreven norm. Meerdere uitvoerders kunnen samen werken; één benoemde besliseigenaar per activiteit voorkomt dat een interfaceconflict onbeheerd blijft.

De lokale actor-eigenaar uit e45 is een software-/systeembevoegdheid. De menselijke systeemeigenaar in deze tabel beslist over eisen en baselines. Die twee betekenissen mogen niet door elkaar raken. De operator kent de praktijk en moet vroeg bij herstel en acceptatie betrokken zijn, niet pas bij de eindpresentatie.

activiteit	systeemeigenaar	model	firmware	QA	operator
eisenbaseline	B	U	R	R	R
interfacecontract	B	U	U	R	R
model en voorspelling	B	U	R	R	I
lokale begrenzing	B	R	U	R	R
systeemproefbewijs	B	R	R	U	R
acceptatie/herstel	B	I	R	R	U
rapportversie	B	U	U	R	R

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.18

Een overdracht die een andere schrijver kan gebruiken

De modelauteur levert een temperatuurschatting aan de firmwareauteur.

GEGEVEN

- Module: Ca=80 kJ/K, Cb=1,10 MJ/K, H=20,2 W/K, G=30 W/K
- Stationbenchmark apart: C=540 kJ/K, H=50 W/K

GEVRAAGD

- Een kort controleerbaar overdrachtcontract

OPLOSSING

1. Lever benoemde grootheden, SI-eenheden, systeemgrens, startcondities, vaste klok/tijdstap en ontbrekende- en kwaliteitsvelden. Benoem versie en parameterherkomst.
2. Geef een minimale reproduceerbare referentierun: module, 600 W, start van lucht en buffer op 12 °C, buiten 4 °C, duur 24 h. Verwachte exacte waarden: lucht 28,375973 °C en buffer 24,941009 °C; noem numerieke tolerantie apart.
3. De ontvanger herhaalt de run, controleert eenheden en meldt het verschil met scenario-ID. De beide modellen worden niet stilzwijgend samengevoegd; een gevonden systeemgrensconflict gaat naar de besliseigenaar.

ANTWOORD

Overdracht = contract, run, versie, verwacht resultaat en ontvangstcontrole.

Klopt dit? Gebruik verwachte waarden om een fout te vinden, niet om uitvoer hard te coderen.

UITLEG · 48.19

Een pitch heeft een toetsbare kern

19/23

Een pitch geeft in korte tijd probleem, keuze, bewijs, risico en gevraagde vervolgstap. Begin met het gebruikersprobleem, niet met alle technieken die je kent. Eén figuur en enkele controleerbare getallen zijn meestal beter te volgen dan een lijst tools. Benoem waarom het bewijs het besluit ondersteunt en waar het nog ontbreekt.

Oefen hardop met een tijdmeter. Onderstaande tekst is een voorstel voor ongeveer twee minuten bij rustig spreken, geen gemeten spreektijd. Splits de repetitie in vier delen: probleem, architectuur, bewijs/grens, besluit. Laat een collega de hoofdclaim terugzeggen; als die sterker klinkt dan je data toelaten, herschrijf de pitch.

repetitiedeel	doel
0–20 s	probleem en gewenste dienst
20–60 s	ontwerpkeuze en eigenaarschap
60–100 s	bewijs plus beperkingen
100–120 s	risico en concrete vervolgstap

VERHAAL · 48.20

Een concrete pitch voor het stationsbrein

20/23

‘Het station moet klimaat en energie blijven beheren wanneer een netwerkbericht wegvalt of een meting ongeldig wordt. Ons voorstel verbindt een centrale planner met lokale regelkringen. De planner mag voorstellen doen; de lokale eigenaar bewaakt geldige invoer, tijd, vermogen en de actuele modus. De module en het 48 V-stationnet houden hun eigen energiegrens.

We hebben de rekenketen reproduceerbaar gemaakt. Het tweeknoopsmodel gebruikt 80 kJ/K luchtcapaciteit en 1,10 MJ/K buffer. Een referentierun met 600 W gedurende 24 uur geeft 28,376 °C lucht en 24,941 °C buffer. Dat controleert model en integrator, maar is nog geen meting van de installatie. Grens- en fouttests tonen hoe het softwarecontract ongeldige voorstellen weigert. Een echte actuator en onafhankelijke beveiliging vragen hun eigen afgebakende proeven.

Onze energieschatting op synthetische testdagen is conditioneel op gerealiseerd weer. We presenteren haar daarom nog niet als dag-vooruitvoorspeller. Ook de levenscyclusanalyse houdt de stationbatterijcapaciteit open: de grote productie- en vervangingsposten zijn eerst met leveranciersgegevens te controleren.

De volgende stap is een vaste scenario- en interfacebaseline, gevolgd door integratie- en storingproeven met traceerbaar bewijs. We vragen een besluit over dat proefplan en de benodigde data.

Zo kan de beoordeling straks vaststellen welke dienst het station werkelijk levert en welke risico's nog openstaan.’

pitchclaim	bewijsgrens
referentietemperaturen	berekend tweeknoopsmodel
ongeldige voorstellen	benoemde softwarecontracttests
voorspelling	conditionele synthetische data
milieu	parametrische LCA-screening

UITGEWERKT VOORBEELD · 48.21

Verdedig de claim zonder haar groter te maken

21/23

Een reviewer stelt drie kritische vragen.

GEGEVEN

- ‘Heb je veiligheid bewezen?’
- ‘Waarom geen één model voor alle warmte?’
- ‘Is de AI-fout dag-vooruit bruikbaar?’

GEVRAAGD

- Drie antwoorden plus het benodigde vervolg

OPLOSSING

1. ‘De softwaregrenzen zijn voor de beschreven gevallen getoetst. Fysieke actuator-/beveiligingswerking en gedeelde fouten vragen aparte proeven. We leggen die vast in FMEA en eisenregister; we claimen geen certificering.’
2. ‘Het modulemodel heeft lucht en buffer met eigen parameters; het stationbenchmark is één knoop. We kiezen de grens volgens de onderzochte dienst en toetsen de aansluiting, in plaats van capaciteiten op te tellen zonder fysische betekenis.’
3. ‘De gerapporteerde synthetische fout gebruikt gerealiseerd weer. Voor dag-vooruitprestaties hebben we gearchiveerde prognoses en een tijdgescheiden test nodig, inclusief de prognosefout.’

ANTWOORD

Antwoord met bewijs, grens en een concreet vervolgonderzoek.

Klopt dit? Als je het antwoord niet weet, benoem welke gegevens of proef het kunnen uitzoeken en wie dat oppakt. Een vlotte formulering is geen nieuw bewijs.

NASLAG · 48.22

Van claim tot besluit

voorwaartse planning

$$ES_i = \max_{j \in pred(i)} EF_j, \quad EF_i = ES_i + d_i$$

symbool	betekenis	eenheid
d_i	taakduur	werkdagen

achterwaartse planning

$$LF_i = \min_{j \in succ(i)} LS_j, \quad LS_i = LF_i - d_i$$

symbool	betekenis	eenheid
$LS_i - ES_i$	totale speling	werkdagen

rapportcontrole	vraag
claim	welke eis/dienst?
bewijs	welke data/versie/conditie?
figuur	eenheden, bron, eigen caption?
planning	afhankelijkheden én capaciteit?
team	uitvoering, besluit en overdracht?
conclusie	beperking en vervolg zichtbaar?

HET GEHEEL · 48.23

Het projectplan voor het brein van het station

De projectgids koppelt eisen, model, firmware, data, risico en rapport aan dezelfde versie. De planning volgt bewijs dat werkelijk nodig is, en de verdediging gebruikt alleen prestaties die dat bewijs draagt.

E41 Van data naar model: regressie

Conditionele data en voorspelfout niet verwarren.

E45 Systems engineering en het V-model

Traceerbare eisen en interfacebaseline.

E46 Betrouwbaarheid en risico

FMEA en open storingbewijs.

E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

Inventaris, scenario en bronstatus.

E49 Integratieproject: het brein van het station

Integratieplan, eindrapport en verdediging.

Habitat

Het negen-takennetwerk is een onderwijsplanning, geen voortgangsclaim. Habitat krijgt een projectplan met mijlpalen, middelen, rollen, gereedcriteria en open risico's. Cijfers uit andere hoofdstukken houden hun eigen grens en datastatus. Primaire methodische bronnen: GAO-16-89G en JCGM GUM-register; geraadpleegd 30-09-2026.

SAMENVATTING

In het kort

- Een technisch rapport verbindt vraag, methode, resultaat en besluit.
- Iedere figuur en tabel draagt eenheden, condities, bron en gegevenssoort.
- Het kritische pad volgt uit afhankelijkheden; capaciteit kan het veranderen.
- Een baseline en gereedbewijs maken voortgang beoordeelbaar.
- Rollen en overdrachten bewaken interfaces en beslisbevoegdheid.
- Een goede verdediging houdt claim en bewijs even groot.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

kritisch pad
Langste afhankelijkheidsroute die onder de gekozen planningsvoorwaarden de projectduur bepaalt.

totale speling
Verschil tussen laatste en vroegste start zonder de berekende projecteinddatum te verschuiven.

baseline
Benoemde versie waartegen wijzigingen en voortgang worden beoordeeld.

review
Gerichte beoordeling van een werkproduct en zijn bewijs door een ander.

verdediging
Onderbouwd antwoorden op kritische vragen met claims, bronnen en grenzen.

HANDBOEK · HOOFDSTUK 49

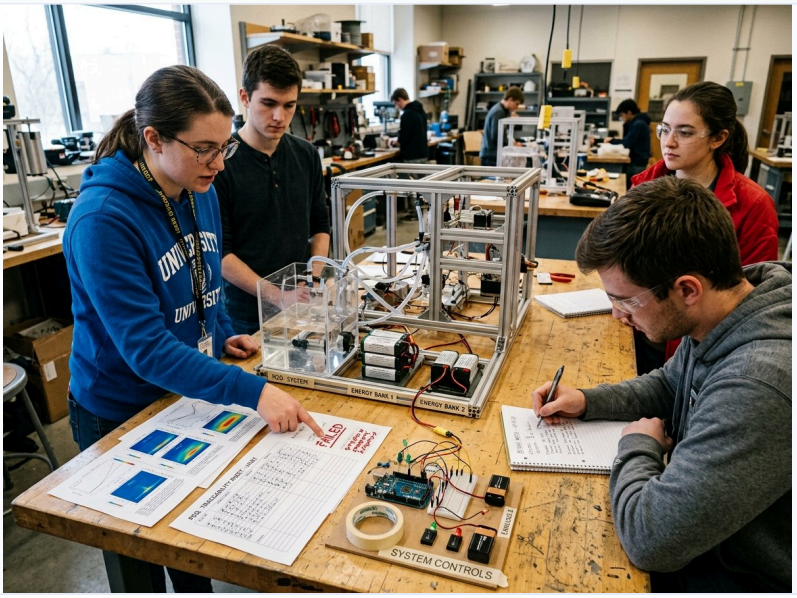
Integratieproject: het brein van het station

Een reproduceerbaar stationontwerp met twee energierails, lokale bevoegdheid en zichtbare bewijsgrenzen

Je brengt warmte, energie, water, software, prognoses en levenscyclusimpact samen in één zelfstandig simulatiepakket. Je volgt eisen tot echte normale en gestoorde runs en beslist wat het bewijs werkelijk draagt. Het resultaat bevat ook de functies die nog niet mogen worden vrijgegeven.

20× uitleg · 11× uitgewerkt voorbeeld · 1× proef · 9× naslag · 1× verhaal · 1× het geheel · 8× code · ± 55 lestijden

D Ontwerpen en maken · R Regelen en robotica · E Energie · A Data en AI · P Programmeren en computationeel denken · B Leven en systemen



Het project eindigt met een review van bewijs en beperkingen, niet met alleen een groen dashboard.

Na dit hoofdstuk

- Je vertaalt behoeften naar unieke toetsbare eisen en een architectuur volgens het V-model.
- Je leidt een samenhangende digitale tweeling af en controleert warmte-, energie- en waterbalansen.
- Je gebruikt PID, saturatie en tracking met werkelijk geleverde actuatorwarmte.
- Je beproeft lokale bevoegdheid, meetkwaliteit, storingen, replay en vergrendelde herstart.
- Je evalueert een prognosemodel zonder tijdlek met een gelijke baselinehorizon en onthouding.
- Je koppelt FMEA, LCA, restonderzoek en een reproduceerbare verdediging aan een verantwoord acceptatiebesluit.

VERHAAL · 49.1

Een review is pas geslaagd als het besluit klopt

Een team toont een fraai dashboard: zon, batterij, reservoir en kamertemperatuur staan groen. De reviewer zet de broker uit, verstuurt een oud setpoint en laat de tank lekken. Het scherm is geen antwoord. Het antwoord zit in bevoegdheid, fysische stroompaden, meetkwaliteit en bewijs.

Het NASA Systems Engineering Handbook, bijlagen D, E en I koppelt eisen met unieke IDs aan verificatie en onderscheidt validatie: klopt de uitvoering met de eis, en voldoet de dienst in haar gebruikscontext? Habitat wordt hier een reproduceerbaar ontwerpexperiment. Het pakket levert controleerbare bewijzen én redenen om een functie nog niet aan te nemen. De projectuitkomst is een verdedigbaar besluit, ook wanneer comfort of hardware niet voldoet. Bron geraadpleegd 30-09-2026.

Reviewbewijs	Betekenis
Numerieke balans	Conservatie van het gekozen model
Contractproef	Begrensde softwarebeslissing
Fysische proef	Werkelijke dienst en hardware in hun context

UITLEG · 49.2

De opdrachtgrens en de oplevering

E49 integreert het station met precies één bestaande klimaatmodule. De oplevering omvat eisen, architectuur, interfacecontracten, digitaal lesmodel, lokale regeling, forecast, FMEA, LCA en eindrapport. Het pakket bestuurt geen installatie. De 12 V- en 48 V-rails zijn elektrisch gescheiden; warmte kan vanuit de stationbuffer naar de module lopen. NFT, drinkvoorraad en gezuiverde H_2-voeding hebben eigen balansen.

De configuratie heet **E49-S2-12-v1**: 12 kWh stationopslag, vaste UTC+1, 8–14 maart 2021, seed 4902026. Dit is geen gemeten historische weerweek. Nieuwe capaciteiten, verliezen, profielen en debieten zijn benoemde modelkeuzen. Een geslaagde numerieke proef wordt geen installatiekeuze. Code, config, invoer, twaalf logs, gebeurtenissen en grenzen worden samen geleverd.

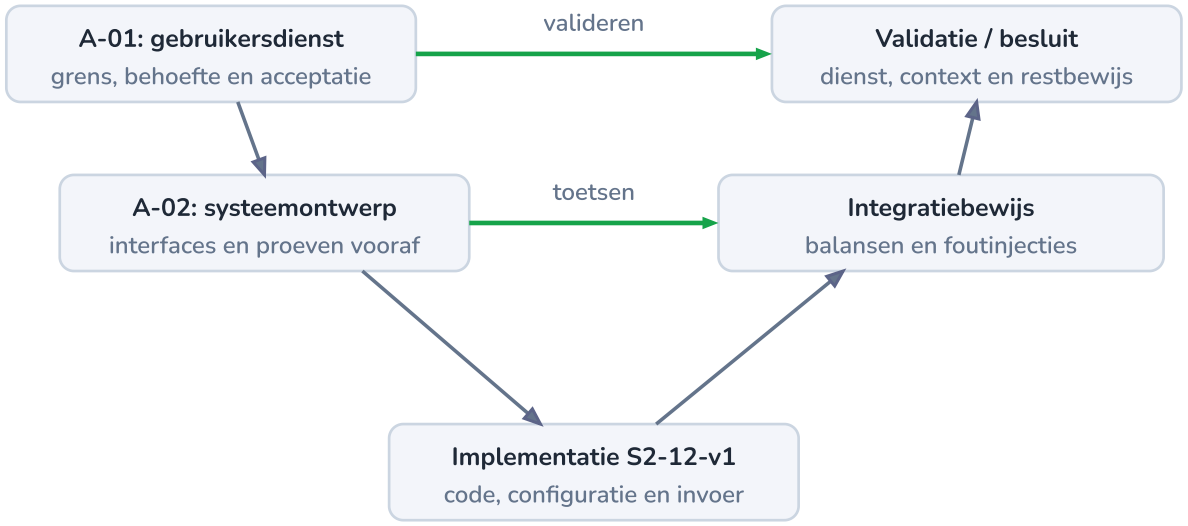
Vaste proefkeuze	Waarde
Config	E49-S2-12-v1
Klok / kalender	UTC+1 vast; 8–14 maart 2021
Oplevering	Code, input, 26 uitvoerbestanden en acceptatieboek

UITLEG · 49.3

Het V-model koppelt ontwerp aan bewijs

Links leg je behoefte, grens, eisen en subsystemen vast. Onderaan implementeer je. Rechts toets je onderdelen, interfaces, integratie en dienst. Een syntactisch geldig centraal voorstel kan door de lokale eigenaar worden geweigerd; dat kan precies de eis zijn.

T-01 sluit de warmteboekhouding van het model; T-03 beoordeelt comfort. Een klein RK4-residu maakt een onjuiste verliescoëfficiënt niet waar. Een stopcontract bewijst geen contactorreactietijd. Iedere rechtertak noemt daarom methode, opstelling, ingreep, grens, bewijsbestand, beoordelaar en onzekerheid.



De horizontale verbindingen koppelen een ontwerpbesluit aan vooraf benoemd bewijs. Rechts blijft het mogelijk dat de dienst niet wordt aanvaard.

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.4

Van behoefte naar één toetsbare eis

4/51

Netwerkuitval mag geen onbevoegd klimaatcommando vasthouden.

GEGEVEN

- Lokale eigenaar woon; normaal doel 20 °C
- Lease 60 s; centrale telemetrie 60 s

GEVRAAGD

- Eis, test en besluit

OPLOSSING

1. D-03: zodra de lease verloopt kiest de lokale eigenaar 20 °C; een oude boodschap vernieuwt de lease niet.
2. Route: Pi → voorstel → lokale eigenaar → begrensde PID. Test: doel 19,5 °C op t=0, TTL 60 s, daarna geen bericht. Op t=60 wordt het doel 20 °C.
3. De brokerweek telt 1440 terugvalminuten. Normale voorstellen waren al 20 °C, dus de temperatuur is identiek. Dat bewijst deze bedrijfsmodus, geen AI-besparing.

ANTWOORD

D-03 slaagt als logische proef; echte netwerk-/klok-/opslagproeven blijven nodig.

Klopt dit? De grens nu < tijd+TTL maakt t=60 verlopen, ook als een MQTT-session nog bestaat.

NASLAG · 49.5

Programma van eisen: energie en warmte

5/51

Eis-ID en grens	Bewijs	Besluit
A-01 Twee rails, één station plus één module; geen verborgen converter.	Architectuur, config, twee saldi	modelgrens gecontroleerd
A-02 Elke eis heeft eigenaar, proef, bewijs en besluit.	Traceermatrix en eindrapport	projectprocedure
E-01 Opslag blijft binnen SOC-venster; tekorten blijven zichtbaar.	Twaalf weeklogs en contracttests	model geslaagd; autonomie niet
E-02 4 kVA continu, 8 kVA maximaal 5 s; P/Q/S en bankstroom samen.	Afschakel- en aanloopproef	continue selectie geslaagd; aanloop niet
E-03 Laadstroom apart: 80 A module, 60 A station; koude-interlock.	Koude/volle proef en contracttests	logica geslaagd; fabrikantbewijs open
E-04 16S-venster 44,8–55,2 V; iedere cel 2,8–3,45 V.	58,4 V en ongelijke-celtest	weigering geslaagd; celselectie open
E-05 Windafregeling bewaakt 3 kW-dump en echte remgrenzen.	Vol-week en 245 V-rekening	nominaal model geslaagd; fysiek open
T-01 Vier warmtevoorraden, transporttekens en residu sluiten.	RK4, weekbalans, stapverfijning	numeriek geslaagd; niet gekalibreerd

Eis-ID en grens	Bewijs	Besluit
T-02 Convector maximaal 800 W; warmte hangt van buffertemperatuur af.	warmtestap en qmodule_W	modelgrens geslaagd
T-03 Woondeel ≥19 °C; module ≥17,5 °C van 07–22 h, anders ≥15,5 °C.	Comforttellers alle scenario's	module normaal 0,5 h niet gehaald
T-04 Tracking gebruikt werkelijk geleverde actuatorwarmte.	PID en anti-windupproef	logica geslaagd

NASLAG · 49.6

Programma van eisen: water, data en bevoegdheid

6/51

Eis-ID en grens	Bewijs	Besluit
W-01 NFT en drinkvoorraad apart; recirculatie is geen verbruik.	Massabalans en doorzet	model geslaagd; waterkwaliteit open
W-02 24 L-vlotter onafhankelijk; flowverlies stopt pomp.	Lek- en pompfoutweek	ideaal contact geslaagd; hardware open
H-01 Elektrolyse alleen uit bereikbaar 48 V-overschot.	H_2-energie-, verlies- en massalog	model geslaagd
H-02 Gezuiverde voeding begrenst H_2-productie.	20 L-balans en lege-proef	minimumvoeding geslaagd; praktijk open
D-01 Identiteit, leeftijd ≤90 s, kwaliteit, eindigheid en innovatie.	Stale/NaN/freeze/bias-tests	logica geslaagd; gedeelde bias ontsnapt
D-02 Voorstel heeft boot/seq/tijd/TTL/mode/ACK en begrensd doel.	Geldige en onjuiste voorstellen	logica geslaagd
D-03 Verlopen lease valt lokaal terug naar 20 °C.	Brokerweek en leasecontract	1440 min terugval; geen besparingsbewijs
D-04 Oud voorstel wordt na herstart opnieuw geweigerd.	Replayregister via JSON	logica geslaagd; duurzame opslag open
V-01 Stop/voedingsverlies vergrendelt; gezonde resetflank met verzoek/contact uit.	Contacttrace en resetreeks	logica geslaagd; hardware open
V-02 Ventilatie heeft een afzonderlijke risicogestuurde tak.	Stopweek en koud_leeg	stopweek gevoed; koude lege proef faalt

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.7

Programma van eisen: prognose, impact en claim

7/51

Vijf laatste eisen verbinden de numerieke proef met een geldig systeemclaim.

GEGEVEN

- AI-01/AI-02: tijd, horizon en onthouding

GEVRAAGD

- Een besluit per bewijssoort

- L-01/B-01/Q-01: grens, claim en reproductie

OPLOSSING

1. AI-01 krijgt alleen prognosefeatures en een tijdsplit; AI-02 heeft een expliciete null-terugval.
2. L-01 gebruikt dezelfde S1-inventarisgrens met nieuwe benoemde invoer. B-01 bewaart ontbrekend biologisch/medisch bewijs.
3. Q-01 laat een andere leerling de volledige run reproduceren.

ANTWOORD

Een goede score geeft geen onbewezen voorziening vrij.

Klopt dit?

EIS-ID EN GRENS	BEWIJS	BESLUIT
AI-01 Alle features vóór dezelfde 24 h-doelhorizon beschikbaar.	Archief, tijdsplit en RMSE	synthetische demonstratie geslaagd
AI-02 Onthouding bij ontbrekende/ongeldige prognose; lokale terugval.	Null- en buitengebiedproef	logica geslaagd
L-01 E47-S1-grens, 20 jaar, station plus één module; S2 expliciet.	Inventaris en 18 gevoeligheden	screening geslaagd; jaarfunctie open
B-01 Geen PCR-/teelt-/ademgas-/medische claim zonder passend bewijs.	Restonderzoek e29–e33	geen behaalde stationsvoorziening
Q-01 Code, config, invoer en logs zelfstandig reproduceerbaar.	Schone-maprun en SHA	behaald voor dit pakket

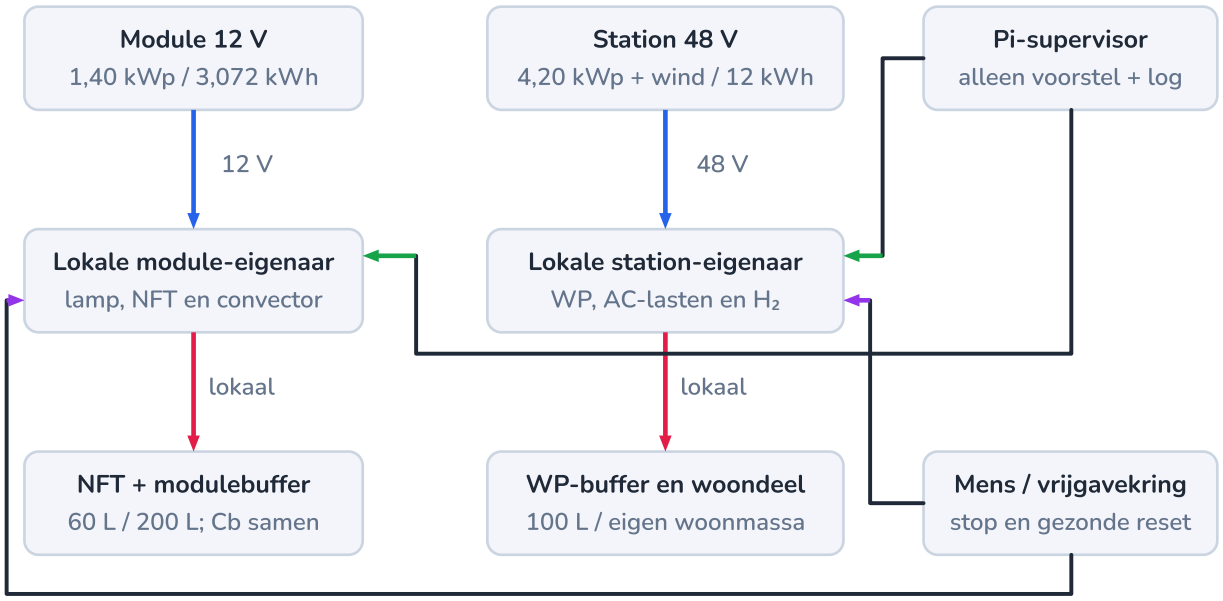
UITLEG · 49.8

Architectuur: een stroom heeft een eigenaar

8/51

Module-PV 1,40 kWp voedt de 12 V-bank; extra PV 4,20 kWp en wind voeden de 48 V-bank. Totaal PV is 5,60 kWp. Alleen stationoverschot bereikt elektrolyse. Zonder ontworpen converter kan een volle stationbank de module niet bijladen en kan 12 V-afregeling geen waterstof produceren.

De module-eigenaar beheert lamp, NFT-pomp en convector; de station-eigenaar beheert WP, AC-selectie en H_2. Eén vrijgavemodel abstraheert hier gemeenschappelijke stopvoorwaarden. Een installatie moet echte eigenaren, contactoren, terugmeldingen en ventilatievoeding apart implementeren en toetsen. Telemetrie gaat naar Pi/logger; voorstellen gaan naar de lokale eigenaar. De mens stopt en reset onder voorwaarden. Geen AI- of MQTT-bericht heft dat op.



Drinkwater 500 L en H_2-proceswater 20 L zijn aparte voorraden.

Geen elektrische verbinding tussen de rails; warmte loopt via de WP-buffer.

Kleur 1 toont voeding en kleur 3 de voorstelroute. De Pi vervangt geen lokale eigenaar; een aparte vrijgavekring begrenst gevaarlijke functies. Essentiële ventilatie heeft een afzonderlijke voedingstak, die in de koude lege proef toch kan uitvallen.

NASLAG · 49.9

Hoofdparameters met herkomststatus

9/51

Grootheid	Waarde	Status
Moduleopslag / PV	3,072 kWh / 1,40 kWp	Habitat; 20–100% bruikbaar
Stationopslag / PV	12 kWh / 4,20 kWp	S2-keuze / bestaand extra PV
48 V laden / ontladen	60 A / 100 A; 130 A gedurende 5 s	eigen laadkeuze / ontlaadgrens
η laden / ontladen / inverter	0,95 / 0,96 / 0,93; 25 W	rekenaannamen
Ca / Cb / G / Hmodule	80 kJ/K / 1,10 MJ/K / 30 / 20,2 W/K	e17-module
Cwoon / Cwp	1,80 MJ/K / 418,6 kJ/K	nieuwe woonkeuze / 100 L water
Hwoon / Hvent	29,8 / 5,025 W/K	ventilatie inbegrepen bij 100 m³/h
NFT / drink / H_2-water	60 / 500 / 20 L	twee bestaande tanks / eigen gezuiverde voeding
Klok / besturing / plant	UTC+1 / 60 s / RK4 30 s	leskeuze, geen deadlinebewijs
Starttemperaturen	Ta=Tb=18; Th=20; Tw=35 °C	beginvoorraad bevat warmte

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.10

Capaciteit is nog geen autonomie

De bank gebruikt 12 kWh nominaal tussen SOC 0,20 en 0,90.

GEGEVEN

- ηd=0,96; ηinv=0,93
- 250 W AC, 25 W inverter, 48 W aparte DC

GEVRAAGD

- Bruikbare energie, nominale Ah en beperkte autonomie

OPLOSSING

1. Vóór verliezen: 12×(0,90−0,20)=8,4 kWh. Bij nominaal 51,2 V hoort 12000/51,2=234,375 Ah. Dat kiest geen cel of BMS.
2. Railvraag=250/0,93+25+48=341,817204 W; opslagafname=341,817204/0,96=356,059588 W.
3. Zonder bronnen/veroudering: 8400/356,059588=23,591557 h. Alleen 8,4/0,25=33,6 h rekenen vergeet hulp- en padverliezen.

ANTWOORD

23,59 h uitsluitend voor deze constante last.

Klopt dit? Module: 3,072×0,80=2,4576 kWh bruikbaar; de twee ondergrenzen zijn eigen voorraden.

UITLEG · 49.11

Spanning, stroom en schijnvermogen zijn verschillende toetsen

Bij inductieve AC-lasten tel je P en Q met hun tekens op en bereken je S. Hier hebben de lastprofielen laggende positieve Q en een opgegeven cos φ. Het is geen harmonischen-/golfvorm-/motorstartmodel. 8 kVA gedurende vijf seconden betekent niet dat iedere bank 8 kW kan leveren.

Het 16S-venster 2,8–3,45 V per cel geeft 44,8–55,2 V binnen de 44–56 V-rail. 16×3,65=58,4 V wordt geweigerd. Modulelading onder 0 °C is verboden; het station gebruikt een eigen strengere 5 °C-proefgrens. Fabrikantbewijs voor celvenster, capaciteit, BMS, converter, stroomduur en temperatuur ontbreekt. SOC voorspelt geen celspanning.

P, Q EN S

$$Q = \sum_i P_i \tan(\arccos \mathrm{pf}_i), \quad \mathrm{pf}_i = \cos \varphi_i, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

CONSERVATIEVE BATTERIJPADTOETS

$$I_{\mathrm{bank}} = \frac{P/\eta_{\mathrm{inv}} + P_0 + P_{\mathrm{DC}}}{U \eta_{\mathrm{d}}}$$

ηd is het gekozen ontlaadpad; U=44,8 V. De losse selectie rekent zonder gegarandeerde directe bronnen.

CODE · 49.12

De lastselectie weigert een echte dienst

Prioriteit: drinkdruk, koelkast, WP, rest, noodwarmte. Iedere extra last wordt getoetst op S, beschikbaar DC-vermogen en stroom; weigering blijft een diensttekort. De WP-grens is de e16-waarde 1163,250573 W. Dit leesdeel hoort bij het volledige programma, niet bij een eigen verborgen model.

Python `leesdeel_pq_kies_lasten.py` 21 regels

```python
def pq(lasten):
    p = sum(w for w, pf in lasten)
    q = sum(w*math.tan(math.acos(pf)) for w, pf in lasten)
    return p, q, math.hypot(p, q)

def kies_lasten(c, gevraagd, bus_W, spanning, piek=False):
    """Volgorde bepaalt prioriteit; elke afgewezen dienst blijft in het log."""
    geleverd, geweigerd, lasten = {}, {}, []
    limiet = c["omvormer_piek_VA"] if piek else c["omvormer_cont_VA"]
    stroom = c["b48_piek_A"] if piek else c["b48_ontlaad_A"]
    for naam, w, pf in gevraagd:
        p, q, s = pq(lasten+[(w, pf)])
        dc = p/c["omvormer_eta"]+c["omvormer_nullast_W"]
        if s <= limiet and dc <= bus_W and dc/spanning <= stroom:
            geleverd[naam] = w
            lasten.append((w, pf))
        else:
            geleverd[naam], geweigerd[naam] = 0.0, w
    p, q, s = pq(lasten)
    dc = p/c["omvormer_eta"]+c["omvormer_nullast_W"] if p else 0
    return geleverd, geweigerd, (p, q, s, dc)
```


```
{
  "gevraagd_PQS": [
    4363.250572652715,
    1030.8345703493094,
    4483.366533218257
  ],
  "geleverd_PQS_DC": [
    2363.250572652715,
    1030.8345703493094,
    2578.288808603612,
    2566.129648013672
  ],
  "afgewezen_W": {
    "nood": 2000
  },
  "duur_s": 60,
  "nood_niet_geleverd_kWh": 0.03333333333333333
}
```

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.13

4,48 kVA past niet continu; 7,28 kVA is geen vrijbrief

13/51

Een combinatie vraagt drukpomp, koelkast, WP, 300 W rest en 2 kW noodwarmte. Een tweede proef onderzoekt aanloop.

GEGEVEN

- Continu 4000 VA
- Aanloop P=5232 W, S=7280 VA, overige DC=48 W

GEVRAAGD

- Weigering en restbewijs

OPLOSSING

1. Continu P=4363,251 W, Q=1030,835 var, S=4483,367 VA. De selector weigert 2000 W noodwarmte; één minuut mist 0,033333 kWh.
2. Aanloop-Q=√(7280²−5232²)=5062,072303 var. S<8000, maar I=132,505730 A>130. Deze aanloop is niet gehaald.
3. P=5000 W bij dezelfde S geeft 126,705359 A. Dat selectiepunt past, maar bewijst niet dat dezelfde motor zo werkelijk aanloopt. Starter/motor/volgorde vragen een fysieke 5 s-proef met spanningsdip.

ANTWOORD

De sterkste vermogen-/stroomgrens geldt.

Klopt dit? Met alle gekozen padverliezen: Pmax=0,93×(44,8×130×0,96−25−48)=5131,7772 W.

UITLEG · 49.14

Vier toestanden en twee verschillende waterbuffers

14/51

Ta is modulelucht, Tb haar bestaande thermische buffer, Th woondeel en Tw de aparte 100 L-WP-buffer. De 200 L-modulebuffer en NFT zijn al opgenomen in Cb=1,10 MJ/K. De 100 L-WP-buffer verschijnt eenmaal als 418,6 kJ/K. Cwoon=1,80 MJ/K is een nieuwe leskeuze; e39's 540 kJ/K wordt geen extra kamer.

De PID geeft reeds begrensde vragen van maximaal 800 W en 2500 W. De plant gebruikt qm=min(begrensde vraag,80·max(Tw−Ta,0)) en qh=min(begrensde vraag,140·max(Tw−Th,0)). Beide worden bij Tw afgetrokken en bij hun zone toegevoegd. WP-bufferverlies 2(Tw−Th) gaat intern naar het woondeel. Hwoon bevat Hvent=5,025 W/K al. Zonder gevoede ventilatie wordt uitsluitend die bestaande bijdrage afgetrokken en tegelijk een essentiële-diensttekort geregistreerd.



De warmtestromen qm en qh hangen van Tw−Ta en Tw−Th af. Er komt geen convectorwarmte uit een koude buffer. De twee pijlen tussen lucht en modulebuffer staan voor een omkeerbare transportstroom, geen twee gelijktijdige bronnen.

UITLEG · 49.15

Afleiden vóór integreren: vier warmtevergelijkingen

15/51

G(Ta−Tb) heeft tegengestelde tekens in lucht en modulebuffer. Externe bronnen zijn WP, noodwarmte en proefwinsten. Nieuwe winsten: 0,6 m² effectieve modulezonwinst, lampwarmte, maximaal 20 W andere lokale warmte, 180 W bewoners en werkelijk geselecteerde binnenlasten. Dit zijn geen gekalibreerde gegevens.

MODULELUCHT

$$C_a\dot{T}_a = q_m + q_{g,m} - H_m(T_a - T_o) - G(T_a - T_b)$$

MODULEBUFFER

$$C_b\dot{T}_b = G(T_a - T_b)$$

WOONDEEL

$$C_h\dot{T}_h = q_h + 2(T_w - T_h) + q_n + q_{g,h} - H_h(T_h - T_o)$$

WP-BUFFER

$$C_w\dot{T}_w = q_{\mathrm{wp}} - q_m - q_h - 2(T_w - T_h)$$

Optellen elimineert alle interne transporten; ΔΣCT is externe warmte-in minus buitenverlies. Cb blijft vast wanneer NFT leegloopt en verplaatst water draagt geen expliciete enthalpie mee. Deze vereenvoudigde warmte-/waterkoppeling verhindert een gevalideerde fysieke temperatuurbaan bij groot waterverlies.

CODE · 49.16

RK4 en transportflux krijgen dezelfde gewichten

Temperatuur en flux gebruiken dezelfde RK4-gewichten. Iedere deelstap berekent transport uit de buffertemperatuur; een koude buffer levert geen gratis 800 W. De assert vergelijkt ΔΣCT en externe nettowarmte in J. De 60 s-regelactie blijft gelijk terwijl de plantstap 60, 30 en 15 s varieert. Dat is integratieverfijning, geen stille verandering van controller of telemetrie.

Python `leesdeel_warmtestap.py` 30 regels

```python
def warmtestap(c, z, tout, qm_req, qh_req, qwp, qnood,
               gains_m, gains_h, extra_H, hwoon, dt):
    """RK4 integreert toestanden EN dezelfde fluxen voor de balans."""
    capaciteiten = np.array([c["Ca_J_K"], c["Cb_J_K"],
        c["Cwoon_J_K"], c["Cwp_J_K"]])
    def f(t):
        a, b, h, w = t
        qm = min(qm_req, c["Gconvector_W_K"]*max(0, w-a))
        qh = min(qh_req, c["Gvloer_W_K"]*max(0, w-h))
        qbw = c["Hwp_naar_woon_W_K"]*(w-h)
        g = c["Gmodule_W_K"]*(a-b)
        lm = (c["Hmodule_W_K"]+extra_H)*(a-tout)
        lh = hwoon*(h-tout)
        vermogen = np.array([qm+gains_m-lm-g, g,
            qh+qbw+qnood+gains_h-lh, qwp-qm-qh-qbw])
        flux = np.array([qm, qh, lm, lh, qbw])
        return vermogen/capaciteiten, flux
    voor = z.copy()
    som = np.zeros(5)
    for _ in range(round(c["besturing_s"]/dt)):
        k1, f1 = f(z)
        k2, f2 = f(z+dt*k1/2)
        k3, f3 = f(z+dt*k2/2)
        k4, f4 = f(z+dt*k3)
        z = z+dt*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        som += dt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6
    delta = float(capaciteiten@(z-voor))
    netto = (qwp+qnood+gains_m+gains_h)*c["besturing_s"]-som[2]-som[3]
    assert abs(delta-netto) < 1e-5
    return z, som, delta-netto
```

UITLEG · 49.17

PID trackt werkelijk geleverde warmte

Module Kp/Ki/Kd=220/0,03/1200; woondeel 350/0,025/3000; buffer 550/0,12/0. Eenheden zijn W/K, W/(K·s) en W·s/K. I heeft eenheid W. De afgeleide op meting wordt gefilterd met 60 s-tijdconstante; een setpointsprong geeft geen directe afgeleidepiek.

Verzadiging, koude buffer, spanningsgebrek of meetweigering vermindert werkelijk geleverde warmte. Tracking gebruikt die flux, niet alleen de clamp. De drie echte lussen hebben trackingtijd 600 s. De aparte uitvalproef gebruikt 120 s als overzichtelijke vergelijking. Dit is modeltuning; identificatie, anti-cycling en rekendeadlines blijven praktijkbewijs.

TRACKING ANTI-WINDUP

$$u^* = K_p e + I - K_d \dot{y}_f, \quad \dot{I} = K_i e + \frac{u_{\text{werkelijk}} - u^*}{\tau_{\text{aw}}}$$

CODE · 49.18

Dezelfde PID-klasse stuurt drie echte lussen

18/51

Eindigheidscontrole weigert NaN/oneindige instellingen of setpoints. Na iedere minuut komen qm/qh terug uit de geïntegreerde flux en qwp uit het geselecteerde WP-vermogen. Een compressorstoring maandag 23:00–dinsdag 04:00 maakt compressorwarmte nul; hydraulische hulp heeft een aparte voeding.

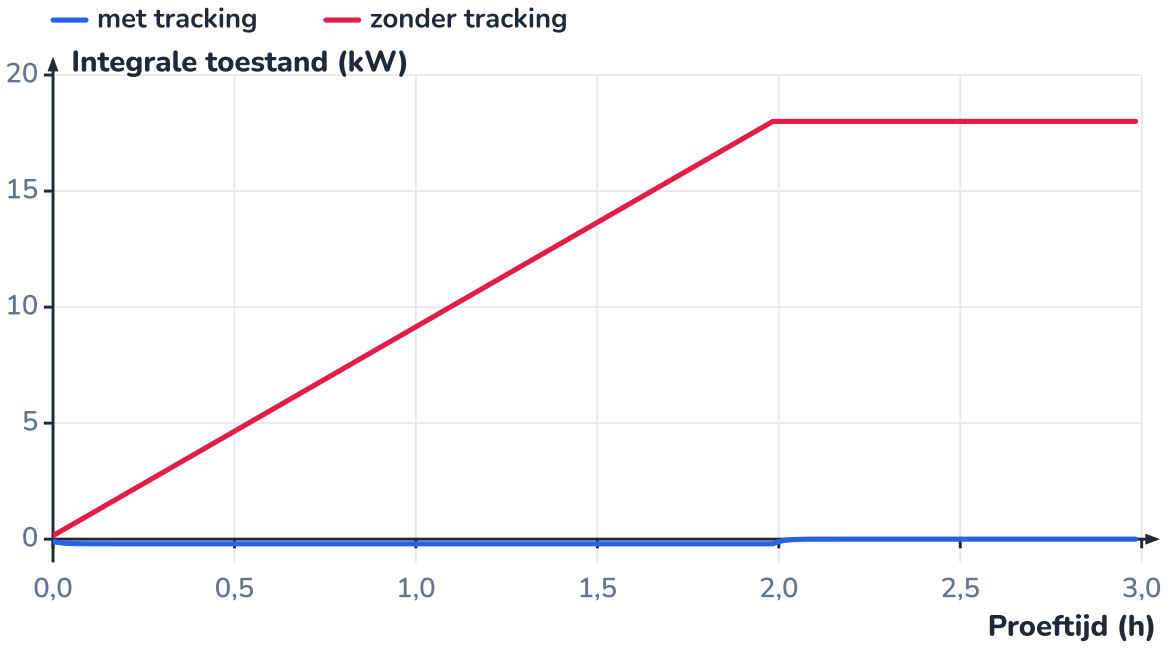
Python `leesdeel_PID.py` 26 regels

```python
class PID:
    """Afgeleide op meting; integrale toestand heeft eenheid watt."""
    def __init__(self, kp, ki, kd, maximum, begin=0, tau_d=60, tau_aw=600):
        if not all(finite(x) for x in (kp, ki, kd, maximum, begin, tau_d, tau_aw)):
            raise ValueError("niet-eindige PID-instelling")
        if min(kp, ki, kd) < 0 or min(maximum, tau_d, tau_aw) <= 0:
            raise ValueError("ongeldige PID-instelling")
        self.kp, self.ki, self.kd = kp, ki, kd
        self.maximum, self.I = maximum, begin
        self.tau_d, self.tau_aw = tau_d, tau_aw
        self.vorig, self.d = None, 0.0

    def vraag(self, setpoint, y, dt):
        if not all(finite(a) for a in (setpoint, y, dt)) or dt <= 0:
            raise ValueError("ongeldige PID-invoer")
        afgeleid = 0 if self.vorig is None else (y-self.vorig)/dt
        a = math.exp(-dt/self.tau_d)
        self.d = a*self.d+(1-a)*afgeleid
        self.vorig = y
        self.e = setpoint-y
        self.onbegrensd = self.kp*self.e+self.I-self.kd*self.d
        return min(self.maximum, max(0.0, self.onbegrensd))

    def terug(self, werkelijk, dt, aw=True):
        correctie = (werkelijk-self.onbegrensd)/self.tau_aw if aw else 0
        self.I += dt*(self.ki*self.e+correctie)
```

WP-storing: warmte 35,546 kWh, WP-elektrisch 17,614 kWh, noodwarmte 0,967 kWh. De aparte uitvalproef geeft na 2 h I=−200 W met tracking tegenover 18000 W zonder; eerste herstelactie 0 tegenover 800 W.



Dit aparte PID-rekenproefje gebruikt Kp=100, Ki=0,5 en trackingtijd 120 s. Het vergelijkt dezelfde opgelegde meetfout en actuatoruitval; het is geen extra temperatuurregelaar in Habitat.

UITLEG · 49.19

Meetkwaliteit hoort vóór de regelaar

19/51

De moduleluchtketen heeft een gesimuleerde eersteorde sensorvertraging van 60 s met stukconstant Ta per minuut. Dit is geen gemeten sensor of integraal continu sensor-/plantmodel, geen extra digitaal filter en geen menging met de buffer-NTC. De lokale poort toetst identiteit, boot/seq, eindigheid, leeftijd, kwaliteit, bereik en innovatie. 0,8 K en freeze-criteria zijn proefgrenzen, geen aangetoonde sensoronzekerheidsbegroting.

De ideale modelwatcher herkent een afzonderlijke bias van +3 °C, maar geen gedeelde bias van model en sensor. Die tegenproef blijft zichtbaar. Bij afwijzing wordt convectorwarmte nul; de echte planttemperatuur vervangt de defecte meting niet. Home-/WP-sensoren zijn in deze versie ideaal en vragen eigen kwaliteitsbewijs.

Ketenonderdeel	Proefstatus
Sensorlag 60 s	Gesimuleerd, Ta stukconstant per minuut
Innovatiegrens 0,8 K	Eigen detectiecriterium, geen ijking
Home-/WP-sensor	Ideaal in deze versie; praktijkbewijs open

CODE · 49.20

Ontbreekt, stale, NaN, freeze en bias hebben aparte redenen

20/51

De poort geeft een waarde of None met reden. Standaard JSON bewaart null/status, geen NaN-token. Freeze: twaalf exact gelijke metingen terwijl de modelvoorspelling meer dan 0,15 K verandert. Een rustige sensor wordt niet zonder veranderingsbewijs bevroren genoemd.

Python `leesdeel_MeetPoort.py` 36 regels

```python
class MeetPoort:
    """Alleen modulelucht: geen menging van lucht en reservoir-NTC."""
    def __init__(self, c):
        self.c, self.seq, self.historie = c, -1, []

    def meet(self, m, nu, voorspelde_sensor_C):
        if not finite(nu) or not finite(voorspelde_sensor_C):
            return {"waarde": None, "status": "ONGELDIG_MODEL"}
        if m is None:
            return {"waarde": None, "status": "ONTBREEKT"}
        if not all(k in m for k in ("node", "boot", "seq", "tijd", "C", "quality")):
            return {"waarde": None, "status": "SCHEMA"}
        status = "goed"
        if m["node"] != "modulelucht" or m["boot"] != "mega-A":
            status = "BOOT"
        elif not all(finite(m[k]) for k in ("seq", "tijd", "C")):
            status = "NIET_EINDIG"
        elif not isinstance(m["seq"], int) or m["seq"] <= self.seq:
            status = "REPLAY"
        elif not 0 <= nu-m["tijd"] <= self.c["meting_max_leeftijd_s"]:
            status = "STALE_KLOK"
        elif m["quality"] != "goed" or not -20 <= m["C"] <= 50:
            status = "QUALITY_BEREIK"
        elif abs(m["C"]-voorspelde_sensor_C) > .8:
            status = "INNOVATIE"
        else:
            self.seq = m["seq"]
            self.historie.append((m["C"], voorspelde_sensor_C))
            self.historie = self.historie[-12:]
            if len(self.historie) == 12:
                gem = [a for a, _ in self.historie]
                pred = [b for _, b in self.historie]
                if max(gem)-min(gem) < 1e-8 and max(pred)-min(pred) > .15:
                    status = "FREEZE"
        return {"waarde": float(m["C"]) if status == "goed" else None,
            "status": status}
```

Fout	Uitkomst
ontbreekt	ONTBREEKT
stale	STALE_KLOK
NaN	NIET_EINDIG
ongeldig model	ONGELDIG_MODEL
bias/innovatie	INNOVATIE
freeze met verwachte verandering	FREEZE
gedeelde bias niet observeerbaar	aanvaard; absolute juistheid NIET bewezen

UITLEG · 49.21

Een MQTT-bericht is geen actuatorbevoegdheid

21/51

Het voorstel bevat node, owner_boot, source, source_boot, seq, tijd, ttl, mode, quality en set_C. Een applicatie-ACK bewaart node, boots, seq, moment en beslisreden. Alle grens-/tijd-/identiteitstoetsen moeten slagen. Het pakket gebruikt dictionaries en geen echte beveiligde broker.

OASIS MQTT 5.0 definieert QoS, message expiry en session state. Die transporteigenschappen vervangen het eigen tijd-/bevoegdheidscontract niet. Een protocol-PUBACK bewijst geen daadwerkelijke contactoractie. Retained setpoints, bronherstarts, klokken en duurzame replayopslag vragen een apart praktijkplan. Bron geraadpleegd 30-09-2026.

```
voorstel = {
    'node': 'woon', 'owner_boot': 'woon-A',
    'source': 'pi', 'source_boot': 'pi-A', 'seq': 17,
    'tijd': 600, 'ttl': 60, 'mode': 'NORMAAL',
    'quality': 'goed', 'set_C': 19.5
}
```

Contractgroep	Velden
Identiteit	node, owner_boot, source, source_boot
Volgorde/tijd	seq, tijd, ttl
Bevoegdheid/kwaliteit	mode, quality, set_C
Respons	Applicatie-ACK met correlatie en beslisreden

CODE · 49.22

Stop en herstart vragen een menselijke flank

22/51

Opstart is vergrendeld. Stop, voedingsverlies of ongezonde kring vergrendelt opnieuw. Stop los en spanning terug starten niets. Een gezonde resetflank mag alleen vrijgeven met verzoek uit én contactfeedback uit; vasthouden is geen nieuwe flank. Om 01:12 geeft reset bevoegdheid terug, maar pas om 01:13 volgt een apart nieuw verzoek.

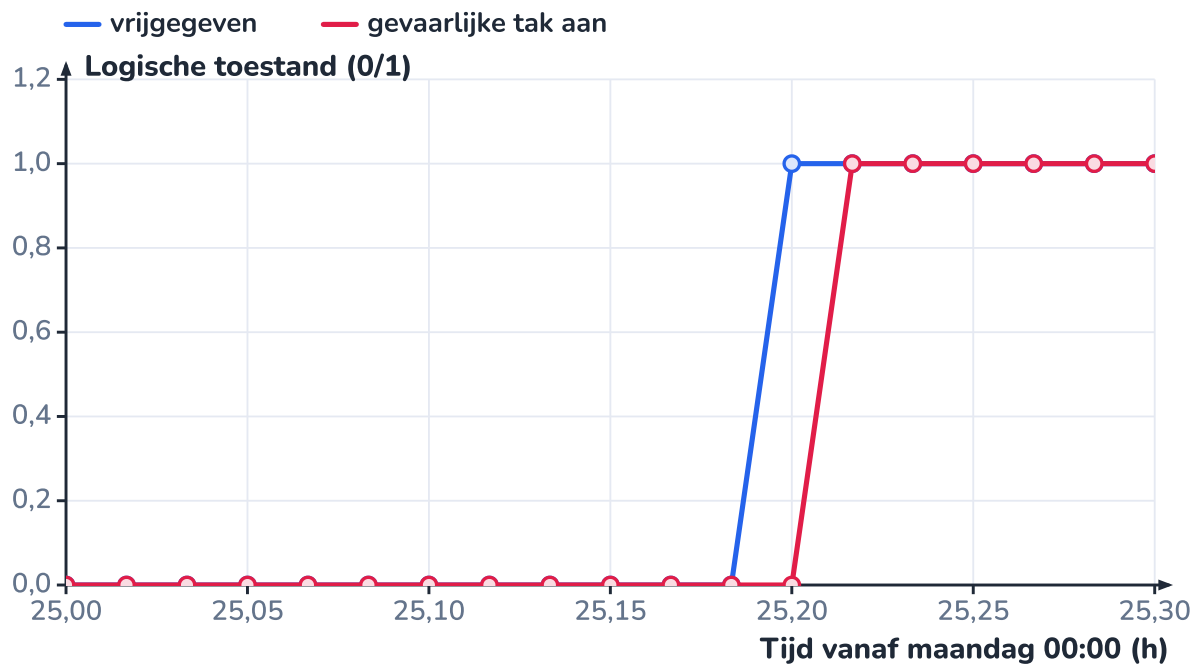
Dit logische model bewijst geen SIL, PL, gecertificeerde noodstop, contactorreactietijd of veilige lastuitschakeling. De gewone taak van 60 s is geen snelle hardwarekring. Essentiële ventilatie blijft hier via haar aparte tak tijdens stop gevoed; dit beleid hoort bij de gekozen risicoanalyse.

Python `leesdeel_StopVrijgave.py` 13 regels

```python
class StopVrijgave:
    """Logisch model van een onafhankelijke, stopdominante vergrendeling."""
    def __init__(self):
        self.vergrendeld, self.vorig_reset = True, False

    def stap(self, stop, voeding, gezond, reset, verzoek_uit, contact_uit):
        flank = reset and not self.vorig_reset
        self.vorig_reset = reset
        if stop or not voeding or not gezond:
            self.vergrendeld = True
        elif flank and verzoek_uit and contact_uit:
            self.vergrendeld = False
```

```
13          return voeding and gezond and not stop and not self.vergrendeld
```



Reset om 01:12 geeft alleen bevoegdheid terug; het nog uitstaande uit-verzoek houdt de tak uit. Pas het nieuwe verzoek om 01:13 kan weer activeren. De aparte ventilatietak blijft in deze proef gevoed.

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.23

Recirculatie telt door zonder evenveel water te verbruiken

23/51

Vier goten lopen ieder tien minuten per uur; NFT neemt 3,6 L/d op en verdampt 0,7 L/d.

GEGEVEN

- 1,20 L/min per goot; start 50 L; woensdag +20 L
- Drink: start 500 L; 70 L/d; zaterdag +200 L

GEVRAAGD

- Doorzet en eindvoorraden

OPLOSSING

1. Doorzet=4×1,2×10×24×7=8064 L/week. Hetzelfde water loopt herhaald rond; dat is geen netto afvoer.
2. NFT-eindvoorraad=50+20−7×(3,6+0,7)=39,9 L. Tijdens pompen toont de tank 3,9 L minder door water onderweg.
3. Drink-eindvoorraad=500+200−490=210 L. Werkelijke levering vraagt geselecteerde pomp en positieve voorraad; een lege tank geeft diensttekort.

ANTWOORD

8064 L doorzet; 39,9 L NFT; 210 L drinkvoorraad.

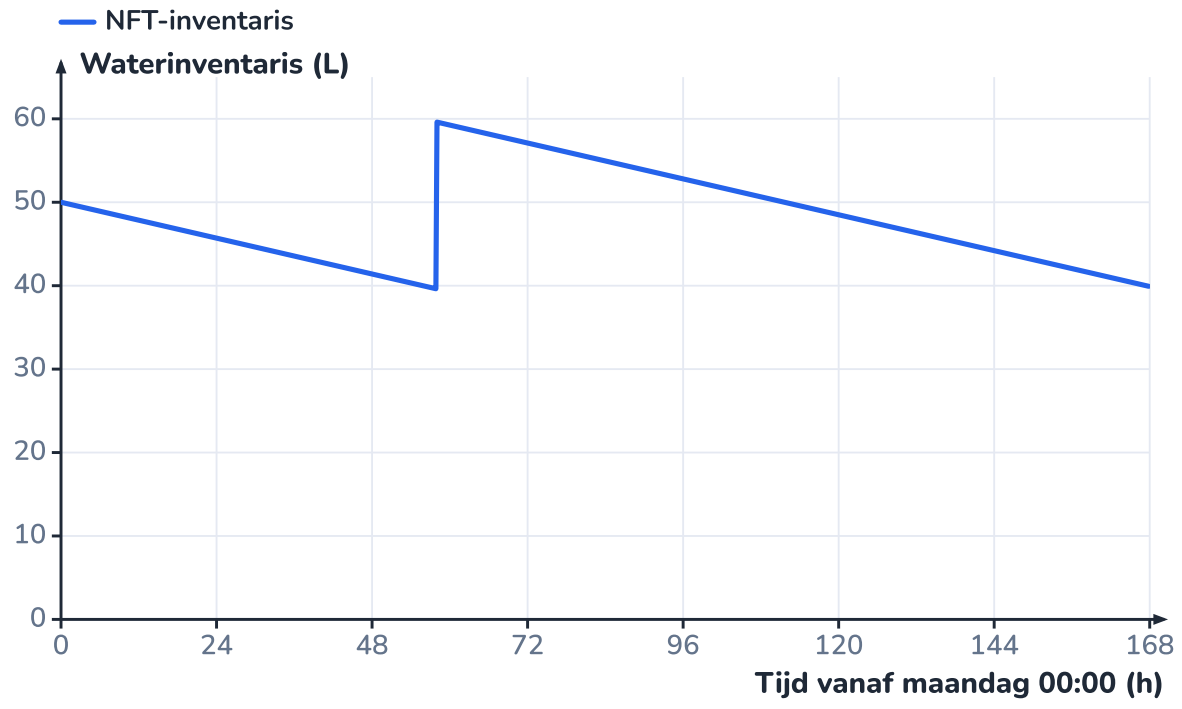
Klopt dit? Volumeboekhouding bewijst geen potabiliteit, plantopname of opbrengst.

UITLEG · 49.24

De onafhankelijke vlotter ziet het tankpeil

Tank bij pomp=NFT-inventaris−3,9 L. Het ideale contact opent bij 24 L of 10 cm; de analytische kruising binnen de minuut begrenst de pompfractie. Leidingretour is vereenvoudigd onmiddellijk. Werkelijke contactvertraging en retourdynamiek blijven te testen.

Waterlek begint op 31 L en lekt twee uur 2 L/min, ook na pompstop. De vlotter stopt vóór drooglopen maar dicht het lek niet. Bijvullen is geen reparatie. De nieuwe flowbewaking vraagt twee actieve meetmomenten en stopt in de testcase na 60 s; de fasegrens is minder dan 120 s. De flowmeter is een selectievoorstel, geen bewezen hardware. H_2-water en drinkwater zijn aparte voorraden.



De inventaris bevat tank plus water onderweg. De onafhankelijke vlotter ziet alleen het tankpeil; het drinkwater en gezuiverd elektrolysewater staan in andere balansen.

UITLEG · 49.25

Waterstof maakt overschot niet verliesloos

Alleen 48 V-overschot na lasten en begrensd laden voedt elektrolyse. Keuzen: 55 kWh/kg elektrolyse, 3 kWh/kg compressie, DC-rendement 0,96, netto celrendement 0,50 bij LHV 33,333333 kWh/kg. Proces-/celwarmte wordt apart geteld en niet als woonwarmte teruggewonnen. Beginreserve 2 kg is aangevoerd proefmateriaal; eerdere productie valt buiten de week, maar niet vanzelf buiten werkelijke LCA.

ENERGIE → WATERSTOF → ENERGIE

$$\Delta m_{\text{el}} = \frac{E_{48}\,0{,}96}{55+3}, \qquad E_{\text{cel}} = \Delta m\,33{,}333333\,0{,}50$$

Een eigen 20 L gezuiverde procesvoorraad begrenst productie bij afgerond 9 L/kg stoichiometrische minimumvoeding. Spoelen, purging en zuivering kunnen praktijkverbruik verhogen. Geen NFT-water wordt stil omgeleid. Celretourwater wordt geteld maar niet automatisch bruikbaar teruggewonnen. Opslaglek 0,1% actuele massa/dag is een scenario-aanname; grenzen zijn 12 kg, 200–1000 W elektrolyse en 500 W netto cel.

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.26

De werkelijk uitgevoerde waterstofrekening

26/51

Normaal heeft bereikbaar overschot; h2_reserve start de stationbank op haar ondergrens met lage bronnen.

GEGEVEN

- Normaal elektrolyse 45,380018 kWh
- Begin 2 kg H_2 en 20 L gezuiverd water

GEVRAAGD

- Productie, verliezen en retourdienst

OPLOSSING

1. Productie=E×0,96/58=0,751118 kg; minimumvoeding 6,760058 L. DC-verlies 1,815201, compressie 2,253353, procesverlies 16,274213 kWh.
2. Massa eind=2+productie−verbruik−lek=2,734792 kg. Normaal gebruikt geen celenergie; productie alleen zou retour niet toetsen.
3. h2_reserve levert werkelijk 33,266896 kWh, maar mist 69,38 h wooncomfort. h2_water_leeg produceert exact 0 kg; een ontbrekende voorraad wordt niet stil gevuld.

ANTWOORD

Zonder opslaglek: 0,96×33,333333×0,50/58=27,5862% retourrendement.

Klopt dit? Geen fabrikantgarantie of jaarautonomie; e15-jaaroverschot is geen bereikbaar elektrolysevermogen.

CODE · 49.27

Het volledige experiment zelfstandig uitvoeren

27/51

Sla de zeven bron-/invoerbestanden hieronder in één schone map op. De geteste versies zijn Python 3.13.1 en NumPy 2.4.0. Er zijn geen cursusimports, broker, hardware of verborgen invoerbestanden. De andere downloads bevatten alle werkelijk berekende resultaten. De lange programmatuur wordt elders op samenhangende leesdelen getoond; hun unieke downloads zijn fragmenten, geen los uitvoerbaar pakket.

De CLI schrijft in de gekozen uitvoermap. Bij de cursusbouw krijgt de bron expliciet `__name__='e49_bouw'`; `argparse` leest daardoor geen bouwargumenten en `__file__` is niet nodig. De bouwer roept dezelfde `run_all` aan met ingesloten JSON-/CSV-teksten. De generator is optioneel: beide geleverde CSV's zijn compleet.

tekst **uitvoeren_e49.txt** 6 regels

```
python -m pip install -r requirements.txt
python habitat_brein.py --out resultaat
# Optioneel: dezelfde vaste CSV-invoer opnieuw maken
python maak_invoer.py
```

```
# Een andere uitvoermap:
python habitat_brein.py --out mijn_proef
```

```
E49-S2-12-v1 | UTC+1 vast | seed 4902026
config sha256 79162d53dead19c58f257c78d9ab3803e9bd56e4f5c28495b2e8799dbd170a09
normaal: last12=13.009361 kWh last48=64.081185 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.500 h
koud_leeg: last12=1.156706 kWh last48=3.795089 kWh comforttekort woon=167.233 h module=167.917 h
vol: last12=13.302675 kWh last48=64.005070 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.000 h
broker: last12=13.009361 kWh last48=64.081185 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.500 h
sensorbias: last12=12.870861 kWh last48=63.276706 kWh comforttekort woon=0.000 h module=26.200 h
stop_herstel: last12=13.008128 kWh last48=64.019985 kWh comforttekort woon=0.000 h module=2.200 h
wp_storing: last12=13.009361 kWh last48=64.797079 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.500 h
waterlek: last12=12.729351 kWh last48=64.076010 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.233 h
pompfout: last12=12.729242 kWh last48=64.076038 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.233 h
drink_leeg: last12=13.009361 kWh last48=63.274734 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.500 h
h2_reserve: last12=13.049561 kWh last48=39.334005 kWh comforttekort woon=69.383 h module=63.167 h
h2_water_leeg: last12=13.009361 kWh last48=64.081185 kWh comforttekort woon=0.000 h module=0.500
h
forecast test model/basis RMSE kWh {'dagen': 35, 'model_RMSE_kWh': [0.5851539545652431,
2.534111423005847], 'basis_RMSE_kWh': [1.116428082109751, 5.479447885357938],
'prognose_T_RMSE_K': 2.005657163666399, 'prognose_zonuren_RMSE_h': 0.569031555245376}
contracttests 30
LCA S1/S2 kg/jaar [808.6800000000001, 873.68]
```

OOK TE DOWNLOADEN

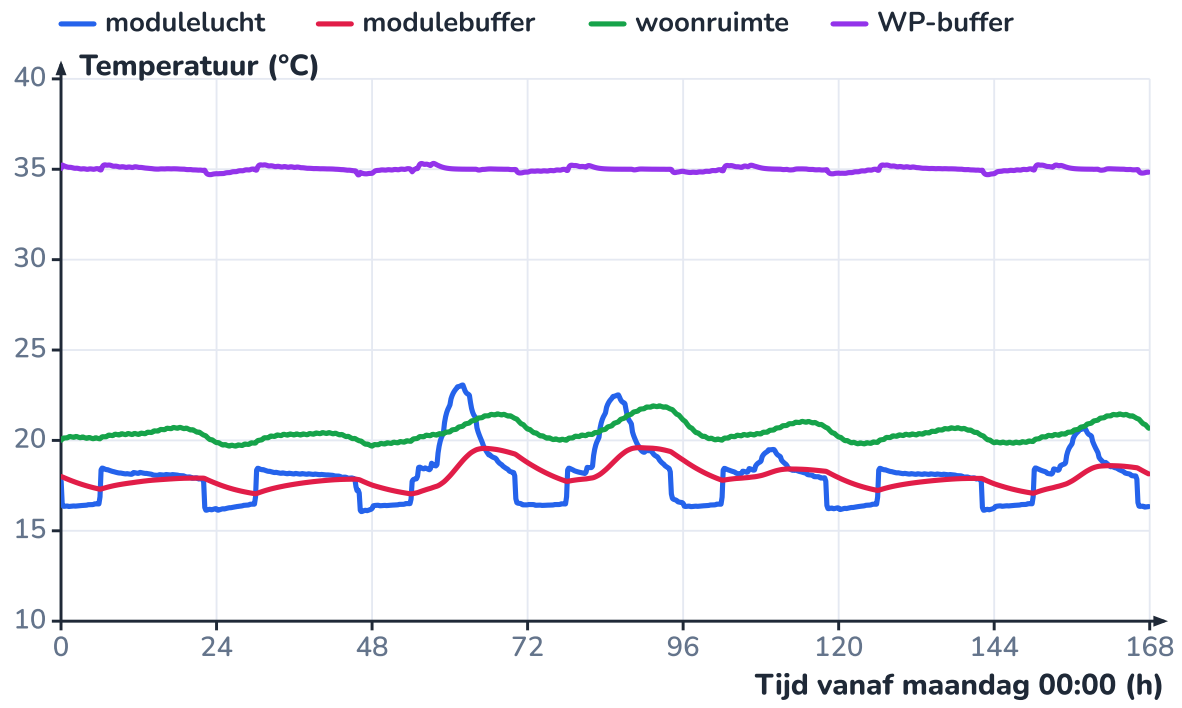
UITLEG · 49.28

De gewone week: comfort en energie tegelijk

28/51

Geleverd: 13,009361 kWh module-rail en 64,081185 kWh station-rail. WP-elektriciteit 17,914982 kWh; compressorwarmte 36,601712 kWh. Hun quotiënt omvat de geboekte hulpuren, geen catalogus-COP. W35-COP wordt uit e16 geïnterpoleerd; de vaste 35 °C-bufferstrategie is een leskeuze.

Wooncomfort slaagt; de module mist 0,5 h ondanks voldoende energie. Timing, transport en regeling zijn dus eigen grenzen. Temperatuur-/voorraadgrafieken tekenen intervaleinden. CSV-tijd/t_h is intervalbegin; temperatuur/SOC/water is de toestand na die minuut. Vermogen en vrijgave gelden tijdens het interval.



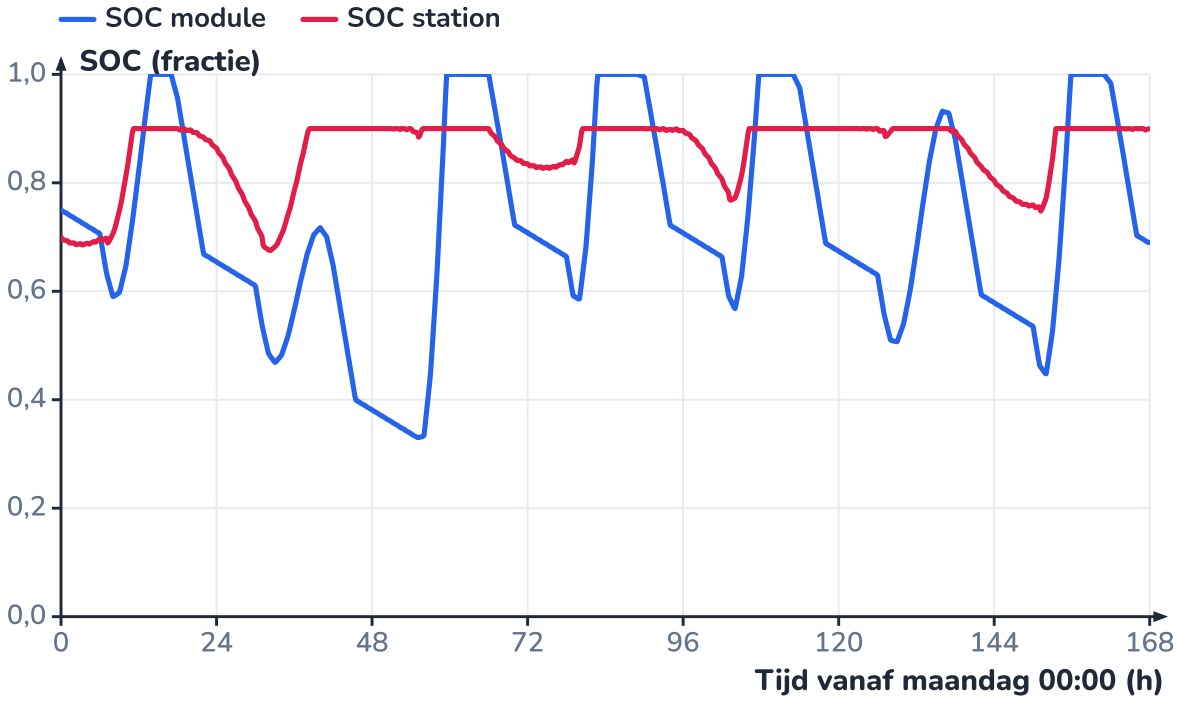
Ieder punt komt uit de uitgevoerde minuutlog. Dag- en nachtdoelen verschillen; de module haalt de ochtendgrens in deze configuratie niet iedere minuut.

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.29

Het railsaldo onafhankelijk narekenen

29/51

Normaal begint op module-SOC 0,75 en station-SOC 0,70.



De stationbank mag tot 0,90 laden; de module tot 1,00. Een hoge stations-SOC vult de modulebatterij niet via een ongetekende omzetter.

GEGEVEN

- Geen 12→48 V-converter
- Afregeling, verlies en elektrolyse blijven apart

GEVRAAGD

- Twee sluitende saldi

OPLOSSING

1. 12 V: PV 27,206788 + begin 2,304 − eind 2,115748 = last 13,009361 + afregeling 13,480047 + verlies 0,905632 kWh.
2. 48 V: PV 81,620363 + wind na buck 60,903405 + cel 0 + begin 8,4 − eind 10,8 = last 64,081185 + elektrolyse 45,380018 + PV-afregeling 26,999252 + dump vóór buck 2,840168×0,97 + verlies 0,908349 kWh.
3. Elektrolyseverliezen verdelen h2_in verder; tel ze niet nogmaals bij de raillast. Winddump is vóór buck, daarom factor 0,97 in het saldo na buck.

ANTWOORD

Beide residuen zijn nul binnen floating-pointafronding.

Klopt dit? De volledige SOC-baan toetst tussenliggende grenzen.

NASLAG · 49.30

Numerieke kwaliteit en modelgrens

30/51

Gesloten grootheid	Weekresidu	Eenheid
rail12_kWh	−0,000000000000	kWh
rail48_kWh	0,000000000000	kWh
h2_kg	0,000000000000	kg
nft_L	−0,000000000054	L
drink_L	0,000000000000	L
proceswater_L	0,000000000002	L
warmte_week_kWh	0,000000000002	kWh
warmte_max_residu_J	0,000000011843	J

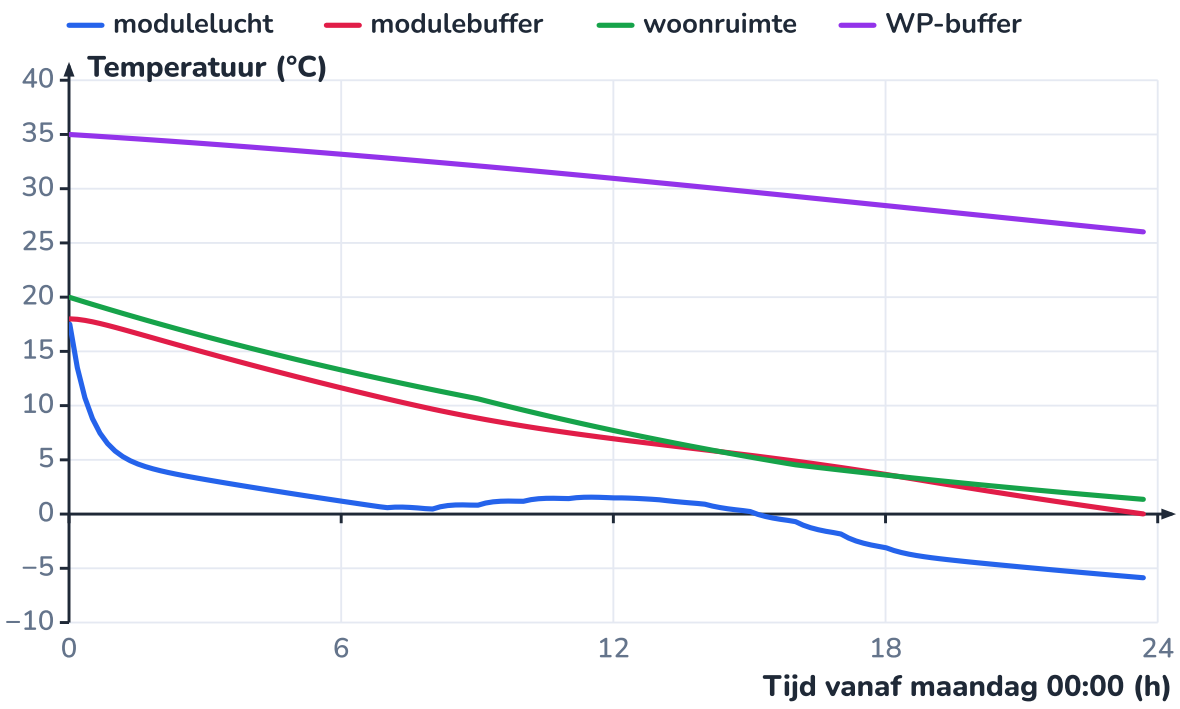
Plantstap; regelactie 60 s	Maximaal verschil t.o.v. 30 s	WP-energieverschil
60 s	0,000000017725 K	0,000000000399 kWh
15 s	0,000000001090 K	−0,000000000025 kWh

UITLEG · 49.31

Convergentie heeft een beperkte betekenis

Verfijning bevestigt RK4 in dit gladde model. Zij identificeert geen capaciteit, deadline, sensorfout, compressorcyclus, leidingvertraging of bevriezing. Het interval maandag 23:42–23:43 van koud_leeg eindigt voor het eerst met niet-positieve waterbuffertemperatuur; daarna is het vloeibaar-watermodel ongeldig.

De log bewaart algebra en watermodel_geldig, maar verkoopt geen ijsvoorspelling. Comfort en kritieke voeding falen eerder al. Een fysisch vervolg vraagt faseverandering, stroming, enthalpie en volumeafhankelijke capaciteit. Bij groot NFT-lek beperkt constant Cb de temperatuurclaim eveneens. Deze grenzen mogen niet verdwijnen uit grafiek, resultaat of acceptatieboek.



Het interval maandag 23:42–23:43 eindigt voor het eerst buiten het watermodelgebied boven 0 °C. Alleen geldige eindtoestanden zijn getekend. Latere algebra is geen bevriezingsvoorspelling en bewijst geen vloeibare watervoorraad.

NASLAG · 49.32

Alle storingruns blijven in het resultaat

Scenario	Geleverd 48 V (kWh)	Comforttekort woon / module (h)
normaal	64,081	0,00 / 0,50
koud_leeg	3,795	167,23 / 167,92
vol	64,005	0,00 / 0,00
broker	64,081	0,00 / 0,50
sensorbias	63,277	0,00 / 26,20
stop_herstel	64,020	0,00 / 2,20

Scenario	Geleverd 48 V (kWh)	Comforttekort woon / module (h)
wp_storing	64,797	0,00 / 0,50
waterlek	64,076	0,00 / 0,23
pompfout	64,076	0,00 / 0,23
drink_leeg	63,275	0,00 / 0,50
h2_reserve	39,334	69,38 / 63,17
h2_water_leeg	64,081	0,00 / 0,50

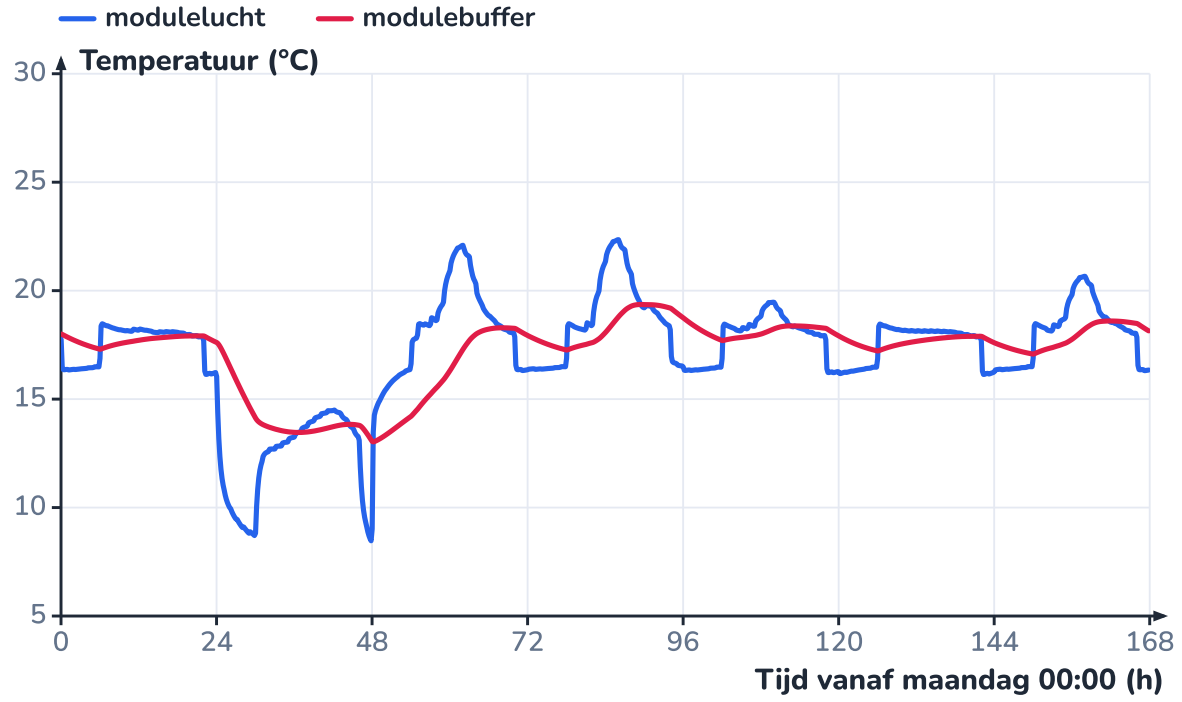
UITLEG · 49.33

Detectie slaagt terwijl klimaatdienst faalt

33/51

Dinsdag +3 °C meetbias geeft INNOVATIE en nul convectorvraag. Geen perfecte meting vervangt de fout. De plant koelt en mist 26,2 h modulecomfort. Detectie, begrensd gedrag en beschikbaarheid zijn verschillende eisen.

De tegenproef biedt meting 19 °C en model 19 °C bij fictieve waarheid 18 °C. De poort accepteert: absolute juistheid ontbreekt. Een onafhankelijke referentie, plaatsings-/ijkproef en onzekerheidsbegroting zijn nodig. Twee gelijke sensoren of foutmodellen zijn niet vanzelf onafhankelijk.



De bias is 24 uur geïnjecteerd. Afwijzen van een meting bewaart de regelgrens, maar kost 26,2 uur modulecomfort; dat verlies blijft in de log staan.

UITLEG · 49.34

Water, voeding en herstel geven concrete tekorten

Bij pompfout blijft flow nul; de eerste motoropdracht kost wel energie. De tweede actieve controle stopt verdere pompactie. Het lek blijft na het ideale 24 L-contact doorlopen; woensdag bijvullen dicht niets. Drink_leeg levert slechts 70 L en mist 420 L gevraagde dienst. Een juiste NFT-balans herstelt geen drinkwater.

Stop_herstel bewaart vergrendeling, loslaten, voedingsverlies, terugkeer, menselijke reset en nieuw verzoek. De aparte ventilatietak blijft daar gevoed. Koud_leeg mist echter 4,268911 kWh kritieke DC-dienst. Minder ventilatieverlies maakt de algebra warmer maar het leefmilieu niet geldig. Luchtkwaliteit/veilige verblijfstijd zijn niet berekend.

Proef	Concrete dienst
drink_leeg	70 L geleverd, 420 L niet geleverd
pompfout	Werkelijke flow nul; lokaal flowalarm
stop_herstel	Aparte ventilatietak gevoed
koud_leeg	Kritieke DC-dienst ontbreekt

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.35

Volle banken en de eindige winddump

De volle proef heeft 2500 W wind na buck, volle banken en aanvankelijk 12 kg H_2.

GEGEVEN

- Nominale weerstand 16,6 Ω / 3 kW
- Overtoerenspanning als aparte audit: 245 V

GEVRAAGD

- Nominale energieafregeling en de open fysieke grens

OPLOSSING

1. PV wordt eerst afgeregeld. H_2 krijgt alleen door lek ontstane ruimte; windrest gaat naar de nominale dump.
2. Maximale modeldump=2341,133 W; totaal vóór buck=361,777 kWh.
3. Rechtstreeks 245²/16,6=3615,964 W overschrijdt de 3 kW-rating. De modelweek bevat geen thermische weerstandstemperatuur of mechanische toerentaldynamiek.

ANTWOORD

Nominale boekhouding slaagt; werkelijke overtoerenveiligheid blijft open.

Klopt dit? Pulsduur, derating, schakelfout en remcurve blijven restbewijs; kortsluitrem pas onder circa 150 tpm.

NASLAG · 49.36

Forecast-invoer: beschikbaar vóór waarheid

36/51

Veld	Beschikbaar	Gebruik
plan_tijd / doel_dag	20:00 vóór volgende kalenderdag	horizonbewijs
prognose_T_C / prognose_zonuren	planmoment	uitsluitend deze weersfeatures
gerealiseerd weer	na doeldag	forecastfout achteraf
vraag_ref_kWh / pv48_kWh	na doeldag	oude trainlabels / latere scores
laatste_complete_*	doeldag minus twee	gelijke horizon basislijn
Actuele E48/SOC/toestand	nu	reserveheuristiek, geen toekomstmeting

UITLEG · 49.37

Een forecast-demonstratie met synthetische brondata

37/51

219 historische en zeven weekdagen. Na twee basislijn-opwarmdagen: 147 train, 35 validatie, 35 test. Fit 03-08–27-12-2020; validatie 28-12–31-01; test 01-02–07-03-2021 achteraf. Geen 07-03-label is nodig bij het eerste plan op 07-03 om 20:00.

Features: max(12−Tprognose,0), max(3−Tprognose,0)² en prognosezonuren. Alleen train bepaalt schaal en fit. NumPy least squares past twee regressies met intercept. Niet-negativiteit en proefgebied −15–30 °C liggen vooraf vast; test past niets aan.

De referentievraag is een apart synthetisch functieprofiel met ruis, niet dezelfde als fysica/PID/dispatch van de stationsweek. Scores bewijzen de procedure, geen operationele stationnauwkeurigheid. E41/e43 met gerealiseerd weer bewijzen ook geen dag-vooruitfout.

Tijddeel	Datums / count
Train	03-08–27-12-2020; 147
Validatie	28-12–31-01; 35
Test achteraf	01-02–07-03-2021; 35

CODE · 49.38

Fit, tijdsplit en score blijven apart

38/51

Realisaties blijven uit features. De basislijn gebruikt de laatst complete dag, niet de onvolledige huidige dag om 20:00. Dit pakket gebruikt validatie niet voor modeltuning. Exacte datumgrenzen staan in JSON.

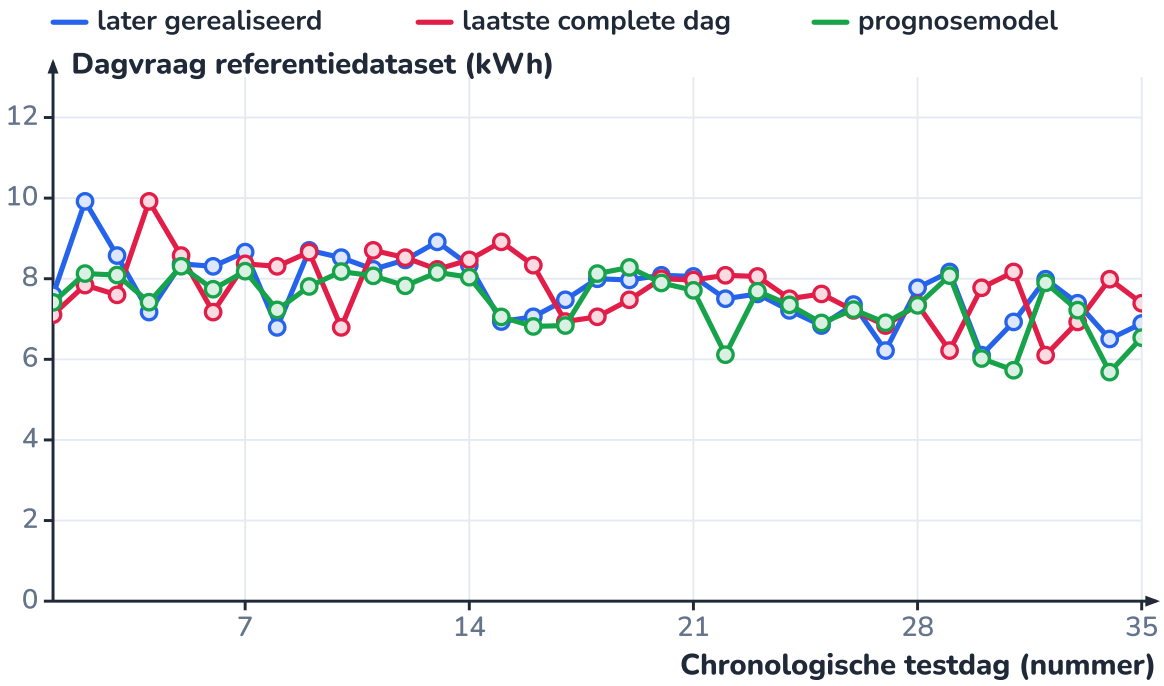
Python `leesdeel_voorspellers.py` 46 regels

```python
def voorspellers(c, archief):
    data = archief[2:219]  # 217 verleden-dagen, week geen trainingsdata
    train, val, test = data[:-70], data[-70:-35], data[-35:]
    assert train[-1]["doel_dag"] < "2021-03-07"
    def features(r):
```

```
        t, s = float(r["prognose_T_C"]), float(r["prognose_zonuren"])
        return [max(12-t, 0), max(3-t, 0)**2, s]
    X = np.array([features(r) for r in train])
    mean, scale = X.mean(axis=0), X.std(axis=0)
    scale[scale == 0] = 1
    def ontwerp(rows):
        x = np.array([features(r) for r in rows])
        return np.column_stack([np.ones(len(rows)), (x-mean)/scale])
    Y = np.array([[float(r["vraag_ref_kWh"]), float(r["pv48_kWh"])] for r in train])
    beta = np.linalg.lstsq(ontwerp(train), Y, rcond=None)[0]
    def voorspel(r):
        try:
            x = np.asarray(features(r), dtype=float)
        except (ValueError, TypeError, KeyError):
            return None
        if not np.isfinite(x).all():
            return None
        # Extrapolatie buiten het verstrekte proefgebied: onthouding.
        if float(r["prognose_T_C"]) < -15 or float(r["prognose_T_C"]) > 30:
            return None
        pred = np.r_[1, (x-mean)/scale]@beta
        return np.maximum(pred, 0).tolist()
    scores = {}
    for naam, rows in (("validatie", val), ("test", test)):
        y = np.array([[float(r["vraag_ref_kWh"]), float(r["pv48_kWh"])] for r in rows])
        yp = np.maximum(ontwerp(rows)@beta, 0)
        base = np.array([[float(r["laatste_complete_vraag_kWh"]),
            float(r["laatste_complete_pv48_kWh"])] for r in rows])
        scores[naam] = {"dagen": len(rows), "model_RMSE_kWh":
            np.sqrt(np.mean((yp-y)**2, axis=0)).tolist(),
            "basis_RMSE_kWh": np.sqrt(np.mean((base-y)**2, axis=0)).tolist(),
            "prognose_T_RMSE_K": math.sqrt(np.mean([
                (float(r["prognose_T_C"])-float(r["gerealiseerd_T_C"]))**2 for r in rows])),
            "prognose_zonuren_RMSE_h": math.sqrt(np.mean([
                (float(r["prognose_zonuren"])-float(r["gerealiseerde_zonuren"]))**2 for r in rows]))}
    return {"train_dagen": len(train), "train_van": train[0]["doel_dag"],
        "train_tot": train[-1]["doel_dag"],
        "validatie_van": val[0]["doel_dag"], "validatie_tot": val[-1]["doel_dag"],
        "test_van": test[0]["doel_dag"], "test_tot": test[-1]["doel_dag"],
        "scores_status": "ACHTERAF_SYNTHETISCH", "beta": beta.tolist(),
        "mean": mean.tolist(), "scale": scale.tolist(), "scores": scores}, voorspel
```

35 testdagen	Vraag-RMSE (kWh)	PV48-RMSE (kWh)
prognosemodel	0,585154	2,534111
laatste complete dag	1,116428	5,479448

Weerforecastfout apart: 2,005657 K en 0,569032 h zonuren.



De realisaties dienen achteraf voor scoring; de modelinvoer bevat alleen eerder beschikbare weersprognoses. Deze synthetische referentievraag is een apart datamodel en geen gemeten of gedispatchte stationsvraag.

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.39

Een voorspelling wordt een begrensd voorstel

39/51

Het plan voorspelt 9 kWh vraag, 2 kWh PV; actuele bankenergie 6 kWh.

GEGEVEN

- Emin=2,4 kWh; ηd=0,96
- Lokale grenzen 19–21 °C; fallback 20 °C

GEVRAAGD

- Voorstel en onthouding

OPLOSSING

1. Reserve=(6−2,4)×0,96=3,456 kWh. Tekort 9−2=7 kWh is groter; de eenvoudige supervisor stelt 19 °C voor.
2. De lokale eigenaar toetst het bericht. De Pi verandert geen stop-, cel-, vlotter- of veiligheidsgrens. Dit is een reserveheuristiek, geen optimaal EMS.
3. Ontbreekt/NaN/buitengebied geeft null/status en lokaal 20 °C. Onverwachte kou of een verkeerde vraagreferentie kan alsnog diensttekort geven. De reserveproef toont dat.

ANTWOORD

De voorspeller adviseert; eigenaar en fysica beslissen.

Klopt dit? Alle normale plannen waren 20 °C; brokeruitval bewijst geen besparing.

UITLEG · 49.40

FMEA stopt niet bij detectie

Een FMEA verbindt oorzaak, lokaal effect, systeemeffect, barrière, proef en restbewijs. Ernst/optreden/detectie zijn ordinale bespreekschalen, geen FIT uit verzonnen incidenten. Gedeelde voeding/modelbias/contactorfout kan meerdere barrières raken.

Faalwijze → effect	Barrière / bewijs	Restbewijs en eigenaar
Meetbias → warmte uit → koude module	D-01, biasweek/T-03	ijking/modelbias; meetbeheer
NFT-lek → laag peil / teeltdienst weg	W-02-vlotter; lekweek	contact/retour/lekkage; waterbeheer
Koude bank → laadverbod / tekorten	E-03; koud_leeg	opstelling/celrating; elektrisch beheer
Contactor vast → actuator blijft aan	V-01-feedback weigert reset	echte uitschakelproef; bevoegd ontwerper
Pi/herstart → oud setpoint	D-02/D-04-replayregister	duurzame opslag/klok/security; software
Dump heet/open → overtoeren	E-05-rekenlimiet	thermiek/remcurve; aandrijfbeheer
H_2-water op → productie nul	H-02-voorraad; lege-proef	kwaliteit/gasveiligheid; procesbeheer

Een foutboom voor leefdienst bevat onder meer gemeenschappelijke voedingsuitval van ventilatie en warmte. Twee detectiekansen vermenigvuldigen vraagt aantoonbare onafhankelijkheid. Dit pakket levert geen gevalideerde stationsuitvalkans.

NASLAG · 49.41

Acceptatieboek: aangetoond, niet gehaald en open

Bewijs	Uitkomst	Besluit
Conservatie	alle rail-/water-/H_2-/warmtebalansen sluiten	model geslaagd
Normale dienst	woon voldoet; module 0,5 h tekort	T-03 deels niet gehaald
Bias	afgewezen; 26,2 h moduletekort	D-01 slaagt, T-03 niet
H_2-reserve	33,266896 kWh retour; 69,38 h woontekort	autonomie niet aangetoond
4,48 kVA / aanloop	noodwarmte geweigerd / 132,506 A	selectie slaagt; dienst ontbreekt
Winddump	3615,964 W >3000 W	fysiek open
Biologisch/medisch	geen passende praktijkvalidatie	geen behaalde voorziening

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.42

S1 naar S2 met dezelfde grens

S1 gebruikt B10/I200; S2 kiest B12 en onafhankelijke jaarimportscenario I500.

GEGEVEN

- [0,20) jaar; batterijleven 10 jaar
- 100 kg CO_2-eq/kWh; netfactor 0,15 kg/kWh

GEVRAAGD

- Herberekening zonder week×52/dubbeltelling

OPLOSSING

1. Pakketten op 0 en 10: 2×100B/20=10B kg/jaar. Overige S1-post inclusief I200=708,68 kg/jaar.
2. S1=808,68; S2=708,68+120+0,15×300=873,68 kg CO_2-eq/jaar; twintigjarig 17473,6 kg.
3. Functionele eenheid: één gemiddeld jaar gespecificeerde geplande dienst van station plus één module. De week bewijst geen gelijkwaardige jaardienst. I500 is een scenario, geen winterweek×52.

ANTWOORD

S2-screening 873,68 kg/jaar met expliciete onzekerheid.

Klopt dit? Geen extra i38-164, export-/recyclingcredit of verborgen productiepost.

NASLAG · 49.43

Volledige S2-kalenderinventaris

43/51

Post	Pakketten in [0,20)	Productie (kg CO_2-eq)
hout	1	312,00
staal	1	750,00
beton	1	240,00
isolatie	1	450,00
modulegebouw	1	650,00
modulerek/water	2	220,00
PV12	1	840,00
PV48	1	2520,00
batterij12	3	921,60
lamp12	3	300,00
elektronica12	2	120,00
wind	1	650,00
WP	2	1600,00
H2	2	2000,00
elektronica48	2	300,00
batterij48	2	2400,00

Overige twintigjarige post	kg CO_2-eq
transport	300,00
eind	500,00
verbruiksmateriaal	600,00
netimport	1500,00
overig_gebruik	300,00

CODE · 49.44

Levensduur en import zijn echte sensitiviteiten

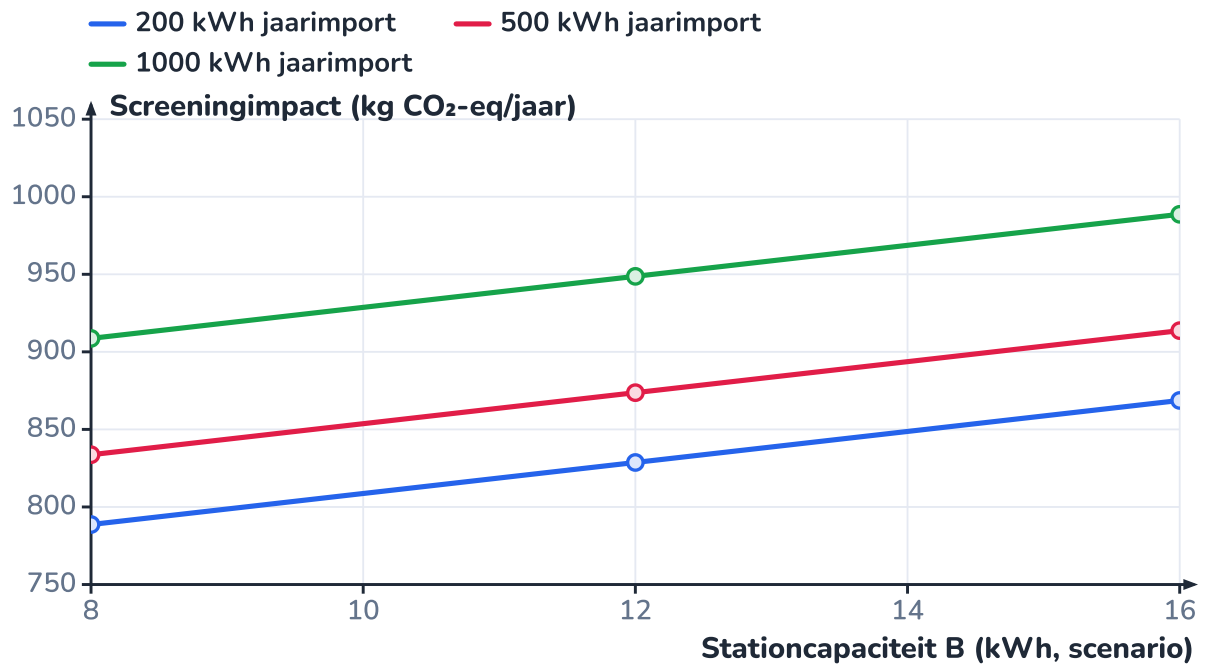
44/51

Count=ceil(H/L): leven 8 jaar vraagt pakketten op 0,8,16; leven 10 jaar op 0,10. Een pakket op precies 20 valt buiten de grens. Het pakket berekent 18 combinaties B8/12/16, I200/500/1000 en leven 8/10. De grafiek toont 10 jaar; bij 8 jaar verandert 10B in 15B.

B12/I500: 933,68 tegenover 873,68 kg/jaar, verschil 60. Werkelijke EPD, veroudering, randapparatuur en import kunnen de rangorde veranderen. Screening is geen productverklaring; veiligheid en gelijke dienst blijven voorwaarden.

Python **leesdeel_lca.py** 19 regels

```python
def lca(c, B, I, leven=10):
    H = c["lca_horizon_jaar"]
    posten = [("hout", 1200, .26, 30), ("staal", 300, 2.5, 30),
        ("beton", 2000, .12, 30), ("isolatie", 150, 3, 30),
        ("modulegebouw", 1, 650, 30), ("modulerek/water", 1, 110, 15),
        ("PV12", 1.4, 600, 25), ("PV48", 4.2, 600, 25),
        ("batterij12", 3.072, 100, 8), ("lamp12", 2, 50, 8),
        ("elektronica12", 1, 60, 10), ("wind", 1, 650, 20),
        ("WP", 1, 800, 15), ("H2", 1, 1000, 10),
        ("elektronica48", 1, 150, 10), ("batterij48", B, 100, leven)]
    inventaris = [{"post": n, "hoeveelheid": q, "factor": f,
        "leven_jaar": L, "aantal": math.ceil(H/L),
        "kg": q*f*math.ceil(H/L)} for n, q, f, L in posten]
    overige = {"transport": 300, "eind": 500, "verbruiksmateriaal": 30*H,
        "netimport": I*.15*H, "overig_gebruik": 15*H}
    totaal = sum(r["kg"] for r in inventaris)+sum(overige.values())
    return {"B_kWh": B, "import_kWh_jaar": I, "leven_jaar": leven,
        "inventaris": inventaris, "overige": overige,
        "kg_20jaar": totaal, "kg_jaar": totaal/H}
```



Batterijlevensduur hier 10 jaar; de download berekent ook 8 jaar. Alle lijnen behouden dezelfde geplande dienst en screeningfactoren. De weekrun rechtvaardigt geen jaarimport en geen daadwerkelijk jaarrond geleverde dienst.

UITLEG · 49.45

Biologie en gezondheid houden hun eigen bewijslast

45/51

Een juiste energie-/waterbalans sluit geen voedsel-, ademgas- of gezondheidskring. E29 kiest geen ras/DNA-ingreep. E30-target-PCR bewijst geen algemene drinkbaarheid/infectiviteit; negatieve monsters met falende controle zijn oninterpreteerbaar. E31-Monod, e32-pools en e04/i05-testreservoir zijn aparte lesmodellen, geen NFT-productiereactor.

Aansluiting	Concrete grens	Restonderzoek
e31-balans met NH_3-N	1,68 kg O_2/d →1,23 kg droog / 2,20 kg CO_2	licht, voedingsbron, respiratie, zuivering
Bewoners-CO_2	2,00 kg/d →maximaal 1,527273 kg O_2/d	geen stille sluiting met andere biomassa/N-bron
5 cm-lichtscenario	133,617 m² / 213,787 kWh/d alleen lampen	geen gekozen ademgasinstallatie
e32-ecologie	g-N-poolbalans geen stationvalidatie	inventaris/meting/respiratie/buffering
e33-monitor	synthetische ECG/puls/SpO_2	geen diagnose, dosering of behandeling

B-01 bewaart deze grenzen. Een dashboard toont onderzoek met bronstatus; het geeft geen onbewezen zorg-/levensondersteunende functie vrij. Een gunstige synthetische fout is geen klinisch nauwkeurigheidsbewijs.

PROEF · 49.46

Onderhoud en proof-tests hebben een terugweg

ONDERZOEKSVRAAG

Een veilige softwareadapter demonstreert waarom herstel meer vraagt dan een uitcommando.

MATERIAAL

- StopVrijgave en de volledige contracttests
- Veilige mock-contactfeedback, geen installatiebelasting

Veiligheid

Dit is een softwaredemonstratie. Praktijkproeven vragen bevoegde isolatie, veilige belasting, contact-/latencybewijs en afbreekvoorwaarden; software uit of 120 V bewijst geen veilige aanraking.

WERKWIJZE

1. Start vergrendeld en leg een verzoek-uit/contact-uitpaar vast.
2. Injecteer stop, loslaten, voedingsverlies en spanning terug.
3. Probeer reset met verzoek aan en met contact aan; laat de knop los en herstel voorwaarden.
4. Geef een nieuwe gezonde resetflank; activeer daarna pas met een afzonderlijk nieuw verzoek.

WAARNEMING

De uitgevoerde contractreeks weigert ongezonde/vasthoudresetgevallen en bewaart vergrendeling na voedingsterugkeer.

VERKLARING

Onderhoud begint met toestand, bevoegdheid en isolatieplan en eindigt met controle en nieuwe vrijgave. Een software-uitcommando bewijst geen spanningsloze DC-installatie. De e19-richtwaarde 120 V garandeert geen veilige aanraking/onderhoud; bescherming en veilige toestand vragen bevoegd ontwerp.

Proef	Voorbereiding en bewijs	Herstelcrit
Stop/contactfeedback	veilige proeflast; echte terugmeldingen	gezonde r nieuw ver apart
24 L-vlotter/druk	bekende volumes; aparte contactroute	lekvrij, pei plausibel
Koudeladen/celvenster	gecontroleerde BMS-proef binnen fabrikantgrens	geen ladin venster
Replay/powercut	opslagadapter, veilig moment	duurzaam oud seq g
WP/noodlast	storingsadapter, P/Q/S/stroom/temperatuur	herstel zo ongecontr I-opbouw
Winddump/rem	bevoegde dynamische/thermische opstelling	remcurve puls-/duur

Een testinterval volgt uit gebruik/faalmechanisme/detectie, niet uit een verzonnen jaarlijks keuringsbewijs. Noteer eigenaar, versie, meetmiddelen, criteria, afbreekconditie, uitkomst en terugkeerprocedure. Een gefaalde test opent een eis.

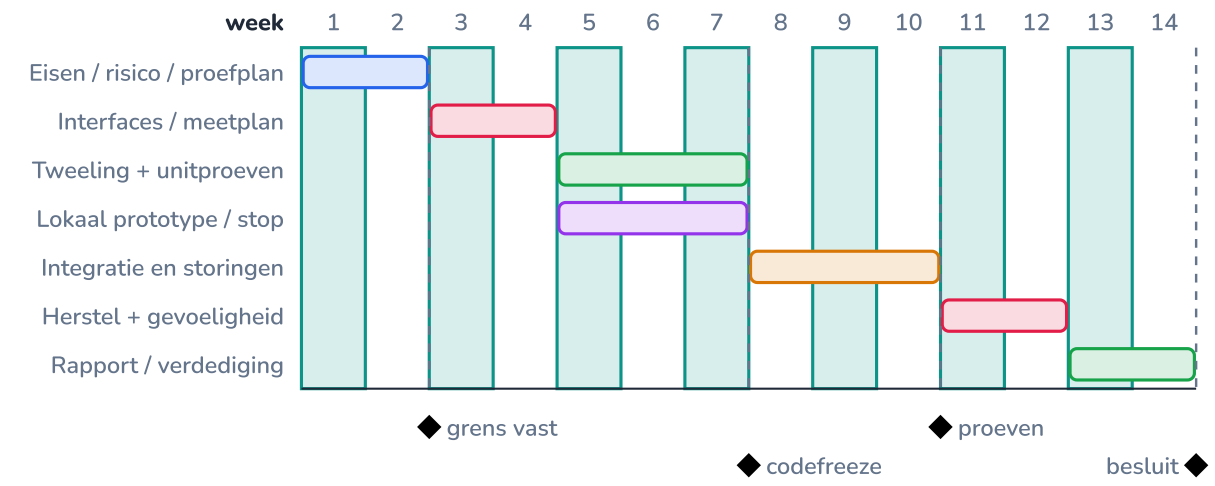
UITLEG · 49.47

Planning, rollen en wijzigingsbeheer

47/51

De 14-wekenlesplanning reserveert herstelruimte. Rollen: systeemverantwoordelijke, fysica/data, lokale software, proefleiding en kritische reviewer. Eén leerling mag rollen combineren; review vraagt een andere blik. De 55 lestijden zijn een richtwaarde voor studie en geselecteerde projecttaken, geen identieke verplichte route door alle keuzetaken.

Interfacefreeze volgt eis-/risicoreview; codefreeze vóór integratie. Iedere wijziging noemt aanleiding, eis-IDs, configversie, saldi, nieuwe tests en besluit. Wijzig B/import →L-01 herberekenen; wijzig ventilatie →bestaande Hvent vervangen. Een nieuw schema zonder gewijzigd model is geen complete wijziging.



Een 14-wekenplanning is een didactische keuze, geen gemeten bouwtijd. Tweeling en lokaal prototype kunnen parallel; integratie wacht op beide en op de vastgelegde interfaces.

UITGEWERKT VOORBEELD · 49.48

Een eindrapportpassage scheidt resultaat van besluit

48/51

Het rapport behandelt nominale dienst en aanloopselectie.

GEGEVEN

- Code/config/invoerhashes; twaalf volledige logs
- Eis→proef→bewijs→besluit

GEVRAAGD

- Een controleerbare passage

OPLOSSING

1. Resultaat: warmteknopen en rails sluiten; normale module mist 0,5 h. Verwijs T-03 naar normaal.csv/resultaten.json, tijdcontract en figuur.
2. Grens: geen jaarrond kalibratie; ideale woon-/WP-sensor; vast Cb bij waterverlies. B-01 en fysieke E-03/E-05/V-01 blijven open.
3. Besluit: aanvaard als reproduceerbaar onderwijsontwerp, niet als zelfstandig bewoonbare installatie. 5232 W-aanloop is afgewezen op 132,506 A. Eerst starter/lastvariant toetsen; een aangepaste ochtendregeling vraagt nieuwe T-03-run met 800 W-grens.

ANTWOORD

Een sterk rapport noemt negatieve uitkomst en gevolg.

Klopt dit? Een reviewer vindt bron, criterium, run en gevolg zonder de auteurs te spreken.

UITLEG · 49.49

Verdediging en eindrubric

49/51

Toon een live normale run, een gekozen foutinjectie en één niet-gehaalde eis. Verklaar fluxteken, berichtweigering en LCA-grens. Live code vervangt redenering niet; tekst zonder schone-maprun mist Q-01.

Criterium	Gewicht	Volledig bewijs
Eisen/architectuur/traceerbaarheid	20%	IDs, eigenaren, interfaces en besluiten
Fysisch/numeriek model	25%	eenheden, tekens, grenzen, residu/convergentie
Regeling/fouten/bevoegdheid	20%	werkelijke acties, negatief bewijs en herstel
Forecast/data/impact	15%	tijd/horizon, basislijn, onthouding, S1→S2
Reproductie/rapport/verdediging	20%	complete run, hashes en eigen redenering

Niveau per criterium: 0 ontbreekt/onjuist; 1 gedeeltelijk zonder bewijs; 2 juist maar onvolledig; 3 volledig controleerbaar; 4 kritisch met geldige alternatieven/tegenproef. Score=Σ gewicht×niveau/4. Een gemiddelde geeft geen verborgen fysieke of medische functie vrij. Toekomstlabels, verzwegen grens of onbewezen autonomie wijzen de betrokken eis af. Eerlijke negatieve uitkomsten kunnen juist sterk systeemdenken tonen.

HET GEHEEL · 49.50

Alle Expert-leerlijnen komen in één besluit samen

50/51

Wiskunde levert vergelijkingen/regressie/foutmaten; fysica warmte/stroom/vermogen; software invarianten/bevoegdheid; biologie voorkomt een onterechte gesloten-kringclaim. F33/I40 bieden eerdere projectroutes. Expert voegt negatieve bewijzen, forecastbeschikbaarheid en levenscyclusgrens toe.

Deze digitale tweeling is een versieerbaar simulatiemodel met synthetische gegevens. Kalibratie aan een echte installatie vraagt meetplan, identificatie, hardwareinterfaces en validatie. ‘Habitat is compleet’ betekent hier dat de ontwerp-/bewijsroute volledig is uitgewerkt.

E17 Warmteoverdracht kwantitatief
moduleknopen

E21 Filters en signaalverwerking
sensorvertraging versus filter

E23 Digitale logica
stop/herstart

E27 Elektrochemie: batterijen, brandstofcellen en elektrolyse
rail en chemische grens

E30 Biotechnologie en genetische technieken
assaygrenzen

E31 Bioprocestechniek
stoichiometrie/licht

E32 Ecologische modellen
pools en systeemgrens

E33 Het lichaam als regelsysteem
meetclaims

E39 PID-regeling
tracking

E40 Sensorfusie en schatten
kwaliteit en gedeelde fout

E45 Systems engineering en het V-model

E46 Betrouwbaarheid en risico
FMEA

V-model

E47 Duurzaamheid en levenscyclusanalyse

inventaris

E48 Technisch communiceren en projectmanagement

rapport/verdediging

Habitat

Het brein is een gecontroleerd onderwijsontwerp met zichtbaar nog niet vrijgegeven functies.

NASLAG · 49.51

Bestanden en primaire methodebronnen

51/51

Bron	Betekenis
habitat_brein.py	SHA256 e0eb095e35f1586cb3177eeb412b68344f7057203f06251410049ea458f08108
config.json	Canonical SHA256 79162d53dead19c58f257c78d9ab3803e9bd56e4f5c28495b2e8799dbd170a09
CSV's / logs	invoerhashes in JSON; vaste seed en intervalcontract
NASA SE Handbook D/E/I	eis-/verificatie-/validatieplan; 30-09-2026
OASIS MQTT 5.0	transport/session/expiry; 30-09-2026
NumPy least squares	primaire API-methode; getest 2.4.0
E16/E17/E21/E27/E30–E33/E47	primaire inhoudsbronnen en modelgrenzen in die hoofdstukken

SAMENVATTING

In het kort

- Een eis krijgt eigenaar, testcase, bewijs, besluit en restonderzoek.
- Twee energierails en afzonderlijke water-/warmtevoorraden verhinderen verborgen stromen en dubbeltelling.
- De digitale tweeling sluit numeriek, maar comfort, hardware en modelgebied hebben eigen grenzen.
- Lokale eigenaars, kwaliteit, TTL/replay en stopdominantie blijven actief zonder centrale voorspeller.
- Forecast gebruikt alleen eerder beschikbare data; screening-LCA behoudt dezelfde grens en geplande functionele dienst.
- Een reproduceerbaar negatief resultaat is bruikbaar bewijs; autonomie, biologie en medische toepassing vragen passende validatie.

BEGRIPPEN

Wat je nu kent

acceptatieboek
Overzicht van eis, bewijs, besluit en nog vereist onderzoek.

lokale eigenaar
De taak die een actuator zelfstandig begrenst en voorstellen kan weigeren.

proefconfiguratie
Benoemde verzameling parameters die geen installatiekeuze bewijst.

tijdlek
Gebruik van informatie die op het bedoelde planmoment nog niet beschikbaar was.

tracking anti-windup
Terugvoer van werkelijk geleverde actie naar de integrale toestand.

bewijsgrens
Het toepassingsgebied waarbinnen een berekening of proef een claim ondersteunt.